

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

“Умумий математика “

ка ф е д р а с и

5460100- математика таълим йўналиши бўйича бакалавр

даражасини олиш учун

АБДУРАХМОНОВА ШОИРА БАХРОМАЛИЕВНА

“Параболик типдаги тенгламаларни ечишнинг чекли

айирмалар усули”

мавзусидаги

Битирув малакавий иши



Илмий раҳбар: доц. Жамуратов К.

Гулистон-2013

РЕЖА

I. Кириш.....	3
II. Асосий қисм.....	10
I БОБ. Иккинчи тартибли чегаравий масалаларни чекли айирмалар усули билан ечиш	
§ 1. 1. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламага қўйилган чегаравий масалани чекли айирма метод билан ечиш ғояси.	10
§ 1. 2. Максимум принципи ва уни чекли айирмали тенгламалар системаси ечимининг мавжудлигини текширишга қўллаш.	16
§ 1. 3. Чекли айирмали метод ёрдамида иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган чегаравий масалани ечиш.....	28
II БОБ. Параболик тенгламалар учун айирмали схемалар	
§ 2. 1. Икки қатламли айирмали схемалар.....	30
§ 2. 2. Икки қатламли айирмали схемаларнинг тўғрилигини текшириш....	38
§ 2. 3. Тежамкор айирмали схемалар.....	52
§ 2.4. Биржинсли консерватив айирмали схеманинг чегаравий масалаларни ечишга тадбиқи.....	62
III. Хулоса ва таклифлар.....	71
IV. Фойдаланилаётган адабиётлар ва манбалар.....	73

КИРИШ

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси узоқ вақт математик физиканинг тенгламалари ва масалаларини ўрганиш йўлида ривожланди. Сўнги ўнги йилликлар давомида умумий хусусий тенгламалар назарияси катта муваффақиятларга эришган бўлсада, бироқ математик физика яна узоқ вақтлар бу фаннинг таркибий қисми ва энг муҳим йўналиши бўлиб қолаверади.

“Математик физика” даган ном хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси физиканинг содда аммо муҳим масалаларни ўрганиш натижасида шаклланганлигидир.

Физик жараёнларнинг математик модели асосан иккинчи тартибли чизиқли ёки квазичизиқли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар бўлади. Бу тенгламаларни одатда учта: эллиптик, параболик ва гиперболик типларга ажратилади. Стационар жараёнларнинг математик модели эллиптик типдаги тенгламалар билан ифодаланса ностационар жараёнлар параболик ва гиперболик типдаги тенгламалар билан ифодаланади.

Мазкур битирув-малакавий иш параболик типдаги тенгламаларга қўйилган турли чегаравий маласалаларни ечишнинг сонли усуллари билан ўрганишга бағишланган.

Параболик типдаги тенгламаларга олиб келадиган айрим физик жараёнларга тўхталиб ўтамиз.

1. Иссиқлик тарқалиш ҳақида масала.

Фурье қонунига кўра ΔS чексиз кичик ва юзадаги Δt вақт ичида ўтаётган иссиқлик миқдори ΔQ

$$\Delta Q = \kappa(x, U) \frac{\partial U(x, t)}{\partial n} \Delta S \Delta t \quad (1)$$

тенглик билан характерланади. Бу ерда n – иссиқлик берилаётган томонга қараб йўналган ΔS юзанинг нормали, $\kappa(x, U)$ ички иссиқлик ўтказувчанлик

коэффициенты, $U(x,t); x = (x_1, x_2, x_3)$ нукталарнинг t вақт моментидаги температура.

Агар ташқи иссиқлик манбаи интенсивлигини $F(x,t)$ орқали белгилаб, сўнгра барча иссиқлик миқдори температура ўзгариши (орттирмаси)га тенглигини эътиборга олсак

$$U_t = a^2 \Delta U + f(x,t) \quad (2)$$

тенгламага келамиз. Бу ерда $a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$, $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$, $c(x)$ – иссиқлик сифими, ρ – зичлик.

2. Диффузия масаласи.

Ω соҳада жойлашган муҳитга бошқа $U(x,t)$ зичликка эга модда киритилса, натижада муҳит ва модда зарралари химиявий реакцияга киришади.

Нэрнст қонунига кўра сиртнинг ds элементи орқали оқиб ўтган зараллар оқими dQ

$$dQ = -D(x) \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (3)$$

тенглик билан аниқланади. Бу ерда $D(x)$ – диффузия коэффициенти, n – ds сиртнинг нормали, $\rho(x)$ – муҳитнинг ғовақлик коэффициенти. Агар баланс тенгламасини тузсак

$$\rho(x)U_t = \text{div}(D(x)\text{grad}U) - qU + F(x,t) \quad (4)$$

диффузия тенгламасига келамиз.

3. Гидродинамика тенгламалари.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = f \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \text{grad}V) + \frac{1}{\rho} \text{grad}p = F \quad (6)$$

$$\Phi(p, \rho) = 0 \quad (7)$$

Бу учала тенгламалар биргаликда ёпиқ системани ташкил этсада, уларнинг ҳар бири алоҳида номланади. (5) ни идеал газнинг тутатишлик

тенгламаси, (6) ни Эйлернинг ҳаракат тенгламаси (7) ни эса ҳолат тенгламаси дейилади.

4. Максвелль тенгламалари. Бирор муҳитда ўзгарувчан электромагнит майдони мавжуд бўлсин. $E(x,t)=(E_1,E_2,E_3)$ –электр майдони кучланиши, $H(x,t)=(H_1,H_2,H_3)$ –магнит майдони кучланиш, $\rho(x)$ -зарядлар зичлиги, ε –муҳитнинг диэлектрик ўзгармаси, μ –муҳитнинг магнит ўзгарувчанлик коэффиценти, $I(x,t)=(I_1,I_2,I_3)$ - ўзгарувчанлик токи. У ҳолда бу катталиқлар Максвелль тенгламалари деб аталувчи чизиқли дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\operatorname{div}(\varepsilon E)=4\pi\rho, \quad \operatorname{div}(\mu H)=0, \quad (8)$$

$$\operatorname{rot}E=-\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu H)}{\partial t}, \quad (9)$$

$$\operatorname{rot}H=-\frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} I, \quad (10)$$

бу ерда $c=3 \cdot 10^{10}$ см/сек-ёруғликнинг бўшлиқда тарқалиш тезлиги. Булардан (8) Фарадей қонунини, (9) эса Ампер қонуни ифодалайди.

Агар жараён стационар (вақтга боғлиқ бўлмаса) Максвелль тенгламалари

$$\operatorname{div}(\varepsilon E)=4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}E=0 \quad (11)$$

Электростатика тенгламасини ва

$$\operatorname{div}(\mu H)=0, \quad \operatorname{rot}H=\frac{4\pi}{C} I \quad (12)$$

магнитостатика тенгламасига келади.

5. Шредингер тенгламаси. Фараз қилайлик m_0 массали квант зарраси ташқи куч майдонида $V(x)$ потенциал билан ҳаракатланаётган бўлсин. $\Psi(x,t)$ орқали бу зарранинг тўлиқ функциясини белгилаймиз. Бу ҳолда $|\Psi(x,t)|^2 dx$ -бу зарранинг dx ҳажмда жойлашиш эҳтимолини (x -нуқтадаги t моментидаги)ифодалайди. У ҳолда Ψ Шредингер тенгламаси деб аталувчи

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m_0} \Delta \psi + V\psi, \quad (13)$$

тенгламани қаноатлантиради. Бу ерда $h = 1,054 \cdot 10^{-27}$ эгр.сек-Планк дойимийси.

Битирув-малакавий ишнинг структураси. Мазкур иш тўртта: кириш, асосий қисм, хулоса ва таклифлар ҳамда фойдаланилган адабиётлар ва манбалар деб аталувчи қисмлардан ташкил топган.

Кириш қисмида қисқача адабиётлар таҳлили, мавзунинг долзарблиги, тадқиқотнинг мақсади ва вазифалари, мавзунинг илмий ва амалий аҳамияти ҳақида сўз боради. Шунингдек хусусий хосилалари дифференциал тенгламалардан бири бўлган параболик типдаги тенгламаларга олиб келувчи бешта физик жараён ва уларнинг математик модели бўлган параболик типдаги тенгламаларга алоҳида тўхтаб ўтилган.

Адабиётлар таҳлили. [1]–[5] номерли адабиётларда Фарадей Басирович Абуталиев ва у кишининг шогирдлари, шунингдек Абдували Бегматов ва у кишининг шогирди Кенгаш Жамуратовнинг параболик типдаги тенгламаларга қўйилган филтрация масалаларини сонли усуллар-чекли айирмалар схемалар, интеграл-интерполяция методи ва консерватив биржинсли схемаларни қўллашга бағишланган илмий ишлари ўз аксини топган. [10]–[17] номерли адабиётлар эса Москвадаги Бауман номидаги олий техника билим юрти ҳамда Сибирьдаги Красноярск ва Новосибирск шаҳри олимларнинг сўнги ўн йилликда яратган чекли айирмалар схемаларга бағишланган илмий ва услубий ишлари ўзи аксини топган.

Ўзбек тилида берилган асосий адабиёт сифатида Маъруф Исроиловнинг [18] китобини алоҳида таъкидлаб ўтмоқ лозим. Шунингдек Маҳмуд Салоҳидиновнинг [31] китоб параболик типдаги тенгламаларнинг фундаментал ва тақрибий ечимларини топиш усуллари бағишланганлиги эслатиб ўтаемиз.

Шуни таъкидлаш керакки ҳисоблаш математикаси, хусусан чекли айирмали методлар биржинсли консерватив схемалар, уларнинг яқинлашиш ва турғунлик шартларини ўрнатиш ва хатоликларни баҳолаш усулларини ишлаб чиққан киши А.А.Самарский, Г.И.Маргук [25],[28]–[32] эканлигинин алоҳида эътироф зазурлигини ўзимизнинг бурчимиз деб биламиз.

Шунингдек адабиётлар рўйхатида параболик тенгламаларга олиб келадиган техник масалаларни ўрганган йигирмага яқин авторларнинг илмий мақола ва китоблари ҳам ўрин олган.

Мавзунинг долзарблиги. Ҳозирги кунда барча жараёнларни математик моделлаштириш фанда, техникада ўз ечимини кутаётган жуда кўп масалаларни ечишга, ўрганишга олиб келмоқда. Хусусан кўплаб ностационар жараёнлар параболик типдаги (чизиқли ёки чизиқли бўлмаган) тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларни ечишни тақоза этади. Чизиқли бўлмаган тенглама ва чегаравий шартли масалаларни сонли усуллар-чекли айирмали схемалар ёрдамида ечиш ҳамон **долзарб** масала бўлиб келмоқда.

Тадқиқот мавзуси. Муаммо шундан иборатки чегаравий масалаларни ечиш ҳаммо вақт ҳам сонли усулда амалга оширилавермайди. Шунинг учун мавзунини, тадқиқотни айнан чекли айирмали схемалар ичидан яроқлисини танлашга қаратилади.

Тадқиқот мақсад. Аввало параболик типдаги тенгламаларни ва чегаравий шартларни чекли айирмалар кўринишда тасвирлаб ҳосил бўлган системани ўнг хайдаш ва ошқормас схемалар тузиш билан юқори аниқликда ва турғун ечимни олиш асосий мақсад қилиб белгиланган.

Тадқиқот муаммоси. Ўз ечимини кутаётган чегаравий масалага мос биржинсли ва консерватив (ўз ячейкасида сақланиш қонунлари мужассам бўлган) схемаларни танлаш ва излаб топиш ҳар бир тадқиқотда бўлганидек бу ишда ҳам асосий **муаммо** бўлиб қолган.

Тадқиқот объекти. Ўрганиш-тадқиқ қилиш объекти сифатида дастлаб чизиқли параболик масалалар, сўнгра эса квазичизиқли ва ҳатто чизиқли бўлмаган масалалар қаралган. Иккинчи бобнинг 4 параграфидида сув омборлари яқинидаги фильтрация жараёнининг математик модели бўлган номаълум (қўзғалуван) чегарали чегарвий масала ҳам биржинсли консерватив схема ёрдамида ечилганлигини таъкидлаш кифоя.

Тадқиқот предмети. Узлуксиз жараёнларнинг математик ифодаси бўлмиш дифференциал тенглама унинг дискрет модели ҳисобланмиш чекли айирмалар билан алмаштирилади. Чекли айирмаларда ўрганилган объектнинг реал объектга яқинлигини таъминлайдиган айирмали схемаларни излаш ва ўрганиш тадқиқотнинг асосий **предмети** ҳисобланган.

Тадқиқот фарази. Ишнинг ҳимояга олиб чиқадиған ҳолатларидан бири чекли айирмали схемалардан бири биржинсли консерватив схема саналмиш интеграл-интерполяция методининг афзалликлари ва қулайлигини намоёиш этишдир.

Тадқиқот вазифалари. Чегаравий масаланинг сонли усулида топилган сон қийматлари билан эксперимент натижаларини солиштириб, сонли усулнинг амалий аҳамиятини аниқлашдан иборат.

Тадқиқот янгилиги. Шундан иборатки ер ости сувлари саҳтининг кўтарилиб натижада ҳосилдор қатламларни шўрлантиришнинг олдини оладиган тадбирларнинг қаерда ва қачон ўтказиш лозимлиги ҳақида конкрет тавсиялар берилган ва чизмада бу ҳолат турли ҳолларда тасвирланган.

Фан учун аҳамияти эса қўйилган масаланинг корректлигини асослашда сонли усулларнинг ҳам ўрни борлигини кўрсатишда набоён бўлди.

Асосий қисм. Иккита бобдан иборат бўлиб, **биринчи боб** учта параграфни ўз ичига олган. Биринчи параграфда иккинчи тартибли оддий

дифференциал тенгламага қўйилган чегарвий масалани чекли айирмали метод билан ечишга, иккинчи параграфда ечимнинг ягоналигини текширишда максимум принципидан фойдаланиш йўллари кўрсатилган.

Учинчи парграф асосан чизиқли бўлмаган чегарвий масалаларни қандай қилиб чекли айирмалар билан ифодалаш, хусусан чизиқли бўлмаган ҳадларни чизиқлаштириш йўллари излаб топишга бағишланган.

Иккинчи боб асосан хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, аниқроғи параболик типдаги тенгламалар учун сетка (тўр) методини қўллашга бағишланган. Бу боб тўртта параграфни ўз ичига олади. Биринчи параграфда икки қатламли айирмали схемаларнинг яқинлашишини, аниқлиги ва тўрғунлиги текширилган. Иккинчи ва учунчи параграфларда икки қатламли айирмали схемалардан тежамкор схемаларни ажратиб олиш ва уларнинг тўғрилигини таъминлаш муаммоси қаралган.

Тўртинчи параграфда битирув-малакавий ишнинг илмийлигини ва амалийлигини ифодаловчи бўлиб, унда ҳам математик маънода ҳам ҳисоблаш нуқтаи назардан янги бўлган конкрет масала қаралган. Бу масалани чекли айирмали усуллар ичида энг самарали ва юқори аниқликдаги метод бўлган интеграл-интерполяцион схема ўрганилган ва уни қўллаш натижасида реал картинага мос келувчи ечим олинган ва бу ечим чизмада ҳам тасвирланган.

I БОБ ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАРНИ ЧЕКЛИ АЙИРМАЛАР УСУЛИ БИЛАН ЕЧИШ.

1. 1-§ Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламага қўйилган чегаравий масалани чекли айирмали метод билан ечиш ғояси.

Фараз қилайлик, $a \leq x \leq b$ орлиқда

$$L(u) = u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \quad (1.1.1)$$

дифференциал тенглама ва

$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma_1, \quad |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0 \quad (1.1.2)$$

$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_2, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0 \quad (1.1.3)$$

чегаравий шартлар берилган бўлиб, бу чегаравий масала ягона ечимга эга бўлсин.

Қаралаётган $[a, b]$ ораликни тугунлар деб аталувчи

$$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \dots, N; h = (b - a) / N) \quad (1.1.4)$$

нуқталар ёрдамида N та тенг бўлақларга бўлиб, тўр хосил қиламиз. Ҳар бир тугунга (1.1.1)-(1.1.3) лардаги ҳосилаларни сонли дифференциаллаш формулалари бўйича функциянинг айрим нуқталардаги қийматларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодалаймиз. Натижада $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ҳолда $u(x_i)$ ларни топиш учун $N - 1$ та тенгламага эга бўламиз.

Агар булар билан чегаравий шартлардан ($i = 0$ ва $i = N$) келиб чиқадиган тенгламаларни ҳам бирлаштирсак, у ҳолда $u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_N)$ га нисбатан $N + 1$ та тенгламалардан иборат системага эга бўламиз.

Чекли айирмали методни қўллаганда қуйидаги қўйидиги масалалар ечилиши керак.

- 1) сонли дифференциаллаш формулаларини шундай танлаш керакки, улар ҳосилани яхши яқинлаштирсин ва бу формулада функциянинг тугун (нуқта)лардаги қийматлари қатнашсин.
- 2) ҳосил бўлган система ечимининг мавжудлиги текширилсин.
- 3) бу системани ечиш методи кўрсатилсин.

4) ҳосил бўлган натижанинг аниқлиги баҳолансин.

Оддий дифференциал тенглама ва чегаравий шартларни алгебраик тенгламалар системаси билан алмаштириш. Биз бу ерда $[a, b]$ ораликда (1.1.4) тугун нуқталарни танлаб, (1.1.1) дифференциал тенгламани фақат ички тугунларда қараймиз, яъни $x = x_i (i = 1, 2, \dots, N - 1)$ ва (1.1.2)-(1.1.3) чегаравий шартларни мос равишда $x_0 = a$ ва $x_N = b$ нуқталарда қараймиз; (1.1.1) тенгламага $x = x_i$ деб оламиз:

$$u''(x_i) + p(x_i)u'(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad (1.1.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1$$

ва бунда қатнашадиган $u'(x_i)$ ва $u''(x_i)$ ларни $u(x)$ функциянинг x_{i-1}, x_i, x_{i+1} нуқталардаги қиймати, яъни $u(x_{i-1}), u(x), u(x_{i+1})$ орқали ифодалаймиз. Бунинг учун x_i нуқта атрофида $u = u(x)$ фуцункция $[a, b]$ ораликда тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилга эга деб фараз қиламиз, $u(x_{i-1})$ ва $u(x_{i+1})$ функцияларнинг Тейлор формуласи бўйича ёйилмасини ёзамиз (қолдиқ хадни эса Лагранж формуласида оламиз).

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{h}{1!}u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{IV}(x_i + \theta h), 0 < \theta < 1, \quad (1.1.6)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - \frac{h}{1!}u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{IV}(x_i - \theta h), 0 < \theta < 1 \quad (1.1.7)$$

Бу формулалардан қуйидагиларга эга бўламиз.

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} = u'(x_i) + O(h), \quad (1.1.8)$$

$$\frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h} = u'(x_i) + O(h), \quad (1.1.9)$$

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} = u'(x_i) + O(h). \quad (1.1.10)$$

Бу формулаларнинг чап томони мос равишда **ўнг ҳосила**, **чап ҳосила** ва **марказий ҳосила** дейилади. Шунга ўхшаш $u''(x_i)$ учун қуйидаги симметрик ифодага эга бўламиз:

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} = u''(x_i) + o(h^2) \quad (1.1.11)$$

Энди (1.1.5) тенгликда $u'(x_i)$ ва $u''(x_i)$ ларнинг ўрнига (1.1.10), (1.1.11) ларни қўйиб ва $o(h^2)$ ни ўнг томонга ўтказиб, қуйидаги ҳосил қиламиз:

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + p(x_i) \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} + q(x_i)u(x_i) = f(x_i) + o(h^2) \quad (1.1.12)$$

ёки

$$\left[1 - \frac{h}{2} p(x_i)\right] u(x_{i-1}) - [2 - h^2 q(x_i)] u(x_i) + \left[1 + \frac{h}{2} p(x_i)\right] u(x_{i+1}) = h^2 p(x_i) + o(h^4), \quad (1.1.13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1$$

Шунга ўхшаш (1.1.8), (1.1.9) лардан фойдаланиб, (1.1.2), (1.1.3) чегаравий шартлар учун қуйидагиларга эга бўламиз:

$$(\alpha_0 h - \alpha_1) u(x_0) + \alpha_1 u(x_1) = h\gamma_1 + o(h^2) \quad (1.1.14)$$

$$-\beta_1 u(x_{N-1}) + (\beta_1 + h\beta_0) u(x_N) = h\gamma_2 + o(h^2) \quad (1.1.15)$$

Энди (1.1.13)-(1.1.15) ларнинг ўнг томонида $o(h^4)$ ва $o(h^2)$ қолдиқ хадларни ташлаб юборамиз, натижада

$$\left[1 - \frac{h}{2} p(x_i)\right] y_{i-1} - [2 - h^2 q(x_i)] y_i + \left[1 + \frac{h}{2} p(x_i)\right] y_{i+1} = h^2 f(x_i), i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.1.16)$$

$$(\alpha_0 h - \alpha_1) y_0 - \alpha_1 y_1 = h\gamma_1, \quad (1.1.17)$$

$$-\beta_1 y_{N-1} + (\beta_1 + h\beta_0) y_N = h\gamma_2 \quad (1.1.18)$$

ҳосил бўлади.

