

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги
Муқимий номидаги Қўқон Давлат педагогика институти

“Математика-информатика” кафедраси

Сонли системалар курсидан мисол ва масалалар

ТЎПЛАМИ

(ўқув-услубий қўлланма)

Қўқон – 2009 йил

Ушбу қўлланма 5140100-математика-информатика таълим йўналиши ўқув режасида кўрсатилган ўқув соатлар ҳамда намунавий ўқув дастуридаги мавзуларга мос ҳолда тузилган ва ҚДПИ математика – информатика кафедрасининг 2009 йил __ йил __ ойидаги йиғилишида муҳокамадан ўтган.

Тузувчилар: ф.м.ф-н. С.Н.Носиров
Д.Д.Ароев

Такризчилар: ф.м.ф-н. У.Й.Акбаров
пед.ф.н. М.Ҳайитов

Ўқув – услубий қўлланма Қўқон ДПИ ўқув – услубий кенгашининг 2009 йил феврал ойидаги йиғилишида муҳокама қилинди ва ундан ички фойдаланишга тавсия этилди.

Сўз боши.

Умумий ўрта таълим синфларида натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сонлар конструктив равишда ўрганилади. Шунинг учун ҳам, бу сонлар ўртасида киритилган амаллар қаноатлантирадиган жуда кўп асосий хоссалар коида сифатида исботсиз қабул қилинади. Ҳудди шунингдек, академик лицей ва касб – ҳунар коллежларида комплекс сонлар системаси ҳам конструктив усулда ўрганилади.

Бирор фан ёки унинг бир қисмини асосли равишда ўрганиш учун қандайдир бошланғич тушунчалар мажмуи ва бирор аксиомалар тизимидан фойдаланиш зарур. Фанни ўрганишнинг бундай усулини аксиоматик усул дейилади.

Сонли системалар курсида асосий сонли системаларнинг аксиоматик қурилиши, хоссалари, уларнинг бир-бири билан боғлиқлиги ўрганилади. Юқорида санаб ўтилган сонли системаларнинг ҳар бири олдингисининг кенгайтмаси сифатида аниқланади. Бу курсда асосий сонли системалар ўртасидаги мавжуд бошқа сонли системалар, шунингдек, сонли системалар кенгайтмаларини қандай ва қанчалик даражада кенгайтириш масалалари ўрганилади.

Ушбу қўлланмада “Сонли системалар” курси дастури асосида ҳар бир мавзуга оид асосий таъриф ва тушунчалар билан биргаликда шу мавзуга мос мисол ва масалаларни ечиш намуналари келтирилган. Шунингдек, ҳар бир мавзу охирида шу мавзуни янада чуқурроқ ўзлаштиришга қаратилган мустақил шуғулланиш учун мисол ва масалалар берилган.

Ушбу қўлланма математика – информатика таълим йўналиши талабалари, умумий ўрта таълим ўқитувчилари учун мўлжалланган бўлсада, ундан сонли системалар соҳасидаги билимларини янада чуқурлаштириш ва мустаҳкамлаштирмақчи бўлган ҳар бир илм эгаси фойдаланиши мумкин.

1. Тўпламларнинг декарт кўпайтмаси. Муносабатлар.

Эквивалентлик ва тартиб муносабати.

Асосий тушунчалар.

A ва B тўпламларнинг элементлари орқали қурилган барча (a,b) кўринишдаги (бу ерда $a \in A$, $b \in B$) тартибланган жуфтликлар тўплами A ва B тўпламнинг декард кўпайтмаси дейилади ва уни $A \times B$ кўринишда белгиланади, яъни

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$$

$A \times A$ декарт кўпайтманинг ихтиёрий қисм тўплами ρ ни A тўпламда берилган муносабат дейилади. Агар $(a,b) \in \rho \subset A \times A$ бўлса, уни қисқача $a\rho b$ кўринишда ҳам белгиланади.

Агар A тўпламда ρ муносабат берилган бўлиб:

- а) $\forall a \in A$ элемент учун $a\rho a$ бажарилса, у ҳолда ρ рефлексив;
- б) агар $a\rho b$ шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай $a, b \in A$ элементлар учун $b\rho a$ шарт ҳам бажарилса, у ҳолда ρ ни симметрик;
- в) агар $a\rho b$ ва $b\rho c$ шартларни қаноатлантирувчи ҳар қандай $a, b, c \in A$ элементлар учун $a\rho c$ шарт ҳам бажарилса, у ҳолда ρ ни транзитив;
- г) рефлексив, симметрик, транзитив муносабатларни эквивалентлик;
- д) рефлексив, антисимметрик, транзитив муносабатларни тартиб муносабати;
- е) агар ρ A тўпламдаги тартиб муносабати бўлиб, A тўпламнинг ҳар қандай иккита элементи a, b учун $a\rho b$ ёки $b\rho a$ шартлардан ақалли биттаси албатта бажарилса, у ҳолда ρ ни A тўпламда чизиқли тартиб муносабати дейилади.

Агар ρ муносабат A тўпламдаги эквивалентлик муносабати бўлса, A тўпламдаги a элемент билан ρ муносабатда бўлган A тўпламнинг барча элементлари тўпламини $[a]$ кўринишда белгиланади ва уни ρ муносабат бўйича a элемент билан ҳосил қилинган эквивалентлик синфи дейилади. Эквивалентлик муносабати ρ бўйича ҳосил қилинган барча эквивалентлик синфлари тўпламини A тўпламнинг ρ муносабат бўйича фактор тўплами дейилади ва уни A/ρ кўринишда белгиланади.

Мисоллар:

1.1. $A = \{1,2,3,4,5\}$ тўплам берилган.

а) A тўпламда шундай ρ эквивалентлик муносабатини аниқлангки, бу муносабат $(1,5)$ ва $(2,3)$ элементларни ўз ичига оловчи энг кичик эквивалентлик муносабати бўлсин (яъни ρ юқоридаги шартларни қаноатлантирувчи энг кичик қисм тўплам).

б) A/ρ фактор тўпламни қуриш.

Ечиш: Масала шартига кўра

$$\rho = \{(1,5), (2,3), \dots\}$$

бўлиб ρ муносабат рефлексив бўлиши учун унинг таркибига (a,a) ; $a \in A$ кўринишдаги барча жуфтликлар кириши керак, яъни

$\rho = \{(1,5), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), \dots\}$ (ρ муносабатни аниқлашдаги кўп нукта, ρ муносабатга кирувчи тартибланган жуфтликларни тўлиқ кўрсатилмаганлигини, яна бошқа жуфтликлар ҳам киритилиши мумкинлигини кўрсатади).

ρ симметрик муносабат бўлиши учун эса $(5,1)$ ва $(3,2)$ жуфтликлар ҳам ρ га тегишли бўлиши керак. Демак,

$$\rho = \{(1,5), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,1), (3,2)\}$$

Қурилган ρ муносабатга тегишли бўлган 9 та тартибланган жуфтликлардан ташкил қилинган тўплам транзитивлик шартини ҳам қаноатлантиради. Шундай қилиб, изланаётган эквивалентлик муносабати ρ фақатгина юқоридаги 9 та элементлардан ташкил топган бўлади.

в) $\rho = \{(1,5), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,1), (3,2)\}$ эквивалентлик муносабати бўйича барча эквивалентлик синфларини курамиз. Улар куйидагилардир

$$[1] = \{1,5\}$$

$$[2] = \{2,3\}$$

$$[4] = \{4\}$$

$$\text{Демак, } A/\rho = \{[1], [2], [4]\}$$

1.2. $A = \{1,2,3,4,5\}$ тўпламда шундай ρ тартиб муносабатни аниқлангки, у $(1,5)$ ва $(2,3)$ элементларни ўз ичига олсин ва чизиқли тартиб муносабати бўлсин.

Ечиш: Берилган масала шартидан

$\rho = \{(1,5), (2,3), \dots\}$ кўринишда бўлади. ρ муносабат рефлексив бўлиши учун эса ҳар қандай $a \in A$ учун $(a,a) \in \rho$ шарт бажарилиши керак. Демак,

$$\rho = \{(1,5), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), \dots\}$$

кўринишда бўлади. Бу муносабат кўрсатилган элементлардангина иборат бўлса, у антисимметрик ҳам бўлади, чунки $(a,b) \in \rho$ ва $(b,a) \in \rho$ шартларни қаноатлантирувчи ҳар хил $a, b \in A$ элементлар мавжуд эмас. Худди шунингдек, бу муносабат транзитивлик шартини ҳам бажаради, яъни ρ тартиб муносабати бўлади. Лекин бу тартиб муносабати чизиқли бўлмайди, чунки ҳар қандай $a, b \in A$ элементлар учун ёки $(a,b) \in \rho$ ёки $(b,a) \in \rho$ шартлардан бири албатта бажарилиши керак. Масалан, $3, 4 \in A$ бўлиб, $(3,4) \in \rho$ ёки $(4,3) \in \rho$ муносабатлардан бирортаси ҳам ўринли эмас. Демак, ρ муносабат чизиқли тартиб муносабат бўлиши учун, унинг таркибига $(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)$ элементлар ҳам киради. Шундай қилиб,

$$\rho = \{(1,5), (2,3), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5), \dots\}$$

Бу ерда ρ муносабат фақат кўрсатилган 15 та жуфтликлардангина иборат бўлса, у ҳолда ρ чизиқли тартиб муносабати бўлишини текшириш мумкин. Қўшилган тартибланган жуфтликларни олиш билан унинг антисимметриклик ва транзитивлик шартларини ҳам бажарилишини кўрсатиш мумкин. Масалан, $(1,3)$ жуфтлик ўрнига $(3,1)$ жуфтликни олиш мумкин эмас, чунки $(1,3) \in \rho$, $(1,2) \in \rho$ шартларни транзитивлик шартига асосан $(3,2) \in \rho$

бажарилиши келиб чиқади. Иккинчи томондан $(2,3) \in \rho$ шарт ўринли. Охирги иккита муносабатнинг бажарилиши ρ нинг антисимметрик бўлишига зид бўлади.

1.3. A ва B тўпламлар қандай шартларни қаноатлантирганда

$$A \times B = B \times A$$

Тенглик ўринли бўлади ?

1.4. Қуйидаги муносабатлар учун рефлексивлик, симметриклик, транзитивлик,

антисимметриклик шартлари бажарилиши ёки бажарилмаслигини текширинг.

а) $\rho_1 = \{(n,k) \mid n,k \in \mathbb{Z}, n^2 = k^2\}$

б) $\rho_2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, x^3 = y^3\}$

в) $\rho_3 = \{(n,k) \mid n,k \in \mathbb{Z}, n-k \geq 0\}$

г) $\rho_4 = \{(n,k) \mid n,k \in \mathbb{Z}, n=k-1\}$

д) $\rho_5 = \{(n,k) \mid n,k \in \mathbb{Z}, n:k\}$

е) $X = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ тўпланда $\rho_6 = \{(i,j) \mid i,j \in X, i:j\}$

ё) $M_2(Q)$ -ҳамма 2-тартибли рационал элементли матрицалар тўпламида $\{(n,k) \mid n,k \in \mathbb{Z}, n:k\}$

$\rho_7 = \{(A,B) \mid A,B \in M_2(Q); A \text{ матрицанинг ҳар бир элементи } B \text{ матрицанинг мос элементида катта эмас}\};$

ж) $\rho_8 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \neq \sqrt{y}\}$

1.5 Ҳар қандай тўпланда эквивалентлик ва тартиб муносабати бўладиган ягона муносабат аниқлаш мумкинлигини исботланг.

1.6 $\rho = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \neq \sqrt{y}\}$ муносабат эквивалентлик муносабати бўладими ?

1.7 $X = \{1,2,3\}$ тўпланда неча хил усул билан эквивалентлик, неча хил усул билан чизиқли тартиб муносабати аниқлаш мумкин.

1.8 $\mathbb{C}$ комплекс сонлар тўпламидаги қуйидаги муносабатлардан қайси бири чизиқли тартиб муносабати бўлади:

$\rho_1 = \{(a+bi, c+di) \mid a,b,c \in \mathbb{R}, a \leq c \text{ ва } b \leq d\}$

$\rho_2 = \{(a+bi, c+di) \mid a,b,c \in \mathbb{R}, a < c \text{ ёки } a = c \text{ ва } b \leq d\}$

2.Группа, ҳалқа ва майдон тушунчалари. Чизиқли фазо, алгебра ва алгебранинг ранги.

Алгебра ва сонлар назарияси курсида группа, ҳалқа ва майдон тушунчалари аниқланган бўлиб, улар шу мавзунинг асосий тушунчалари ҳисобланади.

Агар K тўплам $+$ ва $\cdot$ амалларига нисбатан ҳалқа ташкил этиб, $\cdot$ амалига нисбатан бирлик элемент мавжуд ва 0 дан фарқли бўлган K ҳалқанинг ҳар қандай элементи учун тескари элемент мавжуд бўлса, у ҳолда K ни жисм дейилади. Демак, K тўплам жисм бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

1. + амали ассоциатив;
2. + амали коммутатив;
3. + амалига нисбатан нейтрал элемент θ мавжуд;
4. К нинг ҳар қандай элементи a учун + амалига нисбатан тескари (қарама-қарши) бўлган $-a \in K$ мавжуд;
5. $\cdot$ амали ассоциатив;
6. $\cdot$ амали + амалига нисбатан дистрибутив;
7. К ҳалқада шундай e элемент мавжудки, $e \cdot a = a \cdot e = a$ тенглик бажарилади;
8. К ҳалқадаги ҳар қандай 0 дан фарқли бўлган a элемент учун тескари элемент $a^{-1} \in K$ мавжуд, яъни

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$
 тенглик бажарилади.

Агар К жисм бўлиб, қуйидаги қўшимча шарт

9. $\cdot$ амали коммутатив;

бажарилса, у ҳолда К ни майдон дейилади. Демак, коммутатив жисм майдондир. Группа, ҳалқа, жисм ва майдондаги элементлар сонига қараб уни чекли ёки чексиз деб номланади.

Майдоннинг ҳар қандай a ва b элементлари ($a \neq 0$) учун $ax=b$; $x \cdot a=b$ тенгламаларнинг ечимлари мавжуд ва бу ечимлар бир хил бўлади. Лекин жисм элементлари a ва b лар учун бу ечимлар мавжуд бўлган ҳолда улар тенг бўлмасликлари мумкин.

Чизиқли фазо тушунчаси ҳам алгебра ва сонлар назария курсидагидек таърифланади.

Агар L тўплам P майдон устида чизиқли фазо ташкил этиб, L_1 тўпламнинг ўзи ҳам $+$ ва $\cdot$ амалларига нисбатан ҳалқа ташкил этса ва ҳар қандай $\lambda \in P$, $x, y \in L$ элементлар учун $(\lambda \circ x) \cdot y = x \cdot (\lambda \circ y)$ (1) тенгликлар бажарилса, у ҳолда L тўплами P майдон устида алгебра ташкил этади дейилади. (1) тенгликларни ёзишда L ҳалқадаги кўпайтириш амалини $\cdot$ билан L чизиқли фазонинг x векторини $\lambda \in P$ скалярга кўпайтириш амалини $\circ$ символи билан белгиланди.

Агар L тўплам P майдон устида алгебра ташкил этса, L чизиқли фазонинг ўлчовини алгебранинг ранги деб аталади.

L тўплам группа (ёки ҳалқа, жисм, майдон, чизиқли фазо, алгебра) ташкил этиб унинг қисм тўплами L_1 ҳам L даги амалга нисбатан группа (ёки ҳалқа, майдон, жисм, чизиқли фазо, алгебра) ташкил этса, у ҳолда L_1 ни L нинг қисм группаси (ҳалқаси, жисми, майдони, фазоси, алгебраси) дейилади. Бу ҳолда L ни L_1 нинг кенгайтмаси ҳам дейилади.

Мисоллар.

2.1. 1 нинг 6-даражали комплекс илдизлари тўплами кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил этишни кўрсатинг.

Ечиш: $C_6 = \{\alpha \in C / \alpha^6 = 1\}$

белгилаш киритамиз, яъни 1 нинг 6-даражали барча комплекс илдизлари тўплами C_6 бўлсин. Бу тўпландаги кўпайтириш амали аниқланган, чунки

$$\alpha \in C_6, \beta \in C_6 \text{ бўлса, } \alpha^6 = 1, \beta^6 = 1$$

тенгликлар ўринли бўлиб, улардан $(\alpha \cdot \beta)^6 = 1$ тенгликнинг бажарилиши ҳам келиб чиқади. Бу амалнинг ассоциативлиги бажарилади. $1 \in C_6$ бўлиб бу элемент C_6 да $\cdot$ амалига нисбатан бирлик элемент бўлади. C_6 даги ҳар қандай элемент α га тескари элемент мавжудлигини кўрсатамиз.

$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 = \frac{1}{\alpha^6} = 1$ тенгликдан $\frac{1}{\alpha}$ ҳам C_6 тўпланда тегишлилиги келиб чиқади. Демак, C_6 тўпланда кўпайтириш амалига нисбатан чекли (чунки C_6 тўпланда жами 6 та элемент ётади) группа ташкил этади.

2.2. $Q(\sqrt[3]{3}) = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} / a, b, c \in Q\}$ тўпланда оддий амалларга нисбатан рационал сонлар майдони устида алгебра ташкил этишини кўрсатинг ва бу алгебранинг рангини аниқланг.

Ечиш: $\alpha = a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \in Q(\sqrt[3]{3})$

$$\beta = a_1 + b_1\sqrt[3]{3} + c_1\sqrt[3]{9} \in Q(\sqrt[3]{3})$$

элементлар берилган бўлса, $\alpha + \beta = (a + a_1) + (b + b_1)\sqrt[3]{3} + (c + c_1)\sqrt[3]{9}$ тенглик билан уларни қўшиш амали ва $\lambda \in Q$ сон учун $\lambda \cdot \alpha = \lambda a + \lambda b\sqrt[3]{3} + \lambda c\sqrt[3]{9}$ тенглик билан α векторни сонга кўпайтириш оддий амаллар ҳисобланади. Бу амалларга нисбатан $Q(\sqrt[3]{3})$ тўпланда Q -рационал сонлар майдони устида чизиқли фазо ташкил этади (чизиқли фазо аксиомалари бажарилади). $Q(\sqrt[3]{3})$ тўпландан олинган ихтиёрий иккита α ва β элементларнинг кўпайтмаси кўпхадларни кўпайтириш қоидаси билан аниқланади. У ҳолда, $\alpha \cdot \beta = aa_1 + 3(b_1c + c_1b) + (a_1b + ab_1 + 3cc_1)\sqrt[3]{3} + (ac_1 + a_1c + bb_1)\sqrt[3]{9}$ бўлиб $\alpha \cdot \beta \in Q(\sqrt[3]{3})$ муносабат келиб чиқади. $Q(\sqrt[3]{3})$ тўпланда эса, $+$ ва $\cdot$ кўпайтириш амалига нисбатан бирлик элементли коммутатив ҳалқа ташкил этади. Энди $Q(\sqrt[3]{3})$ тўпланда Q майдон устида алгебра эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун эса $\lambda \cdot (x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$ тенгликлар бажарилганлигини кўрсатиш керак. Лекин бу шартларнинг ўринли бевосита текширилади. Демак, $Q(\sqrt[3]{3})$ тўпланда Q майдон устида алгебра ташкил этади. Энди унинг рангини, яъни чизиқли фазонинг ўлчовини аниқлаймиз.

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = \sqrt[3]{3}$$

$$\alpha_3 = \sqrt[3]{9}$$

элементлар $Q(\sqrt[3]{3})$ фазосидаги чизиқли эркин векторлар системадир. Агар бу системага ихтиёрий $\alpha \in Q(\sqrt[3]{3})$ векторни қўшишдан ҳосил бўлган система чизиқли боғланган бўлса, у ҳолда бу алгебранинг рангни 3 га тенглиги келиб чиқади. Текшириш мумкинки,

$$a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + (-1)\alpha = 0$$

тенглик ўринли бўлиб $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha$ лар 4 та векторлардан иборат система чизиқли боғланган бўлади. Демак,

$$\dim_Q Q(\sqrt[3]{3}) = 3$$

тенглик ўринли.

2.3. Агар G бирор амалга нисбатан коммутатив группа бўлиб, e унинг бирлик элементи бўлса, G группадаги иккинчи амални қандай аниқласак, у халқага айланади?

2.4. Агар группанинг тартиби (группадаги элементлари сони) туб бўлса, уни коммутатив группа эканини исботланг.

2.5. $Z_{10} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ тўплам қуйидаги амалларга нисбатан халқа ташкил этишни кўрсатинг:

$$i \oplus j = \begin{cases} i + j, & \text{агар } i + j \leq 10 \\ i + j - 10, & \text{агар } i + j \geq 10 \end{cases}$$

$i \circ j = r$, бу ерда r $i \cdot j$ кўпайтмани 10 га бўлгандаги қолдиқ ва $i, j \in Z_{10}$.

2.6. Z_{10} – тўплам $\oplus$ амалига нисбатан чекли коммутатив группадир. Унинг қисм группаларини кўрсатинг.

2.7. Z_{10} – халқанинг қисм халқаларини аниқланг.

2.8. $M_2(R)$ - ҳамма иккинчи тартибли ҳақиқий элементли матрицалар тўплами R майдон устида чизиқли фазо ва алгебра ташкил этишини кўрсатинг ва бу алгебранинг рангини аниқланг.

2.9. $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} (a, b \in Q)\}$ оддий амалларга нисбатан халқа, ҳатто майдон ҳам ташкил этади. Бу халқани қайси майдонлар усти алгебралар деб қараш мумкин ва бу алгебраларнинг рангини аниқланг.

2.10. R тўплами Q майдон устида алгебра деб қараган ҳолда унинг рангини аниқланг.

2.11. R майдонни $Q(\sqrt{2})$ майдон устида алгебра ташкил этишини исботланг ва унинг рангини аниқланг.

2.12. C -комплекс сонлар тўплами R майдон устида алгебра ташкил этишини ва унинг ранги нечага тенглигини кўрсатинг.

3. Алгебраик структура кенгайтмаси. Алгебраик структураларни гомоморфизми ва изоморфизми

Агар бирор G тўпламда бир ёки бир неча амаллар аниқланган бўлса, G тўплами бу алгебраик амал(лар) билан биргаликда алгебра структура (тизим) дейилади. Демак, группа, халқа, жисм, майдон, чизиқли фазо, алгебра тушунчалар алгебраик структураларнинг ҳар хил кўринишларидир.

Агар $G_1 \subset G$ алгебраик структура ташкил этса, у ҳолда G_1 ни G нинг қисм структураси, ёки G структура G_1 нинг кенгайтмаси ҳам деб номланади.

Масалан, Z ва R тўпламлар оддий қўшиш амалига нисбатан группалар бўлиб, $Z \subset R$ муносабат ҳам ўринли, яъни Z группа R группанинг қисм группасидир, ўз навбатида R эса Z группанинг кенгайтмаси ҳам деб номланади. Худди шунингдек, Z ва R тўпламлар оддий қўшиш ва

кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ташкил этиб, Z ҳалқа R ҳалқанинг қисм ҳалқаси, ёки R ҳалқа Z ҳалқанинг кенгайтмасини ташкил этади.

Агар G тўплам $*$ амалига нисбатан, G_1 эса $\circ$ амалига нисбатан группа ташкил этиб, G группани G_1 группага ўтказувчи $\varphi: G \rightarrow G_1$ акслантириш учун $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ тенглик G группанинг ихтиёрий a, b элементлари учун ўринли бўлса, у ҳолда φ акслантиришни гомоморф акслантириш ёки гомоморфизм дейилади. Бунда

$$\varphi(G) = \{x \in G_1 \mid \exists a \in G, \varphi(a) = x\}$$

тўпламни G группанинг гомоморф тасвири (образи) дейилади.

Ўзаро бир қийматли бўлган $\varphi: G \rightarrow G_1$ гомоморф акслантиришни эса изоморф акслантириш дейилади. Бу ҳолда G ва G_1 группаларни изоморф группалар дейилади.

K ва K_1 тўпламлар ҳалқа ташкил этган ҳолда $\varphi: K \rightarrow K_1$ акслантириш учун

$$\text{ва} \quad \left. \begin{aligned} \varphi(a + b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \end{aligned} \right\} (2)$$

шартлар бажарилса, φ акслантиришни гомоморф акслантириш дейилади. (2) тенгликни чап томонидаги $+$ ва $\cdot$ K ҳалқадаги, ўнг томонидаги $+$ ва $\cdot$ амаллари эса K_1 ҳалқадаги амаллар эканлигига аҳамият бериш керак.

Чизиқли фазо ва алгебраларнинг гомоморфизми ва изоморфизмлари ҳам, юқоридаги таърифлардагидек тегишли ўзгартириш киритиш орқали аниқланади.

Масалан $\varphi: L \rightarrow L_1$ – акслантириш L ва L_1 чизиқли фазолар ўртасидаги гомоморфизм бўлиш учун

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(\lambda x) &= \lambda \varphi(x) \end{aligned} \right\} (3)$$

шартларни қаноатлантириши керак. $\varphi: L \rightarrow L_1$ акслантириш P майдон устида берилган алгебралар ўртасидаги изоморф акслантириш учун

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(\lambda \cdot x) &= \lambda \varphi(x) \\ \varphi(x \cdot y) &= \varphi(x) \cdot \varphi(y) \end{aligned} \right\} (4) \text{ шартлар бажарилиши керак.}$$

Бу ерда ҳам (3) ва (4) тенгликларнинг чап томонидаги $+$ ва $\cdot$ ва λ скалярга кўпайтириш амаллари L тўпламдаги, ўнг томонидаги $+$ ва $\cdot$ амаллари эса L_1 даги амаллардир.

Мисоллар.

3.1 Z -бутун сонлар тўплами ва $M_2(Z)$ -иккинчи тартибли бутун элементли барча матрицалар тўплами оддий кўшиш ва кўпайтириш амалларига нисбатан ҳалқа ташкил этади. Z ҳалқа $M_2(Z)$ ҳалқанинг кенгайтмасини бўладими?

Ечиш: Z тўпладан олинган ҳар қандай k бутун сон орқали ҳосил қилинган $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ кўринишдаги матрица $M_2(Z)$ ҳалқага тегишли. Агар шартли

$$\text{равишда } k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ деб}$$

қабул қилсак, $Z \subset M_2(Z)$ муносабат бажарилади ва

$$k+n = \begin{pmatrix} k+n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot n = \begin{pmatrix} k \cdot n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ тенгликлар бажарилади, яъни } k \text{ сон билан унинг}$$

бошқа

кўриниши бўлган $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрица бир хил хусусиятларга эга бўлади. Демак,

$M_2(Z)$ ҳалқа Z ҳалқанинг кенгайтмаси бўлади. Ундан ташқари, $M_2(Z)$ да Z га тегишли бўлмаган, $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ кўринишда бўлмаган элементлар ҳам мавжуд, яъни $Z \neq M_2(Z)$

3.2 R ҳақиқий сонлар тўплами оддий қўшиш амалига нисбатан, O дан фарқли барча ҳақиқий сонлар тўплами эса кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил этади. Агар $\varphi: R \rightarrow R_0$ акслантиришни $\varphi(x) = 3^x$ тенглик билан аниқласак,

а) φ акслантириш гомоморф бўладими?

в) φ акслантириш изоморф бўладими?

в) $\varphi(R)$ -гомоморф тасвирини курунг.

Ечиш. а) $\varphi(x+y) = 3^{x+y} = 3^x \cdot 3^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ Демак φ гомоморф акслантириш бўлади.

в) Агар $x \neq y$ бажарилса $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ ҳам бажарилади. Лекин φ акслантириш ўзаро бир қийматли бўлмайди, чунки R_0 гурппадаги манфий элементларга φ акслантириш ёрдами ўтадиган ҳақиқий сон мавжуд эмас. Демак, φ –изоморфизм бўлмайди.

с) $\varphi: R \rightarrow R_0$ -гомоморф акслантириш тасвирини кураимиз. $\varphi(x) = 3^x$ тенгликдан $3^x > 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\varphi: R \rightarrow R_+$ -барча мусбат сонлар тўпламидан иборат бўлиши мумкин. Охирги хулосани исботлаш учун ҳар қандай $\alpha \in R_+$ мусбат сонга φ акслантириш ёрдамида ўтадиган R группанинг элементи мавжудлигини кўрсатиш етарли. Бунинг учун $3^x = \alpha$ тенгламани x га нисбатан ечиш керак.

Демак, $x = \log_3 \alpha \in R$ бўлиб, $\varphi(x) = \alpha$ тенглик бажарилади. Шунинг учун, $\varphi(R) = R_+$ тенглик ўринли

3.3. Агар $\varphi: G \rightarrow G_1$ акслантириш G ва G_1 группалар ўртасидаги гомоморф акслантириш бўлса, у ҳолда G группанинг гомоморф тасвири $\varphi(G)$ тўплам G_1 группанинг қисм группаси бўлишини исботланг.

3.4. Агар G чекли группа бўлиб, $\varphi: G \rightarrow G_1$ гомоморфизм бўлса, ҳар қандай қисм группа G_1 учун $\varphi(G)$ қисм группа ҳам чекли бўлишини кўрсатинг.

3.5. Агар G чексиз группа бўлса, унинг ҳар қандай гомоморф тасвири ҳам чексиз бўлидами?

3.6. Агар $\varphi: G \rightarrow G_1$ акслантириш группаларнинг гомоморфизми бўлса, у ҳолда унинг ядроси деб номланадиган $N_y = \{a \in G / \varphi(a) = l_1 \in G_1\}$ (бу ерда l_1 - элемент G_1 группанинг бирлик элементи) қисм тўплам G группанинг қисм группаси бўлиб, ҳар қандай $g \in G$ элемент учун $gN_y = N_yg$ тенглик ўринли бўлишини кўрсатинг.

3.7. Барча ҳақиқий сонлар тўплами $\mathbf{R}$ аддитив группа ташкил этади. Модули 1 га тенг бўлган барча комплекс сонлар тўплами C_1 эса мультипликатив группа ташкил этади. Агар $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow C_1$ акслантириш. $\varphi(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ тенглик билан аниқланган бўлса, у ҳолда

- 1) $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow C_1$ акслантиришни гомоморфизм эканини исботланг;
- 2) $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow C_1$ акслантиришнинг ядросини аниқланг;
- 3) $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow C_1$ акслантириш изоморф акслантириш бўлиши ёки бўлмаслигини аниқланг.

3.8. Агар $\varphi: K \rightarrow K_1$ акслантириш K ва K_1 ҳалқалар ўртасидаги гомоморф акслантириш бўлиб, K майдон бўлса, унинг тасвири $\varphi(K)$ ҳам майдон ташкил этадими? Агар $\varphi: K \rightarrow K$ акслантириш изоморф акслантириш бўлсачи?

3.9. $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in Q\}$ ва $Q(\sqrt{3})$ майдонлар изоморф бўладими?

3.10. $\mathbf{R}$ – ҳақиқий сонлар майдонининг Q – рационал сонлар майдонига изоморф бўлган қандай қисм майдони мавжуд.

4. Аксиоматик назария. Натурал сонлар системасига аксиоматик таъриф.

Бирор фанни ёки унинг бир қисмини аксиомалар тизими ёрдамида ўрганиш аксиоматик усул дейилади.

Агар қабул қилинган аксиомалар тизимида бирорта аксиомани шу тизимдаги бошқа аксиомалар ёрдамида исботлаш мумкин бўлса, бу аксиомалар тизими боғланган дейилади. Акс ҳолда, яъни тизимдаги ҳар бир аксиомани шу тизимдаги бошқа аксиомалар ёрдамида исботлаш мумкин бўлмаса, у ҳолда бу аксиомалар тизими боғлиқсиз дейилади.

Демак, бирор аксиомалар тизимини боғлиқсизлигини кўрсатиш учун шу тизимга кирувчи аксиомалардан фақат биттасини қаноатлантирмайдиган ва шу тизимдаги бошқа аксиомаларни қаноатлантирадиган математик объект мавжудлигини кўрсатиш етарли.

Бирор аксиоматик тизимни қабул қилишдан олдин, аксиомаларни ифодалашга имкон берадиган бошланғич тушунчаларни қабул қилишга тўғри келади, яъни баъзи тушунчаларни таърифсиз қабул қилиш керак. Масалан, арифметикада сон, геометрияда тўғри чизик, нукта ва ҳаказо тушунчалар бошланғич тушунчалардир.

Натурал сонлар ситемасига аксиоматик таъриф беришда қуйидаги тушунчаларни бошланғич тушунча сифатида қабул қилинади:

- 1) N тўплам, унинг элементлари натурал сонлар;
- 2) 1 натурал сон, яъни $1 \in N$;
- 3) N тўпламда қўшиш $(+)$ ва $(\cdot)$ амаллари аниқланган.

Бу бошланғич тушунчалар ёрдамида қуйидаги аксиомалар тизими қабул қилинади.

1. $1 \in N$ ва N тўпламда $+$ ва $\cdot$ амаллари аниқланган бўлиб, ҳар қандай $a, b \in N$ натурал сонлар учун $a + b \neq 1$.
2. Ҳар қандай $a \in N$ элементлар учун шундай $c \in N$ элемент мавжудки, $c = a + 1$ тенглик бажарилади.
3. Ҳар қандай $a, b \in N$ элементлар учун $a + 1 = b + 1$ тенгликда $a = b$ келиб чиқади.
4. Ҳар қандай $a, b \in N$ элементлари учун $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ тенглик ўринли. (бу хоссани $+$ амалига нисбатан ассоциативликнинг кучсиз шакли дейилади.)
5. Ҳар қандай $a, b \in N$ элемент учун $a \cdot 1 = a$ тенглик ўринли.
6. Ҳар қандай $a, b \in N$ элементлар учун $a(b + 1) = ab + a$ тенглик ўринли.
7. (Минималлик аксиомалари) Агар $K \subset N$ муносабат ўринли бўлиб:
 - а) $1 \in K$;
 - б) Ҳар қандай $a \in K$ элемент учун $(a + 1) \in K$, бўлса, у ҳолда $K = N$ тенглик бажарилади.

Юқоридаги 1-7 аксиомаларни қаноатлантирувчи N тўпламни **натурал сонлар системаси** дейилади.

Мисоллар:

4.1 N натурал сонлар тўплами бўлса, $N_1 = \{(a+1)/2 \mid a \in N\}$ кўринишдаги

тўпламда $\alpha = (a+1)/2$ ва $\beta = (b+1)/2$ элементларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидаги тенгликлар билан аниқланган

$$\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta \quad (1)$$

$$\alpha \circ \beta = [2\alpha\beta]/2 \quad (2)$$

Бу ерда $\alpha + \beta$ оддий қўшиш амали $[2\alpha\beta]$ эса $2\alpha \cdot \beta$ нинг бутун қисми.

Қурилган N_1 тўплам учун қуйидаги хоссаларни исботланг.

а) N_1 тўпламда (1) ва (2) тенгликлар билан аниқланган амаллар аниқланган;

б) N_1 тўпламда $\circ$ амалига нисбатан бирлик элемент мавжуд;

с) N_1 тўплам $\oplus$ ва $\circ$ амалларига нисбатан натурал сонлар аксиомалар системасидаги 1-6 шартларни қаноатлантиришини, лекин 7-аксиомани қаноатлантирмайди.

Ечиш.

а) N_1 тўпламда (1) тенглик билан берилган $\oplus$ амалининг аниқланганлигини бевосита текшириш мумкин. (2) тенглик билан берилган $\circ$ амали аниқланганлигини кўрсатамиз. Агар

$\alpha = (a+1)/2$, ва $\beta = (b+1)/2$ сонлардан ақалли биттаси бутун сон бўлса,

$$\alpha \circ \beta = \alpha \cdot \beta$$

тенглик келиб чиқади. Агар уларнинг ҳар иккаласи ҳам бутун сон бўлмаса,

$$\alpha \circ \beta = \frac{[2 \frac{a+1}{2} \cdot \frac{b+1}{2}]}{2} = \frac{[(a+1)(b+1)]}{2} \in N_1$$

муносабат ўринли бўлади. Масалан,

$\alpha = \frac{4+1}{2}$ ва $\beta = \frac{6+1}{2}$ бўлса,

$$\alpha \circ \beta = \frac{\left[\frac{(4+1)(6+1)}{2} \right]}{2} = \frac{\left[\frac{35}{2} \right]}{2} = \frac{17}{2} = \frac{16+1}{2} \in N_1$$

тенглик бажарилади.

б) N_1 тўпламда $\circ$ амалига нисбатан $1 = \frac{1+1}{2}$ бирлик элемент учун $\alpha \circ 1 = \alpha$

тенглик бажарилади.

с) N_1 тўпламда аниқланган $\circ$ ва $\oplus$ амаллари учун натурал сонлар аксиомалар тизимидаги 1-6 шартларнинг бажарилишини кўрсатамиз.

1) $1 = \frac{1+1}{2} \in N_1$ ва ҳар қандай $\alpha, \beta \in N_1$ элементлар учун $\alpha \oplus \beta = 1$ тенглик

бажарилмайди, чунки $\alpha = \frac{a+1}{2}, \beta = \frac{b+1}{2}$ бўлса, $\alpha \oplus \beta = \frac{(a+b+1)+1}{2}$ тенглик

ўринли бўлиб, $a+b+1=1$ тенглик а ва б элементларнинг ихтиёрий қийматларида бажарилмайди.

2) $\alpha = \frac{a+1}{2} \in N_1$ бўлсин.

$\alpha \oplus 1 = \frac{a+1}{2} \oplus \frac{1+1}{2} = \frac{(a+2)+1}{2} \in N_1$ чунки, $(a+2) \in N_1$ муносабат ўринли.

3), 4), 5) ва 6) шартларнинг бажарилишини бевосита текшириш мумкин. Энди аксиомалар тизимидаги 7-аксиоманинг шартлари бажарилишини кўрсатамиз. Бунинг учун $N_1 \supset K_1$ -тўплам сифатида.

$K_1 = N = \left\{ \frac{a+1}{2} \mid a - \text{тоқ натурал сон} \right\}$ деб олсак, бу K_1 тўплам учун

$$1 = \frac{1+1}{2} \in K_1 \text{ шарт бажарилади.}$$

Шунингдек, агар $\alpha = \frac{1+1}{2} \in K_1$ бўлса, яъни a тоқ бўлса,

$$\alpha \oplus 1 = \frac{a+1}{2} \oplus \frac{1+1}{2} = \frac{(a+2)+1}{2} \in K_1 \text{ бўлади, чунки } a+2 \text{ ҳам тоқ сон бўлади. Лекин}$$

$K_1 \neq N_1$. Шундай қилиб 7-аксиоманинг натижаси бажарилмайди, яъни, натурал сонлар аксиомалар тизимидаги 7-аксиома аксиомалар тизимидаги бошқа аксиомаларга боғлиқсизлиги исботланди.

4.2 Ҳар қандай $a \neq 1$ натурал сон учун $a = 1 + n$ тенгликни қаноатлантирувчи n натурал сон мавжудлигини исботланг.

Ечиш. Қуйидаги тўпламни қурамиз

$$K_1 = \{a \in N \mid a \neq 1, \exists n \in N, a = 1 + n\}$$

яъни, масала шартини қаноатлантирувчи барча натурал сонлар тўпламини K_1 билан белгиланади. Агар K_1 тўплам 1 дан фарқли барча натурал сонлардан иборат эканлигини исботласак, масала ечилган бўлади. Бунинг учун

$$K = K_1 \cup \{1\}$$

белгилаш киритиб, бу K тўплам учун натурал сонлар аксиомаси тизимидаги 7-аксиоманинг бажарилишини кўрсатамиз. $1 \in K$ эканлиги K тўпламнинг қурилишидан келиб чиқади. Айтайлик, $a \in K$ бўлсин. У ҳолда, $a+1 = 1+a$ айниятдан $a+1 \in K$ муносабат келиб чиқади. Бундан эса, қурилган K тўплам 7-аксиоманинг шартларини бажариши, демак, $K = N$ тенглик келиб чиқади. Шунинг учун ҳар қандай 1 дан фарқли a сон K_1 тўпламга тегишли бўлади. Бу эса 1 дан фарқли ҳар қандай натурал сонни $1+n$ шаклда ёзиш мумкинлигини кўрсатади.

4.3 Ҳар қандай a, b натурал сонлар учун $a \neq a+b$ эканлигини кўрсатинг.

4.4 Натурал сонлар тўпламида тартиб муносабати киритиш мумкинлигини исботланг.

4.5 Агар a ва b натурал сонлар учун $a \leq b$ тенгсизлик бажарилса, ҳар қандай c натурал сон учун $a+c \leq b+c$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлишини исботланг.

4.6. Ҳар қандай a ва b натурал сонлар учун $a \leq ab$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатинг.

4.7. Ҳар қандай 1 дан фарқли бўлган n натурал сон учун шундай k натурал сон мавжудки, ёки $n=2k$, ёки $n=2k+1$ тенгликлардан биттаси бажарилишини исботланг.

4.8. Ҳар қандай a ва b натурал сонлар учун $a^2 = 2b^2$ тенглик бажарилмаслигини кўрсатинг.

4.9. Натурал сонлар тўплами чексиз эканлигини асосланг.

4.10. Қуйидаги тўплам берилган

$$N_2 = \{(a, x) / a \in N, x=0 \text{ ёки } x=1\}$$

Бу тўпلامда $\oplus$ ва $\circ$ амалларини мос равишда қуйидаги тенгликлар орқали аниқлаймиз: $(a, x) \oplus (b, y) = \begin{cases} (a+b, x) & \text{агар } x \cdot y = 0, \\ (b, 1) & \text{агар } x \cdot y = 1 \end{cases}$

$$(a, x) \circ (b, y) = \begin{cases} (ab, y) & \text{агар } x = 0, \\ (a, 1) & \text{агар } x = 1 \end{cases}$$

У ҳолда N_2 тўпلامда $\circ$ амалга нисбатан бирлик элемент $(1, 0)$ қўринишда бўлади. N_2 тўпلامда берилган $\oplus$ ва $\circ$ амаллари учун қуйидаги хоссаларни исботланг:

- 1). $\oplus$ коммутатив эмас,
- 2). $\circ$ коммутатив эмас,
- 3). $\oplus$ ассоциатив эмас,
- 4). дистрибутивлик шarti бажарилмайди.

5. N_2 тўпلامнинг шундай қисм тўплами K_2 ни қуришга, бу K_2 учун натурал сонлар аксиомалари тизимидаги 1-6 шартлар бажарилган ҳолда, бу қисм тўпلام N_2 га тенг бўлмасин, яъни N_2 тўпلام 7-аксиомани қаноатлантирмасин.

5. Бутун ва рационал сонлар тизимларини аксиоматик таърифлаш.

Бутун сонлар тизимига аксиоматик таъриф беришда қуйидаги тушунчаларни бошланғич тушунчалар сифатида қабул қилинади:

1. Z – тўпلام, унинг элементлари бутун сонлар.
2. $N \subset Z$.
3. Z тўпلامда $\oplus$ ва $\cdot$ амаллари аниқланган.
4. $0 \in Z$ ва бу элемент $\oplus$ амалига нисбатан нейтрал элемент.

Бутун сонлар тизимига бериладиган аксиомаларни 3 гуруҳга бўламиз.

А-гуруҳ

1. Z тўпلام $\oplus$ ва $\circ$ амалларига нисбатан ҳалқа ташкил этади.

В-гуруҳ

1. $N \subset Z$.
2. Z тўпلامдаги $\oplus$ ва $\circ$ амаллари мос равишда N тўпلامдаги $+$ ва $\cdot$ амалларининг давоми сифатида аниқланган.

С-гуруҳ (минималлик аксиомаси)

1. Агар K тўпلام Z нинг қисм тўплами бўлиб:
 - а) $N \subset K$ бўлса;
 - б) ҳар қандай $a, b \in K$ учун $a - b \in K$ муносабат ўринли бўлса;
 у ҳолда $K = Z$ тенглик ўринли.

Таъриф. А, В ва С гуруҳ аксиомаларини қаноатлантирувчи Z тўпلامни бутун сонлар тизими дейилади.

Бу таърифдан кўринадики, Z тўплам N тўпламнинг ўз ичига олувчи энг кичик ҳалқадир. Шу билан бирга ҳар қандай бутун сонни иккита натурал сонлар айирмаси шаклида ифодалаш мумкин.

Рационал сонлар тизимини аксиоматик таърифлашда қуйидаги тушунчаларни бошланғич тушунчалар сифатида қабул қилинади.

а) Q тўплам ва унинг элементлари рационал сонлар;

б) $Z \subset Q$.

с) Q тўпламда $\oplus$ ва $\circ$ амаллари аниқланган.

Рационал сонлар тўпламига бериладиган аксиомаларни ҳам 3 гуруҳга бўламиз.

А гуруҳ

1. Q тўплам $\oplus$ ва $\circ$ амалларига нисбатан майдон ташкил этади.

В-гуруҳ

1. $Z \subset Q$

2. Q тўпламдаги $\oplus$ ва $\circ$ амаллари Z тўпламидаги мос $\oplus$ ва $\circ$ амалларининг давоми сифатида аниқланган.

С-гуруҳ (минималлик аксиомаси)

1. Агар $K \subset Q$ бўлиб:

а) $Z \subset K$ бўлса;

б) ихтиёрий $a, b \in K$ ($a \neq 0$) элементлар учун $\frac{a}{b} \in K$ муносабат бажарилса;

у ҳолда $K=Q$ тенлик ўринли.

Таъриф. Агар Q тўплам А, В ва С гуруҳ аксиомаларини қаноатлантирса, у ҳолда Q тўпламни рационал сонлар тизими дейилади.

Бу таърифдан кўринадики, Q тўплам майдондир. Рационал сонлар қуйидаги муҳим хоссаларга эга:

1) ҳар қандай рационал сонни $\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in Z$ кўринишда

ифодалаш мумкин;

2) рационал сонлар зич жойлашган, яъни ҳар қандай α ва β рационал сонлар ўртасида ётувчи γ сонни топиш мумкин.

($\alpha < \gamma < \beta$ ёки $\beta < \gamma < \alpha$).

3) Q ва N тўпламлар тенг қувватли;

4) Ҳар қандай чизикли тартибланган майдон Q – рационал сонлар майдонига изоморф бўлган қисм майдонга эга.

N, Z, Q тўпламларда аниқланган $\oplus$ ва $\circ$ амаллари Z тўпламдан бошлаб ўзидан олдинги тўпламда аниқланган $\oplus$ ва $\circ$ амалларининг давоми сифати аниқланганлиги сабабли соддалик учун уларни мос равишда $+$ ва $\cdot$ амаллари билан белгилаймиз.

Мисоллар

5.1. Ҳар қандай чизикли тартибланган бирлик элементли ҳалқанинг бутун сонлар ҳалқасига изоморф бўлган қисм ҳалқаси мавжудлигини исботланг.

Ечиш. Айтайлик K тўпلام бирлик элементли чизикли тартибланган ҳалқа бўлсин. Унинг бирлик элементини e билан белгиласак, ҳар қандай натурал сон n учун

$$n \cdot e = \underbrace{e + \dots + e}_n$$

кўринишдаги элементлар K ҳалқага тегишли ва $0 < e$ тенгсизлик ўринли бўлса, $0 < e < 2e < \dots < ne < \dots$ тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади. Чунки, K чизикли тартибланган ҳалқадир. Агар $0 > e$ тенгсизлик бажарилса юқоридагининг акси, яъни $0 > e > 2e > \dots > ne > \dots$ тенгсизликлар бажарилади. $ne \in K$ муносабатдан $(-n)e \in K$ муносабат ҳам келиб чиқади.

$$K_1 = \{ne | e \in K_1, n \in \mathbb{Z}\}$$

белгилаш киритсак, K_1 тўпلام K ҳалқанинг қисм тўплами бўлиб, бу тўпلام K даги амалларга нисбатан ҳалқа ташкил этади, яъни K_1 тўпلام K ҳалқанинг қисм ҳалқасидир. Иккинчи томондан, $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow K_1$ акслантиришни $\varphi(n) = n \cdot e$ тенглик билан аниқласак, бу акслантириш K_1 ва $\mathbb{Z}$ ҳалқалар ўртасидаги изоморф акслантириш бўлади, яъни

1) φ -ўзаро бир қийматли;

$$2) \varphi(n+m) = \varphi(n) + \varphi(m)$$

$$3) \varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \varphi(m)$$

шартлар бажарилади.

5.2. Агар $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ изоморф акслантириш бўлса, у ҳолда ҳар қандай a рационал сон учун $\varphi(a) = a$ бўлишини, яъни φ айний алмаштириш бўлишини кўрсатинг.

Ечиш. Айтайлик $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ изоморф акслантириш бўлсин. У ҳолда, ҳар қандай $a \in \mathbb{Q}$ учун $\varphi(a) = \varphi(a+0) = \varphi(a) + \varphi(0)$ муносабатлардан

$$\varphi(0) = 0$$

келиб чиқади. Ҳудди шу усул билан

$$\varphi(1) = 1$$

тенгликни ҳам ҳосил қилиш мумкин. Демак,

$$\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 1+1=2 \quad \varphi(3)=3$$

ва ҳоказо тенгликлар келиб чиқади. Агар $\varphi(a)=b$ тенглик бажарилса,

$$0 = \varphi(0) = \varphi(a+(-a)) = \varphi(a) + \varphi(-a) = b + \varphi(-a)$$

тенгликлардан

$$\varphi(-a) = -b \text{ келиб чиқади.}$$

Шундай қилиб, ҳар қандай k бутун сон учун

$$\varphi(k) = k \text{ тенглик ўринли.}$$

Агар q нолдан фарқли бутун сон бўлса,

$$1 = \varphi(1) = \varphi\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = \varphi(q) \cdot \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = q \cdot \varphi\left(\frac{1}{q}\right)$$

тенгликлардан.

$\varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}$ келиб чиқади. Бундан эса, ҳар қандай $\frac{p}{q}$ рационал сон учун $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(p)\varphi\left(\frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q}$ тенгликни ҳосил қиламиз.

5.3. $\mathbb{Z}$ бутун сонлар тўпламида $x^2=2y^2$ тенгламани ечинг.

5.4. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ тўпламлар тенг қувватли эканини исботланг.

5.5. Иккинчи тартибли ҳақиқий элементли барча матрицалар ҳалқасининг бутун сонлар ҳалқасига изоморф бўлган чексиз кўп қисм ҳалқалари мавжудлигини исботланг.

5.6. Рационал сонлар тўплами зич жойлашганлигини, яъни ҳар қандай a ва b рационал сонлар учун $a < b$ бўлганда, $a < c < b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи c рационал сон мавжуд бўлишини кўрсатинг.

5.7. Агар $P \neq \emptyset$ характеристикали майдон бўлса, унинг рационал сонлар майдонига изоморф бўлган қисм майдони мавжудлигини кўрсатинг.

5.8. Ҳар қандай рационал сонни иккита бутун соннинг нисбати шаклида ифодалаш мумкинлигини кўрсатинг.

5.9. Рационал сонлар майдонини фақат бир хил усул билан чизикли тартибланиш мумкин ва бу тартиб муносабати бутун сонлар ҳалқасидаги тартиб муносабатининг давоми сифатида аниқланишини исботланг.

5.10. Рационал сонлар майдонидаги чизикли тартиб муносабати архимед маъносидаги тартиб муносабати бўлишини кўрсатинг, яъни ҳар қандай $a > 0, b > 0$ рационал сонлар учун шундай c рационал сон мавжудки, $ac > b$

тенгсизлик бажарилади.

5.11. Рационал сонлар майдонининг ўзидан бошқа қисм майдони мавжуд эмаслигини исботланг.

6. Ҳақиқий ва комплекс сонлар тизимларига аксиоматик таърифлар.

Агар A -ихтиёрий майдон, P эса чизикли тартибланган майдон бўлса, A майдонни P майдонга ўтказувчи $// \cdot // : A \rightarrow P$ акслантириш учун қуйидаги

а) $\forall a \in A, \|a\| \geq 0, \text{ ва } \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

б) $\forall a, b \in A \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

с) $\forall a, b \in A \quad \|a \cdot b\| = \|a\| \cdot \|b\|$

шартлар бажарилса, у ҳолда A майдонни P майдон устида нормаллашган майдон дейилади. ($\|a\| \in P$ элемент эса, $a \in A$ нинг нормаси дейилади).

Масалан, $\mathbb{Q}$ -рационал сонлар тўпламида элементнинг нормасини қуйидагича аниқлаш мумкин.

$$\left\| \frac{p}{q} \right\| = \left| \frac{p}{q} \right| \quad (1)$$

Q рационал тўпламида элементнинг нормасини (1) формуладан фаркли қуйидагича аниқлаш ҳам мумкин. Агар p -туб сон бўлса, ҳар қандай α рационал сонни фақат бир хил усулда

$$\alpha = p^n \frac{a}{b} \quad (2)$$

(бу ерда $(a,b)=1$; $(b,p)=1$, $(a,p)=1$ ва $n \in \mathbb{Z}$) кўринишда ифодалаш мумкин.

$\alpha \in Q$ элементнинг нормасини

$$\|\alpha\| = \theta^n \quad (3)$$

тенглик билан аниқлаймиз, бу ерда θ сон $0 < \theta < 1$ шартларни қаноатлантирувчи рационал сон. Юқоридаги нормадан фаркли бўлган бу нормани θ -норма дейилади.

Агар A майдон P майдон устида нормаллашган майдон бўлса, A майдондан олинган кетма – кетликнинг яқинлашиши тушунчасини киритиш мумкин.

1-таъриф. A майдоннинг элементларидан иборат $\{x_n\}$ кетма – кетлик берилган бўлиб, ҳар қандай мусбат $\varepsilon \in P$ элемент учун шундай номер $k \in N$ топилсаки, $\|x_n - a\| < \varepsilon$ тенгсизлик $n > k$ шартни қаноатлантирувчи барча n номерлар учун бажарилса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма – кетлик яқинлашувчи, a эса бу кетма – кетликнинг лимити дейилади.

2-таъриф. Агар $\{x_n\} \subset A$ кетма – кетлик берилган бўлиб, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in P$) учун шундай k номер топилсаки $n_1 > k$, $n_2 > k$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча n_1, n_2 номерлар учун

$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма – кетликни фундаментал дейилади.

3-таъриф. $\{x_n\} \subset A$, $\{y_n\} \subset A$ кетма – кетликлар берилган бўлиб, $\{x_n - y_n\}$ кетма – кетлик 0 га интилса, у ҳолда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма – кетликларни тенг кучли кетма – кетликлар дейилади.

Ҳақиқий сонлар майдонининг таркибини характерлашда қуйидаги теорема муҳим рол ўйнайди.

Теорема. Агар A -архимед маъносида чизиқли тартибланган P майдон устида нормаллашган бўлиб, A_1 майдон A майдоннинг қисм майдони бўлса, у ҳолда A дан олинган ҳар қандай кетма – кетлик учун унга эквивалент бўлган A_1 майдоннинг элементларидан иборат кетма – кетлик мавжуд бўлади.

Ҳақиқий сонлар тизимини аксиоматик таърифлашда қуйидаги тушунчаларни бошланғич тушунча сифатида қабул қилинади:

- а) R – тўплам, унинг элементлари ҳақиқий сонлар;
- б) R тўпламда $+$ ва $\cdot$ амаллари аниқланган;
- с) $0, 1 \in R$;
- д) $\leq$ - R тўпламдаги бинар муносабат.

Таъриф. Агар R тўпламда $+$ ва $\cdot$ амаллари аниқланган бўлиб, қуйидаги аксиомалар гуруҳлари бажарилса, у ҳолда R тўпламни ҳақиқий сонлар тўплами дейилади.

А-гуруҳ

1. R тўплам $+$ ва $\cdot$ амалларига нисбатан майдон.

В-гуруҳ

1. R тўпламда $\leq$ - кўринишдаги бинар муносабати аниқланган ва бу муносабатга нисбатан R тўплам архимед маъносида чизиқли тартибланган майдон.

С-гуруҳ

1. R тўпламдаги ҳар қандай фундаментал кетма – кетлик $\{x_n\}$ учун шундай $a \in R$ элемент мавжудки, бу кетма – кетлик a элементга интилади.

Бу таърифдан кўринадики, ҳақиқий сонлар майдони рационал сонлар майдонига изоморф бўлган қисм майдонга эга ва ҳар қандай ҳақиқий сонни рационал сонлар тўпламидан олинган кетма – кетликнинг лимити деб олиш мумкин.

Комплекс сонлар майдонини аксиоматик таърифлашда қуйидагиларни бошланғич тушунча сифатида қабул қиламиз.

- а) C тўплам, унинг элементлари комплекс сонлар;
- б) C тўпламда $\oplus$ ва $\circ$ амаллари аниқланган;
- с) $R \subset C$;
- д) $i \in C$.

Таъриф. Агар C тўпламда $\oplus$ ва $\circ$ амаллари аниқланган бўлиб, қуйидаги аксиомалар гуруҳлари бажарилса, у ҳолда C тўпламни комплекс сонлар тизими дейилади:

А - гуруҳ

1. C тўплам $\oplus$ ва $\circ$ амалларига нисбатан майдон.

В-гуруҳ

- 1. $R \subset C$;
- 2. C тўпламдаги $\oplus$ ва $\circ$ амаллари мос равишда R тўпламдаги $+$ ва $\cdot$ амалларининг давоми сифатида аниқланган.

С-гуруҳ

- 1. $i \in C$;
- 2. $i^2 \oplus 1 = 0$

Д-гуруҳ (минималлик аксиомаси)

- 1. Агар $K \subset C$ бўлиб
 - а) $R \subset K$ муносабат ўринли;
 - б) $i \in K$;
 - с) $\alpha, \beta \in K$ эканидан $\alpha \oplus \beta \in K$ ва $\alpha \circ \beta \in K$ муносабатлар ўринли;
 у ҳолда $K = C$ тенглик ўринли.

Ҳар қандай α комплекс сонни ягона тарзда $\alpha=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бундан ташқари, $\mathbb{C}$ – комплекс сонлар майдонида ундаги мавжуд $\oplus$ ва $\circ$ амаллари билан мослашадиган қилиб чизиқли тартиб муносабатини аниқлаш мумкин эмас.

Мисоллар

6.1. Агар $\varphi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ акслантириш автоморфизм бўлса, $\mathbb{R}$ тўпламдаги $a\leq b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай a ва b элементлар учун $\varphi(a)\leq\varphi(b)$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатинг.

Ечиш. Айтайлик $a,b\in\mathbb{R}$ элементлар учун $a\leq b$ тенгсизлик ўринли бўлсин. $\varphi:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ – автоморфизм учун $\varphi(a)\leq\varphi(b)$ тенгсизлик бажарилишини кўрсатамиз. Бунинг учун $0\leq c$ тенгсизликдан ($c\in\mathbb{R}$) $0\leq\varphi(c)$ келиб чиқишини кўрсатиш етарли. $0\leq c$ эканидан $\sqrt{c}$ мавжуд. Демак,

$$\varphi(c)=\varphi(\sqrt{c}\cdot\sqrt{c})=[\varphi(\sqrt{c})]^2\geq 0$$

Шунинг учун $\varphi(c)\geq 0$ тенгсизлик ҳам бажарилади.

6.2. Комплекс сонлар майдони ҳақиқий ва рационал майдонлари устида алгебралар ташкил этиши ва бу алгебралар рангини аниқланг.

Ечиш. Комплекс сонлар майдони ҳақиқий сонлар майдони устида алгебра ташкил этиши бевосита келиб чиқади. Бу алгебранинг рангини аниқлаймиз. $\mathbb{C}$ алгебрадаги

$$e_1=1$$

$$e_1=i$$

элементлар чизиқли эрки бўлади, чунки $\alpha_1\cdot e_1+\alpha_2\cdot e_2=0$ тенглик ($\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$) фақатгина $\alpha_1=\alpha_2=0$ бўлгандагина бажарилади. Лекин ҳар қандай $x=a+bi\in\mathbb{C}$ кўринишдаги элементи e_1 ва e_2 векторларнинг

$$x=a\cdot e_1+be_2$$

кўринишдаги чизиқли комбинацияси шаклида ифодалаш мумкин. Демак, бу алгебранинг ранги 2 га тенг. Лекин $\mathbb{C}$ тўпламни $\mathbb{Q}$ рационал сонлар майдони устида алгебра деб қаралган ҳолда, бу алгебранинг ранги чекли эмас. Масалан, $e_1=1$, $e_3=\sqrt{3}$, $e_3=\sqrt{3}$, $e_4=\sqrt{5}$ ва ҳоказо элементлар чизиқли эрки бўлади. Чунки $e_1,e_2,e_3,\dots$, векторлар системанинг ихтиёрий чекли $e_1,e_2,\dots, e_3$ қисми учун

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ke_k=0, \quad \alpha_i\in\mathbb{Q}$$

тенгликдан фақатгина $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_k=0$ муносабатлар келиб чиқади, яъни $e_1,e_2,e_3,\dots$ вектор система чизиқли эрки бўлади.

6.3. Рационал сонлар майдонида аниқланган p -норманинг норма шартларини қаноатлантиришини кўрсатинг.

6.4. Рационал сонлар майдонида киритилган икки хил нормага нисбатан қуйидаги кетма – кетликларнинг фундаментал бўлиши ёки бўлмаслигини текширинг:

а) $\{x_n\}$, бу ерда $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $p=5$, $n=1,2,\dots$

б) $\{y_n\}$, бу ерда $y_n=5^n$; $p=5$, $n=1,2,\dots$

с) $\{Z_n\}$, бу ерда $Z_n = \frac{1}{5^n}$; $p=5, n=1,2,\dots$

6.5. R – ҳақиқий сонлар майдонининг рационал сонлар майдонига изоморф бўлган фақат битта қисм майдони мавжудлигини кўрсатинг.

6.6. $Q(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2}/a, b \in Q\}$ кўринишдаги тўплам ҳақиқий сонлар майдонининг қисм майдони ва бу майдонни икки хил усул билан чизиқли тартиблаш мумкинлигини исботланг.

6.7. C – комплекс сонлар майдонининг мавҳум сонларни ўз ичига олган ва чизиқли тартиблаш мумкин бўлган қисм майдони мавжудлигини кўрсатинг.

6.8. Агар $\varphi: C \rightarrow C$ – автоморфизм бўлиб, $\varphi(R) \subset R$ муносабат бажарилса, у ҳолда ҳар қандай комплекс сон $a+bi$ учун ёки $\varphi(a+bi) = a+bi$ ёки $\varphi(a+bi) = a-bi$ тенглик ўринли бўлишини исботланг.

6.9. Комплекс сонлар майдони ҳақиқий сонлар майдони устида нормаллашган майдон бўлишини исботланг.

6.10. Комплекс сонлар майдонида чизиқли бўлмаган (яъни қисмий) тартиб муносабатини киритиш мумкинлигини кўрсатинг.

6.11. Комплекс сонларнинг аддитив группасини чизиқли тартиблаш мумкинлигини кўрсатинг.

6.12. Ҳақиқий сонлар майдони айний алмаштиришдан бошқа автоморфизмга эга эмаслигини исботланг.

7. Чекли рангли алгебралар.

Комплекс сонлар майдонининг кенгайтмаларини куришда чекли рангга эга бўлган алгебра тушунчаси муҳим рол ўйнайди. Одатда, бирор майдоннинг кенгайтмасини куришда шу кичик майдонда ўринли бўлган хоссаларни имкони борича сақлаб қолишга ҳаракат қилинади. Масалан, Z, Q, R, C сонли тизимларда $a+x=b$ тенглама доимо ечимга эга ва Q, R ва C майдонларда қўшимча равишда $ax=b$ ($a \neq 0$) кўринишдаги тенглама ҳам ечимга эга бўлади. Бу хоссаларни сақлаган ҳолда C майдоннинг кенгайтмасини куришга ҳаракат қиламиз.

Комплекс сонлар майдони ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 2 га тенг бўлган ва юқоридаги тенгламалар ечимга эга бўлган алгебра (бундай алгебрани бўлинишга эга бўлган алгебра дейилади) ташкил этади.

Қуйидаги теоремадан кўринадики, комплекс сонлар майдонининг кенгайтмасини комплекс сонлар майдони устида ранги 1 дан катта бўлган алгебралар куриш орқали амалга ошириш мумкин эмас.

Теорема. Агар A тўплам комплекс сонлар майдони устида чекли рангли бўлинишга эга бўлган алгебра бўлса, у ҳолда $A=C$ тенглик бажарилади.

Демак, комплекс сонлар майдонининг кенгайтмасини ҳақиқий сонлар майдони устида алгебралар куриш орқали амалга ошириш мумкин (агар у

мавжуд бўлса, чунки S майдон R майдон устида ранги 2 га тенг бўлган алгебра ташкил этади).

Исботлаш мумкинки, ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 2 тенг бўлган бўлинишга эга бўлган ҳар қандай алгебра комплекс сонлар майдонига изоморф бўлади, ранга 3 га тенг бўлган бўлинишга эга бўлган алгебра қуриш мумкин эмас. Демак, изланаётган алгебра ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 4 га тенг бўлган алгебра бўлиши мумкин.

Мисоллар.

7.1. P ихтиёрий майдон бўлса, $K = P^n = \underbrace{P \times P \times \dots \times P}_n$ кўринишдаги

тўплам координатлар бўйича киритилган амалларга нисбатан алгебра ташкил этишини кўрсатинг ва бу алгебра бўлинишга эга ёки эга эмаслигини аниқланг.

Ечиш. $K = P^n = \underbrace{P \times P \times \dots \times P}_n$ бўлиб K нинг ихтиёрий x элементи

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўринишда аниқланади. $x, y \in K$ элементлар устида $+$ ва $\cdot$ ва $\lambda \in P$ элементга кўпайтириш амаллари қуйидагича аниқланади:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K$$

бўлса,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in K \quad (1)$$

$$x \cdot y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n) \in K \quad (2)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in K \quad (3)$$

У ҳолда K тўплам P майдон устида ранги n га тенг бўлган алгебра ташкил этади. Чунки K тўплам қуйидаги хосаларга эга.

1) K тўплам (1) ва (3) тенглик билан аниқланган амалларга нисбатан вектор (чизиқли) фазо ташкил этади;

2) K тўплам (1), (2) тенглик билан аниқланган амалларга нисбатан коммутатив бирлик элементли ҳалқа;

3) ҳар қандай $\lambda \in P$ ва $x, y \in K$ элементлар учун

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x(\lambda y)$$

тенгликлар ўринли.

Бу алгебранинг ранги n га тенг бўлиб, $n=1$ бўлган ҳолда, бўлинишга эга бўлган, $n>1$ бўлган ҳолда эса бўлинишга эга бўлмаган алгебра ташкил этади. Чунки $n=1$ бўлса, $K=P$ бўлиб, P майдон ўзи устида ранги 1 га тенг бўлган бўлинишга эга алгебра бўлади. $n>1$ бўлса, ундаги баъзи 0 дан фарқли a ва b элементлар учун $ax=b$ тенглама ечимга эга бўлмаслиги мумкин, масалан,

$$a = (e, 0)$$

$$b = (0, e)$$

элементлар учун $ax=b$ тенглама ечимга эга эмас.

7.2. $Q(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} / a, b, c \in Q\}$ тўпламнинг Q – рационал сонлар майдони устида ранги 3 га тенг бўлинишга эга бўлган алгебра эканини кўрсатинг.

Ечиш. $Q(\sqrt[3]{2})$ бўлган оддий амалларга нисбатан рационал сонлар майдони устида чизиқли фазо ва бирлик элементи ҳалқа эканини текшириш осон. Ундан ташқари, ҳар қандай $\lambda \in Q$ ва $x, y \in Q(\sqrt[3]{2})$ элементлар учун

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda \cdot (x \cdot y) = x(\lambda y)$$

тенгликлар бажарилади. Демак, масалани тўлиқ ечиш учун ҳар қандай $\alpha x = \beta (\alpha \neq 0)$ кўринишдаги тенгламани ечимга эга бўлишини кўрсатиш етарли. Бунинг учун, ихтиёрий $\alpha \in Q(\sqrt[3]{2}) (\alpha \neq 0)$ элементга тесқари элемент мавжудлигини кўрсатиш етарли

$$\alpha = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$$

элемент берилган бўлиб, $|a| + |b| + |c| \neq 0$, яъни a, b, c коэффициентлардан ақалли биттаси 0 дан фарқли бўлсин.

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

кўпхад учун $f(\sqrt[3]{2}) = \alpha$ тенглик бажарилади. Бу кўпхад рационал сонлар майдонида келтирилмайдиган кўпхаддир. Иккинчи томондан, $\sqrt[3]{2}$ элемент Q майдон устида алгебраик бўлиб,

$$g(x) = x^3 - 2$$

кўпхад бу элементнинг минимал кўпхади бўлади. Чунки $g(x)$ кўпхад куйидаги хоссаларни қаноатлантиради:

$$1) g(x) \in Q[x]$$

$$2) g(\sqrt[3]{2}) = 0$$

3) $g(x)$ кўпхад рационал сонлар майдони устида келтирилмайдиган бўлиб, у юқоридаги хоссаларни қаноатлантирувчи энг кичик даражали кўпхаддир.

Демак $g(x)$ ва $f(x)$ кўпхадлар ўзаро туб бўлади. Маълум теоремага асосан бу кўпхадлар учун шундай $u(x)$ ва $v(x)$ кўпхадлар мавжудки,

$$f(\sqrt[3]{2})u(\sqrt[3]{2}) + g(\sqrt[3]{2})v(\sqrt[3]{2}) = 1$$

тенглик, бундан эса

$$f(\sqrt[3]{2})u(\sqrt[3]{2}) = 1$$

тенглик келиб чиқади, ёки

$$u(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{f(\sqrt[3]{2})}$$

тенглик ҳосил бўлади.

Демак, $\alpha^{-1} = (a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4})^{-1} = u(\sqrt[3]{2})$.

Масалан, $\alpha = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ элементга тесқари элемент $\alpha^{-1} = \sqrt[3]{2} - 1$ бўлиб $\alpha^{-1} \in Q(\sqrt[3]{2})$ муносабат ўринли.

7.3. Ҳамма 3-тартибли ҳақиқий элементли матрицалар тўплами оддий амалларга нисбатан R -майдон устида алгебра ташкил этишини кўрсатинг ва бу алгебранинг рангини аниқланг.

7.4. Ҳар қандай майдон ўзи устида ранги 1 га тенг бўлган алгебра эканини исботланг.

7.5. Агар $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ белгилашлар киритиб, e_1 ва e_2 векторларнинг барча

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in Q$$

кўринишдаги чизиқли комбинацияларидан ташкил топган тўпламни рационал сонлар майдони устида:

- а) алгебра ташкил этишини;
 - б) бу алгебранинг рангини;
 - с) бу алгебранинг бўлинишга эга бўлишини;
- исботланг.

7.6. Комплекс сонлар майдони R -ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 2 га тенг бўлинишга эга бўлган алгебра эканини кўрсатинг.

7.7. Q рационал сонлар майдони устида ранги 4 га тенг бўлинишга эга бўлган алгебра қуринг.

7.8. $Q(\sqrt[3]{2})$ алгебрага тегишли бўлган

$$\alpha = 2 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

элементга тескари элементни топинг.

7.9. Агар $x^2=2$ тенгламанинг битта мавҳум илдизини θ билан белгиласак,

$$\theta(\theta) = \{a + b\theta + c\theta^2 \mid a, b, c \in Q\}$$

тўплам оддий амалларга нисбатан алгебра ташкил этишини кўрсатинг ва бу алгебра эга бўлган хоссаларни санаб беринг (унинг ранги ва бўлинишга эга бўлиши ёки бўлмаслиги).

7.10. Агар α ва β комплекс сонлар бўлса, $\bar{\alpha}$ ва $\bar{\beta}$ лар уларга мос қўшма комплекс сонлардир. Қуйидаги тўпламни курамиз.

$$M_2(C) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in C \right\}$$

Бу тўплам учун қуйидаги хоссаларни текширинг:

- а) матрицалар устидаги оддий амалларга нисбатан $M_2(C)$ тўплам ҳалқа;
- б) $M_2(C)$ тўплам C майдон устида алгебра;
- с) $M_2(C)$ даги ҳар қандай 0 дан фарқли элементга тескари элемент мавжуд ва $M_2(C)$ тўпламга тегишли.

8. Кватернионлар алгебраси

K тўплам ҳақиқий сонлар майдони устида 4 ўлчовли чизиқли фазо бўлсин. Унинг базис элементларини $e_1=1$, $e_2=i$, $e_3=j$, $e_4=k$ кўринишда белгилайлик. Демак, K фазонинг ихтиёрий α элементини шу базис векторларнинг чизиқли комбинацияси шаклида ифодалаш мумкин, яъни

$$\alpha = a + bi + cj + dk \quad a, b, c, d \in R$$

K тўпламнинг ихтиёрий 2 та α , β элементлари ўртасида қўпайтириш амалини аниқлаш орқали K тўпламни R майдон устида алгебра ташкил этишини кўрсатамиз. Бунинг учун эса e_1 , e_2 , e_3 , e_4 базис векторларнигина

кўпайтиришни билиш етарли. $1, i, j, k$ базис векторларнинг кўпайтмасини куйидаги жадвал орқали аниқлаймиз:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & i & j & k \\ \hline 1 & 1 & & & \\ i & & -1 & & \\ j & & & -1 & \\ k & & & & -1 \end{array}$$

Бу жадвалдан фойдаланиб, K тўпламнинг ихтиёрий иккита элементини кўпайтириш мумкин. Бу жадвал орқали аниқланган кўпайтириш амали ассоциатив, лекин коммутатив эмас. Бундан ташқари, K нинг ихтиёрий x, y элементлари ва $\lambda \in \mathbb{R}$ сон учун

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

тенгликлар бажарилади. Демак, K тўплам $\mathbb{R}$ -майдон устида рангги 4 га тенг бўлган алгебра ташкил этади.

$\alpha = a + bi + cj + dk$ элемент орқали қурилган

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$$

кўринишдаги элементни α га қўшма элемент дейилади. Агар

$$\|\alpha\| = \alpha \cdot \bar{\alpha}$$

тенглик билан $\alpha \in K$ элементнинг нормасини аниқласак, K алгебра $\mathbb{R}$ -майдон устида нормаллашган алгебра ташкил этади, чунки бу норма учун куйидаги хоссалар бажарилади.

а) $\|\alpha\| \geq 0$ ва $\|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$;

б) $\|\alpha \cdot \beta\| = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$

с) $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$

Агар $\alpha \neq 0$ бўлса, у ҳолда $\|\alpha\| \neq 0$ бўлиб, $\alpha \cdot \left(\frac{\bar{\alpha}}{\|\alpha\|} \right) = 1$ тенглик ўринли

бўлади. Бундан $\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{\|\alpha\|}$ тенгликни ва $\alpha^{-1} \in K$ муносабатни ҳосил қиламиз.

Демак, K алгебра бўлинишга эга бўлган бўлади.

Бу алгебрани кватернионлар алгебраси, унинг элементларини эса кватерионлар дейилади.

Шундай қилиб биз, бўлинишга эга бўлган ҳақиқий сонлар майдонининг кенгайтмасини қуришга эришдик.

Энди K кватернионлар алгебрасининг кенгайтмасини ҳам қуриш мумкинми, деган савол туғилиши табиий. Бу ерда бўлинишга эга бўлган кенгайтма ҳақида сўз кетмоқда. Бундай алгебрани куйидаги усул билан қурилади.

$$A = \{\alpha + \beta \varepsilon / \alpha, \beta \in K\}$$

тўпламни қурайлик, бу ерда α, β -кватернионлар, ε эса K га тегишли бўлмаган қандайдир янги элемент. A тўпламни ихтиёрий иккита элементини қўшиш ва λ ҳақиқий сонга, кўпайтириш амалларини мос равишда куйидаги тенгликлар билан аниқланади

$$(\alpha + \beta\varepsilon) + (\gamma + \delta\varepsilon) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)\varepsilon,$$

$$\lambda(\alpha + \beta\varepsilon) = \lambda\alpha + \lambda\beta\varepsilon$$

У ҳолда, А тўплам R-ҳақиқий сонлар майдони устида 8 ўлчовли чизикли фазо ташкил этиб унинг битта базиси

$$1, i, j, k, \varepsilon, i\varepsilon, j\varepsilon, k\varepsilon$$

кўринишда бўлади. Агар бу фазода иккита элементнинг кўпайтмасини

$$(\alpha + \beta\varepsilon) \cdot (\gamma + \delta\varepsilon) = (\alpha\gamma - \delta\beta) + (\delta\alpha + \beta\gamma)\varepsilon$$

тенглик билан аниқланса, А тўплам ҳақиқий сонлар майдони устида бўлинишга эга ранги 8 га тенг бўлган алгебрани ташкил этади.

Лекин, шуни таъкидлаш керакки, бу алгебрадаги кўпайтириш амали ассоциатив эмас. Бу алгебрани Кэли алгебраси, унинг элементларини эса, Кэли сонлари дейилади. Шундай қилиб биз, ҳақиқий сонлар майдонининг яна битта кенгайтмасини курдик. Лекин, ҳар бир кенгайтмани қуришда алгебранинг бўлинишга эга бўлиш хоссасини сақлаган ҳолда, бошқа муҳим бир хоссасидан воз кечишга тўғри келади. Масалан, C-майдонни қуришда чизикли тартиб муносабатидан, K-алгебрани қуришда кўпайтманинг коммутативлигидан, А алгебрани қуришда эса, яна битта хосса, кўпайтманинг ассоциативлиги бажарилмайди.

Мисоллар.

8.1. Агар $\alpha = a + bi + cj + dk \in K$ ихтиёрий кватернион бўлса, у ҳолда $\alpha \cdot \bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in R$ тенглик бажарилишини кўрсатинг.

Ечиш.

$$\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk \text{ эканлигидан } \alpha \bar{\alpha} = (a + bi + cj + dk)(a + bi + cj + dk) = a^2 - abi - acj - adk + abi - b^2i^2 - bcj - bdik + asj - bcj \cdot i - c^2j^2 - cdjk + adk - bdkj - cdkj - d^2k^2 = a^2 - \underline{abi} - \underline{acj} - \underline{adk} + \underline{abi} + b^2 - \underline{bck} + \underline{bdj} + \underline{acj} + \underline{bck} + c^2 - \underline{cdi} + \underline{adk} - \underline{bdj} + \underline{cdi} + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

8.2. Қуйидаги белгилашлар киритайлик

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

У ҳолда $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$ $\lambda_i \in R$ кўринишидаги барча матрицалар тўплами ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 4 га тенг бўлган бўлиниш эга алгебра ташкил этиб бу алгебра кватернионлар алгебрасига изоморф бўлишини кўрсатинг.

Ечиш.

$K_1 = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 / \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \in R\}$ кўринишдаги белгилашни қабул қилайлик. У ҳолда e_1, e_2, e_3, e_4 векторлар чизикли эркин бўлиб K тўплам ҳақиқий сонлар майдони устида ўлчови 4 га тенг бўлган чизикли фазо ташкил этишини текшириш осон. Энди бу фазони алгебрага айлантириш масаласи турибди. Шартли равишда, $e_1 = I$, $e_2 = i$, $e_3 = j$, $e_4 = k$ кўринишдаги белгилашни қабул қилсак, у ҳолда e_1, e_2, e_3, e_4 матрицалар бир – бирига оддий маънодаги кўпайтириш амали $1, i, j, k$ кватернионларни бир – бирига жадвал орқали киритилган кўпайтириш амали билан бир хил бўлади. Масалан, i, j

кватернионлар учун $ij=k$ тенглик ўринли. Иккинчи томондан, $i=e_2, j=e_3$ тенгликлардан фойдаланиб,

$$i \cdot j = e_2 e_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = e_4$$

тенглик бажарилади, яъни e_1, e_2, e_3, e_4 базис векторлар учун кўпайтириш амали қуйидаги жадвал орқали аниқланади:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Демак, K тўплам ҳам худди K тўпламдек, ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 4 га тенг бўлган алгебра ташкил этади. K ва K_1 алгебралар изоморфлигини кўрсатиш учун $\varphi: K \rightarrow K_1$ акслантиришни

$$\varphi(a+bi+cj+dk) = ae_1+be_2+ce_3+de_4$$

тенглик билан аниқланади. У ҳолда φ акслантириш учун қуйидаги хоссалар ўринли.

1) φ -ўзаро бир қийматли;

$$2) \varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

$$3) \varphi(\alpha \cdot \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta)$$

8.3. φ ва β кватернионлар учун қуйидаги тенгликлар бажарилишини кўрсатинг:

$$1) \overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$$

$$2) \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

8.4. $\alpha=2-i+j+2k$ кватернионга тескари кватернионни аниқланг:

8.5. α ва β кватернионлар учун

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \text{ айният ўринли эмаслигини асосланг.}$$

8.6. Кэли алгебраси элементлари учун кўпайтириш амалининг ассоциативлик шarti бажарилмаслигини кўрсатинг.

8.7. Агар $x = \alpha + \beta i$ Кэли сони бўлса, y билан аниқланган $x = \alpha - \beta i$ Кэли сони учун $x \cdot \bar{x}$ кўпайтма ҳақиқий сон бўлишини кўрсатинг.

8.8. Кватернионлар алгебраси учун алгебранинг асосий теоремаси натижаси ўринли эмас, яъни ҳар қандай n -даражали коэффициентлари кватернионлардан иборат кўпхад n та илдизга эга, деган хулоса ўринли эмаслигини исботланг.

8.9. Кватернионлар алгебрасини комплекс сонлар майдони устида алгебра деб қараш мумкинми?

8.10. Кэли алгебраси элементлари учун кўпайтириш амали қўшишга нисбатан дистрибутивлик шarti бажарилишини текширинг.

9. Фробениус теоремаси.

Математиканинг асосий тадбиқлари қандайдир тенгламани ечиш орқали амалга оширилади. Бундай тенгламалар ичида энг асосий ва содда кўринишга эга бўлганлари $a+x=b$ ва $ax=b$ кўринишдаги чизиқли тенгламалардир. Шунинг учун ҳам барча сонли системаларда бундай тенгламаларни шу системада ечимга эга бўлиши муҳим ҳисобланади. Ҳақиқий сонлан майдонининг кенгайтмалари $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}$ ва $\mathbb{A}$ алгебраларда бу муҳим тенгламалар ечимга эга. Табиий равишда, юқоридаги каби хоссаларга эга бўлган ҳақиқий сонлар майдонининг бошқа кенгайтмаси борми, деган савол туғилади.

Юқоридаги кўрсатганимиздек, ҳақиқий сонлар майдонининг кенгайтмасини фақатгина ҳақиқий сонлар майдони устида чекли рангли алгебра куриш орқали амалга ошириш мумкин.

Ҳақиқий сонлар майдони ўзи устида рангги 1 га тенг бўлинишга эга бўлган алгебра ташкил этади. Комплекс сонлар майдони эса ҳақиқий сонлар майдони устида рангги 2 га тенг алгебра ташкил этади. Бундан ташқари, ҳақиқий сонлар майдони устида рангги 2 га тенг бўлинишга эга бўлган ҳар қандай алгебра комплекс сонлар майдонига изоморф бўлади, яъни комплекс сонлар майдони маълум маънода ягонадир. Олдинроқ таъкидлаганимиздек, ҳақиқий сонлар майдони устида рангги 3 га тенг бўлинишга эга бўлган алгебра куриш мумкин эмас. Кватернионлар алгебраси эса ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 4 га тенг бўлинишга эга бўлган алгебра бўлиб, ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 4 га тенг бўлинишга эга бўлган ҳар қандай алгебра кватернионлар алгебрасига изоморф бўлади.

Исботлаш мумкинки, ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 5 га тенг бўлинишга эга бўлган алгебра мавжуд эмас. Алгебранинг рангини ошириш ҳисобига комплекс сонлар майдонининг кенгайтмасини куриш масаласига қуйидаги Фробениус теоремаси тўлиқ жавоб беради.

Теорема. Агар A тўплам ҳақиқий сонлар майдони устида ранги n га тенг ассоциатив бўлинишига эга бўлган алгебра бўлса, у ҳолда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин, ёки $n=1$, ёки $n=2$, ёки $n=4$ бўлиб:

а) агар $n=1$ бўлса, A алгебра R -ҳақиқий сонлар майдони билан устма – уст тушади, яъни $A=R$;

б) агар $n=2$ бўлса, A ва $\mathbb{C}$ майдонлар изоморф бўлади (устма-уст тушади);

в) агар $n=4$ бўлса, бу алгебра кватернионлар алгебрасига изоморф бўлади.

Бу теоремадан кўринадик, ҳақиқий сонлар майдони устида бўлинишга эга бўлган (ассоциативлик шarti талаб қилинмаган ҳолда) чекли рангли алгебранинг ранги 1, ёки 2, ёки 4, ёки 8 га тенг бўлади.

Мисоллар

9.1. Ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 3 тенг бўлинишга эга бўлган алгебра мавжуд эмаслигини исботланг.

Исботи. Айтайлик A тўплам R -ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 3 га тенг бўлинишга эга бўлган алгебра бўлиб, $1, \alpha, \beta$ элементлар унинг базиси бўлсин. У ҳолда $\alpha \in R, \beta \in R$ муносабатлар ўринли бўлади. Ҳақиқий сонлар майдони устида келтирилмайдиган кўпхаднинг даражаси ортиғи билан 2 га тенглигидан ва $\alpha \in A$ эканлигидан, шундай p ва q ҳақиқий сонлар мавжудки, $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ тенглик ва $p^2 - 4q < 0$ тенгсизлик бажарилади. Бундан, $4q - p^2 > 0$ тенгсизлик келиб чиқади.

$$\frac{1}{\sqrt{4q - p^2}} = b \text{ белгилашни қабул қилсак, } (2b\alpha + bp)^2 = -1 \text{ тенглик ўринли.}$$

Демак, $\alpha \in A$ элемент орқали квадрати -1 га тенг бўлган $2b\alpha + bp$ элементни куриш мумкин. Ҳудди шунингдек, $\beta \in A$ элемент орқали ҳам квадрати -1 га тенг бўлган $2b_1\beta + b_1p_1$ элементни куриш мумкин. Агар $\alpha_1 = 2b\alpha + 2bp$ ва $\beta_1 = 2b_1\beta + 2b_1p_1$ белгилашларни киритсак, $1, \alpha_1, \beta_1$ векторлар системаси ҳам A алгебранинг базисини ташкил этади. Шартга кўра A алгебранинг ранги 3 тенг, демак, $1, \alpha_1, \beta_1, \alpha_1 \cdot \beta_1$ векторлар системаси чизикли боғланган бўлади, яъни шундай k, e, m ҳақиқий сонлар мавжудки,

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 = k + e\alpha_1 + m\beta_1$$

тенглик бажарилади. Бу тенгликни ҳар икки томони чапдан α_1 га кўпайтирамиз. У ҳолда

$$-\beta_1 = k\alpha_1 - e + m(k + e\alpha_1 + m\beta_1)$$

тенглик келиб чиқади.

$$1, \alpha_1, \beta_1 \text{ векторлар системаси чизикли эркли эканлигидан,} \\ mk - e = 0, \quad k + lm = 0, \quad 1 + m^2 = 0$$

тенгликлар системасини ҳосил қиламиз. Лекин, улардан охиргиси зиддиятни ифодалайди, чунки, $m \in R$. Ҳосил бўлган зиддият фаразнинг нотўғри эканини кўрсатади.

9.2. Агар A тўплам ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 4 дан кичик бўлмаган алгебра бўлиб, унинг $1, \alpha, \beta$ элементлари чизикли эркли ва

$$\alpha^2 = \beta^2 = -1 \text{ шартларни қаноатлантирса, } \alpha\beta + \beta\alpha \in A \text{ бўлишини кўрсатинг.}$$

Ечиш. $\alpha \in R, \beta \in R$ эканлигидан $\alpha + \beta \in R$ ва $\alpha - \beta \in R$ муносабатлар келиб чиқади. Демак, шундай p, q ва p', q' ҳақиқий сонлар жуфтликлари мавжудки,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= p(\alpha + \beta) + q \\ (\alpha - \beta)^2 &= p'(\alpha - \beta) - q' \end{aligned} \quad (1)$$

тенгликлар бажарилади. Иккинчи томондан,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = -2 + \alpha\beta + \beta\alpha \\ (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) &= \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = -2 - \alpha\beta - \beta\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

тенгликлар ўринли. (1) ва (2) тенгликлар системаларидан $-4 = (p + p')\alpha + (p - p')\beta + q + q'$ тенглик келиб чиқади. $1, \alpha, \beta$ векторлар системасининг чизикли эркли эканлигидан ва охирги тенгликдан

$$p + p' = 0 \quad \text{ва} \quad p - p' = 0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз. Демак, $p = p' = 0$ бажарилади. Бу ҳолда (1) ва (2) тенгликлар системаларидан

$$2(\beta\alpha + \alpha\beta) = q - q' \in R$$

тенглик келиб чиқади. Шунинг учун $\beta\alpha + \alpha\beta \in R$.

9.3. Агар $1, \alpha$ элементлар A алгебранинг чизиқли эркли (ҳақиқий сонлар майдони устида) векторлари бўлса, ҳар қандай a ва $a' (a \neq 0)$ ҳақиқий сонлар учун

$$1 \text{ ва } \tau = a\alpha + a'$$

кўринишдаги $1, \tau$ система ҳам чизиқли эркли бўлишини кўрсатинг.

9.4. Агар $1, \alpha, \beta$ векторлар ҳақиқий сонлар майдони устида берилган A алгебранинг чизиқли эркли векторлари бўлса, у ҳолда $1, \alpha, x\alpha + y\beta$ ($x, y \in R, y \neq 0$) векторлар системаси ҳам чизиқли эркли бўлишини кўрсатинг.

9.5. Ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 4 га бўлган алгебрага мисоллар келтиринг.

9.6. K кватерионлар алгебраси бўлган ҳолда,

$K^2 = R \times R$ тўпламда қуйидаги амаллар аниқланган:

$$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$$

$$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\bar{\beta}_2, \alpha_1\beta_2 + \bar{\alpha}_2\beta_1)$$

$$\lambda(\alpha_1, \beta_1) = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1)$$

бу ерда $\bar{\beta}_2$ ва $\bar{\alpha}_2$ элементлар мос равишда β_2 ва α_2 элементларга қўшма элементлар, ва $\lambda \in R$. Бу амалларга нисбатан K^2 тўплам ҳақиқий сонлар майдони устида ранги 8 га тенг бўлган алгебра ташкил этишини исботланг.

9.7. Агар A тўплам R ҳақиқий сонлар майдони устида чекли рангли бўлинишга эга бўлган алгебра бўлса, (кўпайтманинг ассоциативлиги талаб қилинган ҳолда) у ҳолда унинг ранги 1, ёки 2, ёки 4, ёки 8 га тенг бўлишини исботланг.

9.8. Агар K^2 Кэли алгебраси бўлса, унинг ихтиёрий элементи нормасини қандай аниқлаш мумкин.

9.9. Агар A тўплам P майдон устида ранги n ($n \geq 1$) га тенг бўлган алгебра ташкил этса, унинг ихтиёрий α элементи даражаси n дан ошмаган коэффициентлари P майдондан олинган қандайдир кўпхаднинг илдизи бўлишини исботланг.

9.10. Айтайлик P майдон A майдоннинг қисм майдони бўлиб, A майдоннинг ҳар қандай α элементи P майдонда келтирилмайдиган қандайдир кўпхаднинг илдизи бўлсин. У ҳолда P майдонни комплекс сонлар майдонининг қисмига изоморф бўлган ҳар қандай акслантириш изоморф акслантиришни A майдонни P майдонга ўтказувчи изоморф акслантиришгача давом эттириш мумкинлигини исботланг.

Адабиётлар:

1. Назаров Р. Н, Тошпўлатов Б. Т, Дусумбетов А. Д. Алгебра ва сонлар назарияси. Т., I қисм, 1993 й., II қисм, 1995 й.
2. Тошпўлатов Б. Т, Дусумбетов А. Д, Қулматов А. Қ. Алгебра ва сонлар назарияси. Маърузалар матни. Т., 2001
1-5-қисмлар.
3. Р. Искандаров, Р. Назаров. Алгебра ва сонлар назарияси.. I-II қисмлар. Т., Ўқитувчи, 1979 й.
4. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. М., Высшая школа. 1979 г.
5. Нечаев В. И. Числовые системы М. Просвещения , 1975 г.
6. Ван-дер-Варден. Алгебра М. 1976
7. Кострикин. И. А. Введение в алгебру М. Наука, 1977 г

Мундарижа:

Кириш.	3
1-§. Тўпламларнинг декарт кўпайтмаси. Муносабатлар. Эквивалентлик ва тартиб муносабати.....	4
2-§. Гурппа, ҳалқа ва майдон тушунчалари. Чизиқли фазо, алгебра ва алгебранинг ранги.....	6
3-§. Алгебраик структура кенгайтмаси. Алгебраик структураларни гомоморфизми ва изоморфизми.....	9
4-§. Аксиоматик назария. Натурал сонлар системасига аксиоматик таъриф.....	12
5-§. Бутун ва рационал сонлар тизимларини аксиоматик таърифлаш.....	16
6-§. Ҳақиқий ва комплекс сонлар тизимларига аксиоматик таърифлар.....	19
7-§. Чекли рангли алгебралар.....	23
8-§. Кватернионлар алгебраси.....	26
9-§. Фробениус теоремаси.....	30
Адабиётлар	33