АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 517.956.2; 517.956.3;
517.956.6

ЗИКИРОВ Обиджан Салижанович

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

01.01.02 — Дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

**диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук**

Т а ш к е н т — 2010

Работа выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека и в Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан.

Научный консультант: академик АН Узбекистана, доктор физико–математических наук, профессор
Джураев Тухтамурад Джураевич.

Официальные оппоненты: академик АН Узбекистана, доктор физико–математических наук, профессор
Алимов Шавкат Арифджанович.

доктор физико–математических наук, профессор
Бердышев Абдумаувлен Сулейманович.

доктор физико–математических наук, профессор
Хасанов Акназар Бекдурдиевич.

Ведущая организация: Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского Отделения РАН.

Защита состоится "____ "_______________ 2010 года в "____ " часов на заседании специализированного совета Д.015.17.01 при Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан по адресу: 100125. г. Ташкент, ул. Дурман йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан "_____ "______________ 2010 г.

Ученый секретарь
спец.совета Д.015.17.01
канд. физ.–мат. наук Зоитов А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Теория краевых задач для неклассических уравнений с частными производными является важнейшим разделом современной теории дифференциальных уравнений. В последние десятилетия исследования в этой области проводились наиболее интенсивно благодаря многочисленным приложениям в газовой динамике, при исследовании распространении возмущений в упругих и пластических средах, обладающих вязкостными свойствами, в механике сплошной среды, при распространении акустических волн в слабо неоднородных средах, в математической биологии, а также при математическом моделировании различных природных явлений.

Одним из основных классов неклассических уравнений с частными производными являются уравнения составного и смешанно–составного типов. В 30-х годах XX века Ж.Адамаром было начато изучение краевых задач для простейшего уравнения третьего порядка составного типа, оператор которого представляет собой композицию оператора Лапласа с оператором частной производной по одной из независимых переменных. После этого последовал ряд исследований, посвященных этому типу уравнений и более общим уравнениям составного типа.

В последующих исследованиях рассматривались, наряду с проблемами разрешимости известных классических краевых задач, были поставлены и исследованы новые краевые задачи, благодаря чему теория уравнений третьего и более высокого порядков получила интенсивное развитие. Большая заслуга в этом принадлежит А.В.Бицадзе, И.Н.Векуа, Т.Д.Джураеву, М.С.Салахитдинову, Ш.А.Алимову, В.А.Ильину, Е.И.Моисееву, А.М.Нахушеву, Т.Ш.Кальменову, В.И.Жегалову, В.Н.Врагову, М.М.Смирнову.

Наряду с изучением основных краевых задач для рассматриваемых уравнений, начиная с семидесятых годов прошлого столетия, возрос интерес к постановке и исследованию краевых задач качественно нового класса. Эти задачи, получившие название нелокальных, возникали при решении многих практических задач. Самому пристальному вниманию нелокальные задачи подверглись после публикации работ А.В. Бицадзе и А.А.Самарского, в которых были предложены новые постановки задач с нелокальными краевыми условиями для уравнений в частных производных.

Следует отметить, что краевые задачи с нелокальными условиями для различных классов уравнений математической физики рассматривались в работах Ш.А.Алимова, А.А.Дезина, Т.Д.Джураева, В.И.Жегалова, В.А.Ильина, Н.И.Ионкина и Е.И.Моисеева, А.И.Кожанова, А.М.Нахушева, Л.С.Пулькиной, М.С.Салахитдинова, А.П.Солдатова, А.Сопуева и в их научных школах.

Большой вклад в изучение начально–краевых и обратных задач для подобных дифференциально–операторных уравнений внесли исследования В.В.Дайняк и В.И.Корзюк, А.И.Кожанова, В.И.Корзюк и Н.И.Юрчук, М.М.Лаврентьева и К.С.Фаязова, V.V.Varlamov и другие.

В большинстве этих работ рассмотрены задачи для уравнений второго порядка. Однако аналогичные задачи для уравнений третьего порядка изучены сравнительно мало.

Дальнейшее исследование теории граничных задач для уравнений высокого, в частности, третьего порядка представляется актуальным и важным, как с точки зрения развития общей теории неклассических уравнений с частными производными, так и с точки зрения приложений в математическом моделировании различных явлений.