Бу ерда y_i орқали $u(x_i)$ нинг тақрибий қиймати белгиланган. Кейинчалик қулай бўлиши учун қуйидаги белгилниш киритамиз.

$$\left. \begin{aligned} A_i &= 1 - \frac{h}{2} p(x_i), C_i = 2 - h^2 q(x_i), \beta_i = 1 + \frac{h}{2} p(x_i), \\ x_i &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - h\alpha_0}, \vartheta_1 = \frac{h\gamma_1}{h\alpha_0 - \alpha_1}, x_2 = \frac{\beta_1}{\beta_1 + h\beta_0}, \vartheta_2 = \vartheta_2 = \frac{h\gamma_2}{\beta_1 + h\beta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.19)$$

Бу белгилашларда (1.1.16)-(1.1.18) системани қуйидагича ёзиб оламиз.

$$\left. \begin{aligned} A_i y_{i-1} - C y_i + B y_{i+1} &= h^2 f_i, \\ y_0 &= x_1 y_1 + v_1, \\ y_N &= x_2 y_{N-1} + v_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.20)$$

Бу системанинг матрицаси унинг дигонали бўлиб, кўйидаги кўринишга эга:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A & -C_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Шуни таъкидлаш керакки, (1.1.16) ифода дифференциал тенгламани $O(h^2)$ хатолик билан, (1.1.17) ва (1.1.18)лар эса чегарвий шартларни $O(h)$ хатолик билан алмаштирилади. Кўришиб турибдики, дифференциал тенглама чегаравий шартларга нисбатан каттароқ аниқликда алмаштирилади. Будан аниқлик мақсадга мувофиқ бўлмай қолиш мумкин, у ҳолда $u'(a)$ ва $u'(b)$ аниқроқ формулалар билан алмаштирилади.

$$u'(x_0) = \frac{1}{3h} [-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)] + \frac{h^2}{3} u''(\xi)$$

ва

$$u'(x_N) = \frac{1}{2h} [u(x_{N-2}) - 4u(x_{N-1}) + 3u(x_N)] + \frac{h^2}{3} u''(\xi)$$

Умуман олганда, қўшимча $x_{i-2}, x_{i+2}, x_{i-3}, x_{i+3}$ ва ҳ.к тугунларда $u(x)$ функциянинг қийматини олиб, чегаравий масалани каттароқ аниқликда алмаштириш мумкин. Аммо бу алгебраик системани мураккаблаштириб юборади, табики, бундай системани сонли ечиш ҳам оғир масалага айланади. Шунинг учун ҳам ҳисоблаш амалитида шундай системалар қараладики, уларнинг аниқлиги катта бўлмаса ҳам кўриниши содда бўлиши керак. Аниқликни ошириш учун h кичикроқ қилиб олинади. Шу сабабларга кўра, кўпинча (1.1.1)-(1.1.3) чегарвий масалани ечиш учун (1.1.20) кўринишдаги система олинади.

Мисол №1. Чекли айирмалар усули қўлланилиб, ушбу $u'' - x^2 u' = 4$, $u(1) = 0$, $u(1.4) = 0.2492$ чегаравий масала йечимининг $u(1.1)$, $u(1.2)$, $u(1.3)$ қийматлари топилсин.

Ечиш: u'' , u' ҳосилаларни айирмалар билан алмаштириб, қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - x_i^3 \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 4$$

ёки

$$2y_{i+1} - 4y_i + 2y_{i-1} - x_i^3 h y_{i+1} + x_i^3 h y_{i-1} = 8h^2$$

ёки

$$(2 + x_i^3 h) y_{i-1} - 4y_i + (2 - x_i^3 h) y_{i+1} = 8h^2$$

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{a-b}{n}, \quad i = \overline{1, n-1}$$

$$\alpha_0 = 1 \quad \alpha_1 = 0 \quad \beta_0 = 1 \quad \beta_1 = 0 \quad A = 0$$

$$x_1 = 1,1 \quad x_2 = 1,2 \quad x_3 = 1,3 \quad y_0 = 0 \quad B = 0,2492$$

$$\begin{cases} (2 + 1,1^3 \cdot 0,1) y_0 - 4y_1 + (2 - 1,1^3 \cdot 0,1) y_2 = 8 \cdot 0,1^2 \\ (2 + 1,2^3 \cdot 0,1) y_1 - 4y_2 + (2 - 1,2^3 \cdot 0,1) y_3 = 8 \cdot 0,1^2 \\ (2 + 1,3^3 \cdot 0,1) y_2 - 4y_3 + (2 - 1,3^3 \cdot 0,1) y_4 = 8 \cdot 0,1^2 \end{cases}$$

$$1,8669y_2 - 4y_1 + 2,1331y_0 = 8 \cdot 0,1^2$$

$$1,8272y_3 - 4y_2 + 2,1728y_1 = 8 \cdot 0,1^2$$

$$1,7803y_4 - 4y_3 + 2,2197y_2 = 8 \cdot 0,1^2$$

$$y_1 = \frac{1}{4} \cdot 1,8669y_2 - \frac{1}{4} \cdot 0,08 = 0,4667y_2 - 0,02$$

$$1,8272y_3 - 4y_2 + 2,1728(0,4667y_2 - 0,02) = 0,08$$

$$(4 - 1,01405)y_2 = 1,8272y_3 - 0,04346 - 0,08$$

$$y_2 = \frac{1,8272}{2,98595} y_3 - \frac{0,12346}{2,98595}$$

$$y_2 = 0,61193y_3 - 0,07135$$

$$1,7803y_4 - y_4 - 4y_3 + 2,2197(0,61193y_3 - 0,04135) = 0,08$$

$$1,7803y_4 - 4y_3 + 1,3583y_3 - 0,09178 - 0,08 = 0$$

$$1,7803y_4 - 2,6417y_3 - 0,17178 = 0$$

$$2,6417y_3 = 1,7803y_4 - 0,17178$$

$$y_3 = \frac{0,1718}{2,6417} + \frac{1,7803 \cdot 0,2492}{2,6417}$$

$$y_3 = -0,065 + 0,1679 = 0,1029$$

$$y_2 = 0,61193 \cdot 0,1029 - 0,04135 = 0,0216$$

$$y_1 = 0,4667 \cdot 0,0216 - 0,02 = 0,0099$$

1. 2-§. Максимум принципи ва уни чекли-айирмали тенгламалар системаси ечимининг мавжудлигини текширишга қўллаш

Олдинги бобда (1.1.20) система ечимининг мавжудлигини кўрсатиш учун санокли бош диагоналга эга бўлган матрицалар ҳақидаги леммани қўллаш мумкин. Аммо биз бу ерда бошқача иш тутамиз. Аввало, максимум ҳақидаги леммани келтирамиз. Бу принципнинг қўллаш доираси анча кенг, нафақат оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш натижасида ҳосил бўладиган (1.1.20) кўринишдан системани текшириш учун, балки бу методларнинг яқинлашишини текшириш ва хатосини баҳолаш учун ҳам ишлатилади.

Фараз қилайлик, қуйидаги икки шарт бажарилган бўлсин:

$$\frac{h}{2} \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 1 \quad (1.2.1)$$

$$q(x) \leq 0, \quad a \leq x \leq b \quad (1.2.2)$$

Бу шартлар A_i , B_i , C_i коэффициентларнинг мусбатлигини таъминлайди.

Кейинги мулоҳозаларни соддалаштириш мақсадида (1.1.2)-(1.1.3) чегаравий шартларга $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ деб оламиз, у ҳолда $x_1 = x_2 = 0$ бўлиб, (1.1.20) система қуйидаги кўринишга эга бўлади.

$$\left. \begin{aligned} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= h f_i, \quad i = \overline{1, N-1} \\ u_0 &= v_1, \quad u_N = v_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.3)$$

Бу система ечишнинг мавжудлигини кўрсатиш учун бунга мос келадиган

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_0 = 0 \quad (1.2.4)$$

бир жинсли система фақат $y_0 = y_1 = \dots = y_N = 0$ тривиал ечимга эга эканлигини кўрсатишимиз керак, чунки бу ҳолда (1.2.4) системани дитерминанти

$$D = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & -C_2 & B_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-2} & -C_{N-2} & B_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{N-1} & -C_{N-1} \end{vmatrix}$$

нолдан фарқли бўлади. Аммо бу детерминат (1.2.3) системанинг ҳам детерминати бўлиб, $D \neq 0$ тенгсизлик бу система ечимининг мавжуд ва ягоналигини таъминлайди.

Фараз қилайлик қандайдир z_0, z_1, \dots, z_N сонлар берилган бўлиб, $z_i \neq const$ бўсин. Ушбу айирмали операторни киритамиз:

$$\wedge(z_i) = A_i z_{i-1} - C_i z_i + B_i z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N+1$$

1-лемма (максимум принципи). Агар (1.2.1), (1.2.2) шартлар бажарилса ва $i = 1, 2, \dots, N-1$ учун

$$\wedge(z_i) \geq 0 \quad (\wedge(z_i) \leq 0)$$

бўлса, у ҳолда z_0, z_1, \dots, z_N сонлар орасидаги z_0 ёки z_N энг катта мусбат қийматга (энг кичик масофий қийматга) эга бўлиши мумкин.

Исботи. Айтайлик

$$\wedge(z_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин. Тескарисини фараз қиламиз, айтайлик, z_i лар ўзининг энг катта мусбат қиймати M ни $i = \kappa$ ($1 \leq \kappa \leq N-1$) бўлганда қабул қилсин, яъни $\max_{1 \leq i \leq N-1} z_i = z_\kappa = M$ бўлиб, $z_{\kappa+1}$ ёки $z_{\kappa-1}$ сонларнинг ҳеч бўлмаганда M дан кичик бўлсин.

У ҳолда

$$\begin{aligned} \wedge(z_\kappa) &= A_\kappa z_{\kappa-1} - C_\kappa z_\kappa + B_\kappa z_{\kappa+1} = \left[1 - \frac{h}{2} p(x_\kappa)\right] z_{\kappa-1} - [2 - h^2 q(x_\kappa)] M + \left[1 + \frac{h}{2} p(x_\kappa)\right] z_{\kappa+1} < \\ &< \left[1 - \frac{h}{2} p(x_\kappa)\right] M - [2 - h^2 q(x_\kappa)] M + \left[1 + \frac{h}{2} p(x_\kappa)\right] M = h^2 q(x_\kappa) M \leq 0, \end{aligned}$$

чунки лемма шартига кўра A_k, B_k, C_k коэффицентлар мусбат бўлиб, $z_{\kappa+1}$ ёки $z_{\kappa-1}$ сонлардан ҳеч бўлмаганда бири M дан кичик. Демак, $\wedge(z_\kappa) < 0$. Бу эса

лемма шартларга зиддир. Бундан эса бизнинг фаразимизнинг нотўғрилиги ва энг катта мусбат қиймат фақат z_0 ёки z_N бўлиши мумкинлиги келиб чиқади. Лемманинг тасдиғи $\wedge(z_i) \leq 0$ учун ҳам худди шунга ўхшаш исботланади. Энди (1.2.4) системанинг фақат тривал ечимига эга эканлигини кўрсатамиз. Яна тескарисини фараз қилиб, бу система нолдан фарқли ечимга эга деб ҳисоблаймиз, яъни y_1, y_2, \dots, y_{N-1} сонларнинг орасида ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлсин. бу ерда ҳам (1.2.1), (1.2.2) шартлар бажарилган деб фараз қиламиз ва бундан ташқари, барча $i=1, 2, \dots, N-1$ учун $\wedge(y)=0$ тенгликлар ўринли эканлигини ҳисобга оламиз. Шунинг учун ҳам леммаларнинг тасдиғига кўра y_i сонларнинг энг катта мусбат қиймати (энг кичик манфий қиймати) фақат y_0 ва y_N бўлиши мумкин. Лекин $y_0 = y_{N-0}$, демак y_1, y_2, \dots, y_{N-1} лар нолга тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, (1.2.4) система фақат тривал ечимга эга бўлиб, (1.2.3) система ягона ечимга эга.

Айирмали ҳайдаш методи ва унинг турғунлиги.

Бизга умумий кўринишдаги матрицага эга бўлган N -тартибли системани Гаусснинг номаълумларни йўқотиш методи билан ечишда $O(N^3)$ миқдорда арифметик амаллар бажарилиши маълум. Агар матрица унинг диагнолидан иборат бўлган (1.1.20) системани ечишга Гаусс методи бўйича тузилган стандарт дастурга мурожат қилсак, ЭХМ $O(N^3)$ миқдорда амал бажарилади. Аммо (1.1.20) системада нолдан фарқли элементлар миқдори $O(N)$. Шунинг учун ҳам $O(N^3)$ миқдоридаги амалдан $O(N)$ таси ***мазмундор амал*** бўлиб, қолган $O(N^3)$ таси ***мазмунсиз амалдир***, чунки улар нолни бирор сонга кўпайтириш (бўлиш) ва нолни нўлга қошиш (айириш)дан иборат. Демак, (1.1.20) системани Гаусс методи бўйича тузилган стандарт дастур ёрдамида ечиш ортиқча амал бажаришга олиб келиб, мақсадга мувофиқ бўлмайди.

Ўтган асирнинг эллигинчи йилларида бу нуқсонлардан қутилиш мақсадида уч диогналли матрицага эга бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш учун Гаусс методини шундай вариант ишлаб чиққиладики, у матрицанинг фақат нолдан фарқли элементлари устида амал бажарди. Бу вариант *ҳайдаш методи* деб номланади. Ҳайдаш методида арифметик амалларнинг сони $O(N)$ га тенг ҳозирги вақтда ҳайдаш методнинг ҳилма-хил вариантларга эга ва улар ҳилма-хил мақсадларни ечишга мўлжалланган.

Шундай қилиб

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = h^2 f_i, i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.2.5)$$

айирмали тенгламалар системаси ва

$$y_0 = x_1 y_1 + v_1, \quad y_N = x_2 y_{N-1} + v_2 \quad (1.2.6)$$

чегаравий шартлар берилган бўлсин. Бу ерда $A_i, B_i, C_i, f_i, x_1, x_2, v_1, v_2$ берилган сонлар (1.2.5) системанинг ечимини қуйидаги

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} \cdot y_i + \beta_{i+1}, i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.2.7)$$

кўринишида излаймиз, бу ерда α_{i+1} ва β_{i+1} ҳозиргача номаълум сонлар (1.2.7) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз.

$$y_i = \alpha_i \cdot y_{i-1} + \beta_i,$$

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} y_i + \beta_{i+1} = \alpha_i \alpha_{i+1} y_{i-1} + \alpha_{i+1} \beta_i + \beta_{i+1}$$

Бу ифодаларни (1.2.5) тенгламага қўйсак,

$$[A_i - \alpha_i (C_i - B_i \alpha_{i+1})] y_{i-1} + \beta_i (B_i \alpha_{i+1} - C_i) + B_i \beta_{i+1} + h^2 f_i = 0$$

келиб чиқади. Кўриниб турибдики, агар

$$A_i - \alpha_i (C_i - B_i \alpha_{i+1}) = 0, \quad \beta_i (B_i \alpha_{i+1} - C_i) + B_i \beta_{i+1} = h^2 f_i$$

тенгликда бажарилса, у ҳолда (1.2.5) тенглик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, α_i ва β_i ларни топиш учун ушбу рекуррент формулаларига эга бўламиз.

$$\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}}, \quad \beta_i = \frac{B_i \beta_{i+1} - h^2 f_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

α_N ва β_N миқдорларини эса (1.2.6) чегарвий шартлардан ва (1.2.7) тенгликда $i = N - 1$ бўлганда ҳосил қиламиз.

$$\alpha_N = x_2, \quad \beta_N = \mathcal{G}_2$$

(1.2.7) формула ёрдамида ҳисоблашни бажариш учун y_0 нинг қийматини топиш керак, бу эса (1.2.6) чегарвий шартдан ва (1.2.7) тенгликдан $i = 0$ бўлганда ҳосил бўлади.

$$y_0 = \frac{x_1 \beta_1 + \mathcal{G}_1}{1 - x_1 \alpha_1}$$

Шундай қилиб, (1.2.5)-(1.2.6) чегарвий масалани аниқ ечимини топиш учун *хайдаш методи* деб аталувчи алгебраик тенгламаларга эга бўламиз.

$$\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}}, \quad \beta_i = \frac{B_i \alpha_{i+1} - h^2 f_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}},$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad (1.2.8.)$$

$$\alpha_N = x_2, \quad \beta_N = \mathcal{G}_2,$$

$$y_{i+1} = \alpha_{i+1} y_i + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$y_0 = (\mathcal{G}_1 + x_1 \alpha_1) / (1 - x_1 \alpha_1)$$

Бу ерда y_i лар чегаранинг чап нуқтасидан бошлаб кетма-кет топилади, шунинг учун ҳам (1.2.8) формулалар *чандан хайдаш* формулалари дейилади. Шунга ўхшаш *ўнгдан хайдаш* формулаларини ҳам чиқариш мумкин:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - \xi_i A_i}, \eta_{i+1} = \frac{\eta_i A_i - h^2 f_i}{C_i - \eta_i A_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; \\ \xi_i &= x_1, \eta_1 = v_1, \\ y_i &= \xi_{i+1} y_{i+1} + \eta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \\ y_N &= (v_2 + x_2 \eta_N) / (1 - x_2 \xi_N) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.9)$$

Айрим ҳоллардан чандан ва ўнгдан хайдаш методларининг комбинациясини олиб, қарама-қарши хайдаш методи деб айтувчи методни ишлатиш маъқулдир.

1-машқ. (1.2.9) ўнгдан хайдаш формулаларини исботлансин.

Агар α_i коэффициентлар модули билан бирдан кичик бўлса, у ҳолда (1.2.8) **хайдовчи формулалар турғун** деб аталади. Бундай ҳолда (1.2.7) рекуррент формулалар бўйича ҳисоблаш олиб борилганда келиб чиқадиган яхлитлаш хатолари ўсмайди.

Т е о р е м а. Агар қуйидаги шартлар

$$A_i > 0, B_i > 0, C_i \geq A_i + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad 0 \leq x_1, \quad x_2 < 1 \quad (1.2.10)$$

бажарилса, у ҳолда хайдашни бажариш мумкин ва турғун бўлади.

И с б о т и. Ҳақиқатдан ҳам, $0 \leq \alpha_N = x_2 < 1$ эканлиги теорема шартидан келиб чиқади. Фараз қилайлик $0 \leq \alpha_{i+1} < 1$ бўлсин, у ҳолда

$$0 < \alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}} = \frac{A_i}{(C_i - B_i - A_i) + A_i + (1 - \alpha_{i+1})B_i} < 1$$

бўлади, чунки сурат ва махражнинг ҳадлари мусбат бўлиб махраж суратдан катта. Шундай қилиб, барча $i < 1, 2, \dots, N-1$ учун $0 < \alpha_i < 1$. Энди $0 \leq x_i < 1$ шарт $0 < \alpha_i < 1$ шарт билан бирга y_0 ни аниқлайдиган формуладан махражнинг нолдан фарқлигини таъминлайди. Шунини исбот қилиш керак эди.

Э с л а т м а. Шунини ҳам таъкидаш керакки, x_i га қўйилган шартларни юмшатиш мумкин. Масалан, агар (1.2.10) шартлар ўринига ушбу

$$A_i > 0, B_i > 0, C_i \geq A_i + B_i, \quad C_i \neq A_i + B_i, \quad (1.2.11)$$

$$0 \leq x_1, x_2 < 1,$$

ёки
$$A_i > 0, B_i > 0, C_i \geq A_i + B_i, 0 \leq x_1, x_2 < 1, \quad (1.2.12)$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

шартлар бажарилса, у ҳолда теореманинг тасдиғи ўринлигича қолади.

Чекли айирмали методнинг яқинлашиши.

Асосий ғоя тушунарли бўлиши учун чегаравий шартинг содда бўлган ушбу чегаравий масалани қараймиз.

$$L(u) \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad u(a) = \gamma_1, u(b) = \gamma_2 \quad (1.2.13)$$

Олдингидек фараз қилайлик, $u(x)$ ечим $[a, b]$ га тўғрилиги тартибли узлуксиз ҳосиллага эга бўлсин. У ҳолда (1.1.6), (1.1.7) формуладан

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} = u''(x_i) + \frac{h^2}{12} u^{IV}(x_i + \theta h), \quad |\theta| < 1,$$

$$\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} = u'(x_i) + \frac{h^2}{6} u'''(x_i + \theta_1 h), \quad |\theta_1| < 1$$

хосил бўлади. Энди.

$$\wedge(z_i) \equiv A_i z_i - C_i z_i + B_i z_{i+1}$$

деб оламиз, бу ерда A_i, C_i, B_i коэффицентлар (1.1.19) формулалар билан аниқланади.

Фараз қилайлик, $u(x)$ – чегарвий масалаларнинг изланаётган ечими бўлсин. У ҳолда қуйидаги ифодаларни (1.1.2)га қўйсақ,

$$\frac{1}{h^2} \wedge(u(x_i)) = f_i + R_i \quad (1.2.14)$$

хосил бўлади, бу ерда $f_i = f(x_i)$,

$$R_i = \frac{h^2}{12} [u^{IV}(x_i + \theta h) + 2p(x_i)u'''(x_i + \theta_1 h)]$$

Аммо A_i, C_i, B_i коэффицентлар f_i ни яхлитлаш билан ҳисобланади, шунинг учун ҳам реал ҳисобланади y_i лар ўринга \tilde{y}_i тақрибий қийматлар

$$\frac{1}{h^2} \wedge(\tilde{y}_i) = f_i - \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \tilde{y}_0 = \gamma_1, \quad \tilde{y}_N = \gamma_2 \quad (1.2.15)$$

муносабатларни қаноатлантиради, бу ерда α_i яхлитлаш ҳисобдан хосил бўлган хатолик. Ечимнинг аниқ қиймати билан унинг тақрибий қиймати орасидаги фарқи

$$\varepsilon_i = u(x_i) - \tilde{y}_i$$

деб белгилаймиз, $|\varepsilon_i|$ ни баҳолаймиз ва қайси ҳоллардан яқинлашишини аниқлаймиз. Энди (1.2.14), (1.2.15) формулалардан фойдаланиб ε_i ни аниқлаш учун

$$\begin{aligned} \wedge(\varepsilon_i) &= h^2(R_i + \alpha_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \varepsilon_0 &= 0, \varepsilon_N = 0 \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

системага эга бўламиз.

Биз $|\varepsilon_i|$ ни баҳолаш учун шундай $V_i(x)$ функция кўрамизки, у $|\varepsilon_i|$ учун мажоранта бўлсин, яъни

$$|\varepsilon_i| \leq V(x_i), \quad V(x) \geq 0$$

Мажоранта куриш учун шундай леммадан фойдаланамиз: Фараз қилайлик, t_0, t_1, \dots, t_N , ва T_0, T_1, \dots, T_N ($T_i \geq 0$) қандайдир сонлар бўлсин.

Лемма (мажоранта ҳақида). Фараз қилайлик, қуйидаги шартларни бажарилсин:

- 1) $\frac{h}{2} \max |p(x)| < 1$;
- 2) $q(x) \leq 0$;
- 3) $\wedge(T_i) \leq -|\wedge(t_i)|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$;
- 4) $|t_0| \leq T_0, \quad |t_N| \leq T_N$

У ҳолда $|t_i| \leq T_i, i = 1, 2, \dots, N-1$

Исботи: Ушбу $t_1 + T_1$ йиғиндини қараймиз. Лемманинг учунчи шартига кўра

$$\wedge(t_1 + T_1) = \wedge(t_1) + \wedge(T_1) \leq 0$$

Максимум принципи ҳақидаги леммага кўра $t_1 + T_1$ сонлар орасида энг кичик қийматини $t_0 + T_0$ ёки $t_N + T_N$ қабул қилиш мумкин. Лемманинг тўртинчи шартига кўра бу сонлар манфий эмас, демак, барча i учун $t_1 + T_1 \geq 0$. Шунга ўхшиш $t_1 - T_1 \geq 0$ эканлигини кўрсатиш мумкин. Охириги иккита тенгсизлик кўрсатиш мумкин. Охириги иккита тенгсизлик кўрсатадики, $-T_1 \leq t_1 \leq T_1$ ёки $|t_1| \leq T_1$. Лемма исботланади.

Энди ёрдамчи масалани қараймиз:

$$\begin{aligned} L(u)^0 V'' + p(x)V' + q(x)V &= -1 \\ V(a) &= 0, \quad V(b) = 0 \end{aligned}$$

ва унинг ечимини $\tilde{V}(x)$ деб белгилаймиз. Барча $a < x < b$ учун $\tilde{V}(x) > 0$ эканлиги кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, агар (a, b) га $V(x) \leq 0$ тенгсизликни

қаноатлантирадиган нукталар топилса, у ҳолда $V(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз бўлганлиги учун шу ораликнинг бирор ξ нуктасида унинг мусбат бўлмаган минимумига эришади. Бу ҳолда $\tilde{V}''(\xi) \geq 0, \tilde{V}'(\xi) = 0, \tilde{V}(\xi) < 0$ ва $q(\xi) \leq 0$ бўлганлиги учун биз $L(\tilde{V}(\xi)) \geq 0$ тенгсизликка эга бўлар эдик. Бу эса қарама қаршиликка олиб келади, чунки $\tilde{V}(x)$ функция $L(\tilde{V}) = -1$ тенгламанинг ечимидир. Демак, барча $x \in (a,b)$ учун $\tilde{V}(x) > 0$.

Энди

$$W(x) = \tau V(x)$$

функцияни киритиб τ мусбат параметрни шундай тенглаймизки, $W(x_i)$ сонлар $|\varepsilon_i|$ лар учун мужоранта бўлсин. Бунинг учун $u(x)$ функция $L(u) = f(x)$ тенгламанинг ечими деб фараз қилиб (1.2.14) формулани

$$\frac{1}{h^2} \wedge [u(x_i)] = L[u(x_i)] + R_i(u)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шунга ўхшаш $W(x)$ учун

$$\frac{1}{h^2} \wedge (W(x_i)) = L(W(x_i)) + R_i(W) = -\tau + R_i(W)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда

$$R_i(W) = \frac{\theta h^2}{12} [W^{IV}(x_i + \theta h) + 2p(x_i)W''''(x_i) + \theta_1 h], \quad |\theta| < 1, |\theta_1| < 1$$

Демак,

$$\wedge (W(x_i)) = -\theta h^2 \left[1 - \frac{h^2}{12} W^{IV}(x_i + \theta h) - 2p(x_i)W''''(x_i + \theta_1 h) \right] \quad (1.2.17)$$

Қуйидаги белгиларни киритамиз

$$p = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|, \quad M_3 = \max_{a \leq x \leq b} |W''''(x)|,$$

$$M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |W^{IV}(x)|, \quad M = \frac{1}{12} M_4 + \frac{1}{6} p M_3$$

Буларни эътиборга олиб, (1.2.17)дан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\wedge (W(x_i)) \leq -\theta h^2 (1 - h^2 M), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad W(x_0) = W(x_N) = 0 \quad (1.2.18)$$

Энди (1.2.16) дан кўрамызки,

$$|\wedge(\varepsilon_i)| \leq h^2(h^2\tilde{M} + \delta), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.2.19)$$

бунда $\tilde{M} = \frac{1}{12}\tilde{M}_4 + \frac{1}{6}p\tilde{M}_3$, $\tilde{M}_3 = \max_{a \leq x \leq b} |u'''(x)|$, $\tilde{M}_4 = \max_{a \leq x \leq b} |u^{IV}(x)|$, $|\alpha_i| \leq \delta$

Агар биз τ параметрирни

$$\wedge(W(x_i)) \leq -xV|\varepsilon_i|$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб танлаб олсак, у ҳолда $\varepsilon_i = \varepsilon_N = 0$ ҳисобга олинганда мажоранти ҳақидаги леммани қўллашимиз мумкин.

Бунинг учун (1.2.18) ва (1.2.19) тенгсизликларга кўра

$$-th^2(1-h^2M) \leq -h^2(h^2M + \delta) \quad \text{ёки} \quad \tau \geq \frac{\tilde{M}h^2}{1-Mh^2} + \frac{\delta}{1-Mh^2}$$

Шундай тенгсизликларни қаноатлантирадиган τ учун 2-лемма

$$|\varepsilon_i| \leq W(x_i) = \tau \vee(x_i)$$

ёки

$$|\varepsilon_i| \leq \left(\frac{\tilde{M}h^2}{1-h^2M} + \frac{\delta}{1-h^2M} \right) \vee(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (1.2.20)$$

баҳога эга бўламиз; $[a, b]$ ораликда $V(x)$ узлуксиз бўлганлиги учун у чегаралангандир.

Шунинг учун ҳам, агар $h \rightarrow 0$ га $\delta \leq \delta_0 h^2$ бўлса, у ҳолда (1.2.20) тенгсизлигидан $\varepsilon(h) = \max_{0 \leq i \leq N} |\varepsilon_i| = O(h^2)$ қилиб чиқади.

Т е о р е м а: Фараз қилайлик

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x), \quad u(a) = \gamma_1, \quad u(b) = \gamma_2$$

чегарвай масаланинг $u(x)$ ечими $[a, b]$ ораликда тўртинчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлсин ва қуйидаги шартлар бажарилса.

$$1) \frac{h}{2} \max |p(x)| < 1, \quad 2) q(x) < 0, \quad 3) \delta \leq \delta_0 h^2$$

у ҳолда қаралаётган чегаравий масала учун айирмали метод $O(h^2)$ аниқликда текис яқинлашади.

Э с л а т м а: Агар $\alpha_0 \alpha_1 \leq 0$ ва $\beta_0 \beta_1 \geq 0$ тенгсизликлар уринли бўлса, теорема (1.1.1) ва (1.1.3) чегарвий масала учун ҳам ўринли бўлади.

Бу ва бунга ўхшаш теремаларнинг нуқсони шундай иборатки унга номаълум ечимнинг учига ва тўртинчи ҳосилари қатнашади. Одатда, бу ҳосилаларни баҳолаш оғир масала. Шунинг учун бу теорема фақат назарий аҳамиятга эга.

Мисол №2 $y'' - 2xy' - 2y = -4x$, $y(0) - y'(0) = 0$, $y(1) = 3,71828$ чегаравий масаланинг $x_i = 0,1i \left(i = \overline{1;10} \right)$ нуқталардаги ечими хайдаш усулда қўлланилиб топилсин ва натижа $u(x) = 1 + e^{-x^2}$ аниқ ечимининг қийматлари билан солиштирилсин.

Ечиш: Масалани тўр масаласига келтирамиз

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} - 2x_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - 2y_i = -4x_i$$

ёки

$$\begin{cases} y_{i+1} - 2(1 - x_i h)y_{i+1} + (1 + 2x_i h - 2h^2)y_i = -4x_i h^2, \\ y_0 - \frac{y_1 - y_0}{h} = 0, \quad y_{10} = 3,71828, \quad h = 0,1 \end{cases}$$

Бунда $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $A = 0$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $B = 3,71828$, $m_i = -\alpha(1 + 0,1x_i)$,

$\kappa_i = 0,98 + 0,2x_i$, $f_i = -4x_i$, $x_i = 0,01i$, $i = \overline{0;10}$

Тўғри юриш: жадвалга $i = \overline{0;8}$ учун $x_i, m_i, \kappa_i, f_i h^2$ қийматларни киритамиз.

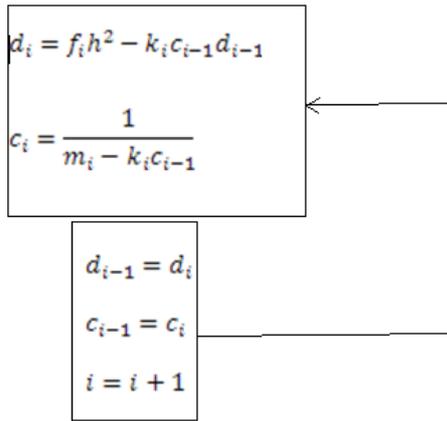
Ҳисоблаш схемаси: $x_i = x_{i-1} + 0,1$; $m_i = m_{i-1} - 0,02$, $\kappa_i = \kappa_{i-1} + 0,02$,

$f_i h^2 = f_{i-1} h^2 - 0,004$ (жадвалнинг 1-5-устунлари); c_0 ва d_0 ларни ҳисоблаймиз.

$$c_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0 h}{m_0(\alpha_1 - \alpha_0 h) + k_0 \alpha_1} = \frac{-1,1}{-2(-1,1) - 0,98} = -0,90164$$

$$d_0 = \frac{k_0 A h}{\alpha_1 - \alpha_0 h} + f_0 h^2 = 0$$

Қолган $d_i, c_i \left(i = \overline{1;8} \right)$ қийматларни ҳисоблаш схемаси (6-7) устунлар:



i	x_i	m_i	k_i	$f_i \cdot h^2$	Тўғри юриш		Тескари юриш	Контроль $y(x)$ аниқ қуйидаги
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0	0,0	-2	0,98	0	0	-0,90164	1,11785	1,00000
1	0,1	-2,02	1	-0,004	-0,004	-0,89413	1,22963	1,11005
2	0,2	-2,04	1,02	-0,008	-0,01165	-0,88653	1,36377	1,24081
3	0,3	-2,06	1,04	-0,0012	-0,02274	-0,87873	1,52125	1,39417
4	0,4	-2,08	1,06	-0,0016	-0,03718	-0,87067	1,70431	1,57351
5	0,5	-2,10	1,08	-0,0020	-0,05496	-0,86231	1,91678	1,78403
6	0,6	-2,12	1,10	0,0024	-0,07613	-0,86364	2,16432	2,03333
7	0,7	-2,14	1,12	0,0028	-0,10079	-0,84465	2,45494	2,33232
8	0,8	-2,16	1,14	0,0032	-0,12905	-0,83535	279972	2,79648
9	0,9						3,21387	3,14791
10	1						3,71828	3,71828

Тескари юриш $y_{10} = \frac{\beta_1 c_8 d_8 + Bh}{\beta_1(1+c_8) + \beta_0 h} = \frac{Bh}{\beta_0 h} = B = 3,71828$. Қолган $y_i (i = 9, 8, \dots, 1)$

қийматлар $y_i = c_{i-1}(d_{i-1} - y_{i+1})$ лардан фойдаланиб топилади: $y_0 = 1,11785$ (8-устун). Контрол мақсадида (9) устунда аниқ ечим $y = x + e^{x^2}$ нинг қийматлари келтирилган

§ 1.3. Чекли айирмали метод ёрдамида иккинчи тартибли чизиқли бўлмаган чегаравий масалаларни ечиш

Қуйидаги чизиқли бу леммадан

$$u'' = f(x, u, u') \quad (1.3.1)$$

дифференциал тенгламага ва

$$\alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = \gamma_1, \quad \beta_0 u(b) - \beta_1 u'(b) = \gamma_2 \quad (1.3.2)$$

чегарвий шартлар белгиланган бўлсин, бунда $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ бир хил ишорага эга. Шу билан бирга, фараз қилайлик $f(x, y, z)$ функция O_{xyz} фазонинг y ва z ларга нисбатан қавариқ бўлган бирор G соҳасида узлуксиз функция бўлсин.

Олдингидек $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, N$, $(b-a)h = N$) турғунлар ёрдамида $[a, b]$ ораликни N га тенг бўллака бўлиб, (1.3.1) тенглама ва (1.3.2) чегарвий шартларни тақрибий равишда алмаштириб, $(N+1)$ та y_0, y_1, \dots, y_N номаълумларга нисбатан ушбу

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} &= f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right), i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \alpha_0 y_0 - \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= \gamma_1, \quad \beta_0 y_N + \frac{\beta_1 - y_{N-1}}{h} = \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

$(N+1)$ та чизиқли бўлмаган тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$\left. \begin{aligned} R_0(y) &= \alpha_0 y_0 - \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h}, \\ R_N(y) &= \beta_0 y_N - \beta_1 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

Юқоридаги (1.3.3) системасини ечиш учун интерация методини қуйидаги схема бўйича қўллаймиз.

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_{i+1}^{(j+1)} - 2y_i^{(j+1)} + y_{i-1}^{(j+1)}}{h^2} &= f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}^{(j)} - y_{i-1}^{(j)}}{2h}\right), \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, \quad R_N[y^{(j+1)}] = \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.3.5)$$

Бу ерда юкоридаги j интекис интерациясининг номерини билдиради. Интерациянинг хар бир қадамида чизикли алгебраик тенгламалар системасини ечишга тўғри келади. Бу система махсус кўринишга эга бўлгани учун унинг ечимини ошкор кўринишда ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned} y_i^{(j+1)} &= \frac{h}{\Delta} [\beta_0 \gamma_1 (b-a) + \beta_1 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2] + \\ &+ \frac{i}{\Delta} (\alpha_0 \gamma_2 - \beta_0 \gamma_1) + h^2 \sum_{\kappa=1}^{N-1} g_{i\kappa} f_{\kappa}^{(j)}, \\ f_{\kappa}^{(j)} &= f\left(x_{\kappa}, y_{\kappa}^{(j)}, \frac{y_{\kappa-1}^{(j)} - y_{\kappa+1}^{(j)}}{2h}\right) \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

бунда $a, b, \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2$ – маълум сонлар бўлиб, Δ ва $g_{i\kappa}$ куйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{h} [\alpha_0 \beta_0 (a-b) + \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0], \\ g_{i\kappa} &= \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \left(i\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h} \right) \left(\kappa\beta_0 - \beta_1 N - \frac{\beta_1}{h} \right) & (i \leq \kappa) \\ \frac{1}{\Delta} \left(\kappa\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{h} \right) \left(i\beta_1 - \beta_0 N - \frac{\beta_1}{h} \right) & (i \geq \kappa) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, (1.3.7) формулада $g_{i\kappa}$ лар интерация номлари боғлиқ эмас, шунинг учун уларни бир марта ҳисоблаб қўшиш кифойядир.

Қаралаётган методнинг яқинлашишини текшириш анча мураккаб бўлиб, $R(x, y, z)$ функция G соҳага y ва z ларга нисбатан

$$|R(x, y, z) - f(x, \bar{y}, \bar{z})| \leq \alpha_1 |y - \bar{y}| + \alpha_2 |z - \bar{z}|$$

Кимпиц шартини қаноатлантирадиган ҳол учун бундай тадқиқот.

II- БОБ. ПАРАБОЛИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН АЙИРМАЛИ СХЕМАЛАР.

§ 2. 1.Икки тартибли айирмали схемалар.

Фараз қилайлик $G = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$ соҳада ушбу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (2.1.1)$$

параболик тенгламанинг

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.1.2)$$

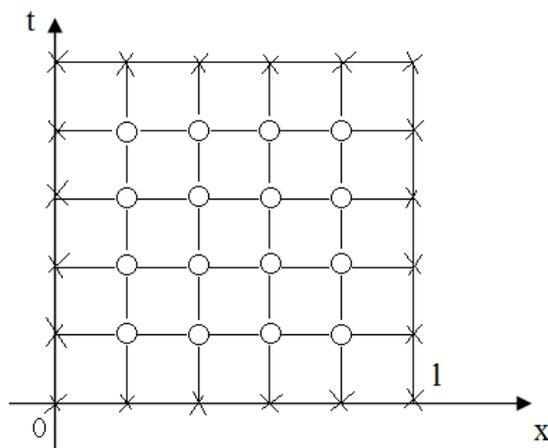
дастлабки шарт ва

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \quad (2.1.3)$$

чегаравий шартларни қаноатлавчан $u(x, t)$ ечимини топиш талаб қилинсин.

Бу ерда $u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ берилган функциялар. Маълумки, (2.1.1)-(2.1.3)

масаланинг барча керакли ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз.



1-чизма

Айирмали схема кўриш учун G созани x ва t координаталар бўйича мос равишда $h = \frac{l}{M}$ ва $\tau = \frac{T}{N}$ тўғри тўрри бурчак тўртбурчак тўр билан қолмаймиз. (1-чизма) кейин $\bar{G}_{h,\tau} = \{ih, \tau k, i = \overline{0M}, k = \overline{0N}\}$ тўр соҳанинг

$(i, \kappa) = (ih, \tau k)$ тугунларида аниқланган $v^{(h)}$ функцияни кидирамиз, $v^{(h)}$

функция u функциянинг $\bar{G}_{h,\tau}$ тўрда аниқланган $y(x,t)$, функция учун $y_i^k = y(x_i, t_k)$ белгилаш киритамиз.

Энди (2.1.1) тенгламани аппроксимация қилиш учун $\frac{\partial u}{\partial t}$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

ҳосилаларни $(ih, k\tau)$ нуқтада

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(ih, k\tau)} \approx \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau}, \quad (2.1.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(ih, k\tau)} \approx \frac{y_i^k - y_i^{k+1}}{\tau}, \quad (2.1.5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(ih, k\tau)} \approx \frac{y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k}{h^2}, \quad (2.1.6)$$

тақрибий формулалар билан алмаштирамиз. Айирмали масалани ҳосил қилиш учун (2.1.4) билан (2.1.6)ни (2.1.1) ва (2.1.3) дастлабки чегарвий шартларни аппроксимация қиламиз. Натижада қўлидаги айирмани масала ҳосил бўлади.

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{y_{i-1}^k - 2y_i^k + y_{i+1}^k}{h^2} + \varphi_i^k \quad (2.1.7)$$

$$i = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{0, N-1};$$

$$y_0^k = \mu_1(t_k), \quad y_M^k = \mu_2(t_k), \quad k = \overline{0, N} \quad (2.1.8)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, M}$$

Агар (2.1.6) га k ни $(k+1)$ га алмаштириб, натижани ҳамда (2.1.4)ни (2.1.1) тенгламага қўйсак, қуйидаги айирмали масалага эга бўламиз:

$$\frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \frac{2y_{i-1}^k - y_{i-1}^{k+1} + y_{i+1}^k}{h^2} + \varphi_i^{k+1} \quad i = \overline{1, M-1}, k = \overline{0, N-1}$$

$$(2.1.9)$$

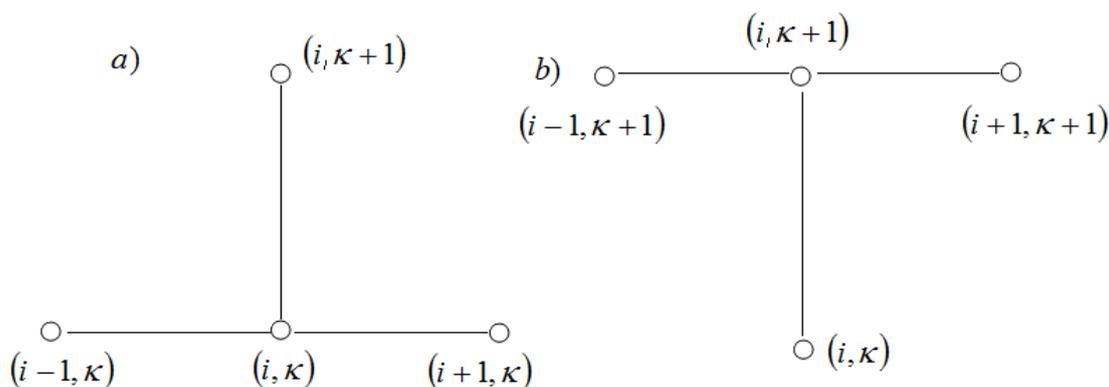
$$y_0^{k+1} = \mu_1(t_{k+1}), \quad y_M^{k+1} = \mu_2(t_{k+1}), \quad k = \overline{0, N-1} \quad y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = \overline{0, M} \quad (2.1.10)$$

Бу ерда φ_i^k сифатида қуйидаги ифодаларни бирортасини олиш мумкин.

$$f(x, t), \frac{1}{h} \int_{x_i - \frac{1}{2}}^{x_i + \frac{1}{2}} f(x, t_k) dx, \frac{1}{h\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \int_{x_i - \frac{1}{2}}^{x_i + \frac{1}{2}} f(x, t) dx$$

Шундай қилиб, (2.1.1)-(2.1.3) параболик тенгламаларнинг аппроксимацияси сифатида биз (2.1.7), (2.1.8) ва (2.1.9) айирмали тенгламаларга эга бўлсин.

бирор $Lu = f$ дифференциал масаланинг (x_i, t_k) тугунда $L_y(u^{(h)}) = f^h$ айирмали масала билан алмаштиришда иштирок этилган тўпламни андаза дейлади. Юқоридаги (2.1.8) ва (2.1.9) айирмали схемалар 2-чизмага кўрсатилган андазаларга мос қилади.



2-чизма

а) икки қатламли ашкор схема,

в) икки қатламли соф ошкормас схема.

Энди (2.1.7) ва (2.1.8) айирмали схеманинг аппроксимацияси тартибини аниқлаймиз. Равшнки,

$$\frac{u(x, \kappa, \tau + \tau) - u(x, \kappa, \tau)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, \kappa, \tau)} + \frac{\tau \partial^2 u}{2 \partial t^2} \Big|_{(x, \kappa, \tau + \xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq \tau,$$

$$\frac{u((i-1)h, t) - 2u(ih, t) + u((i+1)h, t))}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(ih, t)} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \Big|_{(ih, +\eta, t)}, \quad 0 \leq \eta \leq h.$$

Ушндай учун ҳам

$$\begin{aligned} & \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t))}{h^2} - \varphi(x, t) = \\ & = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(x, t + \xi)} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x + \eta, t)} - \varphi(x, t) = f(x, t) - \varphi(x, t) + O(\tau + h^2) \end{aligned}$$

Агар $\varphi_i^k = f(ih, k\tau)$ деб олсак, у холда (2.1.7), (2.1.8) айирмали масала аппроксимация ҳатолигининг тартиби $O(\tau + h^2)$ бўлади, чунки дастлабки ва чегаравий шартлар аниқ бажарилади. Шунга ўхшаш кўрсатиш мумкинки, (2.1.1)-(2.1.3) масаланинг (2.1.9), (2.1.10) айирмали схема билан аппроксимациясининг тартибли $O(\tau + h^2)$.

Шуни айтиш керакки, (2.1.7), (2.1.8) ва (2.1.9), (2.1.10) схемалар (2.1.1)-(2.1.3) тенгламани бир хил ҳолати билан аппроксимация қилишса ҳам, улар ўртасида катта фарқ бўр. Ҳақиқатдан ҳам, (2.1.7)дан қуйидаги муносабат келиб чиқади.

$$y_i^{k+1} = y_i^k + \frac{\tau}{h^2} (y_{i-1}^k - 2y_i^k - y_{i+1}^k) \quad (2.1.11)$$

$y_i^0 \left(i = \overline{0, M} \right)$ маълум бўлганидан бирин-кетин барча $y_i^1 \left(i = \overline{1, M-1} \right)$ ва ҳаказоларни топиш мумкин. Шундай қилиб, $u^{(h)}$ функцияларни (2.1.11) формула бўйича ошкор равишда топиш мумкин. Шунинг учун ҳам (2.1.7), (2.1.9) схема ошкор дейилади.

Энди (2.1.8) тенгламани ўзгартириб, қуйидагича ёзамиз.

$$-\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{k+1} + \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} \right) y_i^{k+1} - \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{k+1} = y_i^k + \tau \varphi_i^{k+1}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad (2.1.12)$$

$$y_0^{k+1} = \mu_1^{k+1} \equiv \mu_1((k+1)\tau), \quad y_M^{k+1} = \mu_2^{k+1} \equiv \mu_2((k+1)\tau),$$

Барча $y_i^k \left(i = \overline{1, M-1} \right)$ маълум бўлганида бу муносабатлар $y_i^{k+1}, i = \overline{M-1}$ номаълумларга нисбатан чизик алгебраик тенгламалар системасидан иборат. Шунинг учун ҳам (2.1.9), (2.1.10) схема ошқормас дейилади. (2.1.12) системани қуйидагича ёзиш тмумкин.

$$\vec{A} \vec{y} = \vec{b}$$

бундай $\vec{y} = \{y_1^{\kappa+1}, \dots, y_{M+1}^{\kappa+1}\}$ -номаълум вектор,

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\tau}{h^2} & 1 + \frac{2\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \frac{1\tau}{h^2} & -\frac{\tau}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\tau}{h^2} & 1 + \frac{2\tau}{h^2} \end{bmatrix}$$

\vec{b} векторнинг координаталари эса

$$b_j = \begin{cases} y_1^\kappa + \tau\varphi_1^{\kappa+1} + \frac{\tau}{h^2} \mu_1^{\kappa+1}, & j=1, \\ y_1^\kappa + \tau\varphi_1^{\kappa+1}, & 2 \leq j \leq M-2, \\ y_{M-1}^\kappa + \tau\varphi_{M-1}^{\kappa+1} + \frac{\tau}{h^2} \mu_2^{\kappa+1}, & j=M-1 \end{cases}$$

A матрица уч диагалли бўлганлиги учун (2.1.13) ҳайдаш методи билан ечиш мумкин.

Энди (2.1.7), (2.1.8) ва (2.1.9), (2.1.10) схемалар ўз ичига олган умумий схемани кўриб чиқамиз.

Ушбу

$$\Delta v_1 = \frac{1}{h^2} (v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}), \quad \Delta u \Big|_{(x,t)} = \frac{1}{h_2} [(u+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)]$$

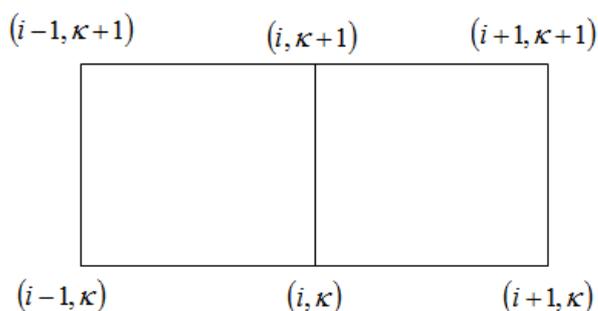
белгиланишни киритиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^\kappa}{\tau} = \tau \Delta y_i^{\kappa+1} + (1-\tau) \Delta y_i^\kappa + \varphi_i^\kappa, \quad \kappa = \overline{1, M-1} \quad (2.1.14)$$

Бу схемада $\tau \in [0,1]$ ўзгармас сон вазн дейилади. Хусусий ҳолда (2.1.14)дан $\tau=0$ га $\tau=1$ га (2.1.9) келиб чиқади. (2.1.14) ва (2.1.8) схема вазний схема дейилади. Бу схема фақат $\tau=0$ бўлгандагина ошкор бўлади. $0 < \tau < 1$ бўлганда эса ошқормас бўлади. (2.1.9), (2.1.10) схема бошқа ошқормас схемалардан фарқ қилиши учун соф ошқормас ошқормас

дейилади. Агар $\tau = \frac{1}{2}$ бўлса, биз қуйидаги олти нуқтали симметрик схема деб аталувчи схемани ҳосил қиламиз:

$$\frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^\kappa}{\tau} = \frac{1}{2}(\Delta y_i^{\kappa+1} - \Delta y_i^\kappa) + \varphi_i^\kappa \quad (2.1.15)$$



3-чизма

Бу схема 3-чизмадаги олти нуқтали андоза бўйича тузилади.

Энди (2.1.1)-(2.1.3) дифференциални (2.1.14) айирмалли схема билан аппроксимация қилганда ҳосил бўладиган хатоликни аниқлаймиз. Бунинг учун (2.1.14) масаланинг ечимини $y_i^\kappa = u(x_i, t_\kappa) + z_i^\kappa$ кўринишида ёзамиз, бу ерда $u(x, t)$ функция (2.1.1), (2.1.3) дифференциал масаланинг аниқ ечими. Хатолик учун қуйидаги тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$\frac{z_i^{\kappa+1} - z_i^\kappa}{\tau} = \tau \Delta z_i^{\kappa+1} + (1 - \tau) \Delta z_i^\kappa + z_i^\kappa, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad \kappa = \overline{0, N-1} \quad (2.1.16)$$

$$z_0^{\kappa+1} = z_N^{\kappa+1} = 0, \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \quad z_i^0 = 0, \quad i = \overline{0, M}$$

Унг томонга қатнамайдиган τ_i^κ тўрдаги функция қуйидагига тенг.

$$\tau_i^\kappa = -\frac{u(x_i, t_{i+1}) - u(x_i, t_\kappa)}{\tau} = \tau \Delta u|_{(x_i, t_{\kappa+1})} + (1 + \tau) \Delta u|_{(x_i, t_\kappa)} + \varphi_i^\kappa \quad (2.1.17)$$

Бу функция (2.1.1), (2.1.3) масала ечимидаги (2.1.14) схема аппроксимациясининг хатолигидир. Бу хатолик тартибини аниқлаш учун (2.1.17) ифодага қатнашадиган барча функцияларни $(x_i, t_\kappa + \tau/2)$ нуқта атрофида Тейлер қаторига ёямиз.

$$\frac{u(x_i, t_{\kappa+1}) - u(x_i, t_{\kappa})}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)} + \frac{\tau^2}{24} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \xi)} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)} + O(\tau^2);$$

$$\Delta u \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau)} = \Delta u \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)} + \frac{\tau}{2} \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)} + O(\tau^2) =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tau}{2} \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right] \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)} + O(\tau^2 + h^2).$$

Шунга ўхшаш

$$\Delta u \Big|_{(x_i, t_{\kappa})} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\tau}{2} \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right] \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)} + O(\tau^2 + h^2).$$

Бу ифодаларни (2.1.17) га қўйчак,

$$\tau_i^{\kappa} = \left[-\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \right] \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)} + \varphi_i^{\kappa} + O(\tau^2 + h^2).$$

ни ҳосил қиламиз. Энди

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

дан фойдалансак, у ҳолда

$$r_i^{\kappa} = \varphi_i^{\kappa} - f(x_i, t_{\kappa} + \tau/2) + \tau \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \Delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)} + O(\tau^2 + h^2)$$

келиб чиқади. Демак, $\varphi_i^{\kappa} = f(x_i, t_{\kappa} + \tau/2)$ деб олсак, у ҳолда $r_i^{\kappa} = O(\tau + h^2)$, агар $t \neq 0,5$ бўлса ва $r_i^{\kappa} = O(\tau^2 + h^2)$, агар $\tau = 0,5$ бўлса.

Шундай қилиб, (2.1.15), олти нуқтали симметрик схема $\left(\tau = \frac{1}{2} \right)$ учун

$$r_i^{\kappa} = O(\tau^2 + h^2).$$

Мисол $\tau = 0.5$ бўлган ҳол учун.

$u_i, j+1 = (1-2\tau)u_{ij} + \tau(u_{i+1}, j)$ (1) тенгламадан фойдаланиб,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = \sin \pi x \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (0 \leq t \leq 0,025)$$

масала йечилсин.

Ечиш. x аргумент бўйича қадам $x = 0,1$ бўлсин,

$$\tau = \frac{l}{h^2} = 0,5$$

Шунга кўра t аргумент бўйича қадам $l = 0,5h^2 = 0,005$ бўлади. Чегара қийматлари симметрик . Шу сабабли жадвалга $x = 0; 0,1; 0,2; \dots; 0,5$ га мос қийматларни киритамиз. Ҳисоблашлар

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}$$

формула бўйича бажарилади. Ҳисоблашлардан намуналар:

$j = 0$ учун

$$u_{11} = 0,5(u_{20} + u_{00}) = 0,5(0,5878 + 0) = 0,2939, u_{21} = 0,5(u_{30} + u_{10}) = 0,5(0,8090 + 0,3090) = 0,5590$$

Бу мисолга тўпламлар усули

ж	х \ τ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0	0	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000
1	0,005	0	0,2939	0,5590	0,7699	0,9045	0,9511
2	0,010	0	0,3795	0,5316	0,7318	0,8602	0,2045
3	0,015	0	0,2658	0,5056	0,6959	0,8182	0,8602
4	0,020	0	0,2528	0,4808	0,6619	0,7780	0,8182
5	0,025	0	0,2404	0,4574	0,6294	0,7400	0,7780
$\bar{u}(x, t)$	0,025	0	0,2414	0,4593	0,6321	0,7431	0,7813
$ \bar{u} - u $	0,025	0	0,0010	0,0019	0,0027	0,0031	0,0033

§ 2. 2. Икки қатламли айирмали схемаларнинг тўғрилигинини текшириш.

Қулайлик учун қуйидаги векторларни киритамиз.

$$\begin{aligned}\vec{y}_\kappa &= (y_0^\kappa, y_1^\kappa, \dots, y_M^\kappa), \quad \varphi^\kappa = (\varphi_1^\kappa, \dots, \varphi_M^\kappa)_1, \\ \vec{\mu}_1 &= (\mu_0^1, \mu_1^1, \dots, \mu_1^N), \quad \vec{\mu}_2 = (\mu_2^1, \mu_{21}^1, \dots, \mu_2^N)^T\end{aligned}$$

Ушбу $(x_0, t_\kappa), (x_1, t_\kappa), \dots, (x_M, t_\kappa)$ турғунлар тўпламини κ -катлами деймиз, шунинг учун ҳам \vec{y}_κ ва φ^κ векторларни u^h ва φ^h функцияларнинг κ -катламдаги қийматидаги қараш мумкин. Қуйидаги нормаларни киритамиз:

$$\begin{aligned}\|\vec{y}_\kappa\| &= \max_{0 \leq i \leq M} |y_i^\kappa|, & \|\varphi_\kappa\| &= \max_{0 \leq i \leq M} |\varphi_i^\kappa|, \\ \|\vec{\mu}_1\| &= \max_{0 \leq \kappa \leq M} |\mu_1^\kappa|, & \|\vec{\mu}_2\| &= \max_{0 \leq \kappa \leq M} |\mu_2^\kappa|.\end{aligned}$$

Т а ь р и ф. Айирмали схема C фазонинг тўрдаги номасида турғун дейилади, агар h ва τ га боғлиқ бўлмаган шундай ўзгармас c_1 сон топилиб, унинг учун

$$\max_{0 \leq \kappa \leq N} \|\vec{y}_\kappa\| = c_1 (\max) \left(\|\vec{\mu}_1\|, \|\vec{\mu}_2\|, \|y^0\| \right) = \max_{0 \leq \kappa \leq M} \|\varphi^\kappa\| \quad (2.2.1)$$

баҳо ўринли бўлса.

Энди (2.1.7), (2.1.8) айирмали схеманинг тўғрилигини текширамыз.

1-теорема. Агар $\tau \leq h^2/2$ бўлса у ҳолда (2.1.7), (2.1.8) айирмали схема C фазонинг турдаги нормасида турғундир.

Исботи. (2.1.7) тенгламани қуйидаги кўринишга ёзиб оламыз.

$$y_i^{\kappa+1} = (1-2\rho)y_i^\kappa + \rho y_{i-1}^\kappa + \rho y_{i+1}^\kappa + \tau \varphi_i^\kappa, \quad \text{бунда } \rho = \tau/h^2. \quad \text{Агар } \max_i |y_i^{\kappa+1}| \text{ га ички}$$

$(i_0, \kappa+1)$ нуқтада эришилса, у ҳолда

$$\max_i |y_i^{\kappa+1}| = \max_i |(1-2\rho)y_i^\kappa + \rho y_{i-1}^\kappa + \rho y_{i+1}^\kappa + \tau \varphi_i^\kappa| \leq (1+2\rho)\|\vec{y}_\kappa\| + 2\rho\|\vec{y}_\kappa\| + \tau\|\varphi^\kappa\| = \|\vec{y}_\kappa\| + \tau\|\varphi^\kappa\|$$

Акс ҳолда

$$\max_i |y_i^{\kappa+1}| \leq \max_i (|\mu_1^{\kappa+1}|, |\mu_2^{\kappa+1}|) \leq \max(\|\vec{\mu}_1\|, \|\vec{\mu}_2\|)$$

Демак,

$$\|y_i^{k+1}\| \leq \max(\|\mu_1\|, \|\mu_2\|, \|\bar{y}_k\| + \tau\|\varphi^k\|) \quad (2.2.2)$$

Энди (2.1.7), (2.1.8) масаланинг ечимини

$$y^k = \mathcal{G}^k + w^k$$

кўринишда оламиз, бунда \mathcal{G}^k (2.1.7), (2.1.8) масаланинг ўнг томони $\varphi^{k=0}$ бўлгандаги ечими, w^k эса (2.1.7), (2.1.8) масаланинг чегарвий ва бошланғич шартини нолга тенг бўлган ечими (2.12.2) га кўра \mathcal{G}^k учун қуйидаги кўринишни ҳосил қиламиз.

$$\|\bar{\mathcal{G}}^{k+1}\| \leq \max(\|\bar{\mu}_1\|, \|\bar{\mu}_2\|, \|\bar{\mathcal{G}}^k\|) \leq \dots \leq \max(\|\bar{\mu}_1\|, \|\bar{\mu}_2\|, \|\bar{\mathcal{G}}^0\|)$$

Иккинчи томондан w^k учун (2.2.2) га кўра

$$\|\bar{w}^{k+1}\| \leq \|\bar{w}^k\| + \tau\|\varphi^k\| \leq \|\bar{w}^{k-1}\| + \tau(\|\bar{\varphi}^k\| + \|\bar{\varphi}^{k+1}\|) \leq \dots \leq \sum_{j=0}^k \tau\|\bar{\varphi}^j\| \leq T \max_{0 \leq j \leq N} \|\bar{\varphi}^j\|,$$

Бу ерда $(k+1)\tau \leq T$ дан фойдаландик. Шундай қилиб қуйидагига эга бўламиз.

$$\begin{aligned} \|\bar{y}_k\| &\leq \|\bar{v}^k\| + \|\bar{w}^k\| \leq \max(\|\bar{\mu}_1\|, \|\bar{\mu}_2\|, \|\bar{v}^0\|) + T \max_{0 \leq j \leq N} \|\bar{\varphi}^j\| \leq \\ &\leq c_1 \left[\max(\|\bar{\mu}_1\|, \|\bar{\mu}_2\|, \|\bar{v}^0\|) + T \max_{0 \leq j \leq N} \|\bar{\varphi}^j\| \right] \end{aligned}$$

бунда $c_1 = \max(1, T)$. Бу тенгсизлик барча $k, 0 \leq k \leq N$ учун ўринли, демак, айирмали схема S фазонинг турдаги нормаси учун турғун экан. Терема исботланади.

Бундан кўрамикки, (2.1.14) схема турғун бўлиши учун $|\lambda_n| \leq 1$ тенгсизлик бажарилиши керак. Демак, биз σ ва τ ларга нисбатан шундай шартларни топишимиз керакки,

$$-1 \leq \frac{1 - \tau(1 - \alpha)\mathcal{G}_n}{1 + \tau\alpha\mathcal{G}_n} \leq 1$$

Тенгсизликлар ўринли бўлсин. Агар $\tau > 0$ бўлса у ҳолда $\mathcal{G}_n > 0$ бўлганлиги учун юқоридаги тенгсизликлар $\mathcal{G}_n(1 - 2\sigma) < 2$ муносабат

билан тенг кучли бўлади. Агар $\tau \geq \frac{1}{2}$ бўлса, охириги тенгсизликлар барча $\tau > 0$ лар учун бажарилади. Агар $\tau < \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда

$$\tau \leq \frac{2}{(1-2\sigma)\max v_n} \leq \frac{h^2}{2(1-2\sigma)} \quad (2.2.4)$$

бўлиши қилиб, (2.1.14), (2.1.8) айирмали схема дастлабки маълумотларга нисбатан турғунлигининг етарли шартларини ўрнатдик. Жумладан $4^k = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ бўлса, у ҳолда $\sigma \geq \frac{1}{2}$ бўлганда (2.1.14), (2.1.8) айирмали схема шартсиз равишда турғун бўлиб, $\sigma < \frac{1}{2}$ бўлганга (2.1.14), (2.1.8) схема (2.2.4) шарт бажарилганда турғун, яъни шартли равишда турғун бўлади.

Агар дифференциал оператор ёки чегаравий шартлар биз қараган (2.1.1) – (2.1.3) чегаравий масалага нисбатан мураккаб бўлса, у ҳолда айирмали масала ҳам мураккаб бўлади ва унинг турғунлигини максимум принципи ёки Фурье методи билан текшириши маълум қийинчиликлар туғдиради ёки умуман мумкин бўлмайди. Бундай ҳолда энергетик баҳолар методидан фойдаланилади.

Юқоридаги \vec{y}^k орқали унинг k -катламдаги қийматини белгилаймиз, яъни $\vec{y}^k = (0, y_i^k, \dots, y_{M-1}^k, 0)$ яна ушбу

$$\vec{y}_i^k = \frac{\vec{y}^{k+1} - \vec{y}^k}{\tau} \quad (2.2.5)$$

Белгилашни киритамиз. Бунда биз қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\vec{y}^{k+1} = \frac{1}{2} (\vec{y}^{k+1} + \vec{y}^k) + \frac{\tau}{2} y_i^k, \quad \vec{y}^k = \frac{1}{2} (\vec{y}^{k+1} + \vec{y}^k) - \frac{\tau}{2} y_i^k$$

Белгилашни киритамиз. Бунда биз қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$y_i^{k+1} = \frac{1}{2} (y_i^{k+1} + y_i^k) + \frac{\tau}{2} y_i^k, \quad y_i^k = \frac{1}{2} (y_i^{k+1} + y_i^k) - \frac{\tau}{2} y_i^k \quad (2.2.6)$$

Энди вектор учун w_2^1 фазонинг тўрдаги скалвр кўпайтмасини ва нормасини киритамиз.

$$(\vec{v}, \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^{\mu-1} h v_i \vec{\omega}, \quad \|\vec{v}\|^2 = (\vec{v}, \vec{v})$$

$$\|\vec{v}\|_1^2 = \sum_{i=0}^{M-1} h \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)^2$$

Равшанки, (2.1.14) тенгламанинг куйидаги кўринишда ёзиш мумкун.

$$\vec{y}_t^{\kappa} = t \Delta \vec{y}^{\kappa+1} + (1-t) \Delta \vec{y}^{\kappa} + \vec{\varphi}$$

Бу тенгламанинг (2.2.5) ва (2.2.6) тенгликлар асосида куйидагича ёзиб оламиз;

$$\vec{y}_e^{\kappa} = \frac{1}{2} \Delta \left(\vec{y}^{\kappa+1} + \vec{y}^{\kappa} \right) + \tau(t-0,5) \Delta \vec{y}_t^{\kappa} + \vec{\varphi}$$

Охирги тенгликларнинг ҳар иккала томонинг $2\tau \vec{y}_t^{\kappa} = 2 \left(\vec{y}^{\kappa+1} - \vec{y}^{\kappa} \right)$

векор билан скаляр кўпайтирамиз. Натижада куйидагилар ҳосил бўлади:

$$2\tau \left\| \vec{y}_t^{\kappa} \right\|_1^2 = \left(\Delta \left(\vec{y}^{\kappa+1} - \vec{y}^{\kappa} \right), \vec{y}^{\kappa+1} - \vec{y}^{\kappa} \right) + 2\tau^2 (\sigma - 0,5) \left(\Delta \vec{y}_t^{\kappa}, \vec{y}_t^{\kappa} \right) + 2 \left(\vec{y}_t^{\kappa}, \vec{\varphi} \right). \quad (2.2.7)$$

$$\text{Ушбу } \sum_{i=1}^{M-1} h \cdot \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{h} b_i = a_M b_M - a_1 b_0 + \sum_{i=1}^M h \cdot \frac{b_i - b_{i-1}}{h} a_i$$

қисмий йиғим формуласида $a_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$, $b_i = v_i$ деб $b_0 = v_0 = 0$ $b_m = v_m = 0$

тенгликни ҳисобга оламиз:

$$(\Delta V, V) = \sum_{i=1}^{\mu-1} h \cdot \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h} = - \sum_{i=1}^{\mu-1} h \left(\frac{V_i - V_{i-1}}{h} \right)^2 = - \|\vec{V}\|_1^2$$

ни ҳосил қиламиз. Энди Δ операторнинг симетриклигидан фойдаланиб,

$$\left(\Delta \vec{y}^{\kappa+1} + \vec{y}^{\kappa}, \vec{y}^{\kappa+1} - \vec{y}^{\kappa} \right) = \left(\Delta \vec{y}^{\kappa+1}, \vec{y}^{\kappa+1} - \vec{y}^{\kappa} \right) - \left(\Delta \vec{y}^{\kappa}, \vec{y}^{\kappa+1} - \vec{y}^{\kappa} \right) = \left\| \vec{y}^{\kappa+1} \right\|_1^2 - \left\| \vec{y}^{\kappa} \right\|_1^2$$

тенгликларга эга бўламиз охирги иккита муносабатларда фойдаланиб (2.2.7) ни куйидагича ёзиб оламиз:

$$2\tau \left\| \vec{y}_t^{\kappa} \right\|_1^2 + \left\| \vec{y}^{\kappa+1} \right\|_1^2 + 2\tau^2 (t-0,5) \left\| \vec{y}_t^{\kappa} \right\|_1^2 = \left\| \vec{y}^{\kappa} \right\|_1^2 + 2\tau \left(\vec{y}_t^{\kappa}, \vec{\varphi} \right). \quad (2.2.8)$$

Бу тенглик W_2^1 фазонинг тўрдаги нормаси бўйича энергетик айният дейилади.

Энди ушбу

$$|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

ε тенгсизликда $a = \|y_t^{\rightarrow \kappa}\|$, $b = \|\varphi^{\rightarrow \kappa}\|$ доеб олиб, $(y_t^{\rightarrow \kappa}, \varphi^{\rightarrow \kappa})$ скаляр кўпайтма учун куйидаги

$$\|y_t^{\rightarrow \kappa}, \varphi^{\rightarrow \kappa}\| \leq \varepsilon \|y_t^{\rightarrow \kappa}\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi^{\rightarrow \kappa}\|^2.$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бунинг натижасида (2.2.8) дан куйидаги баҳо ҳосил бўлади;

$$2\tau \left[(1-\varepsilon) \|y_t^{\rightarrow \kappa}\|^2 + \tau(\sigma-0,5) \|y^{\rightarrow \kappa+1}\|_1^2 \right] + \|y^{\rightarrow \kappa+1}\|_1^2 \leq \|y^{\rightarrow \kappa}\|_1^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi^{\rightarrow \kappa}\|^2 \quad (2.2.8)$$

Ҳозиргача ε ихтиёрий сон эди, энди $0 < \varepsilon \leq 1$ деб оламиз. У ҳолда $\sigma \geq 0,5$ шарт бажарилганда катта қавслар ичидаги ифода манфи бўлмайди. Шунинг учун ҳам (2.2.9) дан ушбу

$$\|y^{\rightarrow \kappa+1}\|_1^2 \leq \|y^{\rightarrow \kappa}\|_1^2 \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi^{\rightarrow \kappa}\|^2 \quad (2.2.10)$$

баҳо қилиб чиқади..

кўрсатиш мумкинки $\tau < 0,5$ бўлганда (2.2.10) баҳо ўринли бўлиши учун

$$\tau \leq \frac{(1-\varepsilon)p^2}{4(0,5-t)} \quad (2.2.11)$$

Шарт ба жарилиши керак эди (2.2.11) баҳони кетма-кет қўллаб

$$\|y_1^{\rightarrow \kappa}\|_1^2 \leq \|y^{\rightarrow 0}\|_1^2 + \sum_{j=0}^{\kappa-1} \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\varphi^{\rightarrow j}\|^2, \quad n\tau \leq T$$

баҳони ҳосил қиламиз. Ўнг мамонлдаги йиғинди.

$\frac{1}{2} \int_0^{\kappa\tau} \|f(t)\|^2 dt$ интеграл учун квадрат йиғинди бўлганлиги сабабли шундай

C_1 топиладики,

$$\sum_{j=0}^{\kappa-1} \frac{\tau}{2\varepsilon} \left\| \vec{\varphi}^j \right\|^2 \leq C_1 \int_0^{\tau} \|f(t)\|^2 dt$$

тенгсизлик бажарилади.

бу ерда
$$\|f(t)\| = \left(\int_0^1 f^2(x,t) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Демак,
$$\left\| \vec{y}^{\kappa^2} \right\| \leq \left\| \vec{y}^0 \right\| + C_1 \int_0^{\tau} \|f(t)\|^2 dt.$$

Бу тенгсизлик эса (2.1.14), (2.1.8) оширмалари схема $\tau \geq 0,5$ бўлганда шартсиз равишда турғун бўлади, $\tau > 0,5$ бўлганда τ ва h қадамлар орасида (2.2.11) шарт бажарилгандагина турғун бўлади.

Биз бошланғич шартлар ва ўнг томонга нисбатан турғунланган масаласини кўриб чиқиб, чегаравий шартга нисбатан турғунланган масаласига эътибор бермадик. Агар $\mu(t)$ ва $\mu_2(t)$ формулалар дифференциаловчи бўлса, у ҳолда чегаравий шартларни нолга айлантириш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам, $f(x,t) = \mu_1(t) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \mu_2(t) \frac{x}{\ell}$ формулани олсак, у ҳолда $V(x,t) = u(x,t) - F(x,t)$ формула (2.1.1) тенгламанинг ўнг томони $\left(f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} F(x,t) \right)$ дан иборат бўлиб, нолни чегаравий ва бошланғич шартларини қаноатлантирадиган ечимини беради.

Шунга ўхшаш бир жинсли бўлмаган (2.1.1 4), (2.1.8) айирмалари масалани бир жинсли чегаравий шартли масалага келтириш мумкин.

Фараз қилайлик, y_i^{κ} айирмалари масаланинг ечими бўлсин. Қуйидаги V_i^{κ} тўр формуласини киритамиз.

$$V_i^{\kappa} = \begin{cases} y_i^{\kappa} & \text{агар } 1 \leq i \leq m-1 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } i = 0 \text{ ва } i = m \text{ бўлса} \end{cases}$$

Бу формула чегаравий шартлари бир жинсли бўлган ушбу айрмалли масалани қаноатлантиради.

$$\frac{V_i^{\kappa+1} - v_i^\kappa}{\tau} = \iota \Delta v_i^{\kappa+1} (1 - \iota) \Delta V_i^\kappa + \psi_i^\kappa, \quad i = \overline{1, \mu-1},$$

$$V_i^0 = V(ih), \quad V_0^\kappa = 0 \quad V_\mu^\kappa = 0,$$

Бунда

$$\psi_i^\kappa = \begin{cases} \varphi_i^\kappa - \frac{1-\iota}{h^2} - \frac{\iota}{h^2} \mu_i^{\kappa+1}, & \text{агар } i=1 \text{ булса,} \\ \varphi_i^\kappa, & \text{агар } 2 \leq i \leq \mu-2 \text{ бўлса,} \\ \varphi_{\mu-1}^\kappa - \frac{1-\iota}{p^2} \mu_2^\kappa - \frac{\iota}{h^2} \mu_2^{\kappa+1}, & \text{агар } i = \mu-1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Шундай қилиб, тенгламанинг ўнг томонини бироз ўзгартириб, бир жинсли бўлмаган (2.1.1 4) айирмалли масалани чегаравий шартлари бир жинсли бўлган айирмалли масалага келеириш мумкин.

22. Яқинлашиш тезлигини баҳолаш. Фараз қилайлик (2.1.1) дефференциал масаланинг ечими бўлиб, y_i^k эса (2.1.14), (2.1.8) айирмалли масаланинг ечими бўлсин $r^k = \{r_i^k\}$ орқали эса аппроксимация=хатолигини белгилаймиз. Агар биз $u^{(h)}$ орқали аниқ ечимининг турдаги қийматини белгиласак, у ҳолда $z = u^{(h)} - y_i^k$ айирмасини тўр устидаги хатолиги бўлиб,

$$\frac{z_i^{k+1} - z_i^k}{\tau} = \iota \Delta z_i^k + (1 - \iota) \Delta z_i^k + \varphi_i^k - f_i^k + z_i^k,$$

$$i = 1, 2, \dots, \mu - 1$$

тенгламани қаноатлантиради. Агар $\varphi_i^k = f\left(x, t_k + \frac{\tau}{2}\right)$ деб олсак, у ҳолда z_i^k ушбу

$$\frac{z_i^{k+1} - z_i^k}{\tau} = \iota \Delta z_i^{k+1} + (1 - \iota) \Delta z_i^k + \tau_i^k, \quad i = \overline{1, \mu-1},$$

$$z_i^0 = u_0^\kappa = u_\mu^\kappa = 0.$$

масалани ечими бўлади. Агар қаралаётган масала турғун бўлса, у ҳолда (2.2.11) баҳо ўринли бўлади. Бундан эса

$$\|z^k\|_1^2 \leq \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\vec{\tau}j\|^2 \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tau}{2\varepsilon} \|\vec{\tau}j\|^2 \leq \frac{T}{2\varepsilon} 0 \leq j \leq N-1 \|\vec{\tau}\|^2.$$

б) Айирмали схема куришнинг баланс методи. Иссиқлик ўтказувчанлик, диффузия, тебраниш, ва шуниндек турли хил физик жараёнлар иссиқлик, масса, ҳаракат миқдори энергия ва ҳокозо, сақланишнинг интеграл формадаги қонунлари билан тоифаланади. Математик физиканинг дифференциал тенгламаларини чиқариш кичик ҳажми учун сақланиш қонунини ифодаловчи муайян интеграл муносабатдан ишни бошлашади. Тенгламада қатнашадиган функцияларнинг барча керакли ҳосилаларини мавжуд деб фараз қилиб ва баланс тенглама ҳосил қилинади. Чекли айирмали методнинг физик маъноси шундан иборатки, биз узлуксиз муҳитдан унинг қандайдир дискрет моделига ўтамиз. Табиийки, бундай ўтишда физик жараённинг асосий хоссалари сақланишини талаб қилиш керак. Бундай хоссалар қаторида, биринчи навббатда, сақланиш қонунлари туради. Тўр соҳада сақланиш қонунларини ифодаладиган айирмали схемалар консерватив схемалар дейилади. Консерватив айирмали схемаларни ҳосил қилиш учун тўр соҳада элементар ҳажм учун ёзилган баланс тенгламаларида қатнашадиган интегралларни ва ҳосилаларни тақрибий айирмали схемаларни ҳосил қилишнинг бундай усули баланс методи ва интеграл-интерполяцион метод дейилади. Баланс методини қўллашга мисол сифатитида иссиқлик ўтказувчанликнинг қўллашга мисол сифатида иссиқлик ўтказувчанликнинг стационар тенгламаси учун 1-чегаравий масалани қараймиз.

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u + f(x) = 0 \quad 0 < x < 1, \quad (2.2.12)$$

$$u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \quad (2.2.13)$$

бунда $p(x), q(x), f(x)$ лар етарлича силлиқ функциялар бўлиб, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$ шартларини қаноатлантиради, α ва β эса берилган сонлар. Бу шартлар бажарилганда (2.2.12), (2.2.13) чегаравий

масала ягона етарлича силлиқ $u(x)$ ечимига эга бўлади. Айирмали схема куриш учун $[0,1]$ кесмада мунтазам

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1\}$$

тўрини оламиз. Қуйидаги

$$x_{i \pm \frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{h}{2}, \quad \omega(x) - p(x) \frac{d}{dx} u(x), \quad \omega_{i \pm \frac{1}{2}} = \omega \left(x_{i \pm \frac{1}{2}} \right)$$

белгилашни киритиб, (2.2.12) тенгламани $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$ ораликда

интеграллаймиз, натижада

$$\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx = 0 \quad (2.2.14)$$

Тенг ламани хосил қиламиз, у $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$ кесмада иссиқнинг баланс

тенгласини аниқлайди. Энди:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx.$$

Интегрални учун $u_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx$ тарқриби қиймат билан алмаштириб, қўядигон

белгилашларни киритамиз:

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx. \quad (2.2.15)$$

Натижада (2.2.14) тенглама

$$\frac{\omega_{i+\frac{1}{2}} - \omega_{i-\frac{1}{2}}}{h} - d_i u_i + \varphi_i = 0 \quad (2.2.16)$$

Кўринишига эга бўлад. Энди $\omega_{i \pm \frac{1}{2}}$ ни $u(x)$

Нукталар даги қийматлари орқали ифодалаймиз. Бунинг учун $du/dx = \omega(x)/p(x)$ ифодани $[x_{i-1}, x_i]$ кесмада интеграллаймиз. Натижада

$$u_{i-1} - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\omega(x)}{p(x)} dx \approx \omega_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \quad (2.2.17)$$

Ҳосил бўлади агар.

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} \quad (2.2.18)$$

Деб белгилаб олса, (2.2.17) дан қуйидаги тақрибий тенгликларни ҳосил қиламиз

$$\omega_{i-\frac{1}{2}} = a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad \omega_{i+\frac{1}{2}} = a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}.$$

бу ифодаларни (2.2.16) тенгламалар қўйиб изланоётган функциянинг x_{i-1}, x_i, x_{i+1} нукталаридаги қийматини ўз ичига олади ушбу

$$\frac{1}{h^2} [a_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - a_i(u_i - u_{i-1})] - d_i u_i + \varphi_i = 0 \quad (2.2.19)$$

Айрилмали тенгламалар эга бўламиз (2.2.19) тенгламани ω_h тўр соҳанинг барча ички $(\cdot)/u$, яъни $i=1,2,\dots,N-1$ учун ёзсак, у ҳолда $N+1$ та u_0, u_1, \dots, u_N номаълумли $N-1$ тенгламалар системасига эга бўламиз. Иккига етмаган тенгламанинг (2.2.13) дастлабки шартдан ҳосил қиламиз:

$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta. \quad (2.2.20)$$

айирмали масаланинг ечимини дифференциал масаланинг ечимидан фарк қилиш учун уни y орқали белгилаймиз, демак $y_i = y(x_i)$, $x_i \in \omega_h$. энди. (2.2.19) ва (2.2.20) тенгламаларни. Бирлаштирамиз (2.2.12), (2.2.13) чегаравий масалалар учун қуйидаги айрилмали схемага эга бўламиз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h^2} [a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})] - d_i y_i + \varphi_i &= 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 &= \alpha, \quad y_N = \beta. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.21)$$

Бу системани ҳайдаш методи билан ечиш маъсадга мувофиқ бўлади. Бунинг (2.2.21) системани ыуйидаги кщринишда ёзиб оламиз:

$$A_i Y_{i-1} - C_i Y_i + B Y_{i+1} = -F_i, \quad C = 1, 2, \dots, N-1 \quad Y_0 = \alpha, \quad Y_N = \beta$$

бунди

$$A_i = a_{i-1}, \quad B_i = a_{i+1}, \quad C_i = a_i + a_{i+1} = h^2 d, \quad F_i = h^2 \varphi_i.$$

Чегаравий масалалар коэффициентларига қўйилган шартлардан $a_i > 0$ ва $d_i \geq 0$ келиб чиқади, бундан эса $C_i \geq A_i + B_i$ ни сони ҳайдаш методнинг турғунлик шартини ҳосил қилдик. Демек (2.2.21) айрилмали масалалар ягона ечимга эга ва бу ечимнинг ҳайдаш методи билан топиш мумкун.

Энди. (2.2.21)г дифференциал тенгламани (2.2.21) айрилмали тенглама билан алмаштираганда юзага келмайдиган аппроксимация хатолигин текшираемиз $Lu(x)$ ва (2.2.21) тенгламанинг чап томонини $L_h Y_i$ орқалий белгилаймиз, яъни.

$$Lu(x) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u(x) + f(x),$$

$$L_h y_i = \frac{1}{h^2} [a_{i+1}(Y_{i+1} - Y_i) - a_i(Y_i - Y_{i-1})] - d_i Y_i + \varphi_i.$$

Фароз қилайлик, $v_{(x)}$ етарлича силлиқ функция бўлиб $v_i = v(x_i)$ $y = \omega_h$ тўрдиги қиймати бўлсин. Эди

$$L_h v_i = \frac{1}{h_i} [(v_i - v) - a_i(v_i - v_{i-1})] - d_i Y_i + \varphi_i.$$

Баҳо ўринли эканлигини курсатамиз. Бунинг учун $L_h V_i$ оператор таркибидаги $V_{i\pm 1} = V(x_i \pm h)$ ни x_i нукта атрофид жойлар қаторига ----

Рав ишда

$$\frac{v_{i\pm 1} - v_i}{\pm} = v_i \pm \frac{h}{2} v' V_i + \frac{h^2}{6} v'' + O(h^3)$$

Демак

$$L_h v_i = \frac{a_i - a_i}{h} v_i' + \frac{a_{i+1} + a_i}{2} v_i'' + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6} v_i - d_i v_i + \varphi_i + O(h^2)$$

Иккинчи томондан

$$Lu(x_i) = p(x_i)v_i'' + p'(x_i)v_i' - q(x_i)v_i + f(x_i)$$

Бу муносабатлардан

$$\begin{aligned} L_h v_i - Lv(x_i) = & \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - p'(x_i) \right) V_i' + \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - p(x_i) \right) V_i'' + \\ & + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6} V_i''' - (d_i - q(x_i)) V_i + (\varphi_i - f(x_i)) + O(h^2) \end{aligned}$$

ни ҳосил қиламиз. (2.2.22) шарт бижарилиши учун

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = p'(x_i) + O(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = p(x_i) + O(h^2), \quad (2.2.23)$$

$$\varphi_i = f(x_i) + O(h^2), \quad d_i = q(x_i) + O(h^2) \quad (2.2.24)$$

тенгликлар ўринли бўлиши керак

Энди $K(x) = \frac{1}{p(x)}$ деб белгилаймиз ва $\kappa(x)$ ни $x_{i-\frac{1}{2}}$ нуқта атрофида Тайлер

каторига ёзамиз натижада

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \kappa(x) dx = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} & \left[\kappa_{i-\frac{1}{2}} + \left(x - x_{i-\frac{1}{2}} \right) \kappa'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(x - x_{i-\frac{1}{2}} \right)^2 \kappa''_{i-\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \left(x - x_{i-\frac{1}{2}} \right)^3 \kappa'''_{i-\frac{1}{2}} + O(h^4) \right] dx = \kappa_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{24} \kappa''_{i-\frac{1}{2}} + O(h^3) \end{aligned}$$

ҳосил бўлади. Демак,

$$a_i P_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24} \frac{x_{i-0,5}}{\kappa_{i-0,5}} + O(h^4) = P_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24} \frac{x_i''}{\kappa_i} + O(h^3)$$

Шунга ўхшаш

$$a_{i+1} = P_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24} \frac{\kappa_i''}{\kappa_i} + O(h^3)$$

Бунадан эса

$$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = \frac{P_{i+\frac{1}{2}} + P_{i-\frac{1}{2}}}{2} + O(h^2) = P_i + O(h^2), \quad \frac{a_{i+1} - a_i}{h} = \frac{P_{i+\frac{1}{2}} - P_{i-\frac{1}{2}}}{h} + O(h^2) = P'(x_i) + O(h^2)$$

ларга эга бўламиз, булар эса (2.2.22)ни исботлайди. (2.2.24)

тенгликларнинг бажарилишни кўрсатиш қийин эмас, ҳақиқатан ҳам, d_i ва

φ_i ни мос равиш да $q(x_i)$ ва $f(x_i)$ билан алмаштириш (2.2.25) интегралини ўрта тугунли тўғри бурчакли тўртбурча формуласи билан ҳисоблашдан иборадир мълумки, бундай формуланинг қолдиқ ҳади $O(h^2)$. Шун дай қилиб, биз (2.2.23), (2.2.24) тенгликларни ваш у билан бирга (2.2.22) баҳони кўрсатдик. Бу эса $L_h Y_i$ оператор $Lu(x)$ ни (2.2.12), (2.2.13) масаланинг ечимида h га нисбаттан иккичи тартибли аппроксимация қилишшини кўрсатади.

1-эслатма (2.2.21) айирмали схемани амал да тўплаш, унинг коэффициентларини топиш учун (2.2.15) ва (2.2.18) интегралларни аниқ ҳисоблаш шарт эмас. Коэффициентларни топиш учун $O(h^2)$ ёки бундан юқори аниқликка эга бўлган квадратур формулалар билан тақрибий ҳисоблаш мумкун. Масалан: (2.2.15) ва (2.2.18) интегралларга тўғри тўртбурчаклар формеласини кўлласак, коэффициентлар куйидагича топилади:

$$d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i), \quad a_i = p\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

Агар трапециялар формуласини кўласак,

$$a_i = \frac{2p_i p_{i-1}}{p_i + p_{i+1}}, \quad d_i = \frac{q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad \varphi_i = \frac{f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}}{2}$$

Ларни ҳосил қиламиз

Кўрсатишимиз мумкилики, (2.2.21) айирмали масалаларнинг ечимлари кетма-кетликлари $\{Y_h(x_i)\}$ $h \rightarrow 0$ да $C(\omega_h)$ тўрли фазода дастлабки (2.2.12), (2.2.13) дифференциал масалларнинг $u(x)$ ечимига иккинчи турлар билан яқинлашади, бошқача қилиб айтганда

$$\|Y_m - u\|_{C(\omega_h)} = \max_{x_i \in \omega_h} |Y_n(x_i) - u(x_i)| \leq \mu h^2.$$

Баҳо ўринли бўлади.

2- эслатма: баланс методини бошқа чегаравий масалалари учун ҳам тўп лаш мумкин бундан тақари, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, формулалар узилишига эга бўлган ҳолда ҳам айрилмали схеманинг яқинлаштири шни текшириш учун коэффициентларни (2.2.15) ва (2.2.18) интеграллар орқали ифодалаш катта аҳамиятга эга.

§ 2.3. Тежамкор айрилмали схемалар.

Фараз қилайлик чегараси Γ бўлган $G = \{0 < x_1, x_2 < 1\}$ соҳада ушбу икки ўлчовли иссиқлик ўтказувчан V тенгламанинг ечиш талаб килинсин:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad x(c x_1, x_2) \in G.$$

$$u(x_1 t) = \mu(x_1 t), \quad x \in \Gamma, \quad 0 < t < T, \quad (2.3.1)$$

$$u(x_1 0) = u_0(x) \quad x \in G + \Gamma.$$

Бунинг учун вақт ва фазо бўйича қуйидаги туртларни киритамиз:

$$\omega_\tau = \left\{ t_k = x\tau, \kappa = \overline{0, N-1}, \quad N\tau = 1 \right\}$$

$$G_h = \left\{ x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j}), x_{1i} = ih, x_{2j} = jh, \quad j = \overline{0, N}, hN = 1 \right\}$$

G_h турнинг ички нукталар тўплами $(i, j = 1, \dots, N-1)$ ни Ωh орқали ва G_h нинг чегарасини Γ_h орқали белгилаймиз

Юқорида бир ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини ечишда ошикор ва ошиқормас схемаларни қўллаган эдик. Бу йерда ҳам шундай схемаларни киритамиз. Бунинг учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta_1 y_{ij} = \frac{1}{h^2} (y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}) \quad (2.3.2)$$

$$\Delta_2 y_{ij} = \frac{1}{h^2} (y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}) \quad (2.3.3)$$

$$\Delta_2 y_{ij} = \Delta_1 y_{ij} + \Delta_2 y_{ij} \quad (2.3.4)$$

Бу белгилашда ошикор схема қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \frac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k}{\tau} = \Delta y_{ij}^k, & x_{ij} \in \omega_h, \quad t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^k = \mu(x_{ij}, t_{k+1}), & x_{ij} \in \Gamma_h, \quad t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^0 = u_0(x_{ij}), & x_{ij} \in G_h, \quad k = 0. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Ошиқормас схема эса қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} \frac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k}{\tau} = \Delta y_{ij}^k, & x_{ij} \in \omega_h, \quad t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^{k+1} = \mu(x_{ij}, t_{k+1}), & x_{ij} \in \Gamma_h, \quad t_k \in \omega_\tau, \\ y_{ij}^0 = u_0(x_{ij}), & x_{ij} \in G_h, \quad k = 0. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Даслабки ва чегаравий шартларнинг фойдаланиб, (2.3.5) айирмали схеманинг ечими навбатдаги қатламида

$$y_{ij}^{k+1} = y_{ij}^k + \tau \Delta y_{ij}^k, \quad \kappa = \overline{0, N-1}, \quad x_{ij} \in \omega_h$$

Ошкор формула ёрдамида топилади. Бу ошкор схеманинг устунларидир. Аммо бу схеманинг муҳим камчилиги унинг шартли равишда турғунлигидир. Кўрсатиш мумкинки, (2.3.5) схема тўрғун бўлиши учун τ бўйича қадим $\tau \leq \frac{1}{4}h^2$ шартни қаноатлантириш керак. Агарда толиш учун $N = 40.000$ та қадам бажарилиши зарур. Агар фазовий ўзгарувчи x_1, x_2, \dots, x_p ларнинг сони P та булса, у ҳолда ошкор схема турғун булиш учун $\tau \leq \frac{1}{2^p}h^p$ тенгсиз бажрилиш $x-k$.

Шу сабабларга кура параболик тенгламаларни ечишда ошкор схема кам ишлатилади. Биз қийинги бандди кўрамизки, гиперболик тенглами учун ахвол бошқача бўлиб, ошкор схемада $t = O(h)$ бўлганда ҳам турғунлик сақланади.

Энди ошкормас схемани кўриб чиқайлик, (2.3.6) схемада τ ва h ни қандай олсак, ҳам у турғун бўлаверади. Бу схеманинг камчилиги шундан иборатки, ҳар бир вақт қатламида

$$\begin{aligned} y_{ij}^{k+1} - \tau \Delta y_{ij}^{k+1} &= y_{ij}^k, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_{ij}^{k+1} &= \mu_{ij}^{k+1}, \quad x_{ij} \in \tilde{A}_h \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

тенгламалар системаларсини ечиш лозим. Бу системади y_{ij}^{k+1} номаълум сони $(N+1)^2$ та. Агар бу системанинг Гаусс методи билан ечадиган бўлсак, $O(N^6)$ та арифмичек амал бажариш, бундай системани автнинг ҳар бир

қатламида ечиш лозим, бу эса ҳисоблаш ишини яна ҳам кўпайтириб юборади.

Фазовий ўрарувчанликнинг сони иккита ёки кўп бўлганда (2.3.7) система матрицасининг кўринишини ҳисобга олган ҳолда системани ечиш методларини кўриш мақсадга мувофиқдир. Бу методларнинг бири – Фурьенинг тез алмаштириши билан 2.2. а да танишган эдик Бу методлар кўп ўлчовли масалаларни бир ўлчовли масалалар кетма–келигига келтириб ечишга асосланган. Бундай келтириш натижасида шундай оширилмали методлар вужудга келадик, улар ошқор ва ошқорамас схемаларнинг икки яхши хусусийяти: абсолют турғун ва ечишнинг соддалигини ўзида мужассалаштиради. Бу метод эллигинчи йиллардан бошлаб ҳар хил номлар ўзгарувчан йуналишли методлари, каср қадамли методлар, лакал бир ўлчовли методлар остида математик физика масалаларини ечишда кенг қўлланиши бошланди. Ҳозир бу методлар умумий тежамкор методлар номи билан аталади.

а) Ўзгарувчан йуналишли метод. Биз ҳозир шу ўзгарувчан йўналшда методлардан бири бўлган бўйлама-кўндаланг айрилмали схемалар ёки Писмер-Рэчфорд схемаси деб аталувчи методни кўриб чиқамиз.

Бу методда k -қатламидан $(k+1)$ қатнашганикки босқичдан иборат. Биринчи босқичда

$$\frac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k}{\frac{1}{2}\tau} = \Delta_1 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta_2 y_{ij}^k, \quad x_{ij} \in \Omega_h \quad (2.3.8)$$

Системадан орадаги $y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ қиймат аниқланади. Иккинчи босқичда топилган

$y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ қийматлардан фойдаланиб,

$$\frac{y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Delta_1 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta_2 y_{ij}^{k+1}; \quad x_{ij} \in \Omega_h \quad (2.3.9)$$

Системадан y_{ij}^{k+1} лар топилади. Бунда $\Delta_1 y_{ij}$ ва $\Delta_2 y_{ij}$ айрилмали нисбатлар (2.3.2) ва (2.3.3) формулалар билан аниқланади. (2.3.8) тенглама фақат x_1 ўзгарувчи бўйича ошқормасдир. Шунинг учун ҳам бу (2.3.8) ва (2.3.9) тенгламалар системалари аввал x_1 йўналиш бўйича, кейин x_2 йўналиш бўйича бир ўлчовли хайдаш методи ёрдамида ечилади методнинг номи ҳам шундан келиб чиққан.

Бу системалар ечиш алгоритимлари қуйидагидан иборат: (2.3.8) системани

$$\frac{1}{2} \gamma y_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + (1-\gamma) y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \gamma y_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = -F_{ij}^k \quad (2.3.10)$$

кўринишда ёзи б оламиз, бунда

$$\gamma = \tau h^{-2}, F_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \tau \Delta_2 y_{ij}^k$$

Бу системани $j(j=1,2,\dots,N-1)$ нинг хар бир белгиланган кийматларида i ўзгарувчи бўйича хайдаш методи билан ечамиз. Хайдаш методини қўллаш учун $y_{0j}^{k+\frac{1}{2}}$ ва $y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}} (j=1,2,\dots,N-1)$ чегаравий кийматларни белгилаш керак бунинг учун (2.3.9) тенгламадан (2.3.8) тенгламани айирамиз, натижада

$$y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{y_{ij}^k + y_{ij}^{k+1}}{2} - \frac{\tau}{4} \Delta_2 (y_{ij}^{k+1} - y_{ij}^k)$$

хосил бўлади бу формула асосида $y_{0j}^{k+\frac{1}{2}}, y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}}$ чегаравий қийматларни қуйидагича топамиз:

$$y_{0j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{0j}^k + \mu_{0j}^{k+1}}{2} = \frac{\tau}{4} \Delta_2 (\mu_{0j}^{k+1} - \mu_{0j}^k),$$

$$y_{Nj}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{Nj}^k + \mu_{Nj}^{k+1}}{2} = \frac{\tau}{4} \Delta_2 (\mu_{Nj}^{k+1} - \mu_{Nj}^k),$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1.$$

j нинг хар бир белгилан қийматида (2.2.10) ситеманинг x_1 йўналиш бўйича хайдаш методи билан йечганда $O(N)$ та арифметик симал бажарилади. Демак $y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}$ топиш учун $O(N^2)$ та арифметик симал бажарилади.

Барча $y_i^{k+\frac{1}{2}}$ лар топилгандан кейин (2.3.9) тенгламалар ситемасини ечамиз. Бу тенгламалар ситемасини куйидагича ёзиб оламиз.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{Y}_{i,j-1}^{k+1} + (1-\gamma) y_{ij}^{k+1} + \frac{1}{2} \mathcal{Y}_{i,j-1}^{k+1} &= -\Phi_{ij}^k, \\ \gamma &= \tau h^2, \quad \Phi_{ij}^k = y_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta \tau_2 y_{ij}^{k+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Кўришиб турибдики, хар бир белгиланган, $i(i=1,2,\dots,N-1)$ учун бир система j ўзгарувчан бўйича хайдаш методи билан ечиш мумкун. Бунда чегаравий шартлар (2.3.1) масала бўйича

$$y_{i0}^{k+1} = \mu(x_{i0}, t_{k+1}), \quad y_{iN}^{k+1} = \mu(x_{iN}, t_{k+1})$$

Кўринишда аникланади: (2.3.1) системадан барча y_{ij}^{k+1} ларни топиш $O(N^2)$ та арифметик амални талаб қилади.

Шундай қилиб (метод бўйича) маълум y_{ij}^k ларга кўра y_{ij}^{k+1} ларни топиш ўзгарувчан йўнашлишли метод бўйича $O(N^2)$ та арифметик амалини талаб қилади. Кўрсатиш мумкунки, бўйлама-кўндаланг метод абсолют тўрғун бўлиб $u(x,t)$ етарлича силлик бўлса, аппроксимация тартиби $O(\tau^2 + h^2)$ бўлади ва I_2 нинг турдаги нормасида тақриби ечим аниқ ечимга $O(\tau^2 + h^2)$ тезликда яқинлашди.

б) ўзгарувчан коэффициентли иссиқлик ўтказувчан тенгламасини ечиш.

Коэффициентлари ўзгарувчан бўлган қуйидаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун биринчи чегаравий масалаларни қарайлик:

$$\rho(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x,t) \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad (2.3.12)$$

бунда $\rho(x,t)$, $\rho(x,t)$, $f(x,t)$ етарлича силик $\phi - k$ лар билан,

$$c_1 \geq \rho(x,t) \geq c_2 > 0, \quad \rho(x,t) \geq c_3 > 0 \quad (2.3.13)$$

шартларни қаноатлантисин. Хар бир бенсиналлик t учун (x,t) нуктада

$Iu = \frac{\partial}{\partial k} \left(\rho(x,t) \frac{\partial u}{\partial k} \right)$ дифференциал ифодани

$$\Lambda_1(t)y_i = \frac{1}{h} \left[a(x_{i+1},t) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a(x_i,t) \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] \quad (2.3.14)$$

айирмали нисбат билан аппроксимация қўшамиз бунда $a(x,t)$ коэффициент баланс методикадагидек иккинчи тартибли аппроксиманиция шартларини қаноатлантириши керек

$$\left. \begin{aligned} \frac{a(x_{i+1},t) + a(x_i,t)}{2} &= \rho(x,t) + O(h^2), \\ \frac{a(x_{i+1},t) - a(x_i,t)}{2} &= \rho'(x,t) + O(h^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.15)$$

Баланс методида кўрганимиздек, $a(x,t)$ ни қуйидаги

$$a(x,t) = \frac{\rho(x_i,t) + \rho(x_{i-1},t)}{2}, \quad a(x,t) = \rho\left(x_i - \frac{h}{2}, t\right),$$

$$a(x,t) = \frac{2\rho(x_{i-1},t)\rho(x_i,t)}{\rho(x_i,t) + \rho(x_{i-1},t)}$$

формиланинг бирортаси билан ҳисобласак, (2.3.15) муносабатлар ўринли бўлади. Шундай қилиб, (2.3.12) дифференциал тенгламага ушбу вазний айрилмали масалалар мос келади:

$$\rho(x,t) \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} = \Delta(t) (\alpha y_i^{k+1} + (1+\alpha)y_i^k) + f(x_i,t) \quad i=1,2,\dots,\mu-1, \quad (2.3.16)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^k = \mu_1(t_k), \quad y_\mu^k = \mu_2(t_k).$$

Бунда $t = t_k + 0,5\tau$ ва $\alpha = 0,5$ бўлса, у ҳолда (2.3.16) схема аппроксимациясининг холига $\tau = O(\tau^2 + h^2)$, бўлиб $\alpha \neq 0,5$ белгида $\tau = O(\tau + h^2)$, бўлди. Шундай қилиб, биз ошқормас схемага эга бўлади. Бу системани ечиш учун хайдаш методи тўплаш мумкин. Айрилмали

схеманинг туркумлигини текширишда олидинги бандларда харакатларимиздан ташқари, каэффицентларни, музлатиш принципи ҳам ишлатилади. Бу принцип ўзгарувчан каэффицентли масалани ўзгармас каэффицентли масалга келтиради мисол учун (2.3.16) схемада $\alpha = 0$ ва $f(x,t) = 0$ деб олиб, қуйдаги ошқор схемани қараймиз

$$\rho(x,t) \frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^{\kappa}}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a(x_{i+1},t) \frac{y_{i+1}^{\kappa} - y_i^{\kappa}}{h} - a(x_i,t) \frac{y_i^{\kappa}}{h} \right). \quad (2.3.17)$$

Фараз қилайлик, ρ каэффицентлар ўзгармас бўлсин, яъни $\rho(x_i,t) = \rho = const$, $a(x_i,t) = a = const$. У ҳолда (2.3.17) тенгламани қуйдагича ёзиш мумкун:

$$\rho \frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^{\kappa}}{\tau} = \frac{a}{h^2} (y_{i+1}^{\kappa} - 2y_i^{\kappa} + y_{i-1}^{\kappa})$$

ёки

$$\frac{y_i^{\kappa+1} - y_i^{\kappa}}{\tau_1} = \frac{y_{i+1}^{\kappa} - 2y_i^{\kappa} + y_{i-1}^{\kappa}}{h^2}, \quad \tau_1 = \frac{\tau a}{\rho}$$

Маълумки, бу ошқор схема $\tau_1 \leq \frac{1}{2} h^2$ бўлганда, яъни

$$\frac{\tau a}{\rho} \leq \frac{h^2}{2} \quad (2.3.18)$$

бўлганда тургун булади

каэффицентларни музлатиш принципи шуни тасдиқлайдики, агар барча x_i ва $t = t_{\kappa} + 0,5\tau$ лар учун

$$\frac{\tau a(x_i,t)}{\rho(x_i,t)} \leq \frac{h^2}{2} \quad (2.3.19)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (2.3.17) схема бўлади. Агар

$c_1 \geq a(x_i,t) \geq c_2 0$, $\rho(x_i,t) > c_3 > 0$ муносабатлар маълум бўлса, у ҳолда $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{c_3}{2c_1}$.

Бажарилганда (2.3.19) тенгсизлик ўринли бўлади. (2.3.17) схеманинг турғунлигини катъий равишда асосланади.

Агар $\tau \geq 0,5$ бўлса, у ҳолда каэффицентларни музлаш принциpidан (2.3.16) схеманинг абсолют турғунлиги келиб чиқади. С) Чизикли бўлган иссиқлик ўтказувчанлик тангласини ечиш. Қуйидаги чегаравий массалани қараймиз:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t < T, \quad (2.3.20)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t) = \mu_2(t)$$

Одатда чизикли бўлмаган тенгламаларда $\rho(u)$ функциянинг ўзгариш соҳаси олдиндан маълум бўлмаса ошкор схемалар ишлатилмайди.

Соф ошқормас схема $y_i^{k+1} (i = \overline{1, \mu-1})$ намаълумларга нисбатан чизиклик системани ҳам, чизикли бўлмаган сестамани ҳам ташкил этиш мумкун.

Ушбу схема

$$\frac{y_i^{k+1}}{\tau} \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \cdot \frac{y_{i+1}^{k+1} + y_i^{k+1}}{h} - a_i \cdot \frac{y_i^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}}{h} \right] + f(y_i^k) \quad (2.3.21)$$

да $a_i = \frac{1}{2} [\rho(y_i^k) + \rho(y_{i-1}^k)]$ деб олсак, у ҳолда $y_i^{k+1} (i = \overline{1, \mu-1})$ намаълумларга нисбатан чизиклик, абсолют турғун бўлиб, аппроксимация хатолиги $\tau = O(\tau + h^2)$ бўлади. Бу системанинг ечими хайдаш методи (2.3.12) тенглама учун ушбу

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} &= \frac{1}{h} \left[a(y_{i+1}^{k+1}) \frac{y_{i+1}^{k+1} + y_i^{k+1}}{h} - a_i(y_i^{k+1}) \frac{y_i^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}}{h} \right] + \\ &+ f(y_i^{k+1}) a(y_i^{k+1}) = \frac{\rho(y_i^{k+1}) + \rho(y_{i-1}^{k+1})}{2} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

Соф схема ошқормас ишлатилади. Бу схемани қўллаш учун у ёки бу итерацион метод қўлланилади масалан, итерацион жараёни куйданича олиб боришимиз мумкин:

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{(s+1)} - y_i^{(s)}}{\tau} &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1}(y_{i+1}^{(s)}) \frac{y_{i+1}^{(s+1)} - y_i^{(s+1)}}{h} - a_i(y_i^{(s)}) \frac{y_i^{(s+1)} - y_{i-1}^{(s+1)}}{h} \right] + f(y_i^{(s)}) \\ S &= 0, 1, \dots, L-1, \quad y_i^{(0)} = y_i^k, \quad y_i^{(L)} = y_i^{k+1}, \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Бу ерда S - итерация номери. Бу итерацион жараёнда кўрамизки, чизикли бўлмаган каэффицентлар олдинги итерационда, яни $y_i^{\kappa+1}$ нинг даслабки яқинлашиш шунча яхши бўлади. Агар каэффицентлар силлиқ булиб, $\rho(u) \geq c_2 > 0$ шарт бажарилса, одамда, икки-учта итерация қониқарли натижага олиб келади. Хар бир янги итерацияда $y_i^{(s+1)}$ нинг қийматлари (2.3.23) ситемади хайдаш метод билан аниқланади. Шунингдек (2.3.23) системани ечиш учун иккинчи тартибли аниқликка эга бўлган предиктор-корректор схемаси хам ишлатилади. Бунда κ -қатламда ($\kappa+1$) қатламга ўтиш икки боскичда бажарилади. Биринчи боскичда хайдаш методи билан ошқормас чизикли система

$$\frac{y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^\kappa}{0,5\tau} = \frac{1}{h} \left[a_{i+1}(y_{i+1}^\kappa) \frac{y_{i+1}^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}}{h} - a(y_i^\kappa) \frac{y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}}{h} \right] + f(y_i^\kappa), \quad c = 1, 2, \dots, \mu - 1,$$

$$y_0^{\kappa+\frac{1}{2}} = \mu_1(t_\kappa + 0,5\tau), \quad y_\mu^{\kappa+\frac{1}{2}} = y_2(t_\kappa + 0,5\tau)$$

ечиш орадиги $y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}$ ($c = 0, 1, \dots, \mu$) қийматлар топилади иккинчи боскичда эса

$a(y), t(y)$ чизикли бўлмаган каэффицентлар $y_i^{\kappa+\frac{1}{2}}$ ларни топиш қуйидаги олти нуқтали симетрик схема

$$\frac{y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^\kappa}{2} = \frac{1}{2h} \left[a_{i+1} \left(y_{i+1}^{\kappa+\frac{1}{2}} \right) \frac{y_{i+1}^{\kappa+1} - y_i^{\kappa+1}}{h} - a \frac{y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} - y_i^\kappa}{h} \right] + f \left(y_i^{\kappa+\frac{1}{2}} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, \mu - 1, \quad y_0^{\kappa+1} = \mu_1(t_\kappa + 1), \quad y_\mu^{\kappa+1} = \mu_2(t_{\kappa+1})$$

асосида олиб борилади.

Иссиқлик ўтказиш тенгламаси учун хайдаш усули.

Мисол: хайдаш усули қўлланилиб

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенгламани ва $u(x, 0) = 4x(1 - x), u(0, t) = u(1, t) = 0$ шартларни каноатлантирувчи ечим топилсин.

Ечиш: Айтайлик $h = 0,1; l = 0,01$ бўлсин. Унда $S = \frac{h^2}{l} = 1$ бўлади. $u(x, t)$ функциянинг $t = 0,01$ қатламдаги қийматини аниқлаймиз.

Тўғри юриш: жадвал тузиб, унинг u_{i0} – сатрига $f(x_i)$ ($i = \overline{0; 10}$) бошланғич қийматларни тўлдирамиз ва $j = 0$ учун

$$a_{1,j+1} = \frac{1}{(2+S)}, b_{1,j+1} = \varphi(t_{j+1}) + u_{1j}S \quad (1)$$

$$a_{i,j+1} = \frac{1}{2+S-a_{i-1,j+1}}, b_{i,j+1} = a_{i-1,j+1}b_{i-1,j+1} + Su_{ij} \quad (i = \overline{2; n}) \quad (2)$$

формулалар бўйича қуйидагилар ҳисобланади:

$$a_{11} = \frac{1}{3}, \quad b_{11} = u_{10} = 0,36, \quad a_{21} = \frac{1}{3-a_{11}} = \frac{3}{8} = 0,375,$$

$$b_{21} = a_{11}b_{11} + u_{20} = 0,12 + 0,64 = 0,76, \quad a_{31} = \frac{1}{3-a_{21}} = \frac{1}{2,625} = 0,381,$$

$$b_{31} = a_{21}b_{21} + u_{30} = 0,375 \cdot 0,760 + 0,84 = 1,125$$

Ҳайдаш жадвали

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
u_{i0}	0	0,360	0,640	0,840	0,960	1,000	0,960	0,840	0,640	0
a_{i1}		0,333	0,375	0,381	0,382	0,382	0,382	0,382	0,382	
b_{i1}		0,360	0,760	1,125	1,389	1,530	1,544	1,430	1,186	
u_{i1}	0	0,310	0,764	0,764	0,882	0,921	0,882	0,764	0,571	0

Тесқари юриш: Чегаравий шартлардан $u_{10,1} = 0, (26)$ формулалар бўйича еса u_{i1} ($i = 9,8, \dots, 1$) қийматларни ҳисоблаймиз. Жумладан, $j = 0$ да

$$u_{91} = (u_{10,1} + b_{91})a_{91} = 0,813 \cdot 0,382 = 0,310$$

$$u_{81} = (u_{91} + b_{81})a_{81} = (0,310 + 10182)0,382 = 0,571$$

.....

$$u_{11} = (u_{21} + b_{11})a_{11} = (0,572 + 0,360)0,333 = 0,310$$

§ 2. 4. Биржинсли консерватив айрилмали схеманинг чегаравий масалаларини ечишга тадбири

Чекли айирмалар методининг физик моҳияти шундан иборатки, жараён кечаётган узлуксиз муҳит унинг дискрет моделига алмаштирилади. Табиийки бу ҳолда жараённинг физик хоссалари сақланиши талаб этилади. Бундай хоссалардан асосийси энг аввало сақланиш қонунларидир. Тўрда (сеткада) сақланиш қонунларини ифодалайдиган чекли айирмаларни **Консерватив айирмалар** дейилади. Маълум чегаравий масалалар синфига тегишли барча масалалар учун ҳисоблаш жараёнининг бир ҳиллигини таъминлайдиган схемани **биржинсли схема** дейилади. Биржинсли чекли айрилмали схема деганда, унинг кўриниши маълум калсга тегишли масаладан ҳам, айрилмали схемани танлаш усулидан ҳам боғлиқ бўлмаган айирмали схемани тушунмиз.

Математик физиканинг узулишга эга коэффициентли стационар ҳамда ностационар масалалари классификацияси учун тузилган биржинсли айирмали схеманинг яқинлашувчи бўлишлиги учун уларнинг консерватив бўлиши **зарурий шарт** ҳисобланади.

Консерватив биржинсли айирмали схема яратиш учун (сетка) тўрда баланс тенгламаларини тузиш керак бўлади. Сўнгра бу баланс тенгламаларида иштирок этган интерваллар ва ҳосилалар тақрибан алмаштирилиши лозим. Натижада биржинсли айрилмали сеҳемага эга бўламиз. Консерватив биржинсли айирмали схемани яратишнинг бу усулига интеграл интерполяция усули ёки баланс усули дейилади. Самарский А.А. Теория разностных схем .-М,: Наука, 1977. Интеграл-интерполяция методига А.Н.Тихонов, А.А.Самарскийлар асос солган, кейинги ривожланиши Г.И.Марчукнинг ишларида ўз аксини топган.

Биржинсли консерватив айирмали схемани ва унинг сеткадаги ячейкаларда баланслар тангламалари (сақланиш қонунлари) таркибида

қатнашаётган интеграл ва ҳосилаларни чекли айирмалар билан алмаштирилиш принципига асосланган интеграл –интерполяция усулини фильтрация назариясидан олинган конкрет масалада тадбиқ қилишни намойиш этамиз.

Сув омбори ёки канал деворидан L масофада жойлашган доимий $h_{\partial p}$ напорга эга очик горизантал зовур (дренаж) қазилган бўлсин. $U(x,t)$ функциянинг зувурдаги $h_{\partial p}$ напордан юқоридаги ер ости сувлари сотҳини ифодалансин.

Сув омборида сув сатҳининг кўтарилиши чизиқли қонуният билан амалга ошсин, шунингдек сув омбор билан зовур орасида жойлашган ер майдони-пласт икки хил фильтрация коэффициентига эга (κ_1 ва κ_2), яъни ер майдони бўлак-бўлак бир жинсли бўлсин.

Зовур туби сув ўтказмайдиган жинсдан иборат деб ҳисоблаб, h_m орқали зовур тубидан ер сатҳигача бўлган баландликни, $h_{\partial p}$ орқали зовур тубидан буғланиш бошланадиган қатламгача бўлган баландликни белгилаймиз, $\psi_0 = h_{\kappa p} - h_{\partial p}$

Табийки $U(x,t) > \psi_0$ бўлганда буғланиш содир бўлади, $U(x,t) \leq \psi_0$ бўлганда эса буғланиш садир бўлмайди, бу иккала зонанинг чегарасини $x = \ell(t)$ орқали белгилаймиз. Шундай қилиб юқоридаги фаразларни ҳисобга олсак ер ости сувлари сатҳининг кўтарилиб-пасайишини ифодаловчи $U = U(x,t)$ номаълум функцияни топиш учун куйидаги чегаравий масалани ечишга келинади:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{(x)} \frac{\partial (U + h_{\partial p})^2}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad (2.4.1)$$

$$U(x,t)|_{t=0} = 0, U(x,t)|_{x=0} = \alpha \cdot t, U(x,t)|_{x=L} = 0, \quad (2.4.2)$$

$$\left[U(x,t) \right]_{x=\ell(t)} = \left[K(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right]_{x=\ell(t)} = 0, \quad (2.4.3)$$

$$\left[U(x,t) \right]_{x=\ell_1} = \left[K(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right]_{x=\ell_1} = 0. \quad (2.4.4)$$

Бу ерда $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0(t)}{Y_0^n} \cdot (U - \psi_0)^n, U > \psi_0; \quad \varepsilon = 0, U < \psi_0; \quad y_0 = h_m - h_{кр};$

α – ўлчови м/сут бўлган ўзгармас;

$K(x) = K_1 \equiv \cos t, 0 < x < \ell_1; K(x) = K_2 \equiv const, \ell_1 < x < L; \quad \varepsilon_0(t)$ – вақтини бўлак-

бўлак ўзгармас функцияси (2.4.1)-(2.4.4) масалада қатнашаётган барча

x, t, u, h ва ҳақозо ўзгарувчилар турли ўлчовли бўлгани учун, дастлаб

уларни ўлчовсиз бўлган ўзгарувчилар билан ифодалашимиз зарур. Шу

мақсадда янги функция ва ўзрувчиларни куйидагича киритамиз:

$$H = \frac{U}{U_0}, \quad y = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{K_0 U_0}{\mu \cdot L^2} t; \quad K(y) = \frac{K(x)}{K_0}; \quad (2.4.5)$$

Бу ерда $K_0 = \max\{K_1, K_2\}; \quad \delta = \max_t \varepsilon_0(t)$ бу ҳолда (2.4.5) га асосан (2.4.1)-

(2.4.4) ўрнига қўйиб куйидагига эга бўламиз.

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(K^*(y) \frac{\partial H^2}{\partial y} \right) + \beta_4 \frac{\partial}{\partial y} \left(K^*(y) \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \rho \gamma_n \cdot \varepsilon^* \quad (2.4.6)$$

$$H|_{\tau=0} = 0; \quad U|_{y=0} = \beta_0 \cdot \tau; \quad H|_{y=0} = 0; \quad (2.4.7)$$

$$\left[H \right]_{y=\ell_1^*(\tau)} = \left[K^*(y) \frac{\partial H}{\partial y} \right]_{y=\ell_1^*(\tau)} = 0; \quad (2.4.8)$$

$$\left[H \right]_{y=\ell_1^*} = \left[K^*(y) \frac{\partial H}{\partial y} \right]_{y=\ell_1^*(\tau)} = 0; \quad (2.4.9)$$

бу ерда

$$\beta_4 = \frac{h_{\text{оп}}}{U_0}; \quad \beta_0 = \beta_1 \cdot \beta_3; \quad \beta_1 = \frac{\delta}{K_0}; \quad \beta_3 = \left(\frac{L}{U_0} \right)^2;$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha}{K_0} \cdot \mu; \quad \gamma_n = \frac{\beta_1 \cdot \beta_3}{(1 - \varphi_0)^n}; \quad \ell_1 = \frac{\ell_1}{L}; \quad \rho = \begin{cases} 1, H > \psi_0 \\ 0, H < \psi_0 \end{cases};$$

(2.4.6)-(2.4.9) масалани интеграл-интерноляция методига асосланган чекли айирмалар методи билан ечамиз.

$$\overline{W}_{\Delta h, \Delta \tau} = \left\{ (i\Delta h, j\Delta \tau): i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M} \right\},$$

$$\overline{W}_{\Delta h, \Delta \tau} = \left\{ (i\Delta h, j\Delta \tau): i = \overline{1_0, N}, j = \overline{1_1, M-1} \right\},$$

сеткани (тўрни) тузамиз. Бу ерда Δh -фозовий ўзгарувчи бўйича олинган кадам, $\Delta \tau$ -вақт бўйича олинган кадам. Шунини таъкидлаш лозимки Δh ва $\Delta \tau$ кадамлар шундай танлаганки айрим сетканинг айрим тугун нуқталари $K^*(y)$ ва $\varepsilon_0^*(y)$ функциялар узулиш нуқталари билан устма-уст тушади. Бундай сеткаларни одатда махсус сеткалар деб аталади.

Потокларни (оқимларни)

$$W_1(y, \tau) = -K^* \frac{\partial H}{\partial y}, \quad W_2(y, \tau) = -K^*(y) \frac{\partial H^2}{\partial y} \quad (2.4.10)$$

кўришда киритиб (2.4.6) тенглама учун

$$y_{i-\frac{1}{2}} \leq y = y_{i+\frac{1}{2}}, \quad \tau_j \leq \tau \leq \tau_{j+1};$$

$$Y_{i+\frac{1}{2}} = i\Delta h \pm \frac{\Delta h}{2}, \quad \tau_j = j, \Delta \tau, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1},$$

тўғри тўртбурчакда баланс тенгламаларини тузамиз. Бу тенглама куйидаги кўринишда бўлади.

$$\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial H}{\partial y} d\tau = \frac{1}{2} \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial}{\partial y} (-\omega_2(y, \tau)) d\tau + \beta_4 \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\partial}{\partial y} (-\omega_1(y, \tau)) d\tau - \rho \gamma_n \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \varepsilon_0^*(y) d\tau.$$

(2.4.11) тенгламанинг ҳар бири қўшилувчисини чапдан ўнга қараб мос равишда J_1, J_2, J_3, J_4 орқали белгилайлик

$H_{ij} = H(y_i, \tau_j)$, белгилаш киритиб J_1 ни

$$J_1 \approx \Delta h (H_{i,j+1} - H_{ij}), \quad \Delta h = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}} \quad (2.4.12)$$

Каби аппроксимациялаймиз.

(2.4.8) дан куйидагини оламиз

$$\frac{\partial H^2}{\partial y} = -\frac{W_2(y, \tau)}{K^*(y)}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\omega_1(y, \tau)}{K^*(y)}. \quad (2.4.13)$$

Иккала (2.4.13) тенгликларни $[Y_{i-1}, Y_i], [Y_i, Y_{i+1}]$ кесмалар бўйича интеграллаймиз. (2.4.8), (2.4.9) шартларига асосан $\omega_i(y, \tau)$, $\tau = 1, 2$ патоклар (оқимлар) узлуксиз функциялар бўладилар, $\frac{1}{K^*}$ эса ҳар бир (y_i, y_{i+1}) , $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ интервалларда мусбат ўзгармасдир. У ҳолда бу интегралларга интеграл ҳисобнинг умумлашган ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаш мумкин бўлади:

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{W_2(y, \tau)}{K^*(y)} dy = W_2(c, \tau) \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{K^*(y)} \quad (2.4.14)$$

бу ерда $c \in [y_{i-1}, y_i]$ (2.4.14.) тенгламадаги $W_2(c, \tau)$ ни тақрибан $W_2(y_{i-\frac{1}{2}}, \tau)$ қиймат билан алмаштирсак, $y_{i-1} \leq y \leq y_i$ бўлганда

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{W_2(y, \tau)}{K^*(y)} dy \approx \omega_2(y_{i-\frac{1}{2}}, \tau) \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{K^*(y)} \quad \text{бўлади.}$$

Худди шундай аппроксимацияни (2.4.13) тенгликнинг ўнг томонидаги интегралларда ҳам амалга олширсак, J_2 ва J_3 лар учун куйидаги ифодаларни оламиз:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left\{ a_{i+1} \frac{H^2(y_{i+1}, \tau) - H^2(y_i, \tau)}{\Delta h} - a_i \frac{H^2(y_i, \tau) - H^2(y_{i-1}, \tau)}{\Delta h} \right\} d\tau, \quad (2.4.15)$$

$$J_3 = \beta_4 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left\{ a_{i+1} \frac{H(y_{i+1}, \tau) - H(y_i, \tau)}{\Delta h} - a_i \frac{H(y_i, \tau) - H(y_{i-1}, \tau)}{\Delta h} \right\} d\tau,$$

$$\text{бу ерда } a_i = \left[\frac{1}{\Delta h} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{dy}{K^*(y)} \right]^{-1}, \quad a_{i+1} = \left[\frac{1}{\Delta h} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{K^*(y)} \right]^{-1}.$$

Энди J_2, J_3 ва J_4 ларни кейинчалик ошкормас схемага эга бўладиган қилиб аппроксимациялаймиз. У ҳолда (2.4.11) тенгламани қуйидаги алгебраик тенгламалар (айрилмали схема) кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} \Delta h(H_{i,j+1} - H_{i,j}) = & \frac{\Delta \tau}{2 - \Delta h} \left[a_{i+1} (H_{i+1,j+1}^2 - H_{i,j+1}^2) - \right. \\ & \left. - a_i (H_{i,j+1}^2 - H_{i-1,j+1}^2) \right] + \frac{\beta_4 \cdot \Delta \tau}{\Delta h} \left[a_{i+1} (H_{i+1,j+1} - H_{i,j+1}) - \right. \\ & \left. - a_i (H_{i,j+1} - H_{i-1,j+1}) \right] - \rho \gamma_n \cdot \Delta \tau \cdot \Delta h \cdot \epsilon_{j+1} (H_{i,j+1} - \varphi_0)^n, \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

бу ерда

$$\epsilon_{j+1} = \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\tilde{t}_j}^{\tau_{j+1}} \varepsilon^*(\tau) d\tau$$

(2.4.16) система $H_{i,j+1}$ номаълумларга нисбатан чизиқли бўлмаган учун, уни ечишда Ф.Б.Абуталиев ва унинг шогирдлари томонидан муваффақият билан қўлланган чизиқсиз ҳадларни квазичизиқлилаштириш методини қўллаймиз. Бу методга асосан (2.4.16) системадиги $\varphi(H_{i,j+1})$ чизиқсиз ҳадларни қуйидагича чизиқли ҳадлар билан алмаштирилади.

$$\varphi(H_{i,j+1}) \approx \varphi(\tilde{H}_{i,j+1}) + (H_{i,j+1} - \tilde{H}_{i,j+1}) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \Big|_{z=\tilde{H}_{i,j+1}}, \quad (2.4.17)$$

бу ерда $\tilde{H}_{i,j+1} = H_{i,j+1}^{(s)}$, S - итерация номери. Бу ҳолда $H_{i,j+1}^{(0)} = H_{i,j}$ ни оламиз. Интерация жараёни $\max_j |H_{i,j+1}^{(s)} - H_{i,j+1}^{(s+1)}| < \hat{\varepsilon}$, ($\hat{\varepsilon}$ - берилган кичик миқдор) шарт бажарулгунча давом эттирилади. (2.4.16) системадаги чизиқли бўлмаган ҳадларда (2.4.17) квазилинеаризацияни амалга ошириб сўнгра $n=0$, $n=1$, $n=2$ ва $n=3$ ҳолларни алоҳида қараб 4 та чизиқли чекли айирмали системага эга бўламиз. Бу ҳолда a_i, a_{i+1} ва ϵ_{j+1} коэффициентлар

$$a_i = K^*(y_{i-1/2}), a_{i+1} = K^*(y_{i+1/2}), \epsilon_{j+1} = \varepsilon_0^* \left(\tau_{j+\frac{1}{2}} \right)$$

формулар билан ҳисобланади. Юқорида таъкидлангандек сетка (тўр) шундай танлаганки $K^*(y)$ ва $\varepsilon_0^*(c)$ функциялар ҳар бир $[y_i, y_{i+1}] \times [\tau_j, \tau_{j+1}]$ тўғри тўрт бурчакда узлуксиз бўлиб қолади.

Ҳосил бўлган 4та чизиқли чекли айирмали системани ўнг прогонка методи билан ечамиз. Айирмали схемалар назариясидан агар соф ошқормас айирмали схема билан иш кўрилса прогонка методи сўзсиз турғун бўлади, яъни ҳисоблашдаги яхлитлаш хатолиги ўсмайди.

Шунинг таъкидлаш лозимки квазичизиқли ва чизиқли бўлмаган параболик типдаги тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларни интеграл-интерполяция методи билан ечишда ошқормас схемаларни аппроксимациялаш пайтидаги хатоликларини баҳолаш масаласи А.А.Самарский томонидан ҳал қилинган. Бу масала ҳақидаги батафсил маълумот ушбу А.А.Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных задач параболического типа. ЖВМ и МФ, 1962, Т2№1, А.А.Самарский. Теория разностных схем.

-М;Наука, 1977, А.А.Самарский., Е.С.Николаев Методы решения сеточных уравнений.-М:Наука,1978. адабиётларида ўз аксини топган.

Чекли айрилмали схеманинг яқинлашувчи бўлишлиги олинган ечимнинг яхши сифатли (аниқлиги юқори) бўлишлигига кафолат беролмайди.

Олинган сетка (тўр) анча йирик бўлганда яқинлашувчи схема билан ишлаганда ҳам айрим ҳолларда олинган ечимини амалётга яроқсиз қилиб қўядиган “чекланиш”лар учраб туради. Шунинг учун ҳам схемаларни эксперимент текширувидан ўтказилади, яъни бирор соддароқ тест билан текшириб кўрилади. Бундай тестлар сифатида қўйилган масаланинг автомодел ечими олинади. Ушбу параграфда ўрганилган (1)-(3) масаланинг ҳам автомодел ечими қурилган ва уни тест сифатида ишлатиш мумкин.

Таклиф қилинган бир жинсли консерватив схемак-интеграл-интерполяция методи билан сонли ечим олинган ва κ_1/κ_2 нисбат турлича бўлгандан ечим таҳлил қилган. Шунингдек олинган сонли ечимлар ўша характеристикали автомодел ечим билан солиштирилиб кўрилган.

Бунда $\varepsilon_0(t)$ сифатида дала эксперименти натижаларига суяниб буғланиш интенсивлиги ҳар бир ой учун ўртача-суткалик қиймати қуйидаги жадвалда кўрсатилгандек олинди:

Жадвал

Ойлар	Январ	Феврал	Март	Апрель	Май	Июнь
Буғланиш интенсивлиги ш/сут	0,0000	0,0000	0,0036	0,0046	0,0620	0,0700
Ойлар	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
Буғланиш интенсивлиги ш/сут	0,0750	0,0700	0,0600	0,0500	0,0080	0,0000

Бу холда буғланиш интенсивлиги ўрта йиллик ҳисобда 0, 0324 м/сут.ни ташкил этади.

Ҳисоблашлар натижаларини келтирамиз. Улар қуйидаги қийматларда олиб борилди:

$$h_e = 20m, \quad h_{кр} = 21m, \quad h_m = 24,68 \quad (\text{харакат автомодел бўлганда } h_m = 25 \text{ м}),$$

$$\alpha = 0,013 \text{ м/сут.};$$

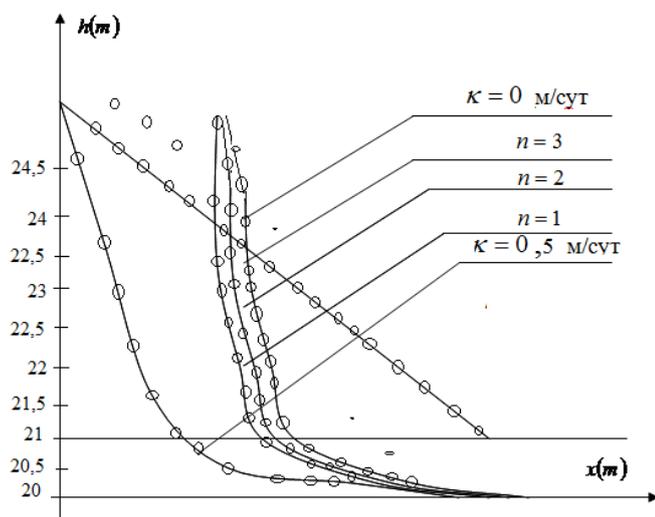
$$L = 1000m, \quad \ell_1 / L = 0,025; \quad 0,05; \quad 0,1; \quad 0,25; \quad 0,5;$$

$$0,75; \quad K_1 / K_2 = 0,005; \quad 0,05; \quad 1, \quad K_2 = 10 \text{ м/сут},$$

$$\frac{K_1}{K_2} = 1, \quad 20,40,60,100, \quad K_1 = 0,5 \text{ м/сут. Бу ердаги}$$

$L, \ell_1, h_{gp}, h_{kp}, h_m, K_1, K_2$ ва α орқали шу параграфлар бошидан эслатилаган миқдорларини англатади.

Сетка (тўр) тузилганда кадамлар фазовий координаталар бўйича 215м., вақт бўйича 30 сутка қилиб олинади.



4-расм.

$\varepsilon_0(t)$ учун жадвал 3 дан қиймат олинган, $K_1 = 10$ м/сут; $K_2 = 0,5$ м/сут., $t = 360$ сут ҳолдаги депрессия чизиғи.

III. Хулоса ва таклифлар

1. Оддий дифференциал тенглама ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳамда чизиқли бўлмаган оддий ёки хусусий ҳосилали тенгламаларга қўйилган турли чегаравий масалаларнинг ечишнинг тақрибий методларини синфларга ажратилган.
2. Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларга қўйилган чегаравий масалани чекли айирмали метод билан ечиш ғояси асосланган.
3. Оддий ҳосилани, хусусий ҳосилаларни ва юқори тартибли ҳосилаларни чекли айирма билан тақрибан алмаштиришда Тейлор формуласидан фойдаланиш ғояси асосланган.
4. Чекли айирмали схемалар ёрдамида дифференциал тенглама ва чегаравий шартлар алгебраик тенгламалар системасини ечишга олиб келиниши ва бу системанинг ечими мавжуд ва ягона бўлишлигини кўрсатилган.
5. Чекли айирмали тенгламалар системасининг ечими ягоналигини исботлашда максимум принциpidан фойдаланилган.
6. Айирмали схеманинг биржинсли бўлиши ва консерватив бўлиши чегаравий масалаларнинг берилган классига нисбатан яроқли бўлишлиги асосий мезон деб олинган.
7. Параболик типдаги тенгламалар учун тўр (сетка) методини асослаш ва ҳосил бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш усулларида айирма қаралган.
8. Айирмали тенгламаларни ҳайдаш ўндан ҳайдаш ва чапдан ҳайдаш методлари ишлаб чиқилган.
9. Конкрет чегаравий чегаравий масалани ечишда ўлчовли ўзгарувчиларни ўлчовсиз ўзгарувчанларга ўтказиш усули ишлаб чиқарилган.
10. Номаълум чегарали (кўзгалувчан чегарали) чегаравий масалаларни ечишда интеграл-интерполяция методини қўллаш батафсил ўрганилган.

11. Интеграл-интерполяция методининг афзаллиги, шунингдек математик анализнинг ўрта қиймат ҳақидаги теореманинг қўланилиши ҳақида тавсиялар берилган.
12. Чизиқли бўлмаган алгебраик тенгламаларни квазичизиқлаштириш ёрдамида чизиқли системага келтириш мумкинлиги кўрсатилган.
13. Чекли айирмали схеманинг яқинлашиши тезлиги, яқинлашувчи, турғун бўлиши ҳақида амалий мисоллар ёрдамида тушунтиришлар олиб борилган.
14. Ҳар бир бобда назарияни мус таҳкамловчи машқлар-мисоллар келтирилган. Мисолларнинг ечимлари турғунлик шартини қаноатлатирувчи эканлиги кўрсатилган.
15. Икки қатламли айирмали схемалар ва уларнинг турғунлиги текширилган.
16. Тежамкор айирмали схемалар ва уларнинг қўлланиш соҳаси ҳамда яқинлашиши масаласи қаралган.
17. Интеграл-интерполяция методи асосида ошқормас схема тузилган ва FORTAN олгоритим тилда сонли ечим олинган сенли ечишни график кўринишда тасвирланган.

IV фойдаланилган адабиётлар ва манбалар.

1. Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б. ва бошқа Анализ динамики подземных вод аналитическими и численными методами.-Ташкент; ФАН, 1975.
2. Абуталиев Ф.Б., Хожибоев Н.Н., Умаров У.У., Измайлов И.И., Методы математического моделирования гидродинамических процессов.- М.:Недра,1972.
3. Абуталиев Ф.Б., Мирзаев А.Н. Способ построения автомодельных решений для задач вытеснения в многопластовых системах. В сб. “Вопросы вычислительной и прикладной математики” – Ташкент:1980, вы п.60.
4. Бегматов А., Жомуротов К. О приближенном решении одной задачи фильтрации при наличии нелинейного испарения. В сб.и “Краевые задачи для уравнений математической физики”.- Ташкент, ФАН,1980.
5. Беллман Р., Калаба Р. Квази линаризация и нелинейные краевые задачи.-М.:Мир,1968.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) М.-:Наука,1975.
7. Бабенко К.И. (ред) Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.наука,1979
8. Ванберг А.М. Математическое моделирование процессов переноса. Решение нелинейных краевых задач. Москва-Иерусалим. 2009.
9. Ващенко Г.В. Вычислительная математика. Основы конечных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Красноярск: Сиб ГТУ,2005.
10. Ващенко Г.В. Вычислительная математика Основы алгебраической и тригонометрической интерполяции. Красноярск: СибГТУ,2008.

11. Власов а Б.А., Зарубин В.С. Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики: Учебн. для вузов.М.Изд-во МГТУим Н.ЭБаумана,2001.
12. Ворожцов Е.В Разностные методы решения задач механики сплошных сред (учебное пособие). Новосибирск: НГТУ,1998
13. Ворожцов Е.В. Сборник задач по теории разносиных схем (учебные посбие). Н, овосибирс:НГТУ,2000.
14. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука 1971.
15. Грунд Ф. Программирование на языке ФОРТРАН IV.-М:Мир,1976
16. Демидович Б-П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967.
17. Ильгамов М.А., Гильмонов А.Н. Неотражающие условия на границах расчетной области. М.: физмат мт.2003.
18. Исроилов М. Ҳисоблаш методлари, Ташкент, 2002.
19. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука 1978.
20. Князева А.Г. Различные варианты метода прогнки. Метадические указания К выполнению лабораторных работ. Томск: ТПУ,2006.
21. Крылов В.И., Бобков В.В Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том II/ М.: Наука 1977.
22. Кукуджанов В.Н. Численные методы в механике сппошных сред. Курс лекций. М.: МАТИ, 2006.
23. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости. И разрушения жупругих материалов и конструкций.М.: МФТИ, 2008
24. Ладиженская о,а., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.М.:Наука,1967.
25. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.-М.:Наука,1977.

26. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных.- М.:Высшая школа,1977.
27. Рубинштейн Л.И. Проблема Стерана.-Рига:Звайгзне,1967.
28. Самарский А.А. Однородные разностные схемы для нелинейных задач параболического типа.ЖВМ и МФ,1962,т.2.№1
29. Самарский А.А. Теория разностных схем.М.:Наука 1977.
30. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.:Наука, 1978
31. Салоҳитдинов М. Матиматик физика тенгламалари. Ташкент, “Ўзбекистон”,2002
32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Об однородных схемах. ЖВМи МФ,1961.Т.1,№1
33. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа М.: Мир, 1968.