

Ўзбекистон Республикаси

Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Умумий математика кафедраси

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

(Маъруза матни)

Химия, биология, тупроқшунослик ва
География мутахассисликлари учун

Тузувчи:

ф.м.ф.н. О. Ғуломов

ўқ. Э. Шарипов

Такризчи:

доц. Ж. Тошев

Қарши 2008 йил

1-Мавзу. Детерминант ва унинг хосалари. **детерминантларни ҳисоблаш**

1. Детерминантлар

Айтайлик, бирор a,b,c,d сонлар берилган бўлсин.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Ифода 2-тартибли детерминант, $ad-bc$ айирма эса унинг қиймати дейилади. Демак

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1)$$

Бунда a,b,c,d -детерминантининг элементлари. a,b , ва c,d сонлар (1) детерминантнинг мос равишда биринчи ва иккинчи йўллари (сатрлари) a,c ва b,d сонлар эса (1) детерминантнинг мос равишда биринчи ва иккинчи устунларни ташкил этади.

Одатда детерминант элементларини иккита индекс қўйилган ҳарифлар билан белгиланади. Бунда биринчи индекс йўлини, иккинчи индекс устунни ифодалайди. Масалан $a_{21} = c$ сон (1) детерминантнинг иккинчийўл биринчи устунида турган элемент бўлади. (1) детерминант қўйидагича ёзилади.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Худди шунга ўхшаш учунчи, тўртинчи ва ҳоказо. n - тартибли детерминант тушунчаси киритилади.

Ушбу
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ифода 3-тартибли детерминант,

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ детерминантнинг қиймати дейилади.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (2)$$

Бу ҳолда ҳам детерминант элементларининг биринчи индексида турган сон йўл рақамини, иккинчи индексида турган сон устун рақамини билдиради.

3

1-МАВЗУ. ДЕТЕРМИНАНТ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ. **ДЕТЕРМИНАНТЛАРНИ ҲИСОБЛАШ**

1. ДЕТЕРМИНАНТЛАР

Айтайлик, бирор a, b, c, d сонлар берилган бўлсин.

$$\text{Ушбу} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1)$$

Бундан a, b, c, d -детерминантининг элементлари. a, b , ва c, d сонлар (1) детерминантнинг мос равишда биринчи ва иккинчи йўллари (сатрлари) a, c , b, d сонлар эса (1) детерминантнинг мос равишда биринчи ва иккинчи устунларини ташкил этади.

Одатда детерминант элементларини иккита индекс қўйилган ҳарфлар билан белгиланади. Бунда биринчи индекс йўлни, иккинчи индекс устунни ифодалайди. Масалан $a_{21} = c$ сон (1) детерминантнинг иккинчи йўл биринчи устунида турган элемент бўлади. (1) детерминант қўйидагича ёзилади.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Худди шунга ўхшаш учунчи, тўртинчи ва ҳоказо. n -тартибли детерминант тушунчаси киритилади.

$$\text{Ушбу} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ифода 3-тартибли детерминант.

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

(2)

Бу ҳолда ҳам детерминант элементларининг биринчи индексида турган сон йўл рақамини, иккинчи индексида турган сон устун рақамини билдиради.

a_{11}, a_{22}, a_{33} сонлар (2) детерминантнинг бош диагонал элементлари, a_{31}, a_{22}, a_{13} сонлар эса шу детерминантнинг ёрдамчи диагонал

a_{11}, a_{22}, a_{33} сонлар (2) детерминантнинг бош диогонал элементлари, a_{31}, a_{22}, a_{13} сонлар эса шу детермиантнинг ёрдамчи диагонал элементлари дейилади 3-тартибли детермиантнинг шу йиғиндиси орқали ифодаланган бўлиб, улардан 3 таси мусбат ишорали 3 таси манфий ишоралидир.

Мусбат ишорали ҳадларни ёзишда қуйидаги схемага амал қилиш керак. Манфий ҳадлар учун ҳат қуйидаги схема ўринларидир.

$$\begin{array}{ccc}
 a_{13} & a_{23} & a_{21} \\
 a_{11} & a_{23} & a_{32} \\
 a_{31} & a_{22} & a_{13}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| & & \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \\
 a_{31} & a_{21} & a_{23} \quad a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{33} & a_{12} & a_{21}
 \end{array}$$

2.ДЕТЕРМИНАНТНИНГ ХОССАЛАРИ

Детерминантлар қатор хоссаларга эга. Қулайлик учун бу хоссаларни учунчи тартибли детерминантлар учун келтирамиз.

Бирор учунчи тартибли детерминант.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Берилган бўлсин.

1⁰. Детерминантнинг бирор йўлини унга мос устунни билан алмаштирилса детерминантнинг қиймати ўзгармайди.

Исбот: Масалан, (3) Детерминантнинг биринчи йўлини унинг биринчи устуни билан алмаштириш натижасида ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Детерминант ҳосил қилинган бўлсин. Учунчи тартибли детерминантнинг қурилишига кўра

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{23}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

бўлади. Бу тенгликни (2) тенглик билан солиштираш.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлишини топамиз. Худди шунга ўхшаш (3) детерминантнинг бошқа йўллари билан мос ускунлар билан алмаштириш натижасида детерминант қиймати ўзгармаслиги кўрилади.

2⁰. Детерминантнинг ихтиёрий икки йўли (устуни) ўзаро алмаштирмоқ, детерминантнинг қиймати ўзгармасдан унинг ишораси эса қарама-қаршисига ўзгаради.

5

Юқорида келтирилган хоссалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1-натижа. Детерминантнинг икки йўли (устуни) бир хил бўлса, детерминант қиймати нолга тенг бўлади.

3⁰. Детерминантнинг ихтиёрий йўли (устуни) да турган барча элементларни ўзгармас k сонга кўпайтирилса, детерминантнинг қиймати ҳам k га кўпайтириш натижасида, ушбу

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Детерминант ҳосил бўлади. Учунчи тартибли детерминантнинг киритилишига кўра:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + ka_{13}a_{21}a_{32} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{11}a_{23}a_{32} - ka_{12}a_{23}a_{31} =$$

$$= k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31})$$

Бу Тенгликни (2) тенглик билан солиштириб

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Бўлишини топамиз.

4⁰. Детерминантнинг бирор йўли (устуни) даги барча элементлар бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади. Бу хоссани исботи 3⁰ хоссадан бевосита келиб чиқади.

5⁰. Детерминантнинг ихтиёрий икки йўли (устуни) ўзаро пропорционал бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.

Исбот. Фараз қилайлик

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Детерминантнинг биринчи ва учунчи йўллари ўзаро пропорционал бўлсин. Унда

$$\frac{a_{11}}{a_{31}} = \frac{a_{12}}{a_{32}} = \frac{a_{13}}{a_{33}} = k \text{ бўлади. У ҳолда}$$

$a_{11} = ka_{31}, a_{12} = ka_{32}, a_{13} = ka_{33}$ бўлиб.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

6

Келтирилган натижага кўра кейинги детерминантнинг нолга тенг.

6⁰. Агар (3) детерминантнинг бирор йўли (устуни) даги элементлар икки қўшилувчилар йиғиндисидан иборат бўлса, масалан:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_1 & a_{22} + a_2 & a_{23} + a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Бўлса у ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_1 & a_{22} + a_2 & a_{23} + a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

бўлади. Бу хосса (2) муносабатдан, яъни 3-тартибли детерминантнинг киритилишидан келиб чиқади.

2-натижа. Агар (3) детерминантнинг бирор йўли (устун)ни ўзгармас k сонга кўпайтириб уни бошқа йўли (устун)га қўшилса, детерминантни қиймати ўзгармайди.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_1 & a_{22} + ka_2 & a_{23} + ka_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Детерминантнинг миноралари ва алгебраик тўлдирувчилари тушунчасини киритамиз.

Айтайлик (3) детерминант берилган бўлсин. Бу детерминантнинг $a_{ik} = (k=1, 2, 3)$ элементни турган йўлни ҳамда устунни учирамиз. Қолган элементлардан иккинчи тартибли детерминант ҳосил бўлади. Унга a_{ik} элементнинг минори деб аталади ва M_{ik} каби белгиланади. Масалан (3) детерминант a_{13} элементни турган устун ва йўлни ўчириш

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Натижасида иккинчи тартибли ушбу

$$M = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Детерминантнинг ҳоси бўлади. Бу берилган детерминантнинг a_{13} элементнинг миноридир.

(3) детерминантнинг 3 та элементни бор. Миноралар ҳам 9 та бўлади.

Ушбу $(-1)^{i+k} M_{ik}$ микдор (3) детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси дейилади ва A_{ik} каби белгиланади.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

(4)

Масалан:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} \text{ детерминантнинг } a_{33} = 3 \text{ элементининг алгебраик тўлдирувчи}$$

$$a_{11} = (-1)^{3-1} M_{11} = (-1)^0 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5 \text{ бўлади.}$$

7⁰. Детерминантнинг бирор йўли (устунни)да турган барча элементларнинг уларга мос алгебраик тўлдирувчилари билан кўпайтмасидан ташкил топган йиғинди шу детерминантнинг қийматига тенг.

Исбит. Бу хоссани биринчи йўл учун исботини келтирамиз. (3) детерминантнинг биринчи йўлда турган a_{11} , a_{12} , a_{13} элементларнинг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Унда

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

бўлади. (2) муносабатдан фойдаланиб

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (4)$$

Бўлишини топамиз. (4) формула детерминантнинг биринчи йўл элементлари бўйича ёйирмаси дейилади.

8⁰. Детерминантнинг бирор йўли (устунни) да турган барча элементлари билан бошқа (устун)да турган мос элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларидан ташкил топган йиғинди нолга тенг бўлади.

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$$

Исбот уй вазифасида қолдиради.

3. ДЕТЕРМИНАНТЛАРНИ ХИСОБЛАШ

Икки ва учинчи тартибли детерминантлар бевосита таърифга кўра ҳисобланади.

Масалан:

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 21 - 10 = 11$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \cdot 0 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 13 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -103$$

Юқори тартибли детерминантларни ҳисоблаш бир муноча мураккаб бўлади. Бу ҳолда детерминантларнинг асосан хоссаларидан фойдаланиб ҳисобланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

Детерминантни ҳисобланг. Бунинг учун 2-натижадан фойдаланамиз. Унинг биринчи йўлини 2 га кўпайтириб детерминант ушбу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

кўринишга келади.

7⁰-хоссадан фойдаланиб 1-устун элементлари бўйича алгебраик тўлдирувчилар орқали ёямиз.

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54 \text{ га тенг}$$

2. Ушубу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \text{ детерминантни ҳисобланг.}$$

2- натижага кўра 2 ва 4 устунларнинг ҳар бирига 5-устунни қўшамиз.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Энди 5-устунни 2 га кўпайтириб 3-устундан айириш натижасида кейинги детерминант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -7 & 7 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \text{ кўринишга келади.}$$

7⁰-хонssidан фойдаланиб топамиз.

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+5} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \\ -6 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

3⁰-хоссага кўра

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & -7 & 7 \\ -6 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1-йўлни қолган барча йўллардан айирамиз. У ҳолда

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

7⁰ хоссага асосан

$$\Delta = 3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-153) = 465$$

бўлади.

2-МАВЗУ. МАТРИЦА ТУШУНЧАСИ. МАТРИЦАЛАР УСТИДА АМАЛЛАР ВА УЛЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

1. МАТРИЦА ТУШУНЧАСИ

Бирор $m \cdot n$ та ($m \in N, n \in N$)

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$$

(1)

сонлар берилган бўлсин. Бу сонлардан ташкел топган ушбу

$$a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n}$$

$$a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n}$$

.....

$$a_{m1} \ a_{m2} \dots a_{mn}$$

Жадвал $[m \times n]$ - тартибли матрица дейилади ва

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \quad \text{ёки} \quad \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] \quad (2)$$

Каби белгиланади. Бунга (1) сонлар матрицанинг элементлари дейлади. Матрицанинг элементлари икки индекс билан ёзилиб, биринчи индекс йўлни 2-индекс устуни рақамини билдиради.

Баъзан (2) матрица бирор ҳарф билан ҳам ифодаланади.

$$\|a_{ik}\|_{k=l,n}^{l=1,m} \text{ каби белгиланади.}$$

$$A = \|a_{ik}\|_{k=l,n}^{i=1,m}$$

(2) матрица m та йўл n та устундан иборат

Агар (2) матрицанинг барча элементлари нол бўлса

$$0 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\| \text{ у нол матрица дейлади.}$$

Хусусан матрицанинг йўллар сон устунлар сонига тенг бўлса, бундай матрица n - тартибли квадрат матрица дейлади. (2) матрицанинг $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ бош диогонал элементлари дейилади.

Агар (2) матрицанинг бош диогоналда турган элементларнинг бошқа ҳаммаси нол бўлса,

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \quad (3)$$

Уни диогонал матрица дейилади. Хусусан, (3) матрицада $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ бўлса

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ ҳосил бўлиб, уни бирлик матрица дейилади.}$$

Квадратик матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

нинг элементларидан ташкил топган ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

детерминантнинг A матрицанинг детерминанти дейилади ва $\det A$ ёки $|A|$ каби белгиланади.

Агар A матрицанинг детерминанти нол бўлса $|A|=0$ бўлса, у ҳолда A хос матрица дейилади, акс ҳолда, яъни A матрицанинг детерминанти $|A| \neq 0$ бўлса, у ҳолда A хосмас матрица дейилади.

Квадрат матрица A нинг йўлларини мос устунлар билан алмаштиришдан ҳосил бўлган ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица транспонирланган матрица дейилади ва A^1 каби белгиланади.

Квадрат A матрица билан унинг транспонирланган матрицалари детерминантлари бир-бирига тенг бўлади. $|A| = |A^1|$ иккита

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицалар берилган бўлсин. Агар A матрицанинг ҳар бир элементи B матрицанинг мос элементига тенг, яъни барча 1 ва k ($1=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, n$) лар учун $a_{ik} = b_{ik}$ бўлса, у ҳолда A ва B ўзаро тенг матрицалар дейилади ва $A=B$ каби ёзилади.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадрат матрица транспонирланган A^1 матрица тенг бўлади, у ҳолда A димепприк Матрица дейилади.

2. МАТРИЦАЛАР УСТИДА АМАЛЛАР ВА УЛЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Икки $[m \times n]$ –тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{n2} \dots b_{mn} \end{pmatrix}$$

(4)

Матрицалар берилган бўлсин. Бу матрицаларнинг мос элементлари йиғиндиларидан ташкил топган ушбу $[m \times n]$ - тартибли

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица A ва B матрицалар йиғиндиси деб аталади ва $A+B$ каби белгиланади.

A ва B матрицалар мос элементлари айирмаларидан ташкил топган ушбу $[m \times n]$ – тартибли

$$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \dots a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} \dots a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица A матрицадан B матрицани айирмаси дейилади ва $A-B$ каби белгиланади.

$$1^0, A+0=0+A=A$$

$$2^0. A+B=B+A$$

бўлишини кўриш қийин эмас, бунда O -нол матрица.

Бирор λ сон ва A матрицани қарайлик. Бу A матрицанинг ҳар бир элементини λ сонга кўпайтирганда ҳосил бўлган матрицага λ сон билан A матрица кўпайтмаси дейилади ва λA каби белгиланди.

Демак $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \dots \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \dots \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{n2} \dots \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$

Равшанки, A ва B матрицалар ҳамда ихтиёрий λ ва μ сонлар учун:

$$3^0. \quad \lambda (\mu A) = (\lambda \cdot \mu) A$$

$$4^0. \quad \lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$5^0. \quad (\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$$

$$1\text{- Мисол. } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

бўлса, $A+B$, $A-B$, $2A-3B$ матрицаларни топинг. Матрицаларни йиғиндиси, айирмаси ва сонга кўпайтириш қондасига кўра, изланаётган матрицаларни топамиз.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 4+2 & 1+1 \\ -1+1 & 0+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 4-2 & 1-1 \\ -1-1 & 0-1 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A-3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 & 8-6 & 2-3 \\ -2-3 & 0-3 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Энди 2 та матрицани кўпайтмаси тушунчасини киритамиз. Бу амални киритишда иштирок этадиган матрицаларнинг биринчисининг устунлари сони иккинчисининг йўллари сонига тенг бўлиши талаб қилинади.

Фараз қилайлик $[m \times n]$ –тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица ҳамда $[m \times n]$ – тартибли

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица терилган бўлса. A матрицанинг f -йўл элементлари $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ни ($f=1, 2, \dots, m$) мос равишда B матрицанинг j -устун ($j=1, 2, \dots, k$) элементлари $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$ кўпайтириб ушбу

$$a_{ij} = a_{ij}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (5)$$

($f=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, k$) йиғиндиларни ҳосил қиламиз. Бу сонлардан ташкил топган $[m \times k]$ - тартибли ушбу

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \dots d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} \dots d_{2k} \\ \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} \dots d_{mk} \end{pmatrix}$$

Матрица берилган А ва В матрицаларнинг кўпайтмаси дейилади ва АВ каби белгиланади.

Демак АВ матрицанинг ҳар бир элемент (5) кўринишдаги йиғиндилардан иборат

$$\text{2-Мисол. } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица кўпайтмаси $[3 \times 2]$ - тартибли ушбу

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix} \text{ матрица бўлиб, бунда}$$

$$d_{11} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 1$$

$$d_{12} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = -1$$

$$d_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$d_{22} = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$d_{31} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$$

$$d_{32} = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0 \text{ бўлади демак,}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{3-Мисол: } A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

Бўлса АВ ва ВА матрицаларни топим.

Берилган матрицалар учун

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB=BA$$

$$\text{4-Мисол: Агар } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Бўлса АВ ва ВА матрицаларни топим.

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\text{Бу ҳолда } AB \neq BA$$

Мисоллардан кўринадик, икки матрица кўпайтмаси у ўрни алмаштириш қоидаси, умуман айтганда, ўринли бўлмас экан.

Бирор $[n \times n]$ - тартибли А матрица билан $[n \times n]$ - тартибли Е бирлик матрица учун ҳар доим $AE = EA = A$ тенглик ўринли.

А, В, С матрицалар берилган бўлсин. У Ҳолда

$$6^0. (A+B) \cdot C = AC + BC$$

$$7^0. (A \cdot B) \cdot C = A(BC) \text{ бўлади.}$$

Иккита матрицанинг кўпайтмаси учун ўрин алмаштириш қонуни, умуман айтганда, ўринли эмаслигини кўрдик. Аммо уларнинг детерминантлари учун қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади.

$[n \times n]$ -тартибли А ва В матрицалар кўпайтмасининг детерминанти шу матрицалар детерминантлари кўпайтмаси тенг

3- МАВЗУ. МАТРИЦАНИНГ РАНГИ. ТЕСКАРИ МАТРИЦА

1. МАТРИЦАНИНГ РАНГИ

БИРОР $[m \times n]$ -тартибли матрица берилган бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

А матрицанинг ихтиёрий k та йўлини ва ихтиёрий k та устунини олиб ($k \leq \min(m, n)$) $[k \times k]$ - тартибли квадрат матрица тузамиз. Бу квадрат матрицанинг детерминанти А матрицани k-тартибли минори дейилади.

1- Мисол. Қуйидаги $[4 \times 5]$ - тартибли

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ матрицани қарайлик.}$$

Ушбу

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Детерминантлар қаралоётган матрицанинг мос иккичи, учунчи, тўртинчи тартибли минорларидир.

Берилган матрицанинг бир нечтадан k - тартибли ($k = 2, 3 \dots \min(m, n)$) минорлари бўлиб, уларнинг баъзилари нолга тенг, баъзилари нолдан фарқли бўлар экан.

А матрицанинг ёрдамида ҳосил қилиш мумкин бўлган барча минорлар орасида нолдан фарқли бўлган юқори тартибли минорни топиш муҳумдир.

Агар A матрицанинг барча k - тартибли ($k \leq \min(m, n)$) минорлари нолга тенг бўлса ундан юқори тартибли бўлган барча минорлари ҳам нолга тенг бўлади.

А матрицанинг нолдан фарқли минорларининг энг юқори тартибли унинг ранги дейилади ва ранг A каби белгиланади.

2-Мисол: Ушбу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ матрицанинг рангини топининг.}$$

Берилган матрицанинг иккинчи тартибли минорлари бир нечта бўлиб, улардан бири $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$ бўлади. Шу матрицанинг учунчи тартибли минори эса

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ га тенг.}$$

Шундай қилиб A матрицанинг нолдан фарқли минорларнинг энг катта тартибли 2 га тенг экан. Демак, берилган матрицанинг ранги 2 ранг $A=2$.

1-эслатма. Агар қаралаёган матрица нол матрица бўлса, унинг ранги нол деб олинади.

2-эслатма. Агар $[2 \times 2]$ -тартибли нол бўлмаган $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлса, унинг ранги 1 деб олинади. Матрицаларнинг ранги топиш кўп ҳолда мураккаб бўлади, чунки унда бир қанча турли тартибдаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади.

Қуйида матрица рангини топиш усулларида бирини келтирамыз.

Бирор

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{vmatrix}$$

матрица берилган бўлсин. Бу матрица:

- 1) икки йўлини (устунини) ўзаро алмаштириш,
 - 2) бирор йўлини (устунини) ўзгармас сонга кўпайтириш
 - 3) бирор йўлга (усутуннига) бошқа йўл (устун)ни ўзгармас сонга кўпайтириш
- А матрицанинг элементар алмаштиришлари дейилади.

Элементар алмаштиришлар натижаси матрицани ранги ўзгармайди. Диогонал кўринишли матрица тушунчасини киритамиз.

Агар $[m \times n]$ -тартибли А матрицанинг $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, $(0 \leq s \leq m \times n(m, n))$ элементларининг ҳар бир нолдан фарқи бўлиб, қолган барча элементлари нолга тенг бўлса, у ҳолда А диогонал кўринишли матрица дейилади.

Бирор $[m \times n]$ -тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица берилган бўлиб, унинг рангини топиш талаб қилинган бўлсин.

Берилган матрицанинг рангини уни юқорида айтилган элементар алмаштиришлар ёрдамида диогонал кўринишга келтириб топамиз.

А матрица ҳеч бўлмаганда битта элементи нолдан фарқли бўлсин. Бу элементни матрицанинг йўллари ҳамда устунларини ўзаро алмаштириш ёрдамида биринчи йўл ҳамда биринчи усутуннига келтирамиз.

Сунг кейинги матрицанинг биринчи устунини уша сонга бўлиб, ушбу

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^1 \dots a_{1n}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \dots a_{2n}^1 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}^1 & a_{m2}^1 \dots a_{mn}^1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Матрица ҳосил қиламиз. (6) матрицанинг биринчи усутунини $-a_{12}^1$ га кўпайтириб, унни иккинчи устунга қўшсак, сўнг $-a_{13}^1$ га кўпайтириб, учунчи усутунга қўшсак, ҳокоза. Биринчи устуни a_{1m}^1 га кўпайтириб n-устунга қўшсак, натижада (6) матрицанинг биринчи йўлидаги $a_{11}^1 = 1$ қолган элементлар нолдан иборат бўлиб қолади.

Худди шунга ўхшаш усул ёрдамида (6) матрицанинг биринчи устунидаги элементларни нолга айлантиради. Бундай элементар алмаштиришлар натижасида

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \dots a_{2m} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

18

матрицага келамиз. Бунда ранг А-ранг бўлади A_1 матрица юқоридаги элементар алмаштиришлари бир неча бор қўллаш билан диаганал кўринишли матрицага келтириш.

2. ТЕСКАРИ МАТРИЦА

БИРОП $n \times n$ -тартибли

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадрат матрица берилга бўлсин.

Агар A билан $n \times n$ -тартибли B матрица кўпайтмаси бирлик матрицага тенг бўлса

$$AB = BA = E$$

У ҳолда B матрица A га тескари матрица дейилади ва A^{-1} каби белгиланади.

Масалан, ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари бўлган матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Бўлади чунки

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

энди берилган матрицага тескари матрицанинг мавжуд бўлиши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Теорема: ҳар қандай хосмас матрица A нинг тескари матрицаси мавжуд ва ягона бўлади.

Исбот. Шартга кўра A хосма матрица. Унинг детеминанти нолдан фарқи бўлади:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Бу детерминант элементларининг алгебраик тўлдирувчилари $A_{ik} (i=1,2,\dots,n, k=1,2,\dots,n)$ ни топиб, улардан

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{vmatrix}$$

матрицани тузамиз. Кейинги матрицанинг ҳар бир элементини A матрицанинг детеминанти $|A|$ га бўлиб, ушбу

$$B = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \dots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \dots \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} \dots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Матрицани ҳосил қиламиз. Энди A матрицани B матрицага кўпайтириб, топамиз:

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} \dots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} \dots \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} \dots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} (a_{11}A_{11} + \dots + a_{1n}A_{1n}) & \frac{A_{21}}{|A|} (a_{11}A_{21} + \dots + a_{1n}A_{2n}) \dots \frac{A_{n1}}{|A|} (a_{11}A_{n1} + \dots + a_{1n}A_{nn}) \\ \frac{A_{12}}{|A|} (a_{21}A_{11} + \dots + a_{2n}A_{1n}) & \frac{A_{22}}{|A|} (a_{21}A_{21} + \dots + a_{2n}A_{2n}) \dots \frac{A_{n2}}{|A|} (a_{21}A_{n1} + \dots + a_{2n}A_{nn}) \\ \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} (a_{n1}A_{11} + \dots + a_{nn}A_{1n}) & \frac{A_{2n}}{|A|} (a_{n1}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{2n}) \dots \frac{A_{nn}}{|A|} (a_{n1}A_{n1} + \dots + a_{nn}A_{nn}) \end{vmatrix}$$

Агар $a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{12} + \dots + a_{in}A_{1n} = |A|$ ($i = 1, 2, \dots, n$), хамда

$$a_{k1}A_{1j} + a_{k2}A_{2j} + \dots + a_{kn}A_{nj} = 0 \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \\ j \neq k \end{cases}$$

Бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{|A|} \cdot |A| & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|A|} \cdot |A| & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{|A|} \cdot |A| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix}$$

Келиб чиқиб. Худди шунингдек

$$B \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 1 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{vmatrix}$$

Бўлишини ҳам кўриш қийин эмас. Демак,

$$BA = AB = E$$

Бу эса (7) матрицанинг берилган A га тескари матрица эканини билдиради A^{-1} матрицани кўриниши (7) дан иборат бўлади.

Шундай қилиб берилган A матрицанинг тескари матрицаси мавжудлиги кўрсатилади. Ҳақиқат тескари матрицанинг ягоналигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, A^{-1} дан фарқли C матрица ҳам A нинг тескари матрицаси бўлсин.

Унда $AC = CA = E$ бўлади. Ушбу

$$CA \cdot A^{-1} = C(A \cdot A^{-1}) = CE = C$$

$$CA \cdot A^{-1} = (CA) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

Тенгламалардан $C = A^{-1}$ экани келиб чиқади. Бу эса A матрицанинг тескари матрицаси A^{-1} ягона эканлигини билдиради.

Теорема исбот бўлиши.

Бу теорема тескари матрицани топиш усулини ҳам кўришди.

Мисол. Ўшбу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

матрицани тескарисини топинг.

Матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

Демак, берилган матрица хосмас матрица унга тескари A^{-1} матрица мавжуд ва ягона $|A|$ детерминантнинг алгебраик тўлдирувчиларини ҳисоблаймиз.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

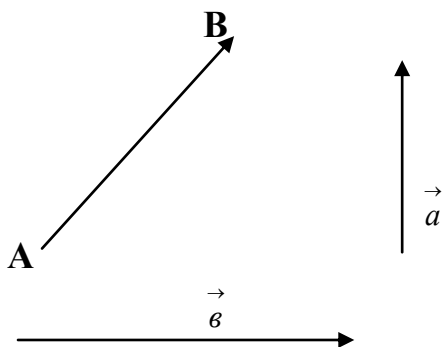
Унда

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{12}{10} & \frac{2}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{7}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{vmatrix}$$

4- МАВЗУ. ФАЗОДА ВЕКТОРЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

1. ВЕКТОРЛАР

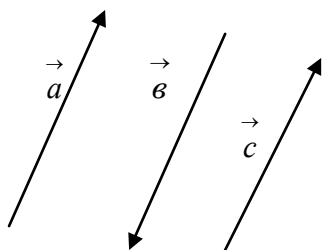
Одатда йўналтирилган кесма вектор дейилади ва $\overline{AB}$ ёки $\vec{a}$, $\vec{b}$ каби белгиланади. 1-чизмада йўналтирилган $\overline{AB}$ кесманинг А нуқтаси унинг бошланғич нуқтаси, В эса охирги нуқтаси дейилади. $\overline{AB}$ кесманинг узунлиги векторнинг узунлиги дейилади. $|\vec{a}|$ ва $\overline{AB}$ каби белгиланади.



1-чизма

Бошланғич ва охирги нуқталари устма-уст тушган вектор ноль вектор дейилади ва $\vec{0}$ ёки 0 каби белгиланади.

Битта тўғри чизикда ёки параллел тўғри чизикларда ётган $\vec{a}$, ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар векторлар дейилади. Коллинеар векторлар бир хил йўналган бўлиши шарт эмас.



2-чизма

Бир хил йўналишга эга бўлиб, узунликлари тенг бўлган иккита коллинлар $\vec{a}$, ва $\vec{b}$ векторлар тенг векторлар дейилади ва $\vec{a} = \vec{b}$ каби белгиланади 2-чизмада $\vec{a} = \vec{c}$ $\vec{a} \neq \vec{b}$ $\vec{b} \neq \vec{c}$

Бу мавзуда фазода векторлар ва уларнинг хоссалари ўрганилади. Аслида текисликда ҳам вектор тушунчаси кититилиб, уларнинг ўрганиш мумкин. Қуйида келтирилган барча тасдиқлар текисликда ҳам ўринлидир.

2. ВЕКТОРЛАР УСТИДА АРИФМЕТИК АМАЛЛАР

Агар $\vec{a}$ векторларнинг бошланғич нуқтаси нуқтаси координаталар боши билан устма-уст тушган бўлса, унинг ахирги нуқтаси фазода бирор М

нуқтани аниқлайди ва аксинча фазодаги ҳар қандай M нуқтага $\vec{OM}$ вектор мос келади.

23

Демак, мундай векторлар тўплами билан уч ўлчовли фазодаги $M(x, y, z)$ нуқталар ўртасида ўзааро бир қийматли мослик ўринли бўлиб, бу уч ўлчовли R^3 фазога векторлар фазоси ҳам дейилади $\vec{a}$ вектор ўзининг координаталари (x, y, z) билан аниқланади ва $\vec{a} = (x, y, z)$ каби белгиланади. Векторлар фазосида $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{b} = (x^1, y^1, z^1)$ векторлар ва скаляр берилган бўлсин. Қуйидаги вектор $(x + x^1, y + y^1, z + z^1)$ $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси дейилади ва $\vec{a} + \vec{b}$ каби белгиланади.

$$\text{Демак } \vec{a} + \vec{b} = (x + x^1, y + y^1, z + z^1)$$

ЧИЗМА ЧИЗИЛИШИ КЕРАК

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси деб, $\vec{a} - \vec{b} = (x + x^1, y + y^1, z + z^1)$ векторга айтилади ва $\vec{a} - \vec{b}$ каби белгиланади.

$$\text{Демак, } \vec{a} - \vec{b} = (x + x^1, y + y^1, z + z^1)$$

$\vec{a}$ векторнинг a сонга кўпайтмаси ушбу (ax, ay, az) вектор билан аниқланади, яъни

$$a\vec{a} = (ax, ay, az)$$

Векторлар устида киритилган амалларга нисбатан қуйидаги хоссалар ўринли:

$$1^0. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (коммутативлик хоссаси)}$$

$$2^0. \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{c} + \vec{b}) + \vec{a} \text{ (ассоциативлик хоссаси)}$$

$$3^0. \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

4⁰. Ҳар қандай $\vec{a}$, вектор учун шундай $\vec{e}$ вектор мавжудки $\vec{a} + \vec{e} = 0$ бўлади. $\vec{a}$ вектор $\vec{e}$ га тескари вектор дейилади ва $-\vec{a}$ каби белгиланади.

5⁰. $a(\vec{a} + \vec{e}) = a\vec{a} + a\vec{e}$, $(a + \beta)\vec{a} = a\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивлик)

6⁰. $a(\beta \cdot \vec{a}) = (a\beta)\vec{a}$

Энди векторлар йиғиндиси, айирмаси ва сонга кўпайтмасининг геометрик маъносини қарайлик. Бизга $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{e} = (x^1, y^1, z^1)$ векторлар берилган бўлсин $\vec{a}$ векторнинг охириги нуқтасига $\vec{e}$ векторнинг бошланғич нуқтасини параллел кўчириб қўййлик. Унда $\vec{e}$ векторнинг охирига нуқтаси бирор С нуқтани аниқлайди (3-чизма). Хосил бўлади $\overline{OC}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{e}$ векторларнинг йиғиндисини ифодалайди, яъни $\overline{OC} = (x + x^1, y + y^1, z + z^1)$ $\vec{a} + \vec{e}$ векторни геометрик тасвирлаш учун $\vec{a} - \vec{e} = \vec{a} + (-\vec{e})$ тенгликдан фойдаланамиз.

Чизма жойи 4-чизма ва 5-чизма

$a \cdot \bar{a}$ векторни тасвирлаш учун $a > 0$ ва $a < 0$ бўлган ҳолларни алоҳида қараймиз.

$a > 0$ бўлганда $a \cdot \bar{a}$ векторнинг йўналиши $\bar{a}$ вектор йўналиши билан бир хил бўлиб, унинг узунлиги $\left| a \vec{a} \right| = a \left| \vec{a} \right|$ га тенгдир.

Агар $a > 1$ бўлса $\bar{a}$ вектор a марта чузилади, $a < 1$ бўлса, a марта қисқаради. Агар $a < 0$ бўлса, $a \vec{a}$ нинг узунлиги $\left| a \vec{a} \right| = |a| \cdot \left| \vec{a} \right|$ бўлиб, унинг йўналиши $\bar{a}$ га тескари бўлади. (4-чизма).

3. ВЕКТОРНИНГ ПРОЕКЦИЯСИ. ЙЎНАЛТИРУВЧИ КОСИНУСЛАР

Фазода $\bar{a} = \overline{AB}$ вектор ва йўналтирилган 1 тўғри чизик берилган бўлсин. (5-чизма).

$\bar{a}$ векторнинг бошланғич нуқтаси ва охири нуқтасидан 1 га перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикулярнинг 1 тўғри чизикдан ажратган кесмасини $A_1 B_1$ орқали белгилаймиз, $A_1 B_1$ кесманинг узунлиги $\bar{a}$ векторнинг 1 чизикдаги проекцияси дейилади ва

$$np, \bar{a} = np, \overline{AB}$$

Каби белгиланади. Агар $\overline{A_1 B_1}$ векторнинг йўналиши 1 нинг йўналиши билан бир хил бўлса, $np, \overline{AB}$ $A_1 B_1$ нинг узунлиги тенг: $np, \overline{AB} = |A_1 B_1|$ акс ҳолда эса $np, \overline{AB} = -|A_1 B_1|$ бўлади.

Масалан, 5-чизмадан $np, \bar{a}$ эса манфий ишорали бўлади. $\bar{a}$ векторининг 1 ўқдаги проекцияси Скаляр миқдор бўлиб, бу миқдор a нинг R^3 фазодаги ҳолати боғлиқ эмас. Агар $\bar{a}$ векторнинг бошланғич нуқтаси 1 тўғри чизик устига кучирилса, $\bar{a}$ вектор билан 1 тўғри чизикқа нисбатан оғиш бурчаги дейилади.

$\bar{a}$ векторнинг оғиш бурчаги ва 1 ўққа проекцияси орасидаги қуйидаги муносабатнинг ўринлигини кўриш қийин эмас.

$$np, \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

Агар α, β, γ лар мос равишда $\bar{a} = (x, y, z)$ векторнинг ox, oy, oz ўқларнинг оғиш бурчаклари бўлса, γ ҳолда

$$x = |\bar{a}| \cos \alpha, \quad y = |\bar{a}| \cos \beta, \quad z = |\bar{a}| \cos \gamma \quad \text{тенгликлар} \quad \text{уринлидир.}$$

Одата $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ лар $\bar{a}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади.

$1 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ векторнинг узунлиги бирга тенг бўлиб, унинг йўналиши $\bar{a}$ нинг йўналиши билан устма-уст тушади.

5- МАВЗУ. ИККИ ВЕКТОРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ. ИККИ ВЕКТОР ОРАСИДАГИ БУРЧАК

1. ВЕКТОРЛАРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ

Бизга $\vec{a} = (x, y, z)$ ва $\vec{b} = (x^1, y^1, z^1)$ векторлар берилган бўлсин.

Ушбу $xx^1 + yy^1 + zz^1$ сон $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси дейилади ва $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ёки $(\vec{a}, \vec{b})$ каби белгиланади. Демак

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xx^1 + yy^1 + zz^1$$

Мисол. Ушбу $\vec{a} = (0, 1, 2)$ $\vec{b} = (3, 0, 5)$ векторланинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Юқоридаги $|a| \cos \varphi$ формулага биноан $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10$ бўлади. Демак $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$

Скаляр кўпайтманинг хоссалари.

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$2^0. \vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b}$$

$$3^0. \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$4^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = |a| |\vec{b}| \cos \varphi$$

1⁰-3⁰ хоссаларнинг исботи бевосита таърифдан келиб чиқади. 4⁰- хоссани исботлаш учун $\vec{b}$ векторни учта вектор йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз: $\vec{b} = (x^1, y^1, z^1) = (x^1, 0, 0) + (0, y^1, 0) + (0, 0, z^1) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$

Унда

$$np_a \bar{e} = np_a \bar{e}_1 + np_a \bar{e}_2 + np_a \bar{e}_3$$

$$(|a| np_a \bar{e} = |a| np_a \bar{e}_1 + |a| np_a \bar{e}_2 + |a| np_a \bar{e}_3)$$

Бўлиб

$$np_a \bar{e}_1 = x^1 \cos \alpha$$

$$np_a \bar{e}_2 = y^1 \cos \beta$$

$$np_a \bar{e}_3 = z^1 \cos \gamma$$

Тенгликларга ега бўламиз. Бу ерда $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, лар $\bar{a}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслардир. Энди $x = |a| \cos$, $y = |a| y \cos \beta$, $z^1 = z \cos \gamma$

тенгликларни эътиборга олиб топамиз.

$$|a| np_a \bar{e} = x x^1 + y y^1 + z z^1 = \bar{a} \bar{v} \quad 5^0 \bar{a} \bar{v} = |\bar{a}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos \wedge v \quad \text{бу тенгламани}$$

исботлаш учун 4⁰-хоссадан фойдаланимиз: $\bar{a} \bar{e} = |a| np_a \bar{v}$ (1) формулага кўра

$np_a \bar{e} = |\bar{e}| \cos \alpha$ бўлиб, бундай эса $\bar{a} \bar{e} = |\bar{a}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos \alpha \wedge v$ (1) эканлиги келиб чиқади.

$$6^0 \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$$

7⁰. $\bar{a}$ вектор $\bar{e}$ векторга перпендикуляр бўлиши учун $\bar{a} \bar{e} = 0$ тенгликни бажарилиши зарур ва етарлидир.

2. ИККИ ВЕКТОР ОРАСИДАГИ БУРЧАК

Икки векторнинг скаляр кўпайтмасини иккинчи бир формуласи $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \alpha$ дан иборат. Унда у берилган векторлар орасидаги бурчак. У ҳолда

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{e}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{e}|}$$

бўлади. Агар бу векторлар координаталари билан берилган бўлса, яъни (x, y, z) , $\bar{e}(x^1, y^1, z^1)$ бўлса у ҳолда

$$\bar{a} \cdot \bar{e} = x x^1 + y y^1 + z z^1$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{x^{12} + y^{12} + z^{12}}$$

Формулалардан фойдаланиб, векторлар орасидаги бурчак косинусини топиш учун ушбу формулаларни ҳосил қиламиз.

$$\cos \phi = \frac{x \cdot x^1 + y \cdot y^1 + z \cdot z^1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x^{12} + y^{12} + z^{12}}}$$

Мисол: $\vec{a} = (1, 0, 1)$ $\vec{b} = (1, 2, 2)$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

$$\cos = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} : y = 45^\circ$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда улар орасидаги бурчак 90° га тенг ва $\cos 90^\circ = 0$ демак, бундай векторлар учун скаляр кўпайтма нолга тенг: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ($\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$). Аксинча, агар икки векторнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, у ҳолда $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$, бинобарин, $\cos \phi = 0$, яъни векторлар перпендикуляр.

Шундай қилиб, иккита нолмас $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг, яъни

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ ёки } x \cdot x^1 + y \cdot y^1 + z \cdot z^1 = 0$$

бўлганда ва фақат шундагина улар перпендикулярдир.

Мисол: Параллеллограммнинг учлари берилган. А (1,2,2), В (1,4,0), С (-4,1,1), Д (-5,-5,3). Унинг АС ва ВД диагоналлари перпендикулярлигини исботланг.

$\vec{AC}$ ва $\vec{BD}$ векторларни қараймиз.

$$\vec{AC} = \{-4, -1, 1 + 2, 1 - 2\} = \{-5, 3, -1\}$$

$$\vec{BD} = \{-5 - 1, -5 - 4, 3 - 0\} = \{-6, -9, 3\}$$

Бу векторларнинг скаляр кўпайтмасининг формуласидан

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-9) + (-1) \cdot 3 = 0$$

Демак, $\vec{AC}$ ва $\vec{BD}$ экан.

6-МАВЗУ: ВЕКТОРЛАРНИНГ ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТМАСИ. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА, КЕСМАНИ БЕРИЛГАН НИСБАТДА БЎЛИШ

1. ВЕКТОРЛАРНИНГ ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТМАСИ

Бизга $\vec{a}(x, y, z)$ ва $\vec{b}(x^1, y^1, z^1)$ векторларнинг берилган бўлсин. Ушбу

$$\left(\left| \frac{yz}{y^1 z^1} \right|, \left| \frac{zx}{z^1 x^1} \right|, \left| \frac{xy}{x^1 y^1} \right| \right)$$

вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ нинг вектор кўпайтмаси дейилади ва $\{a, b\}$ каби белгиланади.

$$\text{Демак } [\vec{a} \vec{b}] = \left(\left| \begin{array}{cc} y & z \\ y^1 & z^1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} z & x \\ z^1 & x^1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} x & y \\ x^1 & y^1 \end{array} \right| \right) = (yz^1 - zy^1, zx^1 - zx^1, xy^1 - yx^1)$$

Вектор кўпайтмаси хоссалари

$$1^0. [\vec{a} \vec{b}] = [\vec{b} \vec{a}]$$

$$2^0. [\lambda \vec{a} \vec{b}] = \lambda [\vec{a} \vec{b}] \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3^0. [\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a} \vec{b}] + [\vec{a} \vec{c}]$$

$$[(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}] = [\vec{a} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{c}]$$

Бу хоссаларнинг исбот вектор кўпайтмасининг таътифидан бевосита келиб чиқади.

$[\vec{a} \vec{b}] = 0$ бўлиши учун $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ нинг коллинлар бўлиши зарур ва етарли.
 $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар берилган бўлсин $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор кўпайтмаси $[\vec{a} \vec{b}]$ нинг қиймати 6-чизмада тасвирланган параллелограмми юзи $S = [\vec{a}] \cdot [\vec{b}] \cdot \sin \varphi$ га тенг.

ЧИМА ЖОЙИ 6-ЧИЗМА 7-ЧИЗМАРАР

Аралаш кўпайтма параллелипипед ҳажмига тенг

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \alpha = S \cdot |\vec{c}| \cos \alpha = S \cdot h$$

$$V = \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$a) \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

б) Аралаш кўпайтма кўпайтувчиларнинг ўринларини ўзаро алмаштиришдан ўзгармайди.

$$\overline{\overline{a} \overline{b} \overline{c}} = \overline{\overline{b} \overline{c} \overline{a}} = \overline{\overline{c} \overline{a} \overline{b}}$$

в) Икки кўшиш кўпайттувчининг ўрни алмаштирилганда аралаш кўпайтма ишорасини тескарисига алмаштиради. $\overline{\overline{a} \overline{b} \overline{c}} = \overline{\overline{b} \overline{c} \overline{a}}$

Аралаш кўпайтма детерминат бўйича ҳисоблаш

$$\overline{a}(a_x, a_y, a_z), \quad \overline{b}(b_x, b_y, b_z), \quad \overline{c}(c_x, c_y, c_z)$$

$$[\overline{a} \overline{b}] \overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$(a \times b) \cdot c = 0$ бўлса, векторлар коминлар дейилади.

$$[\overline{a} \times \overline{b}] \cdot \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) \cdot \vec{c}$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \right) \cdot c_1 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_3$$

Бизга учта $\overline{a}, \overline{b}$ ва $\overline{c}$ векторлар берилган бўлсин. Ушбу $[\overline{a} \overline{b}] \overline{c}$ ифода $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, векторларнинг аралаш кўпайтмаси дейилади ва $[\overline{a}, \overline{b}] \overline{c}$ каби белгиланади.

Мисол: Ушбу $\overline{a} = (1, 3, 0)$ $\overline{b} = (2, 0, 1)$ $\overline{c} = (0, 1, 2)$ векторларнинг аралаш кўпайтмасини топинг.

$$\text{Аввало } [\overline{a} \overline{b}] \text{ ни топамиз. } [\overline{a} \overline{b}] = (3 \cdot 1 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2) = (3, -1, -6)$$

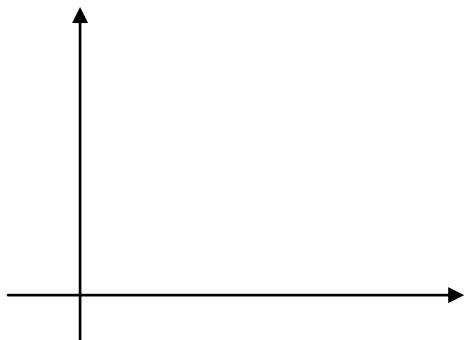
$$\overline{a} \overline{b} \overline{c} = (3, -1, -6)(0, 1, 2) = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 6 \cdot 2 = -13$$

2. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

Текисликда декарт координаталари системаси берилган бўлсин. Бу текисликда А ва В нуқталарини олайлик. Уларнинг координаталари мос равишда (x_1, y_1) , (x_2, y_2) бўлсин:

$$A = A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2)$$

Масала: А ва В нуқталарнинг координаталарига кўра шу нуқталар орасидаги масофани, яъни АВ кесманинг узунлигини топининг



8-

чизма

А ва В нуқталаридан Ох ўқиға перпендикуляр туширамиз. уларнинг асосларни A_1 ва B_1 билан белгилаймиз. Равшанки

$$OA_1 = x_1 \quad OB_1 = x_2 \quad AA_1 = y_1 \quad BB_1 = y_2 \quad (1)$$

А нуқтадан Ох ўқиға параллел чизма ўтказамиз.

Унинг BB_1 билан кесишган нуқтасини С билан белгилаймиз. Унда

$$AC = A_1B_1CB_1 = AA_1 \quad (2)$$

Бўлади. Агар $A_1B_1 = OB_1 - OA_1$, $BC = BB_1 - CB_1$ эканини эътиборга олсак, (1) ва (2) муносабатлардан

$$AC = x_2 - x_1, \quad BC = y_2 - y_1 \quad (3)$$

Келиб чиқади.

$\triangle ACB$ - тўғри бурчакли. Пифагор теоремасига биноан $AB^2 = AC^2 + BC^2$ бўлади. (3) муносабатдан фойдаланиб $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ тенгликни ва ундан эса

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

бўлишини топамиз. Бу икки нуқта орасидаги масофани ифодалайди.

хусусан А ва В нуқталар абцисса ўқида бўлса, А $(x_1, 0)$, В $(x_2, 0)$ бўлиб, улар орасидаги масофа $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$ бўлади. А ва В нуқталар ордината ўқида бўлса, $AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$ бўлади.

Агар А ва В нуқталардан бири координата бошида бўлса, $AB = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ бўлади.

Мисол. А $(5, 3)$ ва В $(2, -1)$ нуқталар орасидаги масофани топинг

$$AB = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Худди шунингдек фазодаги А (x_1, y_1, z_1) ва В (x_2, y_2, z_2) нуқталар орасидаги масофа $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ формула билан ҳисобланади.

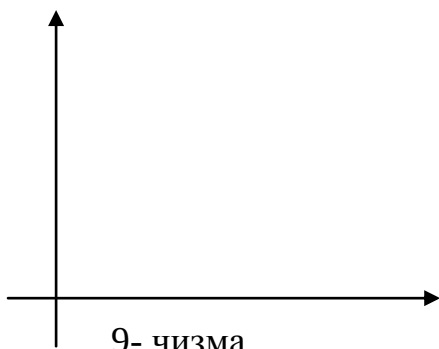
3. КЕСМАНИНГ БЕРИЛГАН НИСБАТДА БЎЛИШ.

Текисликда $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталарни тутуштирувчи AB тўғри чизиқ кесмасини қарайлик. Бу кесмада C нуқта топиш керакки AC кесманинг CB кесмага нисбати берилган λ сонга тенг бўлсин.

$$\frac{AC}{CB} = \lambda \quad (5)$$

Изланаётган нуқтанинг координаталарини x ва y дейлик $C(x, y)$. Демак масала

A ва B нуқталарнинг координаталари ва λ ни топишдан иборат.



9- чизма

$A_1B_1C_1$ нуқталаридан Ox ўқига перпендикуляр тўғри чизиқлар туширамыз. Унда $OA_1=x_1$, $OC_1=x$, $OB_1=x_2$, $AA_1=y_1$, $CC_1=y_1$, $BB_1=y_2$ бўлади. Сўнг A ва C нуқтадан Ox ўқига параллел чизиқлар ўтказамиз. Уларнинг CC_1 ҳамда BB_1 билан кесишган нуқталарини D ва E дейлик.

$$\begin{aligned} AD &= A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1 & CC_1 &= EB_1 = y \\ CE &= C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x & AA_1 &= DC_1 = y_1 \\ CD &= CC_1 - DC_1 = y - y_1, & BE &= BB_1 - EB_1 = y_2 - y \end{aligned} \quad (6)$$

ADC ҳамда CEB тўғри бирчакли учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CB}, \quad \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{CB} \text{ бўлишини топамиз. Агар (5) ва (6) тенгликлардан}$$

фойдалансак $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$ $\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$ келиб чиқади.

Демак

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Rightarrow x = \frac{y - \lambda y_1}{y_2 - y} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \Rightarrow y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

шундай қилиб, AB кесманинг λ нисбатда бўлувчи C нуқтанинг координаталари

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

формула бўйича топилади.

Худди шундай фазода ҳам кесманинг λ нисбатда бўлиш мумкин. Унда

$$x = \frac{x + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \quad \text{ўринлидир.}$$

$$1. \quad \bar{a} = \bar{p} + z\bar{q}, \quad \bar{b} = 3\bar{q} - \bar{q} \quad [\text{ав}] \quad a, b$$

2. i, j, k векторлар кўпайтмаси.

$$3. \quad \bar{a} = 3i - 4j + k, \quad \bar{b} = i + y - 2k$$

$$a_2 b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

7- МВАЗУ: ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ КРАМЕР ҚОИДАСИ

1. ИККИ ВА УЧ НОМАЎЛУМЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ КРАМЕР ҚОИДАСИ

Иккита x_1 ва x_2 номаълумли чизиқли тенгламалардан иборат ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Система икки номаълумли тенгламалар системаси деб аталади, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, (-1)$ системасининг коэффицентлари, b_1, b_2 - берилган сонлардир.

Агар (1) системадаги x_1 нинг ўрнига x_1^0 сони, x_2 нинг ўрнига x_2^0 сонни қўйганда тенгламаларнинг ҳар бири айниятга айланса, унда (x_1^0, x_2^0) жуфтли (1) тенгламалар системасининг ечими дейилади.

(1) системани ўрганишда бу системанинг коэффицентларидан тузилган.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2)$$

Детерминантнинг ҳамда бу детерминантнинг биринчи ва иккинчи устунларини мос равишда озд ҳадлар билан алмаштирилган ушбу

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21} \quad (3)$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} a_{11} & \epsilon_{12} \\ a_{21} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}a_{21} \quad (4)$$

детерминантлар муҳим аҳим аҳамиятга эга.

(1) тенгламалар системаси ечиш учун аввало бу системанинг биринчи тенгламасини a_{22} га кўпайтириб, иккинчи тенгламасини эса a_{12} га кўпайтириб кейин ҳадлаб

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \epsilon_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \epsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}\epsilon_1 \\ -a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = -a_{22}\epsilon_1 \end{cases} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}\epsilon_1 - a_{12}\epsilon_2$$

бўлишини топамиз. Сўнгра (1) системанинг биринчи тенгламасини a_{21} га иккинчи тенгламасини a_{11} га кўпайтириб кейин ҳадлаб қўшамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \epsilon_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \epsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = \epsilon_{22}a_1 \\ a_{11}a_{12}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = -a_{11}\epsilon_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}\epsilon_2 - a_{21}\epsilon_1$$

бўлишини топамиз. Натижада (1) системага тенг кучли бўлган ушбу

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = \epsilon_1a_{22} - a_{12}\epsilon_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = \epsilon_2a_{11} - a_{21}\epsilon_1$$

системага келамиз. Бу система (2), (3) ва (4) муносабатларда ҳисобга олганда қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta x_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta x_2 \end{cases} \quad (1)$$

(1) системанинг ечими $\Delta, \Delta x_1$, ва Δx_2 ларга боғлиқ.

1⁰. $\Delta \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) системадан

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad (5)$$

Бўлишини топамиз. Бу топилган x_1 ва x_2 лар (1) тенгламанинг ечими бўлади. (1) системанинг ечимини топишнинг бу усули крамер усули дейилади. (5) формула крамер формуласи дейилади.

2⁰. $\Delta = 0$ бўлиб Δx_1 ва Δx_2 лардан ҳеч бўлмаганда биттаси, нолдан фарқли бўлсин. Бунда (1) система ечимга эга бўлмайди. Бу ҳолда 91) бирликда бўлмаган система дейилади.

3⁰. $\Delta = 0$, $\Delta x_1 = 0$, ва $\Delta x_2 = 0$, бўлсин. Бу ҳолда (1) система ёки чексиз кўп ечимга эга бўлади ёки ечимга эга бўлмайди. Шунинг учун система бу ҳолда ноаниқ дейилади.

Энди уч номаълумли чисикли тенгламалар системасини қарайлик. Учта x_1, x_2, x_3

Номаълумли чизикли тенгламалардан иборат ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \epsilon_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \epsilon_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \epsilon_3 \end{cases} \quad (6)$$

Система уч номаълумли тенгламалар системаси дейилади. $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, -система коэффициентлари, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, берилган

сонлардир. (6) система учун Крамер қоидасини қўлаймиз.

$$\text{Бунинг учун } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Системани детерминантидир.

$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, лар қуйидагича

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} \epsilon_1 & a_{12} & a_{13} \\ \epsilon_2 & a_{22} & a_{23} \\ \epsilon_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \epsilon_1 & a_{13} \\ a_{21} & \epsilon_2 & a_{23} \\ a_{31} & \epsilon_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \epsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \epsilon_2 \\ a_{31} & a_{32} & \epsilon_3 \end{vmatrix},$$

бўлади.

У ҳолда (в) системага тенг кучли бўлган ушбу

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta x_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta x_2 \\ \Delta \cdot x_3 = \Delta x_3 \end{cases} \quad (6)$$

системага келамиз.

1⁰. $\Delta \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) системадан

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \quad (8)$$

Бўлишини топамиз. (x_1, x_2, x_3) (6) системанинг ягона ечими бўлади. (8)

формула крамер формуласи дейилади.

2⁰. $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (6) система ноаниқ система дейилади.

Энди учунчи тартибли чизиқли тенгламалар системасини матрица орқали ечишни кўрайлик.

(6) система берилган бўлсин. Берилган системанинг коэффицентларидан x_1, x_2, x_3 , лардан ҳам озод ҳадларидан ушбу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

Матрица тузамиз.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} 6^{11} \end{pmatrix}$$

Кўринишда ёзиш имконини беради.

$\begin{pmatrix} 6^{11} \end{pmatrix}$ тенглама (6) системанинг матрица кўриниш дейилади.

Айтайлик (6) системанинг детерминанти $\Delta \neq 0$ бўлсин. Унда юқорида киритилган A матрицани тескари матрицаси мавжуд бўлади.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\Delta} & \frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{31}}{\Delta} \\ \frac{a_{12}}{\Delta} & \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{a_{32}}{\Delta} \\ \frac{a_{13}}{\Delta} & \frac{a_{23}}{\Delta} & \frac{a_{33}}{\Delta} \end{vmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 6^{11} \end{pmatrix}$ тенгликнинг ҳар икки томони A^{-1} га кўпайтириб топамиз.

$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$, агар $(A^{-1}A)X = EX = X$ бўлишини эътиборга олсак, унда матрица кўринишда ёзилган $\begin{pmatrix} 6^{11} \end{pmatrix}$ тенгламанинг ечими

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (9)$$

Ечими бўлишини топамиз.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\Delta} & \frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{31}}{\Delta} \\ \frac{a_{12}}{\Delta} & \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{a_{32}}{\Delta} \\ \frac{a_{13}}{\Delta} & \frac{a_{23}}{\Delta} & \frac{a_{33}}{\Delta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} (e_1 A_{11} + e_2 A_{21} + e_3 A_{31}) \\ \frac{1}{\Delta} (e_1 A_{12} + e_2 A_{22} + e_3 A_{32}) \\ \frac{1}{\Delta} (e_1 A_{13} + e_2 A_{23} + e_3 A_{33}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\Delta x_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta x_2}{\Delta} \\ \frac{\Delta x_3}{\Delta} \end{vmatrix}$$

Агар $X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ бўлиши эътиборга олсак, (9) тенгликни қуйидаги кўринишда

ҳам ёзиш мумкин.

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta x_1 \\ \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta x_2 \\ \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta x_3 \end{vmatrix}$$

Кейинги тенгликдан

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta},$$

Бўлиши келиб чиқади. Бу эса Крамер формуласидир.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \quad (10)$$

(10) системани ўрганишда асосий масалалардан бири унинг биргаликда бўлиш, яъни ечимининг мавжуд бўлиши масаласидир. Бу эса (10) система коэффицентларидан тузилган $[m \times n]$ - тартибли

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} a_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} a_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{vmatrix}$$

Теорема: (Кронекер-копелли теоремаси). (10) тенгламалар системаси биргаликда бўлиш учун A ва $\bar{A}$ матрицаларнинг ранглари бир-бирига тенг бўлиши, яъни $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A}$

Келтирилган теоремадан қуйидаги хулосалар келиб чиқади.
 1⁰. Агар $\bar{A}$ матрицанинг ранги A матрицанинг рангидан катта бўлса,
 яъни

унда (10) система ечимга эга бўлмайди.

2⁰. Агар $\overline{A}$ матрицанинг ранги A матрицанинг рангига тенг бўлиб.
 $\text{rank } \overline{A} = \text{rank } A = K$

бўлса, унда (10) система ечимга эга бўлиб, куйидаги ҳоллар юз беради:

а) $K \prec_n$ (10) система ечимга эга бўлади ва у куйидагича топилади: тартибли минор мавжуд. Шу минорга мос келган тенгламалар олинади. $x_{n+1} \dots x_n$ номаълумлар қатнашган ҳадларни ўнг томонга

Ўтказамиз. $x_{n+1} \dots x_n$ ларни ихтиёрий тайинланган сонлар деб қараб, системани ечамиз.

б) $R=n$ бўлганда (10) система а ҳолда айtilганларга асосан ягона ечимга эга бўлади.

демак $\text{rang } \bar{A} = \text{rang } A = n$ бўлганидагина (10) система ягона ечимга эга бўлади.

Мисол:
$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \\ 4x_1 + 9x_2 = 11 \end{cases} \text{ системани ечининг.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{pmatrix} \text{ матрицалар мавжуд.}$$

Қуйидаги иккинчи тартибли минор

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$$

Нолдан фарқли бўлганлигидан $\text{rang } A = 2$ бўлишини топамиз. Агар

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

Бўлишини эътиборга олсак, унда $\bar{A}$ матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг бўлишини аниқлаймиз: $\text{rang } \bar{A} = 2$.

Номанумлар сони ҳам 2 га тенг бўлган учун берилган система ягона ечимга эга.

берилган системанинг биринчи 2 та тенгламасини олиб

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$$

Системани ечамиз.

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{17}, \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{23}{17}$$

Бу топилган x_1 ва x_2 берилган системанинг учинчи тенгламасини ҳам қаноатлантиради.

(10) системада $\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_n = 0$ бўлган ҳолни яъни бир жинсли тенгламалар системасини қараймиз. Бу ҳолда $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = k$ бўлади система биргаликда бўлади.

Агар $k = n$ бўлса, у ҳолда бир жинсли система фақат $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, тривиал ечимга эга. Агар $R < n$ бўлса, у ҳолда бир жинсли система тривиал бўлмаган $R < n$ бўлса у ҳолда бир жинсли система тривиал бўлмаган ечимларга ҳам эга бўлади ва бу ечимлар юқорида келтирилган усул билан топилади.

8-МАВЗУ: ТЕКИСЛИКДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1.ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

Фараз қилайлик текисликда $P(a_1, b_1)$ ва $O(a_2, b_2)$ нуқталар берилган бўлса. Бу нуқталардан баравар узоқликда жойлашган $\{M(x, y)\}$ нуқталар тўпмини қарайлик.

Унда $PM=MQ$ бўлади. (10-чизма). Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра

$$\begin{aligned} PM &= \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} \\ QM &= \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2} \end{aligned} \quad \text{бўлади.}$$

Натижада:

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2} \Rightarrow (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = 0$$

Агар $2(a_2 - a_1) = A$, $2(b_2 - b_1) = B$, $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = C$ деб белгилаш киритсак, унда

$$Ax + By + C = 0$$

тенгламага келамиз. Бу тўғри чизикнинг умумий тенгламаси дейилади.

A , B , C сонлар, тенгламанинг коэффициентлари бўлиб, улар турли қийматларга тенг бўлганда турли тўғри чизиклар ҳосил бўлади. Демак, тўғри чизикнинг текисликдаги вазияти шу A , B , C сонлар билан тўла аниқланади. Энди

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларини кўрамиз.

1⁰. (1) да $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

$$Ax + By = 0 \quad (2)$$

Кўринишни олади. $O(0,0)$ нуқтанинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради. Бундай тўғри чизиклар координата бошидан ўтади.

2⁰. (1) да $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (1) тенглама $By + C = 0$ (3) кўринишни олади.

Уни $y = -\frac{C}{B}$ кўринишда ёзиб, $-\frac{C}{B} = a$ белгилаш қилинса, (1) тенглама $y = a$ кўринишни олади.

Бундай тўғри чизикдаги ҳар бир нуқтанинг ординатаси бир хил бўлиб, у а сонига тенг. Бу эса (3) тўғри чизикнинг ох ўқиға параллел бўлишини кўрсатади.

3⁰. (1) да $B=0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$Ax + C = 0 \quad (4)$$

кўринишни олади.

Қейинги тенгликдан: $x = -\frac{C}{A} = v$ деб белгиласак натижада (4) тенглама $x=v$ кўринишга келади.

$Ax+C=0$ тўғри чизик абциссаси в бўлган барча нуқталардан ўтади ва оу ўқиға параллел бўлади.

4⁰. (1) да $B=C=0$, $A \neq 0$ бўлса, (1) тенглама

$$Ax = 0 \quad \text{ёки} \quad x = 0 \quad (5)$$

кўринишга келади. (5) тўғри чизикдаги ҳар бир нуқтанинг абциссаси нолга тенг. Бу ордината ўқини ифодалайди.

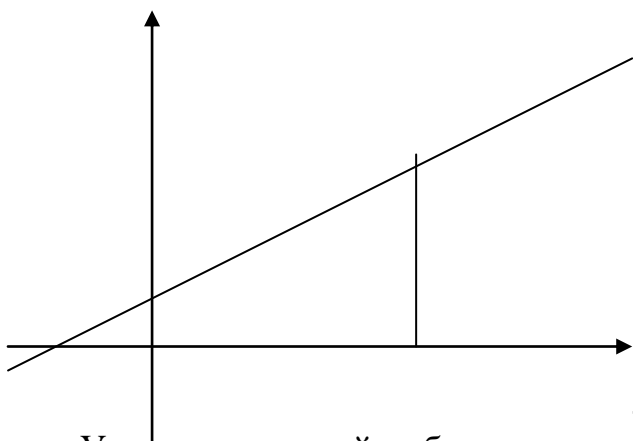
5⁰. (1) да $A=C=0$, $B \neq 0$ бўлса, (1) тенглама

$$By = 0 \quad \text{ёки} \quad y = 0 \quad (6)$$

Кўринишга келади. Бу абцисса ўқини ифодалайди.

2.ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ БУРЧАК КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАСИ.

Текисликда декарт координаталар системасини олиб бориб тўғри чизикни қарайлик. Бу тўғри чизик оу ўқдан в га кесма ажратиб. Ох ўқнинг мусбат йўналиши билан а ташқил этсин. (11-чизма)



44-чизма

Унинг ордината ўқи билан кесишган нуқтасини В билан, абцисса ўқи билан кесишиш нуқтаси А билан белгилайлик. Унда $OB=v$, $OA=a$.

Тўғри чизикда ўзгарувчи М (х,у) нуқтани оламиз, унда ох ўқиға перпендикуляр тушурамиз.

Перпендикулярнинг ох ўқи билан кесиши нуктаси M_1 бўлсин. Сўнг В нуктадан Ох ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Унинг MM_1 билан кесиши нуктасини Р дейлик. Натижада ВРМ учбурчак ҳосил бўлсин.

$$BP = OM_1 = x, \angle PMB = a$$

$$MP = MM_1 - PM_1 = y - OB = y - b$$

Δ ВРМ дан $\frac{PM}{BP} = \operatorname{tg} a$, яъни $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ бўлишини топамиз. Кейинги

тенгликдан эса $y = \operatorname{tg} a \cdot x + b$ (8) бўлиши келиб чиқади.

Тўғри чизиқнинг ох ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчакнинг тангенсини тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини дейилади. Ва k ҳарфи билан белгиланади.

$$\operatorname{tg} a = k$$

Натижада юқоридаги (8) тенглама

$$y = kx + b \quad (9)$$

Кўринишини олади. (9) тенглама тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси дейилади. У иккита параметр k ва b га боғлиқ. Тўғри чизиқнинг вазияти шу параметрлар билан тўла аниқланади.

Мисол: $y = x + 2$ тўғри чизиқнинг вазиятини аниқланг.

$$b = 2, k = 1, \operatorname{tg} a = 1, a = \frac{\pi}{2}$$

3. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ КЕСМАЛАР БЎЙИЧА ТЕНГЛАМАСИ

декарт координаталар системасида бирор тўғри чизикни қараймиз. Бу тўғри чизик координаталар ўқларини кесиб, абцисса ўқидан $a = OA$ кесмани, ордината ўқида $b = OB$ кесмани ажратсин.

(12-чизма).



12-чизма

Тўғри чизикдан ўтказувчи $M(x, y)$ нуктасини олайлик.

$$OM_1 = x, MM_1 = y, M_1A = a - x.$$

ОАВ ҳамда M_1AM учбурчаклар ўхшашлигидан $\frac{M_1M}{OB} = \frac{M_1A}{OA}$ келиб чиқади.

Демак $\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}$, кейинги тенгликдан

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (10)$$

бўлишини топамиз. (10) тенглама тўғри чизикнинг кесмалар бўйича тенграмаси дейилади. У а ва в га боғлиқ.

Эслатма: тўғри чизикнинг умуий $Ax + By + C = 0$ тенграмасидан, унинг кесмалар бўйича тенграмасига келиш мумкин.

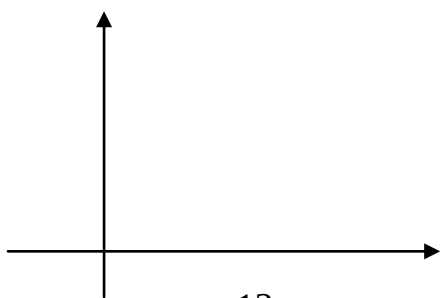
$$Ax + By = -C, \quad \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

4. ТЎҒРИ ЧИЗИКНИНГ НОРМАЛ ТЕНГЛАМАСИ

Декарт координатасидаги тўғри чизикни қарайлик.

Координата бошидан тўғри чизик тушурилган перпендикулярнинг узунлиги Р, шу перпендикуляр билан ох ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчак

$\alpha \left(\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \right)$ бўлсин. (13-чизма).



13-чизма

Демак ON ҳамда BON тўғри бурчакли учбурчакда $\angle AON = \alpha$, $\angle NBO = 90^\circ - \alpha$.

Δ AON дан

$$\frac{ON}{OA} = \cos \alpha \Rightarrow OA = \frac{ON}{\cos \alpha} = \frac{P}{\cos \alpha} \quad (12)$$

Δ BON дан

$$\frac{ON}{OB} = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow OB = \frac{ON}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin \alpha} \quad (13)$$

$$M_1A = OA - OM_1 = \frac{P}{\cos \alpha} - x \quad (14)$$

AOB ҳамда AM_1M учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{M_1M}{OB} = \frac{M_1A}{OA}$ келиб чиқади. (11), (12), (13) ва (14) муносабатларни эътиборга олсак, кейинг тенгликдан

$$\frac{\frac{y}{P}}{\sin} = \frac{\frac{P}{\cos a}}{\frac{P}{\cos a}} \quad \text{кўринишга келади.}$$

$$\text{Бу тенгламадан} \quad x \cos a + y \sin a - p = 0 \quad (15)$$

бўлишини топамиз. (15) тенгламани тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси дейилади. У иккита параметр, p ва a ларга боғлиқ. Тўғри чизиқнинг текисликдаги вазияти шу параметрлар билан тўлиқ аниқланади. Тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси қуйидаги хоссаларга эга.

1⁰. Тенгламада x ва y олдидаги коэффициентлар абсалют қиймати бўйича бирдан катта бўлмаган сонлардир.

2⁰. тенгламада x ва y лар олдидаги коэффициентларнинг квадратлари йиғиндиси 1 га тенг.

3⁰. Тенгламадаги озод ҳад манфий сон. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламасини нормал кўринишдаги тенгламасига келтириш мумкин. Умумий тенгламани ҳозирча номаълум $\mu (\mu \neq 0)$ сонига кўпайтирамиз:

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0 \quad (16)$$

Агар (16) тенгламани тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси деб айтадиган бўлсак унда, $\mu A = \cos a$, $\mu B = \sin a$, $\mu C = -p$ бўлади. Бу тенгламалардан топамиз.

$$(\mu A)^2 + (\mu B)^2 = \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad (16)$$

Демак

$$\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos a = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin a = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad -p = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

Натижада берилган $Ax + By + C = 0$ тенглама

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

нормал тенгламага келади. Одата μ нормалловчи кўпайтувчи дейилади. Унинг ишораси (1) тенгламадаги C нинг ишорасига қарама-қарши бўлади.

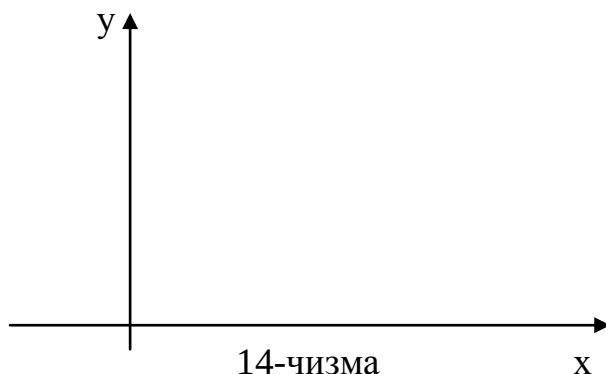
9-МАВЗУ: ТЎҒРИ ЧИЗИҚА ОИД МАСАЛАЛАР

1.ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ БУРЧАК

Текисликда икки тўғри чизик берилган бўлиб, уларнинг бурчак коэффициентли тенгламалари

$$y = K_1x + e_1, \quad y = K_2x + e_2, \quad \text{бўлсин.}$$

Бунда $k_1 = \operatorname{tga}_1$, $k_2 = \operatorname{tga}_2$, (14-чизма).



Масала: Шу икки тўғри чизик орасидаги $\angle ABC = \varphi$ бурчакни топишдан иборат.

$\triangle ABC$ да a_2 ва φ лар ички бурчаклар бўлиб, a_2 эса уларга нисбатан ташқи бурчак. Бу тенгликдан $\varphi = a_1 - a_2$ бўлиши келиб чиқади.

$$\text{Агар } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(a_1 - a_2) = \frac{\operatorname{tga}_1 - \operatorname{tga}_2}{1 + \operatorname{tga}_1 \operatorname{tga}_2} \text{ ва } \operatorname{tg} a_1 = k_1, \quad \operatorname{tg} a_2 = k_2$$

Бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{K_1 - K_2}{1 + K_1 K_2} \quad (1)$$

Эканини топамиз. Бу тенгликдан эса изланаётган φ бурчак аниқлайди.

Мисол. Ушбу $5x - y + 7 = 0$, $2x - 3y = 0$ тўғри чизиклар орасидаги бурчакни топинг. Аввало тўғри чизикларни бурчак коэффициентли тенгламаларга келтирамиз.

$$5x - y + 7 = 0, \quad y = 5x + 7, \quad K_1 = 5$$

$$2x - 3y + 1 = 0, \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad K_2 = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{2}{3}} = 1 \qquad \varphi = 45^\circ$$

2. ТҶҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ПАРАЛЛЕЛИК ВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛИК ШАРТИ

Текисликда икки тўғри чизик берилган бўлиб, уларнинг бурчак коэффициентли тенгламалари

$$y = K_1 x + e_1, \quad y = K_2 x + e_2,$$

бўлсин. Бу тўғри чизиклар орасидаги бурчакнинг тангенци $\operatorname{tg} \varphi = \frac{K_1 - K_2}{1 + K_1 K_2}$ бўлади.

Агар икки чизик орасидаги бурчак $\varphi = 0$ бўлса, бу тўғри чизиклар ўзаро параллел бўлади. Бу ҳолда $\frac{K_1 - K_2}{1 + K_1 K_2} = 0$ бўлиб. Ундан $K_1 = K_2$ бўлиши келиб чиқади.

Демак икки тўғри чизикнинг параллел бўлиш шарти уларнинг барча коэффициентларининг ўзаро тенг бўлишидан иборат экан:

$$K_1 = K_2 \qquad (2)$$

Агар икки чизик орасидаги бурчак $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлса, унда тўғри чизиклар ўзаро перпендикуляр бўлади. Бу ҳолларда $\frac{K_1 - K_2}{1 + K_1 K_2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$ бўлиб, ундан $1 + K_1 \cdot K_2 = 0$.

$$\text{Яъни } K - \frac{1}{K_2} \left(K_2 = -\frac{1}{K_1} \right) \text{ бўлиши келиб чиқади.}$$

Демак, икки тўғри чизикнинг перпендикуляр бўлиш шарти уларнинг бурчак коэффициентлари учун

$$K_1 = -\frac{1}{K_2} \left(K_2 = -\frac{1}{K_1} \right) \qquad (3)$$

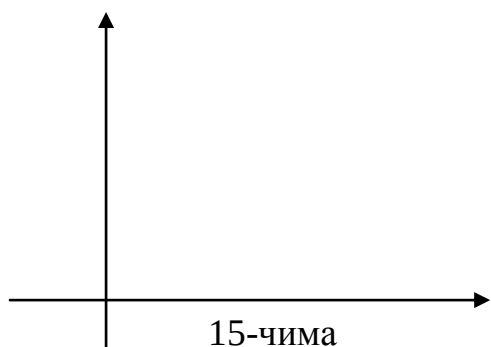
тенгликнинг ўринли бўлишидан иборат экан.

Мисол: Ушбу $y = 2x + 1$ ва $y = 2x + 7$ тўғри чизиклар ўзаро параллел бўлади, чунки бурчак коэффициентлари (2) шартини қаноатланиради. Ушбу $y = 3x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 8$ тўғри чизиклар ўзаро перпендикуляр бўлади. Чунки уларнинг бурчак коэффициентлари (2) шартини қаноатланиради. Ушбу $y = 3x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 8$ тўғри чизиклар ўзаро перпендикуляр бўлади, чунки уларнинг бурчак коэффициентлари (3) шартини қаноатланиради.

3. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН БЕРИЛГАН ТҶҒРИ ЧИЗИҚЧАМАСОФА

Текисликда бирор $Ax+By+C=0$ тўғри чизик ва бу тўғри чизикқа тегишли бўлмаган бирор $M(x_0, y_0)$ нукта берилган бўлсин.

М нуктадан тўғри чизикқа тушурилган перпендикулярнинг узунлиги М нуктадан $Ax+By+C=0$ тўғри чизикқача бўлган масофа бўлади. Уни p белгилайлик. $MN=p$ (15-чизма).



Аввало тўғри чизикни нормал кўринишга келтирамиз. У қуйидагича

$$x \cos a + y \sin a - q = 0 \quad (4)$$

бўлади. Бу ерда

$$\cos a = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5)$$

$$\sin a = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6)$$

$$-P = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (7)$$

Бўлиб, p - координата бошидан шу тўғри чизикқа туширилган перпендикулярнинг узунлиги $P=OE$ сўнг М нукта орқали берилган тўғри чизикқа параллел тўғри чизик ўтказамиз. Унинг нормал тенгламаси ушбу

$$x \cdot \cos a + y \cdot \sin a - q = 0 \quad (8)$$

Кўринишда бўлиб, бунда q -координата бошидан (8) тўғри чизикқача бўлган масофа: $q=OF$, Бу тўғри чизик чизик М (x_0, y_0) нўқта орқали ўтар экан, М нўктанинг координаталари шу тенгламани қаноатланиради.

$$x_0 \cos a + y_0 \sin a - q = 0 \quad (9)$$

Равшанки,

$$q = NM = EF, \quad OF = OE + EF (OE = p, OF = q)$$

Демак, $p = q - p$ (9) тенгликдан $q = x_0 \cos a + y_0 \sin a$ ни топамиз. Натижада,

$$p = x_0 \cos a + y_0 \sin a - p \quad (10)$$

$$(5), (6), (7), \text{ тенгликлардан фойдалансак } p = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (10)$$

(10) формула нуктадан тўғри чизиқча бўлган масофани ифодалайди.

Мисол: М (5:2) нуктадан $3x+4y-12=0$ тўғри чизиқча бўлган масофани топининг.

(10) формулага кўра топамиз:
$$p = \frac{5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{5}$$

4.БЕРИЛАГАН НУҚТАДАН ЎТУВЧИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР **ДАСТАСИНИНГ ТЕНГЛАМАСИ**

Текисликда $M_0 (x_0, y_0)$ нукта берилган бўлсин. Шу нуктадан ўтувчи тўғри чизиқлар тенгламасини топамиз. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

$$y = Kx + \epsilon \quad (11)$$

Кўринишда бўлар эди. Бу тўғри чизиқ берилган M_0 нуктадан ўтсин. Унда нуктанинг координаталари тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради:

$$y_0 = Kx_0 + \epsilon \quad (12)$$

(11) ва (12) тенгликдан

$$y - y_0 = K(x - x_0) \quad (13)$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгликберилаган M_0 нуктадан утувчи тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

К нинг турли қийматларида $M_0 (x_0, y_0)$ нуктадан утувчи турли тўғри чизиқларга эга бўламиз. Бундай тўғри чизиқлар чексиз кўп (16-чима). Шунинг учун (13) тенгламани берилаган нуктадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси дейилади.

Масалан: $M_0(1;1)$ нуктадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламаси $k-1=K(x-1)$ яъни $Kx-y+K+1=0$ бўлади.

10-МАВЗУ: ФАЗОДА ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАЛАРИ ИККИ ОРАСИДАГИ БУРЧАК ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ВА ПАРАЛЛЕЛИГИ УЧ НУҚТАДАН ЎТГАН ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАСИ

1.ФАЗОДА ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАСИ ВА ХОССАЛАРИ

Фараз қилайлик, фазода Декарт координаталари системаси $P(a_1, e_1, c_1)$ ҳамда $Q(a_1, e_1, c_1)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу икки нуқтадан бир хил узоқликда жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тексликни ифодалайди. Бу тексликда ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтани олайлик. Икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра

$$MP = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - e_1)^2 + (z - c_1)^2}$$

$$MQ = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - e_1)^2 + (z - c_1)^2}$$

Бўлади. Агар $MP=MQ$ бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - e_1)^2 + (z - c_1)^2} = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - e_2)^2 + (z - c_2)^2}$$

Тенгликка келамиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонинг квадратга ошириб топамиз:

$$a_1^2 + e_1^2 + c_1^2 - 2a_1x - 2e_1y - 2c_1z = a_2^2 + e_2^2 + c_2^2 - 2a_2x - 2e_2y - 2c_2z$$

Уни қуйидагича

$$2(a_2 - a_1)x + 2(e_2 - e_1)y + 2(c_2 - c_1)z + a_1^2 + e_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - e_2^2 - c_2^2 = 0$$

Ҳам ёзиш мумкин. Энди $2(a_2 - a_1) = A$, $(e_2 - e_1) = B$, $2(c_2 - c_1) = C$, $a_1^2 + e_1^2 + c_1^2 - a_2^2 - e_2^2 - c_2^2 = D$ белгилашлар криритсликнинг мумуий тенглик ушбу

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

Куринишни олади. (1) тенглама фазода текисликнинг умуий тенгламаси дейилади. Бу ерда A, B, C, D ўзгармас сонлар бўлиб, улар текисликнинг фазодаги вазияти тўла аниқлайди.

Энди (91) тенгламанинг хусуий ҳолларини қараймиз.

1⁰. $A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, бўлсин. У ҳолда $Ax + By + Cz = 0$ тенглама ҳосил бўлади, бу тенглама билан аниқланадиган текислик координаталар боши нуқтадан ўтади.

2⁰. $A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, бу ҳолда $Ax + By + D = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама билан аниқланган текислик Оху координаталар текислигида $Ax + By + D = 0$ тўғри чизикдан ўтувчи ва ўз ўрнига параллел текисликдир.

3⁰. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, бўлган ҳолда $Ax + Cz + D = 0$ текислик Охз координата текислигида $Ax + Cz + D = 0$ тўғри чизикдан ўтиб, у Оу ўқига параллел бўлади.

4⁰. $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ бу ҳолда (1) тенглама $By + Cz + D = 0$ кўринишга келиб, у Оуz координаталари текислигида

$By+Cz+D=0$ тўғри чизикдан ўтувчи Ox ўқига параллел текисликдир.

49

5⁰. $A=0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (1) тенглама $Cz+D=0$ кўринишга эга бўлади, у Oxy текислигига параллелдир.

6⁰. $A=0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ бўлса (1) тенглама $By+D=0$ кўринишга эга бўлиб, oxz текислигига параллел.

7⁰. $B=0$, $C=0$, $A \neq 0$, $D \neq 0$ бу ҳолда (1) тенглама $Ax+D=0$ кўринишга эга бўлиб, у Oyz текислигига параллел бўлади.

8⁰. $A=B=D=0$, $C \neq 0$, бу ҳолда (1) тенглама $Cz=0 \Rightarrow z=0$ кўринишга эга бўлиб, у oxy текислигини ифодалайди.

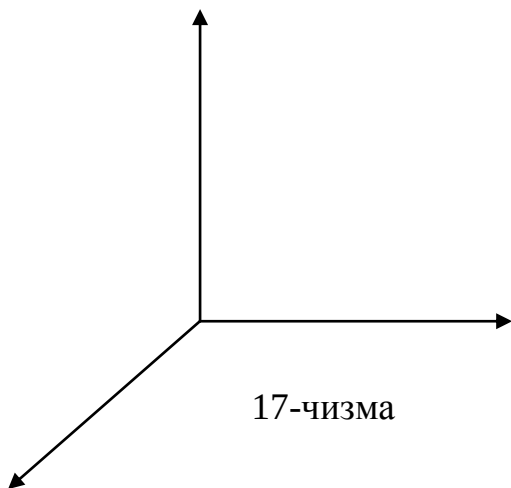
9⁰. $A=C=D=0$, $B \neq 0$. бунда $By=0$, $y=0$ тенглама ҳосил бўлади. У oxz текислигини ифодалайди.

10⁰. $B=C=D=0$, $A \neq 0$ бўлса, $Ax=0$, $x=0$ тенглама ҳосил бўлади. У oyz текислигини ифодалайди.

11⁰. $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1)$$

Кўринишга эга бўлади. Бу ерда $a = \frac{A}{D}$, $b = \frac{B}{D}$, $c = \frac{C}{D}$ (2) тенглама текислиكنинг кесмалардаги тенграмаси дейилади.



17-чизма

2. ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ПАРАЛЛЕЛИГИ ВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛИГИ

Фазода

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Тенгламалар билан текисликлар берилган бўлсин. Бу икки текислик параллел бўлиши учун

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (*)$$

шарт бажарилиш зарур ва етарли.

50

Юқоридаги икки текислик ўзаро перпендикуляр бўлиши учун

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (**)$$

шарт бажарилиш зарур ва етарли.

Мисол: $2x + y + cz = 0$ текислик с нинг қандай қийматларда $4x + 2 + z = 0$ текислик билан параллел ва перпендикуляр бўлади.

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{c}{1} \text{ шартга кўра } c = \frac{1}{2} \text{ да параллел бўлади.}$$

$$2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + c \cdot 1 = 0 \text{ шартга асосан } c = -10 \text{ текисликлар перпендикуляр бўлади.}$$

3. ИККИ ТЕКИСЛИК ОРАСИДАГИ БУРЧАК

Умумий тенгламалари

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

билан берилган T_1 ва T_2 текисликлар берилган бўлсин.

Икки текислик орасидаги φ бурчак дейилганда бу текисликлар билан ҳосил қилинган иккита икки ёқли бурчакдан бири тушунилади T_1 ва T_2 текисликлар фазода ҳар қандай жойлашганда ҳам улар орасидаги φ бурчак бири $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ нормалвекторлар орасидаги бурчакка тенг. Шу сабабли

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (4)$$

(4) формула икки текислик орасидаги бурчакни топиш формуласи.

Мисол: $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$ ва $x - y\sqrt{2} - z + 1 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

(4) формулага асисан

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + 1^2}} = -\frac{2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

Икки ёқли бурчаклардан бири $\varphi = 120^\circ$, иккинчиси 60° фазода уч нукта $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, ва $C(x_3, y_3, z_3)$, нукталар берилган бўлсин. Бу уч нукта бирор текисликка тегишили бўлса, у ҳолда бу текислик тенгламаси ушбу

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Кўринишда бўлади. (5) тенглама берилган нуқталарнинг координаталарини қаноатлантиради.

11-МАВЗУ: ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ. ФАЗОДА ТЕКИСЛИК ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ОИД МАСАЛАЛАР

1.ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ

Декарт координаталар системасида

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тенгламалар билан аниқланадиган T_1 ва T_2 текисликлар берилган бўлсин. Қаралаётган бу текисликлар ўзаро параллел бўлмасин. Бу ҳолда улар бирор тўғри чизик бўйича кесишади. Бу тўғри чизикни ушбу

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Системанинг ечимлари тўпламидан иборат деб қараш мумкин.

T_1 ва T_2 текисликлар ўзаро параллел бўлмаган учун $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ тенгликлар

бир вақтда бажарилмайди. Фараз қилайлик $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ бўлсин. (1) система

чексиз кўп ечимга эга. Z_0 қатнашган ва озод ҳадларни тенгликни иккинчи томонига ўтказамиз ва (1) системани:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

кўринишда ифодалаймиз. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ муносабатини эътиборга олиб (2)

системани x ва y га нисатан ечамиз.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1z_0 & B_1 \\ -D_2 - C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1z_0 & B_1 \\ -D_2 - C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

Z_0 га мос ечимларни x_0 ва y_0 орқали белгилаймиз. (1) системанинг (x_0, y_0, z_0) ечимини топдик. Қаралаёган тўғри чизикда $M(x_0, y_0, z_0)$ нуқта билан бир қаторда ихтиёрий $P(x, y, z)$ нуқта олайлик. Бу нуқтанинг координаталари T_1 ва T_2 текислик тенгламаларини қаноатлантиради.

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Бу системадан қуйидаги системани $(x - x_0)$ ва $(y - y_0)$ га нисбатан ечиб топамиз.

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}(z - z_0), \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}(z - z_0)$$

Бу тенгликлардан $M(x_0, y_0, z_0)$ ва $P(x, y, z)$ нуқталардан ўтувчи қуйидаги тўғри чизиқ тенгламасига эга бўламиз.

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

бу ерда

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1z_0 & B_1 \\ -D_2 - C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 - C_1z_0 & B_1 \\ -D_2 - C_2z_0 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

Ушбу

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \ell, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = m, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = n,$$

Белгилашлар киритсак охирги тенглик

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (3)$$

кўринишга келади. (5) тенглама тўғри чизиқнинг калоник тенгламаси дейилади.

Агар (5)

Тенгламада

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

деб олсак

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Уни тўғри чизиқнинг параметрин тенгламаси дейилади. t -параметр.

2. ФАЗОДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА ТЕКИСЛИККА ОИД МАСАЛАЛАР

1⁰. нуқтадан текисликкача масофани топиш. Фазода $Ax + By + Cz + D = 0$ Т текислик ва бу текисилда ётувчи $P(x_0, y_0, z_0)$ нуқтани олайлик. Р нуқтадан Т текисликка перпендикуляр текислик ўтказамиз. Перпендикуляр узунлиги бу нуқтадан Т текисликкача масофани билдиради. Бу масофани қуйидаги

$$p = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4)$$

формула билан топилади.

Мисол: Р (0, 0, 0,) нуқтадан $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ текисликкача бўлган масофани топинг. Берилган текислик тенгламасини $6x + 4y + 3z + 12 = 0$ кўринишда ёзиб оламиз. (4) формулага кўра

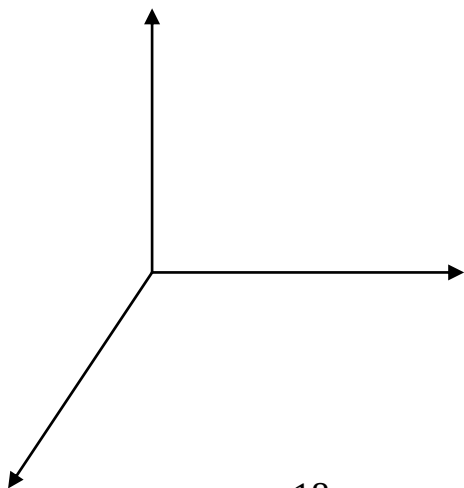
$$p = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{36 + 16 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}$$

демак,

$$p = \frac{12}{\sqrt{61}}$$

2⁰. Фазода икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси. Фазода А (x_1, y_1, z_1) ва В (x_1, y_1, z_1) нуқталардан ўтувчи бирор тўғри чизик берилган бўлсин.

Бу чизика ихтиёрий С (x_1, y_1, z_1) нуқта оламиз. (18-чизма).



18-чизма

А, В, С нуқталар бир тўғри чизикда ётганлиги сабабли уларнинг оху текисликдаги проекциялари бўлган A_1, B_1, C_1 нуқталар хар бир тўғри чизикда ётади. Бундан эса

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ёки} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Муносабатга эга бўламиз. А, В, С нуқталарнинг $oxyz$ текисликлардаги проекциялари учун ҳам мос равишда

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Тенгликлар ўринлидир. Ҳосил бўлган тенгликларнинг бир вақтда бажарилишини эътиборга олиб топамиз.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

Бу фазода берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизик тенгламасидир.

3⁰. Тўғри чизик ва текисликнинг параллелик ва перпендикулярлик аломати.

Бизга
$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad \text{тенглама билан}$$

аниқланадиган

тўғри чизик ҳамда $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик берилган бўлсин. Бу тўғри чизик ва текисликнинг ўзаро параллел бўлиши учун

$$Al + Bm + Cn = 0$$

Тенгламани бажарилиши зарур ва етарли.

4⁰. Фазода икки тўғри чизикнинг параллел ва перпендикуляр шarti.

Ушбу

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{\ell_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

Тўғри чизиклар берилган бўлсин. Бу тўғри чизикларнинг параллеллик шarti

$$\frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{тенгликнинг бажарилишидан перпендикулярлик шarti эса}$$

$$\ell_1 \ell_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad \text{тенгликнинг бажарилишидан иборат.}$$

Ўзаро параллел тўғри чизиклардан ўтувчи текислик тенгламаси ушбу

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

Кўринишга эга бўлади. Агар икки тўғри чизик Р (x_0, y_0, z_0) нуқтада кесишса, бу тўғри чизиклар орқали ўтувчи текислик тенгламаси ушбу

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{кўринишда бўлади.}$$

5⁰. нуқтадан тўғри чизикқа перпендикуляр текислик ўтказиш

Фазода $P(x, y, z)$ нукта ва $\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ тенгликлар билан аниқланган тўғри чизик берилган бўлсин.

P нуктадан ўтувчи тўғри чизикқа перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси

$$\ell(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1) = 0$$

Кўринишда бўлади.

6⁰. Нуктадан тўғри чизикқача бўлган масофа $P(x_0, y_0, z_0)$ нуктадан

$\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ тўғри чизикқача бўлган p масофа

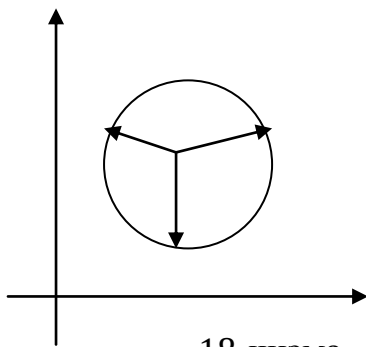
$$\text{Шубу } p^2 = \frac{\left| \frac{x_1-x_0}{\ell} - \frac{y_1-y_0}{m} \right|^2 + \left| \frac{y_1-y_0}{m} - \frac{z_1-z_0}{n} \right|^2 + \left| \frac{z_1-z_0}{n} - \frac{x_1-x_0}{\ell} \right|^2}{\ell^2 + m^2 + n^2}$$

Формула ёрдамида топилади.

12-МАВЗУ: АЙЛАНМА. ЭЛЛИПС ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

1.АЙЛАНА

Текисликда Декарт координата системасини олайлик. Шу тенгликда бирор $M(a, b)$ нуктадан бир хил r масофада жойлашган нукталарнинг геометрик ўрни айлана дейилади. (18-чизма).



18-чизма

Бунда M нукта айланма маркази, r эса айлана радиусидир. Демак айланадаги $P(x, y)$ нуктадан унинг маркази $M(a, b)$ гача бўлган масофа ҳар доим r га тенг. Икки нукта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \text{ бўлади.}$$

Кейинги тенгликни иккала томонини квадратга кўтариб топамиз:

$$(x-a)^2 = (y-b)^2 = r^2 \quad (1)$$

Шундай қилиб, айланадаги ихтиёрий P нуқтанинг x ва y координаталарини боғловчи тенглама келади. Бу марказ (a, b) нуқтада радиусига тенг бўлган айлана тенгламасидир.

Хусусан маркази координата бошида бўлган айлана тенгламаси

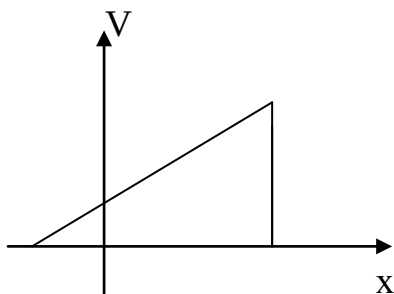
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2)$$

кўринишда бўлади.

Мисол: Маркази $(3, 4)$ нуқтада радиуси 5 га тенг бўлган айлана тенгламасини ёзинг. Бу ҳолда $a=3$, $b=4$, $r=5$ бўлади. (1) формуладан фойдаланиб изланаётган айлана тенгламаси $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ бўлишини топамиз.

2.ЭЛЛИПС

Текисликда $F_1(a_1, y_1)$, $F_2(a_2, y_2)$, нуқталар берилган бўлсин. F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофаларининг йиғиндиси ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни эллипс дейилади. Бунда F_1 ва F_2 нуқталар эллипс фокуслари дейилади. Демак эллипсдаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтадан унинг фокусларигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас сонга тенг. Бу ўзгармас сонно 2 та билан, $F_1 F_2$ кесманинг узунлигини $2c$ билан белгилайлик. Эллипс тенгламасини келтириб чиқариш учуе текисликда Декарт координаталар системасини қуйидагича танлаймиз F_1 ва F_2 нуқталар абцисса ўқида жойлашган бўлиб, координата боши $F_1 F_2$ кесмани тенг иккига бўлсин. У ҳолда эллипс фокуслари мос равишда $(-c, 0)$, $(c, 0)$ координаталарга эга бўлади.



19-чизма

Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра $F_1M + F_2M = 2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ бўлади. Бу тенгликдан

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

Кейинги тенгликнинг иккила томони квадратга ошириш натижасида

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \text{ ҳосил бўлиб, ундан эса}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (3)$$

тенгламасига эга бўламиз.

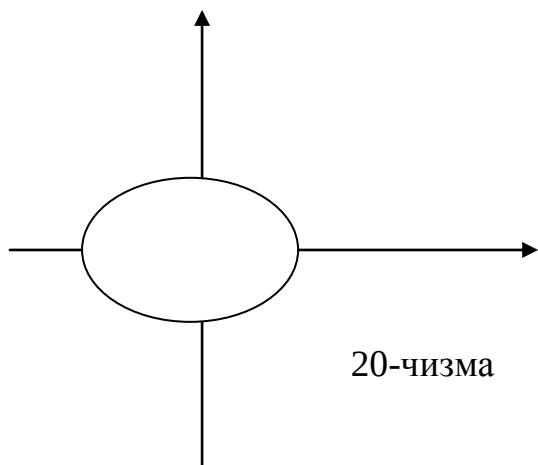
Равшанки, $2a > 2c$, яъни $a > c$ тенгсизлик ўрунли бўлади $a^2 - c^2$ муносабат. Уни b^2 билан белгиласак, у ҳолда (3) тенглама

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (4)$$

Кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $a^2 b^2$ га бўлиб топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

Одатда (5) тенглама эллипснинг каноник дейилади. (5) тенгламада $x = 0$ бўлса, $y = \pm b$, $y = 0$ бўлса, $x = \pm a$ бўлади. Демак абциссалар ўқини $A(a, 0)$, $A_1(-a, 0)$ нуқталарда, ординаталар ўқини эса $B(0, b)$, $B_1(0, -b)$ нуқталардан кесар экан.



20-чизма

AA_1 ва BB_1 кесмалар мос равишда эллипснинг катта ва кичик ўқлари дейилади.

Шундай қилиб, a - эллипснинг катта ярим ўқи узунлиги, b - кичик ярим ўқи узунлигидир.

Энди $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ миқдорни қарайлик. Уни эллипснинг эксцентриситети дейилади. Эллипс эксцентриситети унинг шаклини ифодаловчи миқдордир.

Мисол: Ушбу $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ тенглама билан берилган эллипснинг эксцентриситетини топинг. $a = 10$, $b = 6$ эллипснинг катта ва кичик ярим ўқларнинг узунлиги.

$$a^2 - c^2 = b^2, \quad e = \frac{c}{a}$$

Муносабатларини эътиборга олиб топамиз:

$$c = \sqrt{100 - 36} = 8, \quad e = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad e = \frac{4}{5}$$

3. ЭЛЛИПСНИНГ ХОССАЛАРИ

1⁰. Эллипс координаталар ўқиға нисбатан симметриқ эғари чизикдир, Бу хоссанинғ тўғрилиғи (5) тенгламани x ва y га нисбатан ечишдан ҳосил бўлган

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (6)$$

муносабатлардан келиб чиқади.

2⁰. Эллипс ABA_1B_1 тўғри тўртбурчак ичида жойлашган шакилдир. Юқоридағи (6) формулалардан $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, Бу эса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс $AB A_1 B_1$ тўғри тўртбурчакда жойлашганини билдиради.

3⁰. Агар эллипснинг эксцентриситети $e = 0$ бўлса, у ҳолда (5) тенглама маркази координата бошида радиуси a га тенг бўлган айланмани ифодалайди.

Ҳақиқатдан ҳам $e = 0$ бўлганда $a=b$ бўлиб (5) тенглама $x^2 + y^2 = a^2$ кўринишга эға бўлади.

4⁰. Маркази координата бошида, радиус a га тенг айланани Оу ўқи бўйлаб $\frac{a}{b}$ марта қисиш натижасида ярим ўқлари a ва b га тенг бўлган эллипс бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам $x = x^1$, $y = \frac{a}{b} y^1$ алмаштириш натижасида (2) айлана тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ эллипс тенгламасига келади.}$$

13-МАВЗУ: ГИПЕРБОЛА. ПАРАБОЛА ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

ГИПЕРБОЛА.

Текисликда $F_1(a_1, b_1)$ ва $F_2(a_2, b_2)$ нуқталар берилган бўлсин. Бу текисликда F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофалар айрмасининг абсолют қиймати ўзгармас бўлган нуқталарни қарайлик. Бундай нуқталарни геометрик ўрни гипербола дейилади. Бундай F_1 ва F_2 гипербола фонослари дейилади.

Демак, гиперболадағи ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтадан F_1 ва F_2 гача бўлган масофалар айрмаларини абсолют қиймати ўзгармас сонга тенг. Бу ўзгармас сонни $2a$ билан белгилаймиз.

Гипербола тенгламасини ҳосил қилиш учун декарт координаталари системасида F_1 ва F_2 нуқталарни Ox ўқи бўйлаб координата бошига нисбатан

симметрик бўлган С масофада жойлаштирайлик. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$|F_1M - F_2M| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

бўлади. Бу тенгликдан топамиз

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx^2 - a^2$$

Кейинги тенгликни ҳар икки томонини квадратга ошириш натижасида

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (1)$$

Тенгликка келамиз $c > a$ бўлгани учун $c^2 - a^2$ айирма мусбат бўлади. Уни v^2 билан белгилаймиз. У ҳолда (1) тенглама

$$v^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 v^2 \quad (2)$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томони $a^2 v^2$ га бўлиб топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{v^2} = 1 \quad (3)$$

Одатда (3) гиперболанинг каноник тенгламаси дейилади. Гипербола тенгламасида $y=0$ дейилса, $x = \pm a$ бўлиши келиб чиқади. Бу эса гипербола Ох ўқини $A(a, 0)$,

$A_1(-a, 0)$ нўкталарда кесишини билдиради. (3) тенгламада $x=0$ дейилса, $y^2 = -v^2$ бўлади. Бу эса гипербола Оу ўқи билан кесишмаслигини билдиради.

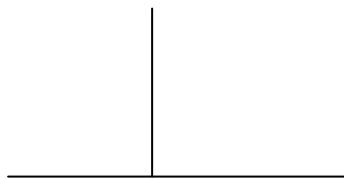
$A(a, c)$ ва $A_1(-a, 0)$ нукталар гиперболанинг учлари, AA_1 кесма эса унинг ҳақиқий ўқи дейилади.

Ушбу $\ell = \frac{c}{a}$ нисбат билан аниқланадиган миқдор гиперболанинг эксцентриситети дейилади. Худди эллипсдаги ўхшаш бу ерда ҳам гипербола эксцентриситети унинг шаклини аниқлаб беради. $c > a$ бўлгани учун $\ell = \frac{c}{a} > 1$ тенгсизлик ўринлидир.

2.ГИПЕРБОЛАНИНГ ХОССАЛАРИ.

1⁰. гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик бўлган эгри чизикдир.

2⁰. $y = \pm \frac{v}{a}x$ тўғри чизиклар гиперболанинг асимптоталари бўлади, яъни бу тўғри чизик х нинг чексиз катталашиб бориши билан гиперболага яқинлашиб боради. Бу хоссани ўринли эканлигини кўрсатамиз тўғри чизик $y = \pm \frac{v}{a}x$ бўлгани ҳолини қараймиз.



21-чизма

Абциссалари $x \geq a$ бўлган гиперболода $M(x, y)$ тўғри чизикда эса $N(x_1, y_1)$ нуқталарни оламыз.

$$\text{Унда } y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y_1 = \frac{b}{a} x \text{ чизиклардаги мос } M \text{ ва } N \text{ нуқталар}$$

бир хил абциссага эга бўлгани учун MN тўғри чизик ох ўқига перпендикуляр бўлади. Демак, MN кесманинг узунлиги $|y_1 - y|$ га тенг. $x \geq a$ лар учун

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2}{a^2} \sqrt{x^2 - a^2} = y$$

Эканлигини эътиборга олсак, унда MN кесманинг узунлиги

$$|MN| = y_1 - y = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

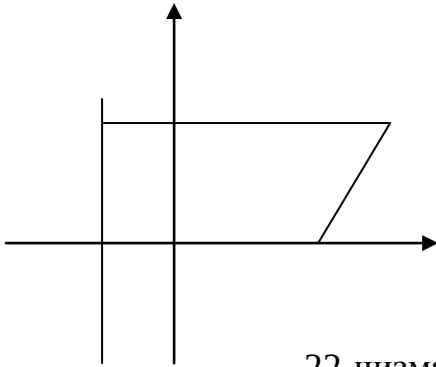
Бу муносабатдан x чексиз олиб борганда MN кесманин узунлиги нолга интилишини кўрамиз. M нуқтадан $y_1 = \frac{b}{a} x$ чизикқа тушурилган перпендикуляр асосини P нуқта билан белгилайлик. У ҳолда $|MP| < |MN|$ бўлиб MP кесманинг узунлиги ҳам нолга интила боради.

$y_1 = -\frac{b}{a} x$ тўғри чизик ҳам гиперболоа учун асимптота бўлиши худди шундай кўрсатилади.

Мисол: Ушбу $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ гиперболани экцентриситети ва асимптоталарини топинг $a = 4$, $b = 3$, $e = \frac{c}{a}$ формулага кўра $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ $e = \frac{5}{4}$ эканини топамиз. $y_1 = \pm \frac{3}{4} x$ тўғри чизик берилган гиперболани асимптоталаридир.

3. ПАРАБОЛА.

Текисликда Декарт координаталари системасини олайлик. Бу текисликда оу ўқига параллел тўғри чизик ва бу тўғри чизикқа тегишли бўлмаган $F(a, b)$ нуқта берилган бўлсин. Бу тўғри чизик ва F нуқтадан бир хил масофада жойлашган нуқталарнинг геометрик ўрни парабола дейилади. F нуқта параболани фонуси, қаралаётган тўғри чизик эса унинг директрисаси деб аталади.



22-чизма

Парабола тенгламасини ҳосил қилиш учун F нуқтани ох ўқ бўйлаб координата

бошидан $\frac{P}{2}$ масофада ($p > 0$) жойлаштирайлик.

Унинг директрисаси эса $x = -\frac{P}{2}$ тўғри чизик бўлсин Параболанинг ихтиёрий M (a,y) нуқтасини қарайлик. Икки нуқта орасидаги масофа кўра

$$\sqrt{\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{P}{2} \text{ бўлади.}$$

Бу тенгликни иккала томоннинг квадратга ошириб топамиз

$$y^2 = 2px \quad (4)$$

Бу тенгликни параболанинг конаник тенгламаси дейилади.

4. ПАРАБОЛАНИНГ ХОССАЛАРИ.

- 1⁰. Парабола ох ўқига нисбатан симметрик бўлган эгри чизик.
- 2⁰. Парабола координата бошидан ўтади.
- 3⁰. x ўзгарувчининг қийматлари чексиз ошиб борган сари y ўзгарувчаннинг қийматлари ҳам чексиз ошиб боради.

14-МАВЗУ: ФУНКЦИЯ ТУШУНЧА, ЧЕГАРАЛАНГАН ЖУФТ, ТОҚ МОНОТОН ФУНКЦИЯЛАР, ДАВРИЙ ФУНКЦИЯЛАР, ТЕСКАРИ ФУНКЦИЯ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР.

ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

Иккита x ва y ўзгарувчи миқдорни қарайлик

1-Таъриф: Агар x миқдорнинг D соҳадаги ҳар бир қийматига бирор усул ёки қонун бўйича унинг бирор Y соҳадаги аниқ бир қиймати мос қўйилса, y ўзгарувчи миқдорнинг функцияси дейилади.

Ўзгарувчи x миқдор эркин ўзгарувчи ёки аргумент, y миқдор эса боғлиқ ўзгарувчи ёки функция дейилади.

Функцияни қуйидаги белгилашлардан фойдаланилади:

$$y = f(x), \quad y = y(x), \quad y = f(x) \text{ ва ҳоказо.}$$

Агар $x=x_0$ бўлганда $y = f(x)$ функциянинг қиймати y_0 бўлса бу $y = f(x_0)$ ёки $|y|_{x=x_0} = y_0$ каби белгиланади.

2-Тариф: Ўзгарувчи x нинг $f(x)$ функция маънога эга бўладиган қийматлари тўплами функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади ва $D(f)$ билан белгиланади.

1- Мисол: $y = \sqrt{4-x^2}$ функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини топинг.

Берилган функция $4-x^2 \geq 0$ бўлганда маънога эга. Бу тенгсизликнинг ечими $x^2 \leq 4$ ёки $|x| \leq 2$. Бу тенгсизликни x нинг $[-2; 2]$ кесмадаги қийматлари қаноатлантиради.

Демак $D(f) = [-2; 2]$, $E(f) = [2; 0]$. Функция текисликда график кўринишда тасирланади.

4-Таъриф. $y = f(x)$ функциянинг графиги деб оху текисликдаги координаталари $y = f(x)$, муносабат билан боғланган $p(x, y)$ нўкталар тўпламига айтилади.

Функция турли усуллар билан берилиши мумкин. Функциянинг жадвал, ва аналитик ва график кўринишда берилиши усуллари мавжуддир.

Функция аналитик усулда берилганда x ва y миқдорлар орасидаги боғланиш формула орқали ифодаланади.

Функция жадвал усулида берилганда x ва y миқдорлар орасидаги боғланиш жадвал кўринишда ифодаланади.

Функция график усулида берилганда унинг графиги маълум бўлиб, аргументнинг турли қийматларига мос келувчи қийматлари бевосита графикдан топилади.

2. ЧЕКАРАЛАНГАН, ЖУФТ ВА ТОҚ ФУНКЦИЯЛАР.

Бирор X тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлсин.

5-Таъриф. Агар шундай ўзгармас M сон топилмасини, $Ax \in X$ учун

$$f(x) \leq M$$

Тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан чегараланган функция дейилади.

6- Таъриф. Агар шундай ўзгармас m сон топилсаки, $Ax \in X$ учун $f(x) \geq m$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x тўпламда қўйидан чегараланган функция дейилади.

7-Таъриф. Агар $f(x)$ функция x тўпламда ҳам юқоридан, қўйидан чегараланганган функция бўлса, яъни шундай ўзгармас m ва M сонлар топилсаки

$$Ax \in X \text{ учун } m \leq f(x) \leq M .$$

Тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция x тўпламда чегараланган функция дейилади.

Мисол. Ушбу $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ функцияни қарайлик $x = (\infty; +\infty)$ да аниқланган. $Ax \in (\infty; +\infty)$ да

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} > 0 \text{ бўлади.}$$

Демак, берилган функция қўйидан чегараланган. Берилган функцияни

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4}$$

тарзда ёзиб оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қушилувчи барча $x \in (\infty; +\infty)$ да биридан катта бўлмайди.

$$\frac{1}{1+x^4} \leq 1$$

Энди иккинчи қўшилувчи $\frac{x^2}{1+x^4}$ ни баҳолаймиз.

Агар $0 \leq (1-x^2)^2 = 1-2x^2+x^4$ эканани эътиборга олсак, унда

$$1+x^4 \geq 2x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2} \text{ га эга бўламиз.}$$

Натижада барча $x = (\infty; +\infty)$ учун

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган функция юқоридан чегараланган. Шундай қилиб, функциянинг ҳам қўйидан, ҳам юқоридан чегараланганлиги исботланади.

3. ЖУФТ ВА ТОҚ ФУНКЦИЯЛАР.

Бирор X ҳақиқий сонлар тўпламини қарайлик.

Агар $\forall x \in X$ учун, $-x \in X$ бўлса, у ҳолда X тўплам 0 нуқтага нисбатан симметрик тўплам дейилади. X тўпламда $y = f(x)$ функция берилган бўлсин.

8-Таъриф. Агар ихтиёрий $-x \in X$ учун

$$f(-x) = -f(x) \quad (1)$$

Тенглик бажарилса, $f(x)$ тоқ функция дейилади. $y = x^3$, $y = \frac{x}{1+x^2}$

функциялар тоқ функциялар бўлади.

Жуфт функциянинг графиги координата ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлади. Тоқ функцияси графиги координата бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

Фараз қилайлик $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларни ҳар бири 0 нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда аниқланган бўлсин.

1⁰. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар жуфт функциялар бўлса, у ҳолда $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) функциялар ҳам жуфт бўлади.

2⁰. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар тоқ функциялар бўлса, у ҳолда $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, функциялар тоқ бўлади,

$$f(x) \cdot g(x) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

функция эса жуфт бўлади.

4. МОНОТОН ФУНКЦИЯЛАР

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

10-Таъриф. Агар аргумент x нинг X тўпламдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ бўлишидан

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$$

Тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқса, у ҳолда $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаювчи) функция дейилади.

Ўсувчи ва камаювчи функциялар монотон функцилар монотон функцилар дейилади. Мисол: Ушбу $f(x) = x^2$ функция $[0; +\infty]$ да ўқувчи бўлади. $[0; \infty]$ да x_1 ва x_2 нуқталар олиб $x_1 < x_2$ бўлсин. $0 \leq x_1 < x_2 < +\infty$ унда

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$$

бўлади, чунки $x_1 + x_2 > 0$ $x_1 + x_2 > 0$

Натижада $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$ тенгсизликка эга бўламиз.

Демак $x_1 - x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $[0; +\infty]$ да функция ўсувчи экан.

Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, c ўзгармас сон бўлсин. У ҳолда

1⁰. $f(x) + c$ функция ўсувчи (камаювчи) бўлади.

2⁰. $C < 0$ бўлганда $C \cdot f(x)$ функция камаювчи бўлади.

3⁰. $f(x) + g(x)$ функция ўсувчи (камаювчи) бўлади.

5. ДАВРИЙ ФУНКЦИЯЛАР

$y = f(x)$ функция x тўпламда аниқланган бўлсин.

11- Таъриф. Агар шундай ўзгармас $T (T \neq 0)$ сон мавжуд бўлсаки, ихтиёрий $x \in X$ учун

$$1. x - T \in X, x + T \in X$$

$$2. f(x + T) = f(x)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ даврий функция дейилади. T сон функциянинг даври дейилади.

Масалан. $y = \sin x$, $\cos x$ функциялар даврий функциялар даврий функциялар бўлиб, уларнинг даври 2π га тенг. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ функциялар ҳам даврий функция, уларнинг даврий π га тенг.

1⁰. Агар $f(x)$ даврий функция бўлиб, унинг даври T га тенг бўлса, $T_n = nT$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) сонлар ҳам шу функциянинг даври бўлади.

2⁰. Агар T_1 ва T_2 сонлар $f(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $T_1 + T_2$ ($T_1 + T_2 \neq 0$) ҳамда $T_1 \cdot T_2$ ($T_1 \cdot T_2 \neq 0$) сонлар ҳам $f(x)$ функциянинг даври бўлади.

3⁰. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ даврий функциянинг бўлиб, уларнинг ҳар бирининг даври 1 га тенг бўлса, у ҳолда

$f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$) функциалар ҳам даврий

функциялар бўлиб, T сон уларнинг ҳам даври T бўлади.

6. ТЕСКАРИ ФУНКЦИЯ. МУРАККАБ ФУНКЦИЯ

$y = f(x)$ функция x тўпламда аниқланган бўлиб, Y_f эса бу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин.

$$Y_f = \{f(x) : x \in X\}$$

Айтайлик Y_f тўпламдаги ҳар бир y сон тўпламдаги биттагина x нинг қийматига мос келсин. Бу ҳолда Y_f тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламда битта x мос келиб, бу мослик натижасида функция ҳосил бўлади. Одатда бу функция $y = f(x)$ функцияга нисбатан тескари функция дейилади ва $y = f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

Мисол: $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Функцияни $[0:1]$ да қарайлик. Бу функция қийматлари тўплами

$$Y_f = \left[1: \frac{3}{2}\right]$$

бўлади $Y_f = \left[1: \frac{3}{2}\right]$ да аниқланган ушбу $x = y^2 - 1$ функция берилган $y = \frac{1}{2}x + 1$ функцияга нисбатан тескари функция бўлади. $y = f(x)$ да x -аргумент, y эса функцияси тескари $y = f^{-1}(y)$ функцияда эса y -аргумент, x эса унинг функцияси бўлиши кўринади.

$y = f(x)$ функцияда X да аниқланган бўлиб, Y_f эса шу функция қийматлари тўплами бўлсин.

Бу Y_f тўпламда $z = F(y)$ функция аниқланган бўлсин. Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га Y_f тўпламда битта y : $f : x \rightarrow y$ ($y = f(x)$) Ва Y_f тўпламдаги бундай y сонга битта z : $f : x \rightarrow y$ ($y = f(x)$) сон мис қўйилади. Демак X тўпламдан олинган ҳар бир x сон битта z сон мос қўйилиб, янги функция ҳосил бўлади:

$$z = F(f(x)).$$

Одатда бундай функция дейилади. Бу мураккаб функция $y = f(x)$ ҳамда $z = F(y)$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган.

Масалан: $z = (x+1)^2$ функция $y = x+1$ ва $z = y^2$ функциялар ёрдамида ҳосил бўлган мураккаб функциядир.

7-ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР

1⁰. Бутун рационал функциялар. Ушбу $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ кўринишдаги бутун рационал функция дейилади. Бунда $a_0, a_1, \dots, a_n$ ўзгармас сонлар, n эса натурал сон. Бу функция $R = (-\infty; +\infty)$ да аниқланган.

Бутун рационал функцияни баъзи хусусий ҳоллари

А) Чизикли функция $y = ax + b$ ($a \neq 0$) кўринишга эга, a, b -ўзгармас сонлар.

Б) Квадрат функция $y = ax^2 + bx + c$ кўринишга эга $R = (-\infty; +\infty)$ да аниқланган. Унинг графиги параболадан иборат.

2⁰. Каср рационал функция.

Ушбу

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m}$$

Кўринишдаги функция каср рационал функция дейилади. Бу функция

$$X = (-\infty; +\infty) \setminus \{x \mid a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0\}$$

Тўпلامдаги аниқланади. Баъзи хусусий ҳоллари.

А) Тескари пропорционал боғланишни ифодалавчи ушбу $y = \frac{1}{x}$ $x \neq 0$ функция қарайлик.

1. $x = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ да аниқланган.

2. тоқ функция. Унинг графиги координата бошига нисбатан симметрик. Унинг графиги дейилади.

Б) Касб чизикли функция $y = \frac{a_x + b}{c_x td}$ кўринишга эга.

Бу функция $x = (-\infty; +\infty) \setminus \left\{-\frac{a}{c}\right\}$ тўпلامда аниқланган.

3⁰. Даражали функция. Ушбу $y = x^a$ ($x \geq 0$) кўринишдаги функция даражали функция дейилади. Даражали функциянинг аниқланиш соҳаси a га боғлиқ бўлади. Агар $x > 0$ бўлса, $y = x^2$ функция $(0; +\infty)$ да ўсувчи $x > 0$ да камаювчи бўлади. Даражали функция графиги текисликнинг $(0,0)$ ҳамда $(1:1)$ нуқталардан ўтади.

4⁰. Кўрсаткичли функция ушбу $y = a^x$ кўринишдаги функция кўрсаткичли функция дейилади $x > 0$, $a \neq 1$ Кўрсаткичли функция.

- 1). $(-\infty; +\infty)$ да аниқланган.
- 2). Ихтиёрий x да $y = a^x > 0$
- 3). $a > 1$ бўлганда ўсувчи, $0 < a < 1$ бўлганда камаювчи.

5⁰. Логарифмик функция. Ушбу $y = \log_a x$ функция логарифмик функция дейилади, бунда $a > 0, a \neq 1$. Логарифмик функция

- 1). $(-\infty; +\infty)$ да аниқланган.
- 2). $y = a^x$ функцияга нисбатан тескари функция.
- 3). $a > 1$ да ўсувчи, $0 < a < 1$ да камаювчи.

6⁰. Тригонометрик функциялар. Ушбу $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x$ функциялар тригонометрик функциялар дейилади. $y = \sin x, y = \cos x$ функция $(-\infty; +\infty)$ да аниқланган зет даврли функциялар бўлиб, ихтиёрий x да

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1,$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

7⁰. Тескари тригонометрик функциялар, ушбу функциялар, ушбу функциялар $y = \arcsin x, y = \operatorname{arctg} x, y = \arccos x$ функциялар тескари тригонометрик функциялар дейилади. $y = \operatorname{arctg} x, y = \arccos x$ функцияларининг аниқланиш соҳаси $[-1; 1]$ оралиқдан иборат бўлиб, қийматлари тўплами $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ дан иборатдир.

15-МАВЗУ: СОНЛИ КЕТМА-КЕТЛИКЛАР ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИК ТУШУНЧАСИ

Аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўплами $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ дан иборат бўлган функцияларни қараймиз.

Айтайлик, N тўпламдаги бирор $f(n)$ функция берилган бўлсин. Бу функция қийматларини x_n билан белгилаймиз.

$$\begin{aligned} f(n) &= x_n \\ (f(1) &= x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots) \end{aligned} \quad (1)$$

Қаралаётган функция қийматларидан ташкел топган ушбу

$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

Тўплам сонлар кетма-кетлиги дейилади.

Масалан: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$

сонлар кетма-кетлиги $f(n) = \frac{n+1}{n}, \quad (n=1,2,3,...)$

функциянинг қийматларидан ташкел топган.

69

(1) кетма-кетликни ташкил этган $x_n (n=1,2,3,...)$ сонлар унинг ҳадлари дейилади: x_1 – биринчи ҳади; x_2 – иккинчи ҳади ва ҳоказо, x_n – кетма-кетликнинг n -ҳади (умумий ҳади). (1) кетма-кетлигни қисқача x_n ёки $\{x_n\}$ каби белгиланади.

Кўп ҳолларда кетма-кетликларнинг умумий ҳади формула билан ифодаланади. Унинг барча ҳадлари шу формула орқали топилади.

Мисоллар.

$$1. x_n = \frac{1}{n}, n \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{(-1)^n}{n^2}, ...$$

$$2. x_n = n, 1, 2, 3, ..., n, ...$$

$$3. x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, -1, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{3^2}, ..., \frac{1}{2^2},$$

$$4. x_n = 1, 1, 1, ..., 1, ...$$

$$5. x_n = aq^{n-1}, a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}$$

Бирор $\{x_n\} x_1, x_2, ..., x_n, ...$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

1-Таъриф: Агар шундай ўзгармас M сон топилсаки, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади шу сондан катта бўлмасаб яъни $n \in N$ учун

$$x_n \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ юқоридан чегараланган кетма-кетлик дейилади.

2-Таъриф: Агар шундай ўзгармас m сон мавжуд бўлсин, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳар бир ҳади шу сондан кичик бўлмаса, яъни $\forall n \in N$ учун

$$x_n \geq m$$

Тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кўйидан чегараланган кетма-кетлик дейилади.

3-Таъриф: Агар кетма-кетлик ҳам кўйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас m ва M сонлар топилсаки $\forall n \in N$ учун

$$m \leq x_n \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлса $\{x_n\}$ чегараланган кетма-кетлик дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

$$1+1, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{9}, ..., 1+\frac{1}{n^2}, ...$$

кетма-кетлик юқоридан чегараланган, чунки ихтиёрий $n \in N$

$$x_n \leq 2 \quad (M=2)$$

тенгсизлик ўринли

$$2. \text{Ушбу } x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; 1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \dots$$

Кетма-кетлик қўйдан чегараланган, чунки $\forall n \in N$ учун $x_n \geq -\frac{1}{4}, \left(m = -\frac{1}{4}\right)$

тенгсизлик ўринли.

$$3. \text{Ушбу } x_n = \frac{n^2-1}{n^2}; 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \dots, \frac{n^2-1}{n^2}, \dots \text{ кетма-кетлик}$$

чегараланган, чунки $\forall n \in N$ учун $0 \leq x_n \leq 1$ тенгсизлик ўринли.

4-Таъриф: Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари қуйидаги

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

$$(x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots)$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, яъни $\forall n \in N$ учун

$$x_n \leq x_{n+1} (x_n < x_{n+1})$$

бўлса, $\{x_n\}$ ўсувчи (қатъий ўсувчи) кетма-кетлик дейилади.

5-Таъриф: Агар $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

$$(x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots)$$

тенгсизликларни қаноатлантирса, яъни $\forall n \in N$ учун бўлса, $\{x_n\}$ камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетлик дейилади.

Ўсувчи ва камаювчи кетма-кетликлар манотон кетма-кетликлар дейилади.

Мисол: Ушбу $x_n = \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ кетма-кетлик ўсувчи эканинг

кўрсатинг. Бу кетма-кетликнинг $x_n = \frac{n}{n+1}, x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

ҳадларини олиб, $x_{n+1} - x_n$ айирмани қараймиз:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$\forall n \in N \text{ учун } \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Демак $\forall n \in N$ да $x_{n+1} - x_n > 0$, яъний $x_n - x_{n+1}$ бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг ўсувчи эканлигини билдиради.

Фараз қилайлик $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликлар белгиланган бўлсин

71

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n, \dots$$

Кетма-кетликлар мос равишда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ сонлар кетма-кетликлар йиғиндиси ҳамда айирмаси дейилади ва $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}$ каби белгиланади.

Ушбу

$$x_n \cdot y_n, x_n \cdot y_n, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_1}{y_1}, \dots (y_n \neq 0, n = 1, 2, \dots)$$

Кетма-кетликлар мос равишда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар кўпайтмаси ҳамда бўлинмаси дейилади ва $\{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ каби белгиланади.

2. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИНИ ЛИМИТИ

Аввало нуқтанинг атрофи тушунчасини киритайлик. Бирор a нуқта берилган бўлсин. Ихтиёрий ε мусбат сон $\{\forall \varepsilon > 0\}$ ни қарайлик.

Ушбу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ интервал a нуқтанинг атрофи (ε -атрофи) дейилади. (23-чизма).

$$a - \varepsilon \quad a \quad a + \varepsilon$$

23-чизма

ε - турли қийматларга тенг бўлганда a нуқтанинг турли атрофлари ҳосил бўлади, $a = 1, \varepsilon = \frac{1}{3}$ атрофи $\left(1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right)$ интэрволдан иборат бўлади.

Бирор $\{x_n\}, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ кетма-кетлик ҳамда a нуқта берилган бўлсин.

Бу кетма-кетликнинг ҳадлари a нуқтанинг бирор атрофидаги тенгишли бўладими, тенгиши бўлса, нечта ҳади тенгишли бўлади-шуларни аниқлаш кетма-кетликнинг лимит тушунчасини муҳум роль ўйнайди.

Бирор нуқта атрофига кетма-кетликнинг чекли сондаги ҳадлари тегишли бўлиши, бирор ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари, жумладан

кетма-кетликнинг барча ҳадлари тегишли бўлиши, битта ҳам ҳади тегишли бўлмаслиги мумкин.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳамда бирор a сон берилган бўлсин.

6-Таъриф: Агар a нуктанинг ихтиёрий $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ атрофи олинганда ҳам $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳамда бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлса, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимити дейилади ва

72

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ёки $(\lim x_n = a)$ ёки $x_n \rightarrow a$ каби белгиланади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳамда бирор ҳадидан бошлаб, кейинги барча ҳадлари a нуктанинг ихтиёрий $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ атрофи тегишлилиги, $a \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай натурал сон топилиб, барча $n > n_0$ учун

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

тенгсизлиг ўринли бўлишидан иборатдир.

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

У ҳолда кетма-кетликни лимити таърифни қуйидагича таърифлаш мумкин

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

Тенгсизлик бажарилсин, a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади.

Мисол: $x_n = \frac{1}{n^2} : 1, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$ кетма-кетликнинг лимити $a = 0$ эканини кўраситинг.

$a \varepsilon > 0$ мусбат сон олинади. Кейин бу сонга кўра шундай натурал n_0 сони топилиш учун кўрсатиш керакки, берилган кетма-кетликнинг n_0 -ҳадидан бошлаб кейинги барча ҳадлари қуйдаги

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad (2)$$

Тенгсизликни қаноатлантирсин. Одатда бундай n_0 натурал сонда (2) тенгсизлик бажарилсин деб, ундан фойдаланиб топилади:

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}, n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Агар n_0 сонни $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ дан катта қилиб олинса, унда барча $n > n_0$ учун $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

Бинобарин, $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

демак нол сони $x_n = \frac{1}{n^2}$ кетма-кетликнинг лимити экан. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $\{x_n\}$

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимити 0 га тенг бўлса $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $\{x_n\}$ ҳолда $\{x_n\}$

чексиз кичик миқдор дейилади.

бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар ҳар қандай мусбат M сон берилганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топилсаки, барча $n > n_0$ учун

$$x_n > M \quad (x_n < -M)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимити $+\infty(-\infty)$ деб қаралади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимити чексиз

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ чексиз катта миқдор дейилади.

8-Таъриф: Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимити чекли сон бўлса, уни яқинлашувчи кетма-кетлик дейилади.

Агар кета-кетликнинг лимити чексиз ёки лимитга эга бўлмаса, уни узоклашувчи кетма-кетлик дейилади.

16-МАВЗУ: ЯҚИНЛАШУВЧИ КЕТМА-КЕТЛИКЛАР ҲАҚИДА **ТЕОРЕМАЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССЛАРИ**

1-Теорима: Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, у яқинлашувчи бўлади.

Исбот. $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса. Кетма-кетлик юқоридан чегараланган бўлгани учун барча ҳадларидан тузувчи $\{x_n\}$ тўплам ҳам юқоридан чегараланган бўлади.

Демак, $\forall n \in N$ учун

$$x_n \leq a$$

Ва $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам кетма-кетликнинг шундай x_{n_0} ҳади топиладики.

$$x_n > a - \varepsilon \text{ тенгсизлик бажарилади.}$$

Шарта кўра $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи. Шунинг учун $n > n_0$ бўлганда

$$x_n \geq x_{n_0}$$

бўлади. Натижада $0 \leq a - x_n < \varepsilon$, яъни $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизли келиб чиқади. Бу эса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

эканини билдиради. Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи. 1-теорема исбот бўлди.

2-Теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қўйидан чегараланган бўлса, у яқинбўлади. Бу теорема юқоридаги 1-теоремага ўхшаш исботланади.

9-Таъриф: Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ барча $m > n_0$ лар учун

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик дейилади.

Ҳар қандай яқинлашувчи кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади. Шунини исботлайлик.

$\{x_n\}$ кетма-кетмика яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити a бўлсин.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

лимит таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ га кўра шундай $n_0 \in N$

топиладики, барча $n > n_0$ учун $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ жумладан, $m > n_0$ учун

ҳам $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Равшанки

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Демак, $\{x_n\}$ фундаментал кетма-кетлик.

Энди фундаментал кетма-кетликнинг яқинлашувчилиги ҳақида қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

3-Теорема (Қоши теоремаси). Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлса, у яқинлашувчи бўлади.

ЯҚИНЛАШУВЧИ КЕТМА-КЕТЛИКНИНГ ХОССАЛАРИ

1⁰. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягона бўлади.

2⁰. $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда у чегараланган бўлади.

3⁰. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n \pm y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

бўлади.

3⁰. –хоссани исботи. $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ бўлсин. Лимит тарифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики барча $n > n_0$ учун

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(1)

бўлади. Шунингдек $\frac{\varepsilon}{2}$ сонга кўра шундай $n_0 \in N$ топиладики барча $n > n_0$ учун

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(2)

бўлади. Агар n_0'' ва n_0'' натурал сонларнинг каттасини n_0 десак, унда барча $n > n_0$ учун бир йул (1) ва (2) тенгсизликлар бажарилади. Шуларни эътиборга олиб топамиз: $|(x_n + y_n) - (a + \epsilon)| = |(x_n - a) + (y_n - \epsilon)| \leq |x_n - a| + |y_n - \epsilon| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

75

Бу эса $a + \epsilon$ сон $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетликнинг лиминти бўлишини билдиради.

Демак. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a + \epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ Худди шунга ўхшаш

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ эканини исботланади.

4⁰. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ бўлади.}$$

Натижада. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, $\{c \cdot x_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

бўлади. Бунда c - ўзгармас сон

5⁰. Агар (x_n) ва (y_n) кетма – кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $y_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$

ва $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма – кетлик ҳам яқинлашувчи ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \text{ бўлади.}$$

6⁰. Агар (x_n) ва (y_n) кетма – кетликлар яқинлашувчи бўлиб, $\forall n \in N$ да $x_n \leq y_n$ ($x_n \geq y_n$) бўлса, у ҳолда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$) бўлади.

7⁰. Агар (x_n) ва (z_n) кетма – кетликлар яқинлашувчи ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ бўлиб, $\forall n \in N$ да

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

Бўлса, у ҳолда (y_n) кетма – кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ бўлади

8⁰. Агар (x_n) кетма – кетлик яқинлашувчи бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ бўлса у ҳолда $x_n = a + \alpha_n$ бўлади ва аксинча, бунда α_n чексиз кичик миқдор.

17 – МАВЗУ. СОНЛАР КЕТМА – КЕТЛИГИНИ ЛИМИТИНИ ХИСОБЛАШ ℓ – СОНИ

1. ЛИМИТИНИ ХИСОБЛАШ

Сонлар кетма – кетлигини мавзусининг асосий масалаларидан бири унинг лимитини топишдан иборат. Кетма – кетликнинг лимитини топишда таърифлар ва хоссалардан фойдаланамиз.

Мисол. Ушбу $x_n = c : c, c, c, \dots, c, \dots (c = \text{const})$ кетма – кетликни қарайлик, с нуқтанинг ихтиёрий атрофи $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ни олайлик. Берилган кетма – кетликнинг барча ҳадлари шу атрофга тегишли бўлади. Унда таърифга кўра

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

76

Бўлиши келиб чиқади.

Мисол. Ушбу $x_n = \sqrt[n]{a} (a \geq 0)$ кетма – кетликни қарайлик.

1. $a > 1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$a_n = \sqrt[n]{a} - 1$$

дейилса, унда $a_n > 0$ бўлиб

$$a_n = \sqrt[n]{a} - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + a_n \Rightarrow a = (1 + a_n)^n$$

бўлади. Ньютон бинoми формуласидан

$$(1 + a_n)^n = 1 + n \cdot a_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_n^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_n^3 + \dots + a_n^n$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги ҳар бир қўшилувчи мусбатдир. Шунинг учун $(1 + a_n) \geq 1 + n \cdot a_n$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $a \geq 1 + n \cdot a_n$. Кейинги

тенгсизликдан $x_n \leq \frac{a-1}{n}$ бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $0 < a_n \leq \frac{a-1}{n}$ бўлади. $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{n} = 0$. Унда 7^0 – хоссага кўра

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ бўлади. Демак a_n - чексиз кичик миқдор. (1) муносабатдан топамиз:

$\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$ 3^0 – хоссага мувофиқ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ бўлади.

2) $a=1$ бўлганда $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$ бўлиб $\lim_{n \rightarrow \infty} a = 1$ бўлади.

3) $0 < a < 1$ бўлсин. Бу ҳолда $\frac{1}{a} > 1$ бўлади. 5^0 - хоссадан фойдаланиб

топамиз.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Демак, $a > 0$ бўлганда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Иккита $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма – кетликда берилган бўлиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

бўлсин. $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма – кетликни лимитини топишда 5^0 – хоссадан фойдаланиб

бўлмайди, чунки мазкур хоссада келтирилган шарт $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ бажарилмайди.

$n \rightarrow \infty$ да $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ кетма – кетликнинг лимити $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма – кетликлардан ҳар бирининг нолга қандай интилишига қараб турлича бўлади. Шунинг учун $\left(\frac{0}{0} \right)$ кўринишдаги аниқмаслик деб юритилади.

3 – мисол. Ушбу $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{3n^3+n+1}}$ ни ҳисобланг

77

Берилган кетма-кетлик лимити қуйидагича топилади.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3+1}}{\frac{1}{3n^3+n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+n+1}{n^3+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(3 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)} = \frac{3}{1} = 3$$

2. ℓ СОНИ

Монотон чегараланган кетма – кетликнинг лимити ҳақидаги теоримани ушбу муҳим $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \ell$ лимитни келтириб чиқаришга татбиқ этамиз

$\{X_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ кетма-кетликни қараймиз. Ньютон биномига кўра

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right)$$

(1)

Бу кетма-кетлиги ўсувчи.

$R = 1, 2, \dots, y_m \left(1 - \frac{R}{n} \right) < 1$ эканини айтиб ўтамиз. У ҳолда

$x_m = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$ бўлади.

Сўнгра

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3} \dots, \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Эканлигини ҳисобга олсак, юқоридаги формулани бундай ёзиш мумкин.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Қавсга олинган хадлар махражи $q = \frac{1}{2}$ ва биринчи хади 1 бўлган геометрик прогрессия ҳосил қилади. Шу сабабли

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

(1) тенгликдан $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ экани келиб чиқади. Шундай қили, ушбу тенгсизликларни ҳосил қилдик:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad (3)$$

Демак кетма-кетликнинг чегараланган ўсувчи, чегараланган кетма-кетлик лимитга эга. Бу лимитки ℓ ҳарфи билан белгилаймиз $2 < \ell < 3$ шартини қаноантиради $\ell = 2,7182018$.

18-МАВЗУ ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ ТАЪРИФЛАРИ

Функция лимитини ўрганишдан

1 – таъриф. Агар $a \in \mathbb{R}$ нуқтанинг ихтиёрий ε атрофида ($\varepsilon > 0$) X тўпламнинг чексиз кўп элементлари ётса, а нуқта катта X тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади. Масалан: $X = \left\{\frac{1}{n}\right\} \quad (n \in \mathbb{N})$ тўплам учун 0 лимит нуқтадир.

Агар а нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у холда X да а га яқинлашувчи кетма-кетлик ажратиш мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам а нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин. У холда а нуқтанинг ихтиёрий ε - атрофида X нинг чексиз кўп элементлари ётади. ε нинг $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ нуқталари учун а нуқтанинг ε - атрофларини қарайлик $\varepsilon=1$ учун $(a-1, a+1)$ ораликда X тўпламнинг чексиз кўп элементлари ётади. Бу атрофдан X тўпламнинг a_{k_1} элементини оламиз $\varepsilon = \frac{1}{2}$ учун а нуқтанинг

$\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ атрофидан X тўпламининг a_{k_1} элементини оламиз ва хакозо $(k_2 > k_1)$. Натижада ушбу $x_k, x_{k_2}, x_{k_1}, \dots, x_{k_n}, \dots$ кетма-кетлик ҳосил бўлади. Бу кетма-кетлик учун $|x_{k_n} - a| < \frac{1}{n}$ бўлади. Бу тенгсизликдан $\{x_{k_n}\}$ кетма-кетликнинг а нуқтага яқинлашиши келиб чиқади.

Энди X тўпладан a га яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлсин. У холда яқинлашувчи кетма-кетлик таърифига биноан a нуқтанинг ихтиёрий ε атрофида $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг, жумладан X тўпланинг чексиз кўп элементлари ётади. Демак, таърифга кўра a нуқта X тўплам учун лимит нуқтаси бўлади. Шундай қилиб, X тўпланинг лимит нуқтаси тушунчасини қуйидагича таърифлаш мумкин.

2 – таъриф. Агар X тўпладан a га яқинлашувчи кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, a нуқта X тўпланинг лимит нуқтаси дейилади.

3 – таъриф. Агар X тўпладан мусбат элементлардан иборат (манфий элементлардан иборат) чексиз катта кетма-кетлик ажратиш мумкин бўлса, $+\infty$ ($-\infty$) “нуқта” X тўпланинг лимит нуқтаси дейилади.

$f(x)$ функция X тўпланда берилган бўлиб, a нуқта X тўпланинг лимит нуқтаси бўлсин. (Умуман айтганда a X тўпламга тегишли бўлиши шарт эмас).

4 – таъриф. Агар X тўпланинг нуқталаридан тузилган, $a \approx a$ яқинлашувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, функция қийматларидан иборат $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона (чекли ёки чексиз) в лимит интилса, шу a га $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (x нинг a га интилгандаги) лимити дейилади ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$$

каби белгиланади. Функциянинг лимитига берилган таъриф Гейне таърифи дейилади.

Мисоллар. Ушбу $f(x) = x^3$ функциянинг $x=2$ нуқтадаги лимити 8 га тенг эканлигини кўрсатинг. Ҳар бир ҳади 2 дан фарқли бўлган 2 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \quad (x_n \neq 2, n = 1, 2, \dots)$$

У холда

$$f(x_n) = x_n^3$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида амалларга кўра

$$\lim_{x_n \rightarrow 2} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n^3 = \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n \cdot \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n \cdot \lim_{x_n \rightarrow 2} x_n = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

бу эса 4-таърифга кўра $f(x) = x^3$ функциянинг $x \rightarrow 2$ даги лимити 8 га тенглигини билдиради. Энди функция лимитининг яна бир таърифини келтирамиз.

5-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - B| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса в сон $f(x)$ функциянинг a нуқтада ($x \rightarrow a$) лимити дейилади ва

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$$

каби белгиланади. Функция лимитига берилган ушбу таъриф Коши таърифи дейилади.

Мисол. $f(x) = \sin x$ функциянинг $x = \frac{\pi}{6}$ нуктадаги limiti $\frac{1}{2}$ эканлигини кўрсатинг.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Бу ε га кўра $\delta = \varepsilon$ ни деб олсак, у ҳолда $0 < \left| x - \frac{\pi}{6} \right| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда қуйидаги

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| = \left| \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \right| = \left| 2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{6}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{6}}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{x - \frac{\pi}{6}}{2} = \left| x - \frac{\pi}{6} \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$ эканлиги келиб чиқади.

1-теорема. Функция limiti учун берилган Гейне ва Коши таърифлари ўзаро эквивалентдир.

Исбот.1) $f(x)$ функция a нукта 4-таърифга кўра лимитга эга бўлсин, яъни X тўпламнинг нуқталаридан тузилган a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\} (x_n \neq a, n=1,2,...)$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ягона в лимитга интилсин. Биз шу в сон функциянинг $x=a$ нуктада 5-таърифга кўра ҳам limiti бўлишини кўрсатамиз.

Тескарисини фараз қилайлик, яъни $f(x)$ функция $x=a$ нуктада 4-таърифга кўра в лимитга эга бўлса ҳам, функция шу нукта 5-таърифга кўра в лимитга эга бўлсин. Унда бирор $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ сон учун ихтиёрий кичик мусбат δ сон олинганда ҳам аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизлигини қаноатлантирадиган бирор x_1 қийматида $|f(x_1) - B| \geq \varepsilon_0$ бўлади. Нолга интилувчи мусбат сонлар кетма-кетлиги (δ_n) ни олайлик. У ҳолда юқоридагига кўра ҳар бир $\delta_n > 0$ ($n=1,2, \dots$) учун x аргументнинг тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай $x = x_n$ ($n=1,2,3, \dots$) қиймати топиладики $0 < |x_n - a| < \delta_n$ ва $|f(x) - B| \geq \varepsilon_0$ бўлади. Аммо $\delta_n \rightarrow 0$ дан $x_n \rightarrow a$ бўлиши, бундан эса 4-таърифга кўра в лимитга эга бўлишидан унинг шу нуктада 5-таърифга кўра ҳам в лимитга эга бўлиши келиб чиқади.

2) $f(x)$ функция 2-таърифга кўра лимитга лимитга эга бўлсин, яъни $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликлар бажарилганда $|f(x) - B| < \varepsilon$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар бир ҳади a дан фарқли ва a га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик

Сонлар кетма-кетлиги лимитининг таърифига кўра, юқоридаги $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, барча $n > n_0$ лар учун $|x_n - a| < \delta$ тенгсизлик ўринли бўлади. Натижада $x_n \neq a$ ($n=1,2,3, \dots$) муносабатга кўра $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликлар келиб чиқади.

Бу тенгсизликлардан эса 5-таърифга кўра $|f(x_n) - B| < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $x_n \rightarrow a$ ва $f(x_n) \rightarrow B$ бўлади.

Биз юқоридаги $f(x)$ функция $x_n \rightarrow a$ даги чекли в лимитга эга бўлишнинг Коши таърифини келтирдик. $B = \infty$ ($B = +\infty, B = -\infty$) бўлган ҳолда функция лимитининг Коши таърифи қуйидагича ифодаланади.

6-таъриф. Агар $\exists E > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики x аргументнинг $0 < |x_n - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча қийматларида

$$|f(x)| > E \quad (f(x) > E_1 - f(x) > E)$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функциянинг a нуктадаги лимити $\infty(+\infty, -\infty)$ дейлади ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \right)$$

каби белгиланади.

Энди $f(x)$ функциянинг a нуктадаги ўнг ва чап лимитлари тушунчаларини киритамиз.

7-Таъриф: (Тейие таърифи) агар X тўпламнинг нукталаридан тузилган, ҳар бир ҳади a дан катта (кичик) бўлиб, $a < a$ интилувчи ҳар қандай (x_n) кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ функциянинг нуктадан ўнг (чап) лимити дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = v \quad \text{ёки} \quad f(a+0) = v$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = v \quad \text{ёки} \quad f(a-0) = v \right)$$

8-Таъриф: (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг тенгсизлигини қаноатлантирувчи барча қийматларда $|f(x) - v| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса в сон $f(x)$ функциянинг a нуктадаги ўнг (чап) лимити дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = v \quad \text{ёки} \quad f(a+0) = v$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = v \quad \text{ёки} \quad f(a-0) = v \right)$$

Функция лимити, функциянинг ўнг ва чап лимитлари таърифларидан бевосита қуйидаги теоремага келамиз.

2-Теорема: Агар $f(x)$ функция бирор a нуктада в лимитга эга бўлса, бу функция шу нуктада ўнг ва чап лимитга эга бўлиб,

$$f(a+0) = v$$

муносабат ўринли ва аксинча $f(x)$ функция a нуктада ўнг ва чап лимитларга эга бўлиб, бу лимитлар ўзаро тенг (в га тенг) бўлса, у ҳолда бу нуктада функция лимитга эга ва бу лимит ҳам в га тенг бўлади.

Энди $x \rightarrow \infty (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)$ да функция лимитини тушунчасини келтирамиз.

9-Таъриф: (Гейни таърифи). Агар X тўпламнинг нукталаридан тузилган ҳар қандай чексиз (катта) (мусбат чексиз катта, манфий чексиз катта) $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик в га

интилса, в сон $f(x)$ нинг $x \rightarrow \infty$ даги $(x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)$ лимити деилади ва

$$f(a+0) = \epsilon \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \epsilon \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a-0) = \epsilon \right)$$

каби белгиланади.

10-Таъриф: (Коши таърифи). Агар $\forall \epsilon > 0$ сон учун шундай Δ сон топилмасы, x аргументнинг $|x| > \Delta, (x > \Delta, -x > \Delta)$ тенгсизликнини қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x) - \epsilon| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилса в сон $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty (x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty)$ даги лимити дейилади.

83

Мисол: Ушбу $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-1}$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги лимити $\frac{1}{2}$ га тенг эканлиги кўрсатинг.

Агар $\forall \epsilon > 0$ учун $\Delta = \sqrt{\frac{3}{4\epsilon} + \frac{1}{2}}$ деб олинса, у ҳолда $|x| > \Delta$ тенгсизликнинг қаноатирквчи барча x ларда

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{x^2+1}{2x^2-1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

бўлади. Ҳақиқатан ҳам.

$$\left| \frac{x^2+1}{2x^2-1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2x^2+2-2x^2+1}{2(2x^2-1)} \right| = \frac{3}{2(x^2-1)} \text{ бўлиб } \frac{3}{2(x^2-1)} < \epsilon \text{ тенгсизликда } x^2 > \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$|x| > \sqrt{\frac{3}{4\epsilon} + \frac{1}{2}} \text{ бўлишини топамиз.}$$

$$\text{Демак, } \Delta = \sqrt{\frac{3}{4\epsilon} + \frac{1}{2}}$$

19-МАВЗУ: ЧЕКСИЗ КЕЧИК ВА ЧЕКСИЗ КАТТА ФУНКЦИЯЛАР ЛИМИТГА ЭГА ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОССАЛАРИ

1. ЛИМИТГА ХОС ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОССАЛАРИ

Чекли лимитга эга бўлган функциялар қатор хоссаларга эга бўлиб, бу хоссаларни ўрганишда асосан функция лимити таърифларидан фойдаланамиз.

$f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, а эса X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

1⁰. Агар $f(x)$ функция a нуқтада лимити мавжуд бўлса, бу лимит ягонадир.

2⁰. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \epsilon$ бўлиб, $\epsilon > p (\epsilon < q)$ бўлса у ҳолда a нинг етарлича кичик атрофидан $x (x \neq a)$ нинг қийматларида $f(x) > p (f(x) < p)$ бўлади.

3⁰. Агар $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \varepsilon \neq \infty$ бўлса у ҳолда а нинг етарлича кичик атрофидан олинган $x(x \neq a)$ нинг қийматларида $f(x)$ функция чегараланган бўлади.

3⁰. –хоссани исботи. Шартга кўра $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \varepsilon \neq \infty$ Коши таърифига кўра $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноантирувчи барча қийматларига $|f(x) - \varepsilon| < \varepsilon$ яъни $\varepsilon - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, x аргументнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларда $f(x)$ функциянинг қийматлари $(\varepsilon - \varepsilon, \varepsilon + \varepsilon)$ оралиқда бўлади. Бу эса функциянинг $(a - \delta, a + \delta)$ оралиқда чегараланганлигини кўрсатади.

84

$f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар X тўпланда берилган бўлиб, а нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

4⁰. Агар $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \varepsilon_1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \varepsilon_2$ бўлиб, x аргументнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларда $f_1(x) \leq f_2(x)$ бўлса, у ҳолда $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ тенгсизлик ўринли бўлади.

5⁰. Агар x аргументнинг $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = \varepsilon$ бўлса у ҳолда $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \varepsilon$ мавжуд у ҳам ε га тенг.

6⁰. Агар $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \varepsilon_1, \lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = \varepsilon_2$ бўлса у ҳолда $f_1(x) \pm f_2(x), f_1(x) f_2(x), \frac{f_1(x)}{f_2(x)} (f_2(x) \neq 0)$ функциялар ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f_1(x) \pm f_2(x)) = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (\varepsilon_2 \neq 0)$$

муносабатлар ўринли.

7⁰. Агар $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда ҳамда мавжуд $\lim_{x \rightarrow \infty} (k \cdot f(x))$ ҳам мавжуд ва у $k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ га тенг (k -const), яъни

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

8⁰. Агар $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ мавжуд ва чекли бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^m$ ҳам мавжуд ($m \in \mathbb{N}$) ва $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^m = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right]^m$ бўлади.

2. ЧЕКСИЗ КИЧИК ВА ЧЕКСИЗ КАТТА ФУНКЦИЯЛАР

Х тўпلامда $a(x)$ функция берилган бўлиб, а нукта шу тўпلامнинг лимит нуктаси бўлсин.

1-Таъриф: Агар $x \rightarrow a$, $a(x)$ функция лимити нолга тенг, яъни $\lim_{x \rightarrow a} a(x) = 0$ бўлса $a(x)$ функция а нуктада (ёки $x \rightarrow a$ да) чексиз кичик функция дейилади.

Масалан: $f(x) = \cos x, x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да, $\varphi(x) = x^2$ эса $x \rightarrow 0$ чексиз кичик функция бўлади.

Агар х тўпلامда берилган $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да кичик в лимитга эга бўлса, у ҳолда $a(x) = f(x) - \epsilon$ функция $x \rightarrow a$ да кичсиз кичик функция бўлади ва аксинча.

Ҳақиқатдан ҳам $\lim_{x \rightarrow a} a(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - \epsilon]$ бўлиб, чекли лимитга эга бўлган функция устундаги амалларга кўра

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - \epsilon] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \epsilon = 0 \text{ бўлади.}$$

Хадди шунингдек $x=a$ нуктада $f(x) = \epsilon$ эканини кўрсатилади.

Агар $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да кичли в лимитга эга бўлса, уни $f(x) = \epsilon + a(x)$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бунда $a(x)$ чиксиз кичик функция.

Энди Х тўпلامда берилган бирор $\beta(x)$ функциянинг лимити ∞ , яъни $\lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = \infty$ бўлса $\beta(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз катта функция деб аталади.

Масалан: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ функция $x \rightarrow a$ да, $\varphi(x) = \ell^{x^{\frac{1}{2}}}$ функция эса $x \rightarrow 0$ да чексиз катта функция бўлади.

Чексиз кичик чексиз катта функциялар қуйидаги хосаларга эга.

1⁰. Чекли сондаги чекли кичик функцияларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади.

2⁰. Чегараланган функция билан чексиз кичик функциянинг кўпайтмаси чексиз кичик функция бўлади.

3⁰. Агар $a(x)$ ($a(x) \neq 0$) чексиз кичик функция бўлса, $\frac{1}{a(x)}$ чексиз катта функция бўлади.

4⁰. $\beta(x)$ чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{\beta(x)}$ чексиз кичик функция бўлади.

3. ФУНКЦИЯЛАРНИ ТАҚҚОСЛАШ

Фраз қилайлик, X тўпلامда $a(x)$ ва $\beta(x)$ функциялар берилган бўлсин.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = 0$$

бўлсин, (а нукта X тўпلامнинг лимит нуктаси).

Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{\beta(x)} \quad (1)$$

1⁰. Агар (1) лимит 0 га тенг бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $a(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция бўлади ва $a(x) = 0(\beta(x))$ каби белгиланади.

2⁰. Агар (1) лимит 0 дан фарқли чекли сонга тенг бўлса, у функциялар дейилади.

3⁰. Агар (1) лимит 1 га тенг бўлса, у ҳолда $a(x)$ ва $\beta(x)$ га функциялар $x \rightarrow a$ да эквивалент дейилади ва $a(x) \sim \beta(x)$ каби белгиланади.

Қуйидаги ҳоссалар бевосита таърифдан келиб чиқади.

а) $0(\beta) \pm 0(\beta) = 0(\beta)$

б) Агар $y = 0(\beta)$ бўлса $0(\beta) \pm 0(y) = 0(\beta)$

в) Агар $a(x)$ ва $\beta(x)$ функция $x \rightarrow a$ да ихтиёрий тартибли чексиз кичик функциялар бўлса у ҳолда $a\beta = 0(a)$ ва $a\beta = 0(\beta)$ бўлади.

20. МАВЗУ: ФУНКЦИЯ ЛИМИТИ МАФЖУДЛИГИГА ОИД **ТЕОРЕМАЛАР АЖОЙИБ ЛИМИТЛАР**

$f(x)$ функция X тўпلامда берилган бўлиб, а нукта X тўпلامнинг лимит нуктаси ҳамда $\forall x \in X$ учун $x \leq a$ бўлсин.

1-Теорема: Агар $f(x)$ функция X тўпلامда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, юқоридан (қўйидан) чегараланган бўлса, а нуктада чекли лимитга эга бўлади.

Исбот. $f(x)$ функция X тўпلامда ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлсин. У ҳолда $\{f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}$ тўпلامнинг аниқ юқори чегараси мавжуд бўлади. Фараз қилайлик, $\sup \{f(x)\} = v$ бўлсин. У ҳолда аниқ юқори чегара хоссасига кўра

1⁰. $\forall x \in X$ учун $f(x) \leq v$

2⁰. $\forall \varepsilon > 0, \exists x^1 \in X, f(x^1) > v - \varepsilon$ муносабатлари ўринли бўлади.

Қаралаётган функция ўсувчи бўлгани учун $x^1 < X$ ларда $f(x^1) < f(x)$ тенгсизлик ўринли дир. Энди $v - \varepsilon < f(x)$ ва $f(x) < v$ эканлигини этиборга олсак

$$v - \varepsilon < f(x^1) < f(x) < v + \varepsilon$$

тенгсизликлар ҳосил бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг лимит эканини ифодалайди.

1-Таъриф: Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0 < |x^1 - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x^1 ва x'' ($x^1 \in X, x'' \in X$) қийматларда $|f(x^1) - f(x'')| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция а нуқтада Коши шarti бажарилади дейилади.

2-Теорема: (Коши теоремаси) $f(x)$ функция а нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун, бу функция а нуқтада Коши шартини қаноатлантириши зарур ва етарли.

Мисол: $f(x) = x \cos^2 \frac{1}{x}$ функция учун $x=0$ нуқтада Коши шarti бажарилишини кўрсатининг $\forall \varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин. Бу $\varepsilon > 0$ га кўра δ ни $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ деб олинса, у ҳолда x нинг

$$0 < |x^1 - 0| < \delta = \frac{\delta}{2}, \quad 0 < |x'' - 0| < \delta = \frac{\delta}{2}$$

тенгсизлик қаноатлантирувчи ихтиёрий x^1 , x'' қийматлари учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$|f(x'') - f(x^1)| = \left| x'' \cos^2 \frac{1}{x''} - x^1 \cos^2 \frac{1}{x^1} \right| \leq \left| x'' \cos^2 \frac{1}{x''} \right| + |x''| + |x^1| < \delta$$

Бу эса қаралаётган функция функция учун $x=0$ нуқтада Коши шarti бажарилишини кўрсатди.

1.АЖОЙБ ЛИМИТЛАР

1. Ушбу $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ тенгсизликни исботланг.

Равшанки $0 < x < \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0 \right)$ оралиқдан олинган ихтиёрий x ларда $0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$ тенгсизликлар ўринлидир.

Энди $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ тенгсизликларни $\sin x$ бўлиб $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ва ундан $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ бўлишини топамиз. Натижада $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$ тенгсизликларга эга бўламиз.

Энди $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ ва $0 < x < \frac{\pi}{2}$ да $\sin^2 \frac{x}{2} < \sin \frac{x}{2}$ эканини этиборга оламиз. $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x$ муносабат ўринли бўлишини топамиз. Демак, ихтиёрий $0 < x < \frac{\pi}{2}$ да $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$ тенгсизликлар ўринли.

Энди $\forall \varepsilon > 0$ учун δ сифатида ε ва $\frac{\pi}{2}$ сонлари кечиги олинса, аргумент x нинг $0 < x < \frac{\pi}{2}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларда

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < x < \varepsilon \text{ тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса таърифга кўра}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

эканини билдиради.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функция учун $f(-x) = f(x)$ тенгсизликнинг бажарилишини, яъни $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг жуфт эканлигини кўриш қийин эмас.

Демак $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ тенглик ҳам ўринли бўлади, $x=0$ да $\frac{\sin x}{x}$ функциянинг лимити мавжуд ва у 1 га тенг.

2. Ушбу

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ell$$

тенглик ўринли бўлишини кўрсатининг.

Биз $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ell$ эканлигини кўрган эдек.

Фараз қилайлик $x > 1$ бўлсин x нинг бутун қийматини n орқалий белгиласак, у ҳолда $n \leq x < n+1$ бўлиб бундан эса $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ тенгсизликларга эга бўламиз.

Бу тенгсизликлардан

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ тенгсизлик келиб чиқади.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \ell, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ell$$

ҳамда (2) тенгсизликдан фойдаланиб чекли лимитга эга бўлган функция ҳоссаларига кўра $x \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ да $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ell$ тенгсизликка эга бўламиз.

Энда $x < -1$ бўлсин $x = -y$ белгилаш керитсак

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = \ell \cdot 1 = \ell$$

бўлади.

Демак $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ell$ бўлди.

Натижа $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ell$ тенглик ўринлидир.

Ҳақиқатдан ҳам $\frac{1}{x} = y$ белгилаш керитсак

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \text{ бўлиб } \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \ell \text{ муносабатдан } \lim_{y \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ell$$

келиб чиқади.

Мисоллар: 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 2 \cdot 0 = 0$