Степень изученности проблемы. В работе Т.Д.Джураева и Я.Попёлека изучены вопросы классификации и приведения к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка

$$Au_{xxx} + Bu_{xxy} + Cu_{xyy} + Du_{yyy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}),$$

где коэффициенты A, B, C и D заданные функции x и y.

Эффективное определение типа уравнения и приведение его к каноническому виду дает возможность сформулировать правильную постановку начально–краевых и нелокальных задач.

Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Впервые, возможно, задачу с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрел J.Cannon, для уравнения теплопроводности. В последнее время стали появляться работы, например Н.И.Ионкина, А.И.Кожанова, А.И.Кожанова и Л.С.Пулькиной, А.М.Нахушева, Л.С.Пулькиной, L.A.Bougoffa, A.Bouziani, D.–Q.Dai, Y.Huang, M.Danche и A.L.Marhoune, S.Mesloub и S.Messaoudi, M.Sapagovas, A.Stikonas и других, посвященные нелокальным задачам для различных типов уравнений в частных производных.

В последние годы возрос интерес к изучению спектральных задач для уравнений составного типа. В работе Т.Д.Джураева, Б.В.Логинова и И.А.Малюгиной впервые были поставлены и исследованы спектральные задачи для уравнений составного типа третьего и четвертого порядков.

Спектральные свойства (в том числе вольтерровость) краевых задач для уравнений смешанного и смешанно–составного типов исследованы в работах М.С.Салахитдинова, Т.Ш.Кальменова, Е.И.Моисеева, Н.Ю.Капустина, К.Б.Сабитова, А.С.Бердышева, М.А.Садыбекова и других.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы входит в тематику НИР, проводимых на кафедре дифференциальных уравнений Национального университета Узбекистана и в лаборатории неклассических уравнений математической физики Института математики и информационных технологий АН РУз.

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы состоит в постановке и исследование вопросов о разрешимости новых как локальных, так и нелокальных краевых задач для неклассических уравнений в частных производных третьего порядка.

Задачи исследования. Основные задачи данного исследования заключаются в следующем:

1. Определение условий разрешимости и исследовать влияния коэффициенты при младших производных в уравнении на корректность задачи Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка.

2. Построение аналог функции Римана для общего линейного гиперболического уравнения третьего порядка и изучить ее свойства.

3. Получить представление общего решения уравнения третьего порядка с волновым оператором в главной части и исследовать новые нелокальные краевые задачи для гиперболического уравнения третьего порядка.

4. Изучение корректных краевых задач с нормальной производной на границе рассматриваемой области для уравнения составного типа третьего порядка с оператором $L_1 u = k(y)u_{xx} + u_{yy}$ в главной части.

5. Доказать однозначную разрешимость нелокальных задач для уравнения третьего порядка составного типа и найти условию разрешимости нелокальных задач в прямоугольной области для уравнения составного типа с оператором Лапласа в главной части.

6. Исследование вопросов существования и единственности решений краевых задач для общего уравнения смешанно–составного типа третьего порядка.

Объект и предмет исследования: Локальные и нелокальные краевые задачи для неклассических уравнений в частных производных третьего порядка.

Методы исследований. В диссертационной работе в основном использованы методы редукции краевых задач к интегральным уравнениям типа Вольтерра и Фредгольма первого и второго родов, методы функции Римана, функции Грина, принцип экстремума, метод интегральных тождеств, метод последовательных приближений.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертации являются следующие:

– найдены и доказаны достаточные условия разрешимости задачи Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка в характеристической треугольной области;

– выявлены эффекты влияния младших членов на корректность задачи Дирихле в характеристическом треугольнике и найдены достаточные условия. При нарушении этих условий приведены примеры показывающие, что задача может оказаться некорректно поставленной;

– построен аналог функции Римана для общего линейного гиперболического уравнения третьего порядка и изучены некоторые свойства функции Римана;

– получено представление общего решения уравнения третьего порядка с волновым оператором в главной части;

– исследованы новые нелокальные краевые задачи для гиперболического уравнения третьего порядка;

– исследованы разрешимость нелокальных задач с интегральными условиями для гиперболического уравнения третьего порядка;

– изучены краевые задачи с нормальной производной на границе рассматриваемой области для уравнения составного типа третьего порядка с эллиптическим оператором $L_1 u = k(y)u_{xx} + u_{yy}$ в главной части;

– доказаны теоремы единственности и существования решения локальных и нелокальных краевых задач для уравнений составного типа;

– выявлены условия неразрешимости нелокальных задач в прямоугольной области. Это возможно, так как характеристика $\beta x - \alpha y = 0$ уравнения разделяет область на две части, в одной из которых граничные условия недостаточны для определения решения поставленных задач, а в другой они лишние;

– доказаны теоремы существование и единственность решений краевых задач для уравнения смешанно–составного типа третьего порядка;

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, на которые опираются основные положения диссертации, выносимые на защиту и перечисленные выше, являются новыми.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Основные результаты работы имеют теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации могут быть использованы в научных исследованиях специалистами по математической физике и дифференциальным уравнениям. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при построении математических моделей физических процессов и явлений, приводящихся к неклассическим уравнениям в частных производных.

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы в научных исследованиях по дифференциальным уравнениям и математической физики, а также при чтении специальных дисциплин для магистрантов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались: на Республиканском семинаре по дифференциальным уравнениям "Современные проблемы теории дифференциальных уравнений в частных производных" в Институте математики и информационных технологий АН РУз (руководители: академики АН РУз Т.Д.Джураев и М.С.Салахитдинов); на семинаре кафедры оптимального управления Национального университета Узбекистана (руководитель: академик АН РУз Н.Ю.Сатимов); на семинаре "Современные методы вычислительной математики и математической физики" Национального университета Узбекистана (руководитель: академик АН РУз Ш.А.Алимов); на семинаре "Дифференциальные уравнения и спектральный анализ" Национального университета Узбекистана (руководители: академик АН РУз М.С.Салахитдинов и профессор Р.Р.Ашуров); на научном семинаре специализированного совета Д 015.17.01 при Институте математики и информационных технологий АН РУз (председатель семинара: академик АН РУз Салахитдинов М.С.).

Результаты диссертации также докладывались: на Международном российско–узбекском и российско–казахском симпозиумах "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". (Нальчик–Эльбрус, 2003, 2004 гг.); на Международной научной конференции "Современные проблемы математической физики и информационной технологии". (Ташкент, 2003 г.); на Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики". (Ташкент, 2004 г.); на Международной конференции "Современные проблемы математической физики и информационных технологий". (Ташкент, 2005 г.); на Международной конференции "Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий". (Алматы, 2006 г.); на Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения"посвященной 100 – летию со дня рождения академика И.Н.Векуа. (Новосибирск, 2007 г.); на Международной конференции "Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач". (Самарканд, 2007 г.); на Международной конференции "Дифференциальные уравнения.

Функциональные пространства. Теория приближений"посвященной 100 – летию со дня рождения академика С.Л.Соболева. (Новосибирск, 2008 г.); на Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль Хорезми 2009". (Ташкент, 2009 г.)

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 36 работах, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах постановка задач принадлежит моему учителю академику Т.Д.Джураеву. Доказательство всех результатов принадлежит автору.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из ведения и пяти глав, разбитых на 20 параграфов, а также списка использованной литературы из 137 наименований. Диссертация изложена на 218 страниц машинописного текста. В диссертации параграфы, определения, леммы, теоремы и формулы занумерованы двумя цифрами, из которых первая означает номер главы, вторая — порядковый номер внутри глав.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В предлагаемой работе рассматриваются локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений с частными производными третьего порядка вида

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) L_1 u + L_2 u = f(x, y), \tag{1}$$

где α, β — заданные действительные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, L_1 и L_2 — линейные дифференциальные операторы второго порядка, L_1 может быть гиперболическим, эллиптическим или оператором смешанного эллиптико–гиперболического типа, а L_2 — имеет вид

$$L_2 u \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} +$$
$$+ a_1(x, y)u_x + b_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u. \tag{2}$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются заданными действительными функциями.

Заметим, что постановка краевых задач для уравнения (1) существенно зависит от знака и значений коэффициентов α и β. Уравнение (1) охватывает широкий класс ранее исследованных уравнений. Например, если $\alpha = 1$, $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, $\beta = 1$ а $L_2 u \equiv 0$, то из (1) получаем уравнения, исследованные в работах Т.Д.Джураева, А.Сопуева и М.Мамажанова.

Без ограничения общности предположим, что $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ но $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Настоящая диссертация посвящена постановке и исследованию корректных локальных и нелокальных краевых задач для уравнений третьего порядка вида (1) в конечных областях.

Введение включает в себя описание состояния вопроса, краткий исторический и библиографический обзор. Излагаются цели диссертации, в сжатом виде приводится ее содержание.

Первая глава диссертации состоит из четырех параграфов. Первый параграф посвящен классификации и некоторым каноническим формам уравнений в частных производных третьего порядка. Кроме того излагаются некоторые понятия неклассических уравнений в частных производных третьего порядка.

Во втором параграфе приводятся некоторые задачи, такие как неустановившиеся движение грунтовых вод, распространения акустических волн в слабо неоднородных средах, приводящие к уравнениям в частных производных третьего порядка.

В третьем параграфе рассматривается задача Коши для уравнения, описывающего акустические волны в средах с памятью в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{3}$$

Уравнение (3) перепишем в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \qquad \beta = 1 - \alpha, \tag{4}$$

которое относиться к одному из канонических видов, указанных в § 1. 1.

Задача Коши. *Найти функцию $u(x,t)$ определенную при $(x,t) \in D = \{(x,t) : |x| < \infty;\, t > 0\}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (3) и начальным условиям*

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x), \quad |x| < \infty, \tag{5}$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — заданные функции.

Определение 1. *Функция $u(x,t)$ называется классическим решением задачи Коши, если она удовлетворяет уравнению (4) в области D и непрерывно примыкает к начальным условиям (5).*

Методом интегралов энергии доказана следующая теорема о единственности решения задачи Коши для уравнения (4).

Теорема 1. *Классическое решение задачи Коши для уравнения (4) единственно.*

Используя функцию Римана для гиперболического уравнения второго порядка при разрешимости задачи Коши (4)–(5), доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_i(x) \in C^{(3-i)}(|x| < \infty)$, $(i = 0, 1, 2)$. *Тогда, при* $\forall\, f(x,t) \in C^2(\overline{D})$ *классическое решение задачи Коши существует.*

Доказательство теоремы 2 проводится методом редукции к нагруженному интегральному уравнению Вольтерра второго рода вида относительно функции $u(x,t)$, которое всегда имеет, и притом единственное, решение в классе $C^2(\overline{D})$.

В четвертом параграфе первой главы обсуждается вопрос о корректности задачи Дирихле для линейных гиперболических уравнений третьего порядка. Выявлены эффекты влияния коэффициентов при младших производных, присутствующих в уравнении, на корректность исследуемой задачи.

Пусть D_0 — область, ограниченная отрезками прямых

$$AB:\ \beta x - \alpha y = 0, \qquad BC:\ y = h, \qquad CA:\ x = 0.$$

Обозначим через ∂D_0 границу области D_0.

Для уравнения (1) при $L_1 u \equiv u_{xy}$ в области D_0 рассмотрим следующую **задачу Дирихле.** *Найти регулярное в области* D_0 *решение* $u(x,y)$ *уравнения*

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) u_{xy} + L_2 u = 0, \tag{6}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,y)\big|_{AB} = \psi_1(x), \quad u(x,y)\big|_{BC} = \psi_2(x), \quad u(x,y)\big|_{CA} = \varphi_1(y) \tag{7}$$

где $\varphi_1(y)$, $\psi_i(x)$, $(i = 1, 2)$ — заданные гладкие функции, причем они удовлетворяют следующим условиям согласования

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1(h) = \psi_2(0), \quad \psi_1\left(\frac{\alpha}{\beta}h\right) = \psi_2\left(\frac{\alpha}{\beta}h\right). \tag{8}$$

Относительно коэффициентов уравнения (6) предположим, что

$$a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y) \in C^1(\overline{D_0}) \cap C^2(D_0); \tag{9}$$

$$a_1(x,y),\ b_1(x,y) \in C(\overline{D_0}) \cap C^1(D_0),\ c_1(x,y) \in C(D_0); \tag{10}$$

Имеет место следующая теорема единственности решения задачи Дирихле.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения (6) в области D_0 удовлетворяют условиям (9)–(10) и выполнены следующие неравенства*

$$1)\ a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2 \geq c_0(\xi^2+\eta^2), \qquad \forall \xi,\eta \in D;$$
$$2)\ a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1 \leq 0, \qquad \forall (x,y) \in D,$$

причем, если одно из неравенств выполняется строго, то решение задачи Дирихле единственно.

Заметим, что условия теоремы 1), 2) на коэффициенты при младших производных уравнений являются существенными.

Приведены примеры которые показывают, что при нарушений условия теоремы 3 может привести к нарушению единственность решения задачи Дирихле для уравнения (6).

По существованию решения задачи Дирихле (6)–(8), справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3. Если*

$$\varphi_1(y) \in C^2[0,\ h], \qquad \psi_i(x) \in C^2\left[0,\ \frac{\alpha}{\beta}h\right], \qquad (i = 1, 2.)$$

кроме того, выполнены условия согласования (8), то регулярное решение задачи (6)–(7) существует.

Разрешимость задачи (6)–(7) в явном виде основана на расщеплении оператора M стоящего в левой части уравнения (6). При выполнения равенств

$$2b(x,y) = \frac{\beta}{\alpha}a(x,y) + \frac{\alpha}{\beta}c(x,y), \qquad a_1(x,y) = \frac{\alpha}{\beta}b_1(x,y),$$

уравнение (6) можно представить в виде

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)\Big(u_{xy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u\Big) = 0, \quad (11)$$

где $A(x,y)$, $B(x,y)$ и $C(x,y)$ выражаются через коэффициентов уравнения (6).

При решении задачи Дирихле $\{(11), (7)\}$ воспользуемся возможностью записать уравнение (11) в виде

$$u_{xy} + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = \omega(\beta x - \alpha y), \qquad (12)$$

здесь $\omega(\beta x - \alpha y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Во **второй главе** построена функции Римана для линейных гиперболических уравнений третьего порядка и исследованию ее некоторых свойств. Кроме того, здесь изучаются вопросы, связанные с регулярной разрешимостью основных начально–краевых и нелокальных задач для уравнений третьего порядка с волновым оператором в главной части.

Рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{xy}+Lu=f(x,y), \tag{13}$$

где α, β – заданные постоянные числа, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, а L — линейное дифференциальное выражение вида (2).

Коэффициенты $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $a_1(x,y)$, $b_1(x,y)$, $c_1(x,y)$ и правая часть $f(x,y)$ уравнения (13) заданные, а $u(x,y)$ — искомая действительные функции.

Для уравнения (13) в области $D=\{(x,\ y):\ 0<x<l,\ 0<y<h\}$ рассмотрим краевую задачу в следующей постановке: *найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (13), удовлетворяющее условиям:*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le h, \tag{14}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\quad u_y(x,0)=\psi_2(x),\ 0\le x\le l. \tag{15}$$

Здесь $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $(i=1,\ 2)$ — заданные функции, такие, что

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0),\ \ \varphi_2(0)=\psi_2'(0),\ \ \varphi_1'(0)=\psi_2(0),\ \ \varphi_2'(0)=\psi_2'(0). \tag{16}$$

Очевидно, что прямые $x=const$, $y=const$ являются характеристиками уравнения (13). Поэтому задачу (13) – (15) будем называть характеристической *з а д а ч е й Г у р с а.*

Определение 2. *Регулярным в области D решением уравнения (13) называется действительная функция $u(x,y)$, обладающая в D всеми непрерывными частными производными, входящими в уравнение, и удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

Сопряженным по Лагранжу оператором для дифференциального оператора Mu будет

$$M^*v \equiv -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)v_{xy}+L^*v,$$

где α, β — заданные постоянные, а оператор L^* имеет вид

$$L^*v\equiv(av)_{xx}+(2bv)_{xy}+(cv)_{yy}-(a_1v)_y-(b_1v)_y+c_1v.$$

Определение 3. *Функцией Римана для уравнения (13) называется решение $v=v(x,y;\xi,\eta)$, следующей задачи:*

$$M^*v=0 \tag{17}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta)=\omega_1(\xi,y;\xi,\eta),\quad v_x(\xi,y;\xi,\eta)=exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,t)dt\right),\tag{18}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta)=\omega_2(x,\eta;\xi,\eta),\quad v_y(x,\eta;\xi,\eta)=exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x}c(t,\eta)dt\right),\tag{19}$$

где $\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)$ *и* $\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)$ *являются решениями следующих задач Коши, соответственно*

$$\beta\omega_{1yy}(\xi,y;\xi,\eta)-b(\xi,y)\omega_{1y}(\xi,y;\xi,\eta)+a_1(\xi,y)\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)=0,$$
$$\omega_1(\xi,y;\xi,\eta)\Big|_{y=\eta}=0,\quad \beta\omega_{1y}(\xi,y;\xi,\eta)\Big|_{y=\eta}=1;\tag{20}$$

$$\alpha\omega_{2xx}(x,\eta;\xi,\eta)-b(x,\eta)\omega_{2x}(x,\eta;\xi,\eta)+b_1(x,\eta)\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)=0,$$
$$\omega_2(x,\eta;\xi,\eta)\Big|_{x=\xi}=0,\quad \alpha\omega_{2x}(x,\eta;\xi,\eta)\Big|_{x=\xi}=1,\tag{21}$$

а $(\xi,\,\eta)$ — произвольная точка области D. Очевидно, что задачи (20) и (21) однозначно разрешены.

Имеет место следующая теорема о разрешимости задачи Гурса.

Теорема 5. *Если коэффициенты уравнения (13) и заданные функции удовлетворяют условиям:*

$$a(x,y),\, b(x,y),\, c(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D);\tag{22}$$

$$a_1(x,y),\, b_1(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D),\, c_1(x,y)\in C(D);\tag{23}$$

$$f(x,y)\in \overset{\circ}{C}_{\varkappa}(\overline{D}),\tag{24}$$

$$\varphi_i(y)\in \overset{\circ}{C}{}^2_{\varkappa}[0,h],\ \psi_i(x)\in \overset{\circ}{C}{}^2_{\varkappa}[0,l],\quad i=1,2,\tag{25}$$

то задача Гурса имеет и притом единственное решение.

Теорема 5 доказана методом Римана.

Для любого регулярного в области D решения уравнения (13) получено представление в виде

$$u(x,y)=\alpha v_x(0,y;x,y)\varphi_1(y)+\beta v_y(x,0;x,y)\psi_1(x)-\int\limits_0^x[\beta v(x,0;\xi,y)\psi_2'(\xi)+$$
$$+c(\xi,0)v(\xi,0;x,y)\psi_2(\xi)+A(\xi;x,y)\psi_1'(\xi)+B(\xi;x,y)\psi_1(\xi)]d\xi-$$
$$-\int\limits_0^y[\alpha v(0,\eta;x,y)\varphi_2'(\eta)+a(0,\eta)v(0,\eta;x,y)\varphi_2(\eta)+A_1(\eta;x,y)\varphi_1'(\eta)+$$
$$+B_1(\eta;x,y)\varphi_1(\eta)]d\eta+\int\limits_0^x\int\limits_0^y v(\xi,\eta;x,y)f(\xi,\eta)d\xi d\eta.\tag{26}$$

здесь $A(\xi;x,y)$, $B(\xi;x,y)$, $A_1(\eta;x,y)$ $B_1(\eta;x,y)$ — выражаются через коэффициентов уравнения и функции Римана $v(\xi,\eta;x,y)$ для уравнения (13).

Таким образом, формула (26) дает решения задачи Гурса, если известно $v(\xi,\eta;x,y)$.

В параграфе 2. 2, методом редукции к нагруженным интегральным уравнениям, доказывается теорема существования и единственности функции $v(\xi,\eta;x,y)$ определенной с помощью формул (17)–(21) и устанавливