

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA  
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**GULISTON DAVLAT UNIVERSITETI  
“UMUMIY MATEMATIKA” KAFEDRASI**

**KURANOV MIRJALOL MELIKUZIEVICH**

**5460100-matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha  
bakalavr darajasini olish uchun**

**KOMBINATORIKA MAVZUSINI AKDEMIK LITSEY VA  
KASB-HUNAR KOLLAJLARDA O'QITISH  
mavzusidagi**

**BITIRUV MALAKAVIY ISHI**

**Ilmiy rahbar: G'aymnazarov G.**

**Guliston 2013**

## MUNDARIJA

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| KIRISH.....                                               | 3  |
| I bob. Takrorlanmaydigan birlashmalar.....                | 6  |
| 1.1- §. O'rinlashtirishlar.....                           | 6  |
| 1.2- §. O'rinalmashtirishlar.....                         | 9  |
| 1.3- §. Gruppalashlar va ularning xossalari.....          | 10 |
| 1.4- §. Birlashmalarga doir masalalar yechish.....        | 14 |
| II bob. Takrorlanadigan birlashmalar.....                 | 15 |
| 2.1- §. Takroriy o'rinlashtirishlar.....                  | 15 |
| 2.2- §. Takroriy o'rinalmashtirishlar.....                | 18 |
| 2.3- §. Takroriy gruppalashlar.....                       | 21 |
| III bob. Binom formulasi.....                             | 24 |
| 3.1- §. Natural ko'rsatkichli binom formulasi.....        | 24 |
| 3.2- §. Kasr va manfiy ko'rsatkichli binom formulasi..... | 26 |
| 3.3- §. Binom formulasini umumlashtirish.....             | 30 |
| 3.4- §. Binom formulasining natijalari.....               | 32 |
| IV bob. Birlashmalarning tadbiqlari .....                 | 36 |
| 4.1-§. Takrorlanmaydigan birlashmalarning tadbiqi.....    | 36 |
| 4.2-§. Takrorlanadigan birlashmalar tadbiqi.....          | 41 |
| XULOSA.....                                               | 47 |
| ADABIYOTLAR.....                                          | 48 |

## KIRISH

**Mavzuning dolzarbligi.** Kombinatorika (birlashmalar) tadbiqiy nuqtai nazardan juda muhim boʻlgan tushuncha. Buni avvalo nazariy jihatdan asoslash taqozo etiladi. Soʻngra uni nazariy rivojlantirib hayotga tadbiq etiladi. Bunday dialektik yondashuv tufayli inson yashash hayoti yanada rivojlantiriladi. Bu masalaga bagʻishlangan koʻpgina ilmiy va ilmiy-uslubiy tadqiqotlarni koʻrsatish mumkin. Masalan: avvalo akademik litsey va kollejlarda uchun yaratilgan [30], [31] darsliklarni; [2], [14], [27], [19], [20], [28], [9] qoʻllanmalarni, monografiyalarni va uslubiy qoʻllanmalarni koʻrsatish mumkin. Bu borada yana tadqiqotlar olib borilmoqda. Bular haqida “Internet” saytlari [33], [34], [35], [36], [37] lardan maʼlumotlar olish mumkin.

Bayon etilganlar asosida tanlangan mavzu dolzarb deb qaralishi tabiiydir.

**Tadqiqot mavzusi.** 2000 yilda Respublikamiz olimlari tomonidan “Algebra va analiz asoslari” kursini akademik litseyning quyidagi yoʻnalishlarida oʻqitish dasturi ishlab chiqildi.

Anik fanlar yoʻnalishi

Iktisodiyot yoʻnalishi

Tabiiy fanlar yoʻnalishi

Biz bitiruv malakabiy ishimizga “Tabiiy fanlar yoʻnalishi”da oʻqitish muammolarini koʻrib oʻtamiz. Ana shu masalaga “Kombinatorika mavzusini akademik litsey va kasb-hunar kollejlarda oʻqitish” deb nomlangan bitiruv malakabiy ishi bagʻishlangan.

**Tadqiqot maqsadi.** Akademik litseyning tabiiy fanlar yoʻnalishida “Algebra va analiz asoslari” kursini oʻqitishning asosiy maqsadi oʻquvchilar kelajakda oliy tahlim muassasalarda tahsil olib yetuk kadr boʻlishdan iborat. Shuning uchun ularda ham amaliy va ham nazariy bilimni oshirish maqsad qilib olindi.

**Tadqiqot muammosi.** Bitiruv malakaviy ishda qaralayotgan asosiy muammo o`qitishning uzviyligini ta`minlash o`qitishda va ilmiy tadqiqotlardan foydalanishdan iborat. Bunda takroriy kombinatorika va uning tadbirlari asosiy muammodir.

**Tadqiqot obekti.** Akademik litseydagi tabiiy yo`nalishda “Algebra va analiz asoslari” kursida mavjud bo`lmagan ma`lumotlar qaraladi.

**Tadqiqot predmeti.** Tavsiya qilayotgan “Algebra va analiz asoslari” kursini o`qitishda o`quvchilarning olgan bilimlarini rivojlantirish va xotiraga joylashtirishida samara beradi va oliy ta`lim muassasalarida tahsil olishga muvassar bo`lishga imkoniyat beradi.

**Tadqiqot farazi** (gipotezasi) va himoyaga olib chiqiladigan xulosalar. Yuqorida keltirilgan fikrlarni xulosalab shuni aytish mumkinki, akademik litseylardagi matematik tahlim davlat ta`lim standartida belgilangan ta`lim mazmuni, maqsadi va strukturasi asosida tashkil etishi; o`quvchilardan matematika fani asoslarining ilmiy elementlari singdirilgan poydevorini shakllantirish; fanga bo`lgan qiziqishlarini uning tabiat va jamiyat taraqqiyotidagi ahamiyatini keng ma`noda ochib berish bilan orttirish; o`quvchilardan mantiqiy matematik tafakkurni takomillashtirish: ijodiy fikrlash malaka va ko`nikmalarga asos solishga qaratilgan bo`lishi lozim. Buning uchun esa akademik litseylarda matematika fanidan o`qitish ta`limning kam vaqt davomida ko`p bilim berish imkoniyati yaratuvchi ilg`or pedagogik texnologiyalaridan unumli foydalanish kerak.

**Tadqiqot vazifalari.** Matematika ta`limning bugungi vazifasi akademik litsey o`quvchilarni kun sayin oshib borayotganida ta`lim muxiti sharoitida ongli ravishda faoliyat yuritishga, o`z bilimlarini kelajakda samarali maqsadli foydalanishga o`rgatishdan iborat. Buning uchun ularga uzluksiz ravishda bilim olishga imkoniyatni va sharoitni yaratib berishni taqozo qiladi.

**Tadqiqot yangiligi.** Bitiruv malakaviy ishda “Algebra va analiz asoslari” kursini o`qitishning strukturasi va bunda birlashmalar, takroriy birlashmalar,

birlashmalarni kundalik hayotda tadbiqlarini o`qitish strukturasi uslubiy mohiyatidan yangiligi deb qaraladi.

**Fan uchun ahamiyati.** Biz tadqiqot doirasini fizika, ximiya, biologiya, gumanitar fanlar, ijtimoiy-iktisodiy fanlar bilan o`zaro aloqadorlik masalalarda olib bordik. Bunda “Algebra va analiz asoslari” kursida amaliy mashgulotlar olib borishda qayd etgan fanlar bilan aloqador bo`lgan masalalar yechib ko`rsatishda va shu bilan birga nazariy qismlarda tushuntirib o`tildi.

**Amaliyot uchun ahamiyati.** “Algebra va analiz asoslari” o`qitish texnologiyasi asosida o`quvchilar matematik modellar tuzishni bayon etdi. Bunda amaliy, tadbiqiy masalalar ko`rib o`tildi. Jumladan hayotdagi to`lov hujjatlari, avtomobillarni nomerlash, shaxsiy va boshqa hujjatlarni nomerlash, juda zarur bo`lgan masalalar yechish ko`rsatib o`tildi. Bu esa ishimizning amaliy ahamiyatini ko`rsatadi.

## I BOB. TAKRORLANMAYDIGAN BIRLASHMALAR

### 1.1- §. O`rinlashtirishlar

Qandaydir  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  to`plam berilgan bo`lsin.  $M$  to`plam elementlaridan quyidagi simvollarni tuzamiz:

$$a_1 a_2, a_1 a_3, \dots, a_1 a_n, a_2 a_3, \dots \quad (1)$$

$$a_1 a_2 a_3, a_1 a_3 a_4, \dots, a_2 a_3 a_5, \dots \quad (2)$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4 a_5, \dots, a_2 a_3 a_4 a_5, \dots \quad (3)$$

Yuqoridagi simvollar kombinatorika yoki bog`lanishlar deb ataladi. Bu kombinatorika yoki bog`lanishlar  $M$  to`plam elementlaridan tuzilgan. Bo`lardan (1)  $n$  elementdan to 2 gacha bo`lgan bog`lanish deb ataladi; (2) esa  $n$  elementdan to 3 gacha; (3)  $n$  elementdan to 4 gacha va hokazo.

Birlashmalar 3 ko`rinishga bo`linadi;

1.O`rinlashtirish.

2.O`rinalmashtirish.

3.Kombinasiyalash(Guruhlash).

**Ta`rif 1.** Agar  $n$  elementlardan to  $m$  gacha bo`lgan bog`lanish hech bo`lmaganda bir elementdan farqlansa yoki elementlarning tartibi bo`yicha ham farqlansa, u holda by bog`lanish  $n$  elementdan to  $m$  gacha o`rinlashtirish deb ataladi.

Masalan, (1)  $n$  elementdan 2 gacha o`rinlashtirishdir.

O`rinlashtirish soni, y`ani  $n$  elementdan to  $m$  gacha  $A_n^m$  ko`rinishda ifodalanadi. A rfkash fransuz so`zi “arangement”dan olingan bo`lib o`rinlashtirish ma`nosini bildiradi.

Misolllar keltiramiz.  $a_1, a_2, a_3$  elementlarni olamiz;  $n=3$ .

1) o`rinlashtirishlarni 1 ta element bo`yicha olamiz:

$$a_1, a_2, a_3$$

o`rinlashtirishlar soni  $A_3^1 = 3$

2) Endi o`rinlashtirishlarni 2 ta element bo`yicha olamiz.

$$a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3, a_2 a_1, a_3 a_1, a_3 a_2.$$

o`rinlashtirishlar soni  $A_3^2 = 6$

3) o`rinlashtirishlar sonini 3 ta element bo`yicha olamiz:

$$a_1 a_2 a_3, a_1 a_3 a_2, a_2 a_3 a_1, a_2 a_1 a_3, a_3 a_1 a_2, a_3 a_2 a_1.$$

o`rinlashtirishlar soni  $A_3^3 = 6$

Qachonki  $n$  soni katta bo`lsa, u holda o`rinlashtirish noqulaydir. O`rinlashtirishlar sonini hisoblash uchun quyidagi teoremani keltirib o`tamiz.

Teorema 1. o`rinlashtirishlar miqdori  $n$  elementdan to  $m$  gacha tuzilganlar uchun quyidagiga teng:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)] \quad (4)$$

Isbot.  $n$  elementlarni olamiz

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots \dots (5)$$

Bizga shu narsa ayonki, (5) ni 1 ta bo`yicha o`rinlashtirishsak, unda  $n$  ga teng bo`ladi, y`ani

$$A_n^m = n$$

Bu (4) formula  $m=1$  uchun o`rinlidir.

Endi yuqori bo`lgan o`rinlashtirishni ko`rib chiqamiz.

$$\begin{array}{l} a_1 a_2, a_1 a_3, \dots, a_1 a_n \\ a_2 a_1, a_2 a_3, \dots, a_2 a_n \\ a_3 a_1, a_3 a_2, \dots, a_3 a_n \\ \dots \dots \dots \\ a_{n-1} a_1, a_{n-1} a_2, \dots, a_{n-1} a_n \\ a_n a_1, a_n a_2, \dots, a_n a_{n+1} \end{array} \quad n \quad (6)$$

$n-1$

bu yerdan shu narsa ko`rinadiki, o`rinlashtirish  $n$  elementdan to 2 gacha  $n(n-1)$  soniga teng, y`ani

$$A_n^2 = n(n-1)$$

Bu (4) formula  $m=2$  uchun o`rinlidir.

Agar biz yuqori tartibli o`rinlashtirishni  $n$  ta elementdan to 3 gacha o`rinlashtirishlar sonini topmoqchi bo`lsak, u holda  $n(n-1)(n-2)$  ga ega bo`lishimiz qiyin emas.

Buning uchun (6) dan  $a_i, a_j$  elementlarni olish kerak, bunda (5) ga nisbatan  $a_k$  elementlarni  $a_k$  ga to`ldiradi. Bu yerda  $n = 1, 2, \dots, n$ ;  $k \neq i, k \neq j$ , bunda quyidagi simvollarni tashkil qilishimiz mumkin.

$$a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 a_4, \dots, a_{n-2} a_{n-1} a_n, \dots (7).$$

Shunday qilib, har qaysi  $a_i, a_j$  juftlik  $n-2$  yangi kombinasiyani vujudga keltiradi. Bunday muhokamani davom ettirib, biz ixtiyoriy  $m$  soni uchun quyidagi formulani olamiz;

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots [n-(m-1)]$$

Shu narsani isbotlash talab qilingan edi.

## 1.2- §. O'rinalmashtirishlar

**Ta'rif 2.** Agar  $m$  elementdan to  $m$  gacha bog'lanishlar faqat bo'yicha elementlardan farqlansa, u holda bunday bog'lanishlar o'rinalmashtirish deb ataladi.

Masalan  $M$  to'plamdan 3 ta element  $a_1, a_2, a_3$  larni ajratib olamiz. Bu elementlardan mumkin bo'lgan o'rinalmashtirishlarni  $a_1a_2a_3, a_1a_3a_2, a_2a_3a_1, a_2a_1a_3, a_3a_1a_2, a_3a_2a_1$  tuzamiz.  $m$  elementlarda tuzilgan o'rinalmashtirishlar soni  $P_m$  ko'rinishda ifodalaymiz. Bu yerda  $P$  rfkash fransuzcha "Permo'tation" so'zidan olingan bo'lib o'rinalmashtirish so'zini bildiradi.

Keltirilgan misollardan  $P_3 = 6$  ekanligi kelib chiqadi. Shuni belgilash lozimki,  $P_1 = 1$ ,  $P_2 = 2$ .

**Teorema 2.**  $m$  elementlardan tashkil topgan o'rinalmashtirishlar soni

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m! \quad (8)$$

ga teng. Bu yerda  $!$  "faktorial" deb o'qiladi.

**Isbot.**  $m$  elementdan tashkil topgan o'rinalmashtirishlar soni,  $m$  elementlardan to  $m$  gacha tashkil topgan o'rinalmashtirishlar soni bir-biriga tengligi ko'rish qiyin emas.

Shuning uchun (4) formulani  $n=m$  ga tatbiq qilib

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\dots 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot \dots (m-2)(m-1)m = m! \quad \text{ga ega}$$

bo'lamiz.

### 1.3- §. Gruppalashlar va ularning xossalari

**Ta`rif 3.** Agar elementdan to m gacha tashkil etilgan bog`lanish faqatgina 1 ta element bilan farqlansa, u holda bunday bog`lanishlar n elementdan to m gacha kombinasiya deb ataladi.

Masalan. 3 elementdan  $a_1, a_2, a_3$  mumkin bo`lgan 2 tadan kombinasiya tuzamiz:

$$a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3.$$

n elementdan to m gacha tuzilgan kombinasiyalar

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} \quad (9)$$

formula yordamida hisoblanadi.

*Isbot.* n elementdan to m gacha tashkil topilgan mumkin bo`lgan kombinasiyalarni bir satrga yozamiz.

Har qaysi kombinasiya ostidan mumkin bo`lgan m elementdan o`zgarishlarni tashkil qilamiz. U holda biz bog`lanishlar jadvalini olamiz. Bu bog`lanishlar  $C_n^m$  ustun va  $P_m$  qatorlardan tashkil topilgan. n elementdan to m gacha tuzilgan to`plam o`rinlashtirishlar umumiy bog`lanishlar sonini beradi ya`ni jadvaldan olingani. Shunday qilib,

$$C_n^m \cdot P_m = A_n^m$$

bu yerdan (9) ni hosil qilamiz.

Bu muhokamani keyingi misolimizda qo`llashimiz mumkin.  $a_1, a_2, a_3, a_4$  elementlarni lamiz va mumkin bo`lgan 3 tadan kombinasiyani tuzamiz:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 a_2 a_3 & a_1 a_3 a_4 & a_1 a_2 a_4 & a_2 a_3 a_4 & & & \\
a_2 a_1 a_3 & a_3 a_1 a_4 & a_2 a_1 a_4 & a_3 a_2 a_4 & & & \\
a_3 a_2 a_1 & a_4 a_3 a_1 & a_4 a_2 a_1 & a_2 a_4 a_3 & & & \\
a_1 a_3 a_2 & a_1 a_4 a_3 & a_1 a_4 a_2 & a_4 a_3 a_2 & & & \\
a_3 a_1 a_2 & a_3 a_4 a_1 & a_4 a_1 a_2 & a_4 a_2 a_3 & & & \\
a_2 a_3 a_1 & a_4 a_1 a_3 & a_2 a_4 a_1 & a_3 a_4 a_2 & & & \\
& & C_4^3 & & & & 
\end{array}$$

Jadvaldan ko`rinib turibdiki,

$$A_4^3 = C_4^3 \cdot P_3 = 24, \quad C_4^3 = \frac{A_4^3}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$$

Kombinasiyalar quyidagi xossalarga ega:

$$1) \quad C_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (10)$$

Haqiqatan ham (9),(8) va (4) formulalardan quyidagilarni olamiz:

$$\begin{aligned}
C_n^m &= \frac{A_n}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots(n-(n-m))}{1*2*\dots*m} * \frac{(n-m)[n-(m+1)]*....2*1}{(n-m)[n-(n-m)]*....2*1} = \frac{1*2*...*[n-(n-m)]}{1*2*...*(n-m)} \\
&* \frac{(n-m)[n-(m-1)]...(n-1)n}{1*2*...m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{P_n}{P_{n-m}P_m}
\end{aligned}$$

$$2) \quad C_n^m = C_n^{n-m} \quad (11)$$

(11) ni hosil qilish uchun (10) dagi m o`rniga n-m ni qo`yish mumkin.

3) Hisoblash asosida biz

$$C_n^1 = n, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^0 = 1$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (12)$$

larni olamiz.

Quyidagi ayniyat o`rinlidir:

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{k+m-1}^k = C_{k+m}^{k+1} \quad (13)$$

*Isbot.* (12) ning xossasidan ahnvfdftshib quyidagi ayniyatlarni yozamiz:

$$\begin{aligned} C_k^k &= C_{k+1}^{k+1} \\ C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} &= C_{k+2}^{k+1} \\ C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1} &= C_{k+3}^{k+1} \\ &\dots\dots\dots \\ C_{k+m-1}^k + C_{k+m-1}^{k+1} &= C_{k+m}^{k+1} \end{aligned}$$

Bu ayniyatlarni e`tiborga olsak, biz (13) ayniyatni olamiz.  
Quyidagi ayniyat o`rinlidir

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + \dots + C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m}^{m-1} \quad (14)$$

Bu ayniyat (11) va (13) lardan kelib chiqadi.

6) Arifmetik uchburchak.

(12) formula  $C_n^k$  ning qiymatini topishda yordam beradi, agar  $C_{n-1}^k$  va  $C_{n-1}^{k-1}$  qiymatlari ma'lum bo'lsa. Hisoblashni quyidagi ko'rinishda yozish qulay:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & 
 \end{array}$$

Jadvalning  $n+1$  ustunida  $C_n, C_n^1, \dots, C_n^0$  raqamlar tartib bilan joylashgan.

Shuning uchun

$$C_m^0 = C_n^n = 1.$$

Qolgan raqamlar (12) formulada joylashgan.

Qanchalik  $C_{n-1}^{k-1}$  va  $C_{n-1}^k$  joylashgan jadvalda ustunlar tepada,  $C_n^k$  tepadagi ustunda chapdagi va o'ngdan joylashgan.  $C_n^k$  keyingi ustunga chapdan va o'ngdan joylashtirish kerak.

Masalan 5 chi qatordagi 4 va 6 ni joylashtirishimiz natijasida, 6 chi qatordagi 10 raqamini hosil qilamiz.

Bilamizki shunaqa jadval matematiklar tomonidan topilgan. Bo'lar Ulug'bek observatoriyasida ishlashgan (Samarqand shahrida) G'iyosiddin Koshiy (1420 yillar atrofida), shoir va matematik Umar Hayom (1040-1123). Italiyalik matematik Nikolayu Tartale (1500-1557), Fransiya matematigi va fizigi Blez Paskal (1623-1662) keng qo'llashgan bu jadvalni.

### 1.4- §. Birlashmalarga doir masalalar yYechish

1. 10 ta kitobning dasturi bo`yicha: 1 kunda, 3 ta xar-xil mashqlar olib boriladi. 1 kunda dars jadvalini tuzish uchun nechta usuldan foydalanish mumkin.

**YYechish.** 10 dan 3 gacha elementlarni qabo`l qilgan. Shuning uchun xamma usullar.

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

bo`lishi kerak.

2. Poezd vagodagi to`rtta kuniga 4 ta pasajirni nechta usul bilan joylashtirish mumkin.

**YYechish.**

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

3. Uchrashuv paytida 12 kishi qo`lma-qo`l surashishdi. Bunda necha marta qo`lma-qo`l so`rashishgan?

**YYechish.**

$$C_{12}^2 = \frac{A_{12}^2}{P_2} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$$

4. 12 kishini stol atrofida terilgan 12 stulga nechta usul bilan joylashtirish mumkin?

## II BOB. TAKRORLANMAYDIGAN BIRLASHMALAR

### 2.1- §. Takroriy o'rinlashtirishlar

Qatorlarning bog'lanishlari bilan alohida olingan element  $M$  to'plamga faqat 1 marta kiradi. Bunda bog'lanish takrorlanishlar bilan ko'rib chiqish mumkin.

**Ta'rif.** Yig'ilgan  $N$  elementlardan, qaysuki bunda xar biriga  $M$  elementdan kiradi. Bundan 1 ta element xar bir yig'ilmada ixtiyoriy son (lekin  $M$  dan oshmasligi kerak). takrorlanishi mumkin. Bu element deyiladi. Endi aniqroq ko'rinishda ko'rib o'taylik.

$M$  chegaralangan to'plam bo'lsin

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$M$  to'plamdan quyidagi elementlarni tanlab olamiz.

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}, \quad i_n \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1)$$

$1, 2, \dots, m$  sonlar (1) elementlar bilan bog'liqligini qarab o'tamiz. Bunda bog'lanish 1 ko'rsatkichli yoki 1 ko'rsatkichli bo'lmagan ko'rinishda bo'lishi mumkin. Bundan har biriga (1) dan 1 ta element mos tushishi mumkin.

Bu bog'lanish argumenti  $1, 2, \dots, m$  (2) bo'lgan qandaydir funktsiyani ifodalaydi.

Funktsiyaning qiymati esa  $M$  to'plamning elementlari bo'ladi. Bu funktsiyani

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}, \quad (3) \text{ orqali belgilaymiz. (3) dagi birinchisining}$$

o'rniga  $a_{i_i}$  simvol (1) dagi songa mos tushadi. (2) chisining o'rniga albatta (2) mos tushadi, haqiqatan (3) funktsiya bu yerda  $M$  to'plamning elementlaridan tashkil topganligi ya'ni bog'lanish ekanligi bizga ravshan.

2 o'zgaruvchi argumentli  $1, 2, \dots, k$  o'sha funksiyaning qiymati berishini anglatadi.

Shunday qilib (3) har qanday yerda bir xil simvolni beradi.

Masalan:

Agar 1 va 2 sonlariga bir xil element qo'ysak, u holda  $a_{i_1} = a_{i_2}$  kelib chiqadi.

**Ta'rif.** Berilgan  $n$  ta elementdan  $m$  tadan tuzilgan o'rinlashtirishlarda biror element bir necha marta qatnashsa (lekin  $m$  martadan ortiq emas), u holda bunday o'rinlashtirishlar takroriy o'rinlashtirishlar deyiladi.

Masalan.  $M = \{1, 2, 3, 4\}$  to'plamdan takroriy o'rinalmashtirishni tuzaylik, ya'ni 4 ta elementdan 3 tadan tuzaylik:

|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 111 | 112 | 121 | 211 | 113 | 131 | 311 | 114 |
| 141 | 411 | 222 | 221 | 212 | 223 | 232 | 322 |
| 224 | 242 | 422 | 333 | 331 | 313 | 133 | 332 |
| 323 | 334 | 343 | 433 | 444 | 441 | 414 | 144 |
| 442 | 424 | 244 | 123 | 124 | 213 | 214 | 132 |
| 134 | 443 | 434 | 344 | 312 | 314 | 142 | 143 |
| 412 | 413 | 241 | 243 | 421 | 423 | 431 | 432 |
| 342 | 341 | 321 | 324 | 231 | 234 | 122 | 233 |

Bo'lar 4 ta elementdan 3 tadan tuzilgan o'rinlashtirishlar bo'lib soni 64 ga teng ( $n=4, m=3$ ).

Ixtiyoriy  $n$  ta elementdan  $m$  tadan tuzilgan takroriy o'rinlashtirishlar soni

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

formula bilan aniqlanadi.

**Teorema 1.**  $n$  elementdan to  $m$  gacha  $m$  dan tuzilgan mumkin boʻlgan takrorlanishlar bilan hosil boʻlgan soni  $A_n^m = n^m$  (5) ga teng.

**Isbot.** Teoremani matematik induksiya yordamida isbotlaymiz.  $m=1$  da teorema toʻgʻri, qaysiki bunda elementlarning oʻzidir:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

1 elementdan mumkin boʻlgan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ni tuzamiz. Bunda bu takrorlanishlar bilan soni  $A_n^m = n$  ga teng. Faraz qilaylik  $n$  elementdan to  $(m-1)$  gacha boʻlgan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ning takrorlanishlar bilan teoremani toʻgʻri deb olamiz, yaʼni  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  larning soni  $A_n^{m-1} = n^{m-1}$  ga teng.

Berilgan  $n$  elementdan  $m$  elementgacha boʻlgan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  larning takrorlanishlari bilan tuzamiz  $n$  sonlarni  $\{1, 2, \dots, n\}$  larda koʻrib chiqamiz.  $m$  elementdan har bir  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  ning takrorlanishlari bilan  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m$   $(m-1)$  sistema birinchi sonlardan  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m$  ayrim  $n$  elementdan to  $m-1$  gacha boʻlgan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  larni tashkil qiladi.  $K_m$  dagi  $m$   $K_m = 1, 2, \dots, n$  sonlardan ixtiyorisini olardi. Xar xil qiymatlarda  $K_m$  dan boshqa  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  lar tuziladi. Koʻrsatilgan usul bilan ixtiyoriy berilgan  $m-1$  dan to  $n$  gacha xar xil  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  lar xosil boʻladi,  $m$  tartibli bu yerda  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m$ ,  $l_1, l_2, \dots, l_{m-1}, l_m$  xar xildir yoki 1 qiymat uchun esa  $S = 1, 2, \dots, m-1$  dan  $K_s \neq l_s$ , lekin bunda  $m$  tartibli  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  lar xam farqlidir,  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m$   $l_1, l_2, \dots, l_{m-1}, l_m$ .

Shunday qilib xar bir  $m-1$  tartibli  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  dan  $n$  ning  $m$  tartiblisini hosil qiladi. Bu boʻlaklar farqli, lekin bunda  $m$  – tartibli lar mavjud. shunday qilib,  $m$  tartibli ixtiyoriy soni  $n^{m-1} \cdot n = n^m$  gatengdir. Shunday qilib, teorema ixtiyoriy  $m$  uchun toʻgʻridir.

## 2.2- §. Takroriy o'rinalmashtirishlar

**Ta'rif.** Xar qnday o`rinlashtirishlar takrorlanish bilan, qaysiki bu element da  $a_1$  element  $\alpha$  marta takrorlanadi,  $a_2$  element  $\beta$  marta takrorlanadi va hakoza.  $a_n$  element esa  $\gamma$  marta takrorlanadi, takrorlanish bilan davom etadi.

$$m = \alpha + \beta + \dots + \gamma$$

Qaysiki bunda  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  elementlar  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  marta takrorlanadi n elementda m takrorlanishlari bilan lar soni tartibini  $P_{\alpha, \beta, \dots, \gamma}$  orqali ifodalaymmiz.

**Teorema 2.** Mumkin bo`lgan barcha soni n elementda m gacha qaysiki bunda  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  lar  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$  marta takrorlanadi va

$$P_{\alpha, \beta, \dots, \gamma} = \frac{(\alpha + \beta + \dots + \lambda)}{\alpha! \beta! \dots \gamma!} \quad (6) \text{ ga teng.}$$

Isbot Ixtiyoriy larni ko`rib chiqamiz qaysiki funksiya argumenti

$$\begin{matrix} a_{k_1} & a_{k_2} & \dots & a_{k_m} \\ 1 & 2 & \dots & m \end{matrix} \quad (7)$$

bu yerda  $a_{k_i}$

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

to`planning elementlaridir. Pastda esa elementlar tartib raqamlar bilan belgilangan. O`rinalmashtirishda  $a_1$  elementni egallaganlar o`rniga quyidagi usul bilan belgilash kiritamiz.

$$a_1^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_1^{(\alpha)}$$

$a_2$  ni ham huddi shunday belgilaymiz:

$$a_2^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_2^{(\beta)}$$

va nixoyat

$$a_n^{(1)} \dots a_n^{(\alpha)}$$

(7) joylarning taqsimlanishi orqali aniqlanadi, qaysiki bunda elementlar joylashganlari:

$$(a_1^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_1^{(\alpha)}) (a_2^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_2^{(\beta)}) \dots (a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(\alpha)})$$

$$\left( \begin{matrix} 1 \dots 2 \dots 3 \dots m \\ S_1 \dots S_2 \dots S_3 \dots S_m \end{matrix} \right) \quad (8)$$

simvolni ko'rib chiqamiz. Boshlamg'ich 1,2,3....n o'rin almashtirishni  $S_1 S_2 \dots S_n$  ga o'rin almashtiramiz. Bu simvol (1)ni o'rinalamashtirishni takrorlanish bilan tashkil qilsa, keyingi o'rin almashtirish takrorlanish bilan quyidagicha yozish mumkin.

$$a_{s_1} a_{s_2} \dots a_{s_m} \quad (9)$$

Xar xil ko'rinishli simvollarning miqdori (8)  $m! = (\alpha + \beta + \dots + \gamma)!$ . Bundan  $m!$  hosil bo'ladi. Haqiqatan ham (9) o'rin almashtirish takrorlanishlar bilan bo'lsin.

$$(a^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_2^{(\alpha)}) (\dots) (\dots)$$

joylarning joylashishi joylarning egallagan elementlaridir.

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

Simvol

$$\left( \begin{matrix} a_1^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_1^{(\alpha)} a_2^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_2^{(\beta)} \dots a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(\gamma)} \\ \widetilde{a}_1^{(1)} \widetilde{a}_1^{(2)} \dots \widetilde{a}_1^{(\alpha)} \widetilde{a}_2^{(1)} \widetilde{a}_2^{(2)} \dots \widetilde{a}_2^{(\beta)} \dots \widetilde{a}_n^{(1)} \widetilde{a}_n^{(2)} \dots \widetilde{a}_n^{(\gamma)} \end{matrix} \right)$$

(7) o'rinalmashtirish takrorlanishlarini (9) o'rin almashtirish takrorlanishlari bilan joylashtiriladi. O'rin almashtirish va takrorlanishlar orasida, (8) dagi simvollar hosil bo'ladi va o'rin almashtirishlar farqlidir. Haqiqatdan ham o'rinlarni joylashtirishda ularni almashtirish natijasida element indeksida ularning nomerlari ko'rsatiladi. Bo'larning o'rniga

$$a_1^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_1^{(\alpha)}$$

Bu simvoldan ixtiyoriy o'rin almashtirish mumkin. Agarda to'plam sonlari

$$a_1^{(1)} a_1^{(2)} \dots a_1^{(\alpha)} \quad \text{va} \quad \widetilde{a}_1^{(1)} \widetilde{a}_1^{(2)} \dots \widetilde{a}_1^{(\alpha)}$$

farqli, unda (7) va (9) dagi o'rin almashtirish takrorlanishlari bilan farqlidar. Bu mulohazalardan faqat berilgan (7) o'rinalmashtirish

$$\alpha! \beta! \dots \gamma!$$

usuli bilan yozish mumkin. Haqiqatdan ham o'rinlarni joylashtirishda  $a_1$  elementlari bilan egallagan son o'rniga

$$a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(\alpha)}$$

(bunday o'rin almashtirishlar  $\alpha!$  ta)

SHu sonlardan ixtiyoriysini olish mumkin.

O'rinlarni joylashtirishda  $a_2$  element o'rniga

$$a_2^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_2^{(\beta)}$$

(bunday o'rin almashtirishlar  $\beta!$  ta).

O'rin almashtirishda  $a_m$  element o'rniga

$$a_m^{(1)} a_m^{(2)} \dots a_m^{(\gamma)}$$

(bunday o'rin almashtirishlar  $\gamma!$  ta)

SHu sonlardan ixtiyoriy o'rin almashtirishni olish mumkin.

SHunday qilib ko'rib o'tilayotgan to'plamda  $m!$  o'rinalmashtirishlar takrorlanishlar bilan, undan tashqari har bir o'rin almashtirish  $\alpha! \beta! \dots \gamma!$  marta yoziladi. Unda turli o'rin almashtirish takrorlanishlari bilan quyidagiga teng

$$\frac{(\alpha + \beta + \dots + \gamma)!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!}$$

Teorema isbotlandi.

### 2.3- §. Takroriy gruppashlar

Endi guruhlarini takrorlanishlar bilan ko'rib chiqamiz. Har bir  $a_i \in M$  unga bog'liq bo'lgan qandaydir  $a_i$  sonini mos qo'yamiz. Bu  $\alpha_i$   $a_i$  elementning **ixchamligi** deb ataladi. Bu funktsiyani aniqlaydi. Qaysiki bunda argumentlar berilgan elementlarni funktsiyani qiymati esa natural sonlarni bo'ladi. Bu ko'rib chiqilayotgan mulohazani simvollar bilan belgilaymiz. Simvollar, elementlarni belgilashda ixtiyoriy tartibda yozish mumkin.

Masalan:

$$a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_4 a_4, \quad a_1 a_2 a_1 a_2 a_1 a_3 a_4 a_4, \quad \dots$$

bu simvollar bir xil narsani anglatadi.

$a_1$  ning ixchamligi 3 ga,  $a_2$  ning 2 ga,  $a_3$  niki 1 ga,  $a_4$  niki 2 ga tengdir.

**Ta'rif:** Agar har bir  $a_i$  elementiga moslashtirilgan  $\alpha_i$  element ixchamligi  $N$  son bo'lsa, unda guruhlar takrorlanishlar bilan berilgan deyiladi. Elementlar ixchamligi guruhlar tartibining summasini beradi. **K**-chi tartibli ixtiyoriy **M** dan olingan guruhlar takrorlanishlar bilan guruhlar takrorlari bilan **n** dan to **k** elementgacha deb ataladi. Yuqorida keltirilgan simvollar elementdagi guruhlar hisoblanadi va shunday  $8=3+2+1+2$

**Teorema 3:** Guruhlar  $n$  dan to  $k$  elementgacha takrorlanishlari bilan quyidagi formula orqali ifodalanadi.

$$I_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k \quad (10)$$

Teorema isboti element ixchamligini hisobga olganda 1-§ yordamida isbotlanadi.

**Teorema 3 ning isboti:**

Ixtiyoriy guruhlar takrorlanishlari bilan qaysiki bunda  $a_1$  element  $\alpha$  marta,  $a_2$  element  $\beta$  marta  $a_n$  element  $\gamma$  marta uchraydi. Endi bo'larni simvol ko'rinishda ifodalaymiz.

$$\underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_{\alpha}\ 0\ \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_{\beta}\ 0\ \dots\ 0\ \underbrace{1\ 1\ \dots\ 1}_{\gamma}$$

Agar ixtiyoriy element bo'lgan guruhlar takrorlanishlari bilanda uchramasa qaysiki bunda uning ixchamligi 0 ga teng, unda keltirilgan gruppalar birliklari yozilmaydi va shunda ko'rib o'tilayotgan simvolda nomi bilan 2 ta ketma-ketlik mavjud.

Simvollarda  $n$  dan to  $k$  elementgacha bo'lgan guruhlar bilan 1 soni  $n$  marta uchraydi. 0 soni esa  $n-1$  marta uchraydi. Bu simvollar 2 talik o'rin almashtirish takrorlanish bilan ekanligini bildiradi. Bu o'rin almashtirishlar 0 va 1 sonlaridan tuzilgan.

SHunday qilib, har qanday guruhdan takrorlanishlari bilan faqat bitta ikkilik o'rin joylashtirish mos tushadi. Aks xolda ixtiyoriy ikkilik o'rin joylashtirishda qaysiki bunda 0  $n-1$  marta uchraydi. 1 esa  $k$  marta ixtiyoriy aniqlagan  $n$  elementdan to  $k$  gacha guruhlar takrorlanishlari bilan mos tushadi.

Bu guruhning tuzilishi uchun har bir elementni 1 soni necha marta takrorlansa shuncha marta yoziladi.

$$a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_4 a_4 a_4, \quad a_1 a_2 a_2 a_2 a_2 a_2 a_2 a_2 a_4$$

Quyidagi simvollar orqali ifodalanadi.

$$111011010111, \quad 101111111001,$$

Simvollar bilan

$$011100111111, \quad 110111010111$$

Quyidagi guruhlar mos tushadi.

$$a_2 a_2 a_2 a_4 a_4 a_4 a_4 a_4 a_4, \quad a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 a_3 a_4 a_4 a_4$$

O'rnatilgan bu birxillik  $I_n^k$  songa tengdir. SHuning uchun (6) formulaga ko'ra

$$I_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$$

Bu bilan (10) isbotlandi.

### III BOB. BINOM FORMULASI

#### 3.1- §. Natural ko'rsatkichli binom formulasi

Quyidagi ifodalar bizga tanish

$$(a + b)^1 = a + b \quad (1)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (3)$$

$a$  va  $b$  koeffitsientlarga e'tibor beramiz. (1)-formulaning chap tomonida bu son

1,1 bu faktini  $C_1^0 = 1$ ,  $C_1^1 = 1$  bu yerda  $C_n^m$  n elementdan to m gacha

kombinatsiya sonidir. (3) formuladagi koeffitsientlar

$C_3^0 = 1$ ,  $C_3^1 = 3$ ,  $C_3^2 = 3$ ,  $C_3^3 = 1$  ko'rinishda yozish mumkin.

Endi (2) va (3) larni quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$(a + b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a + b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$

Bu tengliklar bizga n chi darajali N son uchun quyidagi formulani keltirib chiqarishga yordam beradi.

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n \quad (4)$$

Buni biz matematik induksiya orqali isbotlashimiz mumkin.

$n=1$  da (4)-quyidagi ko'rinishni oladi

$$(a + b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$$

Ya'ni (1)- tenglik.

Faraz qilaylik (4)  $n=m$  da isbotlangan, ya'ni quyidagi ko'rinishni oladi.

$$(a + b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + \dots + C_m^m b^m \quad (5)$$

(4) formula  $n=m+1$  ham to'g'riligini isbotlaymiz.

Buning uchun (5) ning ikkala qismi  $(a+b)$  ga ko'paytiriladi.

$$\begin{aligned} (a + b)^{m+1} &= (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \dots + C_m^m b^m)(a + b) = \\ &= C_m^0 a^{m+1} + (C_m^0 + C_m^1) a^m b + (C_m^1 + C_m^2) a^{m-1} b^2 + \dots + C_m^m b^{m+1} \end{aligned}$$

$C_m^k$  xossasini isbotlaymiz.

$$C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1, \quad C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1, \quad C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$$

Unda (6) – tenglik quyidagi ko'rinishni oladi.

$$(a + b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \dots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1} \quad (7)$$

(7)- tenglik  $n=m+1$  da (4) –formulani anglatadi. SHu narsani anglatish kerak edi.

**(4)- formula Binom formulasi** deyiladi.

### 3.2- §. Kasr va manfiy ko'rsatkichli binom formulasi

SHu narsani aytishimiz kerakki (4)-formula Nbyo`tonga ham ma'lum edi. Bu yo'nalishdagi ishlar o'rta Osiyolik olim G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy (1420 yy.) asarlarida uchraydi. Nbyo`tonning xissasi shundaki u (4) ni manfiy va kasrli ko'rsatkichlari bo'yicha isbotlab beradi. Lekin aniq isbotlab bermagan. Bo'tun musbat ko'rsatkichli sonlar uchun Yakobъ Bernulli tomonidan isbotlangan manfiy va kasrli ko'rinishlar uchun (4) formula quyidagicha yoziladi.

$$(a + b)^{\alpha} = \binom{0}{\alpha} a^{\alpha} + \binom{1}{\alpha} a^{\alpha-1} b + \binom{2}{\alpha} a^{\alpha-2} b^2 + \dots + \binom{n}{\alpha} a^{\alpha-n} b^n + \dots \quad (8)$$

Bu yerda

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}, \quad \alpha \neq 0$$

(8) formulani isboti.

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}$$

funktsiyani ko'rib o'tamiz. Faraz qilaylik bu funktsiya quyidagiko'rinishda ifodalangan bo'lsin.

$$f^0(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots \quad (9)$$

Bu yerda .  $A_0, A_1, A_2$  noma'lum koeffitsienlardir. Koeffitsienlarni aniqlash uchun (9) dan xosilalar topamiz



$x = 0$  da quyidagilarni topamiz.

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \alpha$$

$$f''(0) = \alpha(\alpha - 1) \quad (12)$$

$$f'''(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)$$

.....

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots [\alpha - (n - 1)]$$

(12) va (11) lani qo'yib quyidagini topamiz

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = \frac{\alpha}{1!}$$

$$A_2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}$$

$$A_3 = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} \quad (13)$$

.....

$$A_n = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots [\alpha - (n - 1)]}{n!}$$

(13) va (9)ni kuyib kuyidagilarni topamiz.

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots [\alpha - (n - 1)]}{n!}x^n + \dots$$

$\alpha$  ixtiyoriy son bo'lgani uchun unda  $C_\alpha^n$  gacha o'zgartirish kiritamiz.

$$\frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots [\alpha - (n - 1)]}{n!} = \binom{n}{\alpha}$$

A N sonlarda  $\binom{n}{\alpha} = C_\alpha^n$  shunday qilib

$$(1 + x)^\alpha = \binom{0}{\alpha} + \binom{1}{\alpha}x + \binom{2}{\alpha}x^2 + \binom{3}{\alpha}x^3 + \dots + \binom{n}{\alpha}x^n + \dots$$

olamiz.

Endi  $x = \frac{b}{a}$  shundan

$$(a + b)^\alpha = \binom{0}{\alpha} a^\alpha + \binom{1}{\alpha} a^{\alpha-1} b + \binom{2}{\alpha} a^{\alpha-2} b^2 + \dots + \binom{n}{\alpha} a^{\alpha-n} b^n$$

olamiz (8) formula isbotlandi.

Masalan:

1) Nyoyon Binomi formulasi bo'yicha yoyib chiqamiz.

$$(1 + x)^{-1} \quad a = 1, \quad b = x, \quad \alpha = -1$$

$$1) \quad (1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

$$2) \quad (1 + x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + x} \quad a = 1, \quad b = x, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

$$3) \quad (1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots$$

### 3.3- §. Binom formulasini umumlashtirish

Endi umumiyyroq formulani isbotlaymiz.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k}$$

Isbot: n bir xil to'plamlarni ko'rib chiqamiz.

$$n \left\{ \begin{array}{l} (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \\ \dots\dots\dots \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \end{array} \right.$$

Ularini ko'paytirish qoidalari bo'yicha ko'paytirib chiqamiz.

Natijada biz quyidagi summaga ega bo'lamiz va u

$$a_1 a_1 \dots a_1 a_2 a_2 \dots a_2 \dots a_k a_k \dots a_k \quad (15)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Indeksar uchun 1,2,...,k sonlar o'rinlidir. k elementdan  $a_1, \dots, a_k$  to n takrorlanishlar bilan hosil bo'lgan (15) ifodalarning soni tengdir, ya'ni  $k^n$  dan olingan hadlar, qaysiki  $a_1$   $\alpha_1$  marta,  $a_2$   $\alpha_2$  marta va boshqalar shuncha marta tashkil etadi. .... marta tashkil etadi va quyidagiga tengdir:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$$

Har qaysi had **o'rinlashtirishlarga bog'liq bo'lib, takrorlanadi:**

$$a_1 a_1 \dots a_1 a_2 a_2 \dots a_2 \dots a_k a_k \dots a_k$$

Qaysiki bunda  $a_1$   $\alpha_1$  marta uchraydi,  $a_2$   $\alpha_2$  marta uchraydi va h.o,  $a_k$   $\alpha_k$  marta uchraydi. Bu hadlarning qiymati mumkin bo'lgan takrorlanishlar bilan o'rinlashtirishlar soniga tengdir. Bunda  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elementlarda ko'rsatilgan son bo'yicha shuncha marta uchraydi va h.o.

$$\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \quad (16)$$

Mulohazaning ko'rinishida

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$$

Ko'paytmalar summa ko'rinishda

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_k^{\alpha_k}$$

(16) koeffitsient bo'lib kiradi, bu yerda

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n$$

Bu bilan (14) –formula isboti tugaydi.

(14) formula  $k=2$  da (4) Nyuton-Binomi formulasi hisoblanadi.

### **Masalan:**

Isbotlangan formula bo'yicha hisoblaymiz.  $(a_1 + a_2 + a_3)^3$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + a_3)^3 &= \frac{3!}{3!0!0!} \cdot a_1^3 + \frac{3!}{0!3!0!} \cdot a_2^3 + \frac{3!}{0!0!3!} \cdot a_3^3 + \frac{3!}{2!1!0!} \cdot a_1^2 a_2 + \frac{3!}{2!0!1!} \cdot a_1^2 a_3 + \frac{3!}{0!2!1!} \cdot a_2^2 a_3 + \\ &+ \frac{3!}{1!2!0!} \cdot a_2^2 a_1 + \frac{3!}{1!0!2!} \cdot a_1 a_3^2 + \frac{3!}{0!1!2!} \cdot a_2 a_3^2 + \frac{3!}{1!1!1!} \cdot a_1 a_2 a_3 = \\ &= a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + 3(a_1^2 a_2 + a_1^2 a_3 + a_2^2 a_3 + a_1 a_3^2 + (a_1 a_2^2 + a_2 a_3^2)) + 6a_1 a_2 a_3 \end{aligned}$$

### 3.4- §. Binom formulasining natijalari

- 1) Binomal koefitsienlarning yig'indisi  $2^n$  ga teng, ya'ni

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \quad (17)$$

Haqiqatdan ham,  $a=b=1$  da Binom formulasiga qo'yganimizda (17) tenglikni olamiz.

- 2) Hamma binomal koefitsienlarning summasi ishorasi almashinuvchi bo'lgan holda nolga teng:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0 \quad (18)$$

$b=-a \neq 0$  da Binom formulasiga qo'yganimizda (18) ni olamiz.

- 3) Hadlar koefitsienlari, Binomni hisoblash arayonida bir xil yo'qotishlar natijasida, bir-biriga tengdir.

Bu hol kombinatsiya xossasidan kelib chiqadi, ya'ni

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

- 4)  $n$  ko'rsatgichli hadlar koefitsienlarning Binom yoyilmasida  $(n+1)$  qatorli Paskal uchburchagidar. Bu oldingi xollarda va Paskal uchburchagidan kelib chiqadi.

- 5) Binom yoyilmasidagi umumiy hadni

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$$

Formula bo'yicha ifodalash mumkin.

$m=1$  da formula 2-xadni beradi,  $m=2$  da esa 3- hadni beradi va hokazo.

Yonma –yon turgan ikki hadni taqqoslaymiz. Ya'ni

$$T_{m+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot a^{n-m} \cdot b^m$$

$$T_{m+2} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)](n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m(m+1)} \cdot a^{n-m-1} \cdot b^{m+1}$$

keyingi sonning koefitsientini aniqlash uchun koefitsientning oldingi sonini birinchi hadidagi ko'rsatgichiga ko'paytirish yetarlidir deb xulosa qilamiz.

Masalan:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$6. \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{2k} = 2^{n-1} \quad (19)$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{2k-1} = 2^{n-1} \quad (20)$$

Bu tengliklar (17) va (18) kelib chiqadi.

$$\sum C_n^{2k} + \sum C_n^{2k-1} = 2^n$$

$$\sum C_n^{2k} - \sum C_n^{2k-1} = 0$$

Bu yerdan (19) va (20) kelib chiqadi.

$$7. \quad C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}) \quad (21)$$

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n-3)\pi}{3}) \quad (22)$$

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{3}2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3} \quad (23)$$

$$1) a=1, b=1; \quad 2) a=1, b=\varepsilon; \quad 3) a=1, u=\varepsilon^2$$

$$\text{Bu yerda } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \varepsilon^3 = 1$$

Bundan quyidagilarni olamiz:

$$2^{m^0} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n \quad (24)$$

$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2 C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon C_n^5 + \dots \quad (25)$$

$$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 + \varepsilon^2 C_n^1 + \varepsilon C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon^2 C_n^4 + \dots \quad (26)$$

(24), (25), (26) larni hadma –had qo'shsak va 3 ga bo'lsak, quyidagilarni hisobga olsak:

$$1+\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$(1+\varepsilon^2) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

(21) ayniyatni olamiz.

Isbot uchun (22) va (23) lardan summa tuzsak

$$2^n + \varepsilon^2(1 + \varepsilon)^n + \varepsilon(1 + \varepsilon^2)^n$$

$$2^n + \varepsilon(1 + \varepsilon)^n + \varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)^n$$

Ekanligi kelib chiqadi.

$$8. \quad C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \dots + C_n^p C_m^0 = C_{m+n}^p \quad (27)$$

Isbot: Quyidagi ayniyatni ko'rib chiqamiz.

$$(x+1)^n (x+1)^m = (x+1)^{m+n}$$

Kanonik ko'rinishlardan foydalanib chap tomondagi ko'phadlarni tasvirlaymiz.

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^p x^{n-p} + \dots C_n^n$$

$$(x+1)^m = C_m^0 x^m + C_m^1 x^{m-1} + C_m^p x^{m-p} + \dots C_m^m$$

X da koeffitsientlarni hisoblab o'tsak, bu koeffitsient (27) ayniyatdagi chap tomoniga teng. Boshqa tomondan esa,  $x^{n+m-p}$  da  $(x+1)^{m+n}$  ga Binom formulasini qo'llaganimizda koeffitsient  $C_{m+n}^p$  ga teng bo'ladi.

Bu yerdan (27) ayniyat kelib chiqadi.

$$9) \quad (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n \quad (28)$$

Isbot: .  $n=m=p$  ligini (27) –formulaga qo'yib,  $C_n^{n-k} = C_n^k$  tenglikdan foydalanish yetarlidir.

$$10). \quad 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \quad (29)$$

Isbot:

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n x^{n+1}$$

dan olish qiyin emas. Bu yerdan  $x=1$  da, (29) – ayniyatni olamiz.

### Mustaqil topshiriqlar

1. Binom formulasi bo'yicha yoying.

a)  $(1+x)^6$ ;      b)  $(x+3)^5$ ;      v)  $(x-1)^7$ ;

g)  $(a-b)^m$ ;      d)  $(2-a)^8$ ;      ye)  $(3x+4y)^6$ ;

yo)  $(x + \frac{1}{x})^5$ ;      j)  $(3a^2 - 2b^2)^6$

2. Yoyilmaning 6-hadini toping

$$(5x^2 - 6a^2)^{10}$$

3. Yoyilmaning eng katta hadini toping.

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20}$$

4.  $(x^2 + \frac{3}{x^3})^{15}$  yoyilmada o'zida  $x$  ni tashkil qilmagan hadini toping.

5. (8) -formula bo'yicha  $\sqrt{1-x^2}$  funktsiyani yoying.

6. (8)- formula bo'yicha  $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$  funktsiyani yoying.

7.  $(a+b+c)^2$  uchun formula tuzing.

8.  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$  uchun formula tuzing.

## IV – BOB. BIRLASHMALARNING TADBIQI

### 4.1-§. Takrorlanmaydigan birlashmalarning tadbiqu.

Matematikaning bir to'plam elementlaridan, talab qilingan shartlarni qanoatlantiruvchi har xil birlashmalarni (kombinatsiyalarni) tuzish haqidagi masalasini o'rganish sohasi **kombinatorika** deyiladi.

Ba'zi kombinatorika ehtimollar nazariyasiga kirish deb qaraladi, chunki kombinatorika usullari ehtimollar nazariyasi hodisa voqealarni biror aniq xolatda o'rganishda muxim ahamiyatga ega. Ehtimollar nazariyasida “birlashma” (kombinatsiya) deb aytishning o'rniga “tanlanma” deb aytish qabool qilingan. Kombinatorikada tanlanma o'rinalashtirish, o'rinalmashtirish, gurppalash (guruhlash) ko'rinishda qaraladi.

Kombinatorikaning masalalarini yechishda yordam beradigan ikkita umumiy qoidasini ko'rib o'tamiz. 1) qo'shish qoidasi 2) ko'paytirish qoidasi.

**Qo'shish qoidasi.** Agar biror A narsani  $m$  usul bilan B narsani  $k$  usul bilan (lekin xuddi A kabi emas) tanlash mumkin bo'lsa, u holda “yo A narsani yoki B narsani”  $m+k$  usul bilan tanlash mumkin.

**Masalan.** Yashikda  $n$  ta har xil rangdagi sharlar bo'lsin. Ixtiyoriy ravishda bitta shar olinsin. Necha xil usul bilan buni bajarish mumkin? Albatta  $n$  usul bilan.

Endi bu  $n$  ta sharlarni 2 ta yashikka joylashtiraylik: Birinchida  $m$  ta sharlar, ikkinchida  $k$  ta sharlar bo'lsin. Ixtiyoriy ravishda birorta yashikdan 1 ta shar olaylik. Buni nechta har xil usullar bilan bajarish mumkin? Birinchi yashikdan  $m$  ta har xil usul bilan shar chiqarish mumkin, ikkinchi yashikdan  $k$  ta har xil usul bilan shar chiqarish mumkin. Hammasi bo'lib  $m+k$  ta usul bilan bittadan shar chiqarib olish mumkin.

**Ko`paytirish qoidasi.** Agar biror A narsani  $m$  usul bilan tanlab so`ngra B narsani  $k$  usul bilan tanlash mumkin bo`lsa, u holda bir juft A va B narsalarni  $m \cdot k$  usulda tanlash mumkin.

**Masalan:** faraz qilaylik berilgan tıplam  $n=m+k$  elementdan iborat bo`lib ikkita qism tıplamga ajratilgan bo`lsin; ulardan birida  $m$  ta  $a_1, a_2, \dots, a_m$  elementlardan, ikkinchisi  $k$  ta  $e_1, e_2, \dots, e_k$  elemaenlardan iborat bo`lsin. Endi har bir qism tıplamdan bittadan elementni bir-biriga bog`liq bo`lmagan holda tanlab olinsin. Bunday tanlab olishda nechta juft-juft elementlar xosil bo`ladi? Bu savolga quyidagi jadval javob beradi.

$$\underbrace{\begin{matrix} a_1e_1, & a_1e_2, & a_1e_3, & \dots & a_1e_k, \\ a_2e_1, & a_2e_2, & a_2e_3, & \dots & a_2e_k, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_me_1, & a_me_2, & a_me_3, & \dots & a_me_k, \end{matrix}}_{k\text{ ta ustun}} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_1e_1, \\ a_2e_1, \\ \dots \\ a_me_1, \end{matrix}} \right\} m - \text{ta qator}$$

Bu jadvalda hammasi bo`lib  $m \cdot k$  ta bir-juft narsalar joylashgan, chunki har bir qatorda  $k$ -tadan juft-juft narsalar joylashgan. Shunday qilib bu jadvaldagi juftlar sonini  $N$  desak u xolda

$$N = m \cdot k \quad (1)$$

bo`ladi

Faraz qilaylik  $p$  ta

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

elementlar berilgan bo`lsin. Bu elementlar tıplamdan xar biri  $r$  elementdan iborat bo`lgan ( $0 < r \leq n$ ) tenglamalar tuzish mumkin (o`rinlashtirishlar bo`lishi mumkin). Masalan;

$$a, b, c$$

elementlaridan quyidagi 2 tadan tanlanma-o`rinlashtirishlar tuzish mumkin

$$ab \quad ba \quad ca \quad ac \quad bc \quad cb$$

Bunday tanlanmalar soni 6 ta bo`ladi va ular bir biridan yo element bilan yoki elementining kelish tartibi bilan farq qiladi.

To`rtta

a, b, c, d

elementlardan 3 tadan tuzilgan tanlanmalar 24 ta bo`ladi. Ular quyidagicha

abc dac cab dab

yuqorida ko`rib o`tilgan tanlanmalar o`rinlashtirishlar deb ataladi.

Shunday qilib  $n$  ta elementdan  $m$  tadan tuzilgan tanlanmalar bir-biridan yo element tartibi bilan yoki elementning joylashish tartibi bilan farq qilsa, bunday tanlanmalar  $n$  ta elementdan  $m$  tadan tuzilgan o`rinlashtirishlar deyiladi.

O`rinlashtirishlar soni  $A_n^m$  deb belgilanadi, masalan; yuqoridagi misollarimizda

$$A_2^3 = 6, \quad A_4^3 = 24.$$

Umumiy xolda  $n$  ta elementdan  $m$  tadan tuzilgan o`rinlashtirishlar soni hisoblashni ko`rib o`tamiz.

Bizga  $n$  ta element berilgan bo`lsin. Birinchi elementni  $n$  ta usul bilan tanlash mumkin. Ikkinchi elementini qolgan  $(n-1)$  ta elementdan  $(n-1)$  ta usul bilan tanlash mumkin.

U xolda (1) formylaga asosan ikki elementli juftlarni

$$n(n-1)$$

usulda tuzish mumkin. Uchinchi elementni qolgan  $(n-2)$  ta elementdan tanlashga to`g`ri keladi. Buni  $(n-2)$  ta usul bilan tanlash mumkin. Bu holda (1) formyla bo`yicha elementlarning uchliklarini

$$n(n-1)(n-2)$$

usulda tuzish mumkin.

Xuddi shunday to`rtliklarni

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

usulda tuzish mumkin.

Nihoyat  $n$  ta elementdan  $m$  tadan tuzilishni o`rinlashtirishlar soni

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdots [n-(m-1)] \quad (2)$$

formyla bilan hisoblanadi.

Agar (2) formulada  $m = n$  bo'lsa, u holda  $A_n^n$  o'rinalashtirishlar bir-biridan faqat elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladi va bunday o'rinalashtirishlar o'rinalmashtirishlar deyiladi.

O'rinalmashtirishlar soni  $P_n$  deb belgilanadi va

$$\begin{aligned} P_n &= A_n^n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[n-(n-1)] = \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n = n! \end{aligned} \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

Hayotda (ya'ni amalda) tanlanmada hamma vaqt elementlarning joylashtirish tartibi muxim emas. Masalan, agar shaxmat bo'yicha respublika birinchiligi uchun yarim finalda 20 ta o'yinchi qatnashsa, finalda esa ulardan faqat 3 tasi qatnashishi mumkin, u xolda qatnashuvchi uchun uchtadan birinchi joyini egallashning farqi yo'q, chunki yarim finalda uchinchi joyni egallagan o'yinchi finalda birinchi joyni egallagan xolat bo'lgan.

Agar final uchun uchlikni necha usul bilan tanlash mumkinligi talab etilsa, u xolda 20 elementdan 3 ta tuzilgan tanlanmamizdan faqat bir-biridan kamida bitta element bilan farq qiladiganlarini hisoblash kerak. Bunday holatda tartiblanmagan gurppa (gurux) tanlamaga ega bo'lamiz.

Endi  $n$  ta elementdan  $m$  tadan tuzilgan gruppalar (guruxlar) soni

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{p_m} = \frac{n(n-1)\cdots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdots m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (4)$$

formula bilan hisoblanadi.

Bu (4) formulani shaxmat o'yinchilariga tatbiqlab tuzish mumkin bo'lgan final o'yinchilarini sonini aniqlaymiz.

$$C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$

yuqorida (2), (3), (4) formulalar ehtimollar nazariyasida tasodifiy hodisalar, (ya'ni sinov yoki kuzatish) natijalari sonini aniqlashda tatbiq etiladi.

**1-masala.** Fo`tbol bo`yicha musaboqaga 18 ta komanda qatnashmoqda. Musobaqa g`oliblari oltin, kumush va bronza medali bilan mukofatlanadi. Komandalarga medallar necha xil usul bilan taqsimlanishi mumkin?

**Yechish.** Masala yechimi (2) formula bilan hisoblanadi.

$$A_{18}^3 = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$$

**2-masala.** Mashg`ulotda 12 ta basketbolchi qatnashmoqda. Trener har xil beshlik o`yinchilarni nechta usul bilan tuzish mumkin?

**Yechish.** Masala yechimi (4) formula bilan hisoblanadi

$$C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$$

**3-masala.** Shaxmat taxtasida 8 ta to`ra (rux)ni bir-birini olmaydigan qilib nechta usul bilan tuzish mumkin?

**Yechish.** Bunday xilda shaxmat taxtasida gorizontal va vertikal uyinalishda faqat bittadan to`ra (rux) joylashtarish mumkin. Mumkin bo`lgan joylashtirishlar (vaziyatlar) 8 elemantdan tuzilgan o`rinalmashtirishlardan iborat bo`ladi, ya`ni

$$P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

## 4.2-§. Takroriy birlashmalar tadbiqu

Berilgan 5-ta o, b, p, q, e harflardan

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$$

ta xar xil soʻz tuzish mumkin .

1-masala. «GAMMA» soʻzida qatnashgan xarflardan nechta har xil soʻz tuzish mumkin?

Bu ham 5-ta harf  $5! = 120$  ta desak notoʻgʻri boʻladi faqat 30 ta tuzish mumkinligini quyida keltirib oʻtamiz.

Demak bu yerda oʻrinalmashtirish formulasini ( $P_n = n!$ ) tadbirlab boʻlmaydi, chunki «oʻrinalmashtirish»da harflar takrorlanadi. “GAMMA” soʻzidagi  $a$  va  $m$  xarflarning joylarini baʼzi almashtirishlarda soʻz oʻzgarmay qoladi. Bu bilan biz tanlanmaning yangi turi takroriy oʻrinalmashtirish tushunchasini kiritamiz.

Bizga  $k$  ta element berilgan boʻlsin. Bundan tanlanmalar tuzamiz. Birinchi elementni  $n_1$  marta va hokazo  $k$ -chi elementni  $n_k$  marta takrorlaymiz.  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  boʻlsin.

Agar hamma elementlar har xil boʻlsa u xolda (3) formula boʻyicha  $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  formula boʻyicha  $n!$  ta oʻrinlashtirish tuzilgan boʻladi. Lekin bu yerda bazi elementlar tanlanmada takrorlanadi va ularning oʻrinalmashtirishlarida yangi oʻrinalmashtirish hosil boʻlmaydi. Shuning uchun takroriy oʻrinlashtirishlar soni  $n!$  dan kam boʻladi.

Necha marta kam boʻlishi mumkin? Quyidagi tanlanmani olaylik.

$$\underbrace{aaa\dots a}_{n_1} \underbrace{bbb\dots b}_{n_2} \underbrace{lll\dots l}_{n_k}$$

Bu yerda  $a$  elementlarni  $P_{n_1}=(n_1)!$  usul bilan  $v$  elementlarni  $P_{n_2}=(n_2)!$  va xokazo  $l$  elementlarni  $P_{n_k}=(n_k)!$  usul bilan almashtirish mumkin, lekin bu bilan takroriy o`rinlashtirishlar o`zgarmaydi.

Demak takroriy o`rinalmashtirishlar soni takrorsiz o`rinalmashtirishlardan

$$(n_1)! \cdot (n_2)! \cdot \dots \cdot (n_k)!$$

marta kam bo`ladi. Shuning uchun takroriy o`rinalmashtirishlar soni

$$P_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{(n_1)!(n_2)! \dots (n_k)!} = \frac{n!}{(n_1)!(n_2)! \dots (n_k)!} \quad (T.1)$$

dan iborat bo`ladi.

«GAMMA» so`zining xarflardan tuzilgan tanlanma misolida  $n=5$ ,  $n_1=1$ ,  $n_2=2$ ,  $n_3=2$ .

Shunday qilib

$$\frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 30$$

ta xar xil so`z tuzish mumkin (lekin xammasi manoga ega emas). Bu yuqoridagi masala yechimidir.

Endi quyidagi bir masalani ko`rib o`taylik.

2-masala. Dыkonda 3-xil nomalum konfet mavjud. Konfetlar 3-xil ko`rinishda qo`tilarga jixozlab joylashtirilgan bo`lib xar bir nomlanishning o`z qo`tisi bor. 5 ta qo`tidan saylab tayorlash buyurtmasini necha xil usul bilan bajarish mumkin?

Yechish: Bu yerda 5 ta elementdan tuzilgan va bir-biridan farq qiluvchi (kamida bitta element bilan) tanlanmalarni tuzish zarur.

Har bir buyurtmani 0 va 1 bilan belgilaymiz(shifrlaymiz). Avvalo birinchi xil konfetdan nechta qo`ti buyurtma bo`lsa, shuncha 1 yozamiz. Sыngra 0 yozamiz. Keyin ikkinchi xil nomlangan konfetdan nechta qo`ti buyurtma bo`lsa, shuncha 1 yozamiz. Sыngra yana 0 yozamiz. Yana uchinchi xil nomlangan konfetdan qancha buyurtma berilgan bo`lsa shuncha 1 yozamiz. Agar ikkinchi yoki uchinchi xil nomlangan konfetdan buyurtma berilmagan bo`lsa, u xolda bu

fakt ikkita 0 bilan belgilanadi. Agar birinchi yoki ikkinchi xil konfetdan buyurtma berilmagan bo'lsa, u xolda bitta 0 yozamiz.

Masalan, buyurtma «birinchi xil konfetdan 2 qo'ti, ikkinchi xildan 1 qo'ti, uchinchi xildan 2 qo'ti» dan iborat bo'lsa, u xolda uni

$$1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1$$

ko'rinishda belgilaymiz (shifrlaymiz).

Agar buyurtma «birinchi xil konfetdan 2 qo'ti va uchinchi xildan 3 qo'ti» dan iborat bo'lsa, uni

$$1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$$

deb, agar buyurtma «ikkinchi xil konfetdan 4 qo'ti va uchinchi xil konfetdan 1 qo'ti» dan iborat bo'lsa, uni

$$0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1$$

deb belgilaymiz (shifrlaymiz).

Endi har bir shifrlangan buyurtma 5 ta 1 va 2 ta 0 larning kombinatsiyasi yoki gruppasi (gurux) dan iborat. Bu takroriy o'rinalmashtirishdan iborat bo'lib bunda 1 son 5 marta 0 esa 2 marta takrorlangan. Bunga (T.1) formulani tadbiklab konfet qo'tilarni mumkin bo'lgan saylashlar sonini

$$P_{5,2} = \frac{(5+2)!}{5! \cdot 2!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$$

deb aniqlaymiz.

Shunday kilib 2- masala yechimi 21 ta usuldan iborat.

Yuqorida (2-masala) masaladagi tanlanma bir to'plam elementlaridan tuzilgan bo'lib xajm jixatdan fark qilmasdan bir-biridan tarkibi bilan fark qiladi (kamida bita element bilan).

Bunday tanlanmalar takroriy gruppashlar (guruxlashlar) yoki takroriy kombinatsiyalar deyiladi. Endi takroriy guruxlashlar soni xisoblashni ko'rib o'tamiz. Agar tanlanma hajmi k ga teng bo'lib ular n ta elementni o'z ichiga olgan to'plamdan tuzilgan bo'lsa, u xolda bunday tanlanmalar sonini  $\overline{C_n^k}$  dab belgilaymiz.

Yuqoridagi masala muxokamasiga asosan va (T.1) formulaga asosan

$$\overline{C}_n^k = P_{k,n-1} = \frac{[k+(n-1)]}{k!(n-1)!} \quad (\text{T.2})$$

formulasini hosil qilamiz.

Bu (T.2) formulani

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k \quad (\text{T.3})$$

ko`rinishda xam yozish mumkin.

Haqiqatan

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{[(k+n-1)(k+n-2)\dots(n+1)n](n-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n+1)n}{k!} = C_{n+k-1}^k$$

ya'ni (T.3) o`rinli.

Endi quyidagi masalani yechamiz.

3-masala. Agar bitta raqam bir necha marta takrorlanishi mumkin bo`lsa 1,2,3,4,5 rakamlardan nechta uch xonali sonlar tuzish mumkin?

Yechish. Agar raqamlar takrorlanmasa u xolda masala yechimi bizga malum u  $A_5^3$  dan iborat bo`ladi. Lekin bu yerda elementlar takrorlanishi mumkin. Demak bunday xolatda takroriy o`rinlashtirish bo`ladi.

Uch xonali sonning birinchi raqamini besh usul bilan tanlashimiz mumkin, ya'ni 1,2,3,4,5 lardan birini. Ikkinchi rakamni ham besh usul bilan tanlash mumkin. U xolda (1) formula bo'yicha ikki rakamli sonlarni  $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$  usul bilan tanlash mumkin. Uchinchi raqamni ham besh usul bilan tanlash mumkin va shuning uchun uch xonali son  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$  usul bilan tanlash mumkin.

Demak masala yechimi 125 ta 3 xonali son bo`lishi mumkin.

Xuddi shunday muxokama yuritib takroriy o`rinlashtirishlar sonini umumiy holda aniqlaymiz.

Faraz qilaylik  $n$  elementdan iborat to`plamdan  $k$ -tadan takroriy o`rinlashtirishlar tuzish zarur bo`lsin, ya'ni bita o`rinlashtirishda biror element

1,2,3,...,k marta takrorlanishi mumkin. Bunday o`rinlashtirishlar nechta bo`ladi?

Biror o`rinlashtirishda birinchi elementni n usul bilan tanlash mumkin. U xolda (1) formula bo`yicha juft-juft elementlarni  $n \cdot n = n^2$  usulda tuzish mumkin.

Uchinchi elementni xam n usul bilan tanlash mumkin, to`rtinchi elementdan o`rinlashtirishlarni

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ ta}} = n^k$$

usul bilan tuzish mumkin. Agar n ta elementdan k tadan tuzilgan o`rinlashtirishlar sonini  $\overline{A_n^k}$  deb belgilasak, u xolda

$$\overline{A_n^k} = n^k \quad (\text{T.4})$$

formulani xosil kilamiz.

4-masala. Mexmondorchilik uchun 2 kg olma 3 kg nok va 4 kg apelsin sotib olindi. 9 ta tarelkaga 1 kg dan meva joylashtiriladi. Mevalarni necha usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechish: Belgilashlar qabo`l qilamiz

olma-o

nok-n

apelsin-a

tuzish mumkin bo`lgan tanlanmadan bittasini yozaylik:

*nnonaaoaa*

qolgan tanlanmani uning elementlaridan o`rinlarini almashtirib hosil qilish mumkin.

Demak takroriy o`rinalmashtirishlarni hisoblash zarur.

Biz qarayotgan holatda  $n=9$   $n_1=2$   $n_2=3$   $n_3=4$ ;  $n=n_1+n_2+n_3$

Shuning uchun mevalarni 9 ta tarelkaga joylashtirish usuli soni

$$P_{2,3,4} = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!n_2!n_3!} = \frac{9!}{2!3!4!} = 1260$$

5- masala. Do`konga 10 xil daftar keltirildi. Miqdori 12-ta bo`lgan daftarlar tanlanmasini nechta usul bilan tanlash mumkin ? Miqdori 8 ta bo`lsachi?

Yechish: Masala shartiga ko`ra takroriy guruxlash (kombinatsiya)larni hisoblash kerak.

$$\overline{C}_n^k = P_{k,n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

formulaga asosan  $k=12$   $n=10$

$$\overline{C}_n^k = \frac{(12+10-1)!}{12!(10-1)!} = \frac{21!}{12!9!} = 293930$$

xudi shunday

$$\overline{C}_{10}^8 = \frac{(8+10-1)!}{8!(10-1)!} = \frac{17!}{8!9!} = 24310$$

6-masala. Agar bitta raqam bir necha marta takrorlanishi mumkin bo`lsa, 0,1,2 raqamlardan nechta to`rt xonali son tuzish mumkin?

Yechish: 0,1,2 rakamlardan  $\overline{A}_3^4$  ta to`rt xonali sonlar tuzish mumkin. Lekin tuzilgan to`rt xonali sonlardan birinchi ra`ami 0 bo`lganlari 4 xonali son bo`lmaydi. Demak tuzilgan takroriy o`rinlashtirishlardan 0 bilan boshlanuvchilar mikdorini ayirib tashlash zarur. 0 bilan boshlanuvchilar esa 0,1,2 raqamlardan tuzilgan takroriy tanlanmalar 3 xonali sonlardan iborat bo`ladi. Bunday sonlar mikdori  $\overline{A}_3^3 = 3^3$

Demak,

$$\overline{A}_3^4 - \overline{A}_3^3 = 3^4 - 3^3 = 81 - 27 = 54$$

### **Xulosa**

Kombinatorika elementlari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika masalalarini yechishda muhim ahamiyatga ega. Bizning kundalik hayotimizda amaliy masalalarni yechishda kombinatorikadan foydalanishga to'g'ri keladi. Masalan: telefon (uyali telefon)larni nomerlashda; avtomobillarni nomerlashda; hisob-kitob varaqlarini nomerlash va shu kabi masalalarni yechishda kombinatorikadan keng foydalaniladi. Bu yerda biz shu tipdagi (xildagi) masalalarni yechib ko'rsatdik.

Bundan tashqari kombinatorika tushunchasi va xossalariidan foydalanib Binom va polinom yoyilmasi ko'rsatildi, ularning koeffisientlarini hisoblash formulasi ko'rsatildi. Binom yoyilmasidagi koeffisientlar yig'indisining xossalari ko'rsatildi.

### Адабиётлар.

1. Айерленд К., Раузен М. Классическое введение в современную теория чисел. Перевод с английского. –М. Мир 1987.
2. Гаимназаров О.Г. Математикадан амалий масалалар ечиш намуналари. Т.: «Фан», 2006 й.
3. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. –М. наука, 1985.
4. Бухштаб Б.А. Теория чисел. –М. Прошвещение, 1966.
5. Венков Б.А. Элементарная Теория чисел. –М. –Л. 1935.
6. Виноградов И.М. Основы теории чисел. 8-е издание. –М. Наука, 1972.
7. Виноградов И.М. Сонлар назарияси асослари. –Тошкент. Укув педнашр, 1959.
8. Виноградов И.М. Элементы высшей математики. 1. Аналитическая геометрия, 2. Дифференциальное исчисление, 3. Основы теории чисел. Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования РФ в качестве учебника для вузов. –М. «Высшая школа», 1999.
9. Гаймназаров Г., Қўсимов С., Гаимназаров О.Г. Иқтисодиётда математика. Т.: “Fan va texnologiya”, 2008 й.
10. Искандаров Р.И., Назаров Р. Алгебра ва сонлар назарияси, 2к. (укув кулланма), - Тошкент. «Укитувчи», 1977.
11. Михелович Ш.Х. Теория чисел. –М. Высшая школа, 1962.
12. Назаров Р.Н., Тошпулатов Б.Т., Дусумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси 2к. (укув кулланма), - Тошкент. «Укитувчи», 1995.
13. Назруллаев Х.Н., Назруллаев У.Х. «Бир номаълумли таккосламалар» буйича методик курсатмалар. Самарканд, 1986.
14. Сушкевич А.К. Теория чисел. 2-е издание. Изд. Харьковского университета, 1956.

- 15.Хассе Г. Лекции по теории чисел. Перевод с немецкого Демьянова, под ред. И.Р. Шафаревича. ИИЛ, 1953.
- 16.Элварс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. Перевод с английского Калинина В.Л. и Скопина А.И., под редакцией Скубенко Б.Ф. –М. Мир, 1980.
- 17.Хинчин А.Я. Элементы теории чисел. Энциклопедия элементарной математики. Том 1. Гостехиздат, 1951.
- 18.Dirichlet P.G.L. and Dedekind R., Lectures on Number Theory, AMS, 1999, 275pp.
- 19.Helmut Koch, Number Theory (Algebraik Numbers and Functions), AMS, 2000, 392pp.  
Монографиялар, асарлар ва маколалар.
20. Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. – М. Наука, 1980.
- 21.Вон Р. Метод Харди-Литлвуда. Перевод с английского Лаврик А.А., под редакцией А.А. Карацубы. –М. Мир, 1985.
- 22.Гаусс К.Ф. Арифметические исследования в кН. «Труды по теории чисел». Общая редакция акад. Виноградова И.М. Изд-во АН СССР, 1959.
- 23.Гельфанд А.О.Трансцендентные и алгебраические числа. –М. ГТТИ, 1952.
- 24.Делоне Б.Н.Петербургская школа теории чисел. –М. Изд-во АН СССР, 1947.
- 25.Девенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. Перевод с английского Голубевой Е.П., под редакцией Чудакова Н.Г. –М. Наука, 1971.
- 26.Исраилов М.И. Нахождение числа решений линейных диофантовых уравнений и их приложений в теории инвариантных кубатурных

- формул. //Сибирский математический журнал. 1981, 2, №2, С. 121-136.
- 27.Исраилов М.И. Асимптотические разложения для числа решений диофантовой системы Гильберта – Камке с растущим числом слагаемых. Труды ЛОМИ. Исслед. По теории чисел, том 8, 1983, с 62-82.
- 28.Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. – М. Наука, 1983.
29. Абдулхамидов А.И. ва бошқалар. Алгебра ва математик анализ асослари. Академик лицейлар учун дарслик. Т. 2003 й.
- 30.Меликулов А. Математика 2-қисм, касб-хунар коллежлар учун ўқув қўлланма. Т. 2003 й.
- 31.Ғаймназаров Г. Комбинаторика и бином Ньютона, Л. 1990 г.
- 32.[www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)
- 33.[www.edu.uz](http://www.edu.uz)
- 34.[www.uzpak.uz](http://www.uzpak.uz)
- 35.[www.google.ru](http://www.google.ru)
- 36.[www.rsl.ru](http://www.rsl.ru)
- 37.[www.mathnet.ru](http://www.mathnet.ru)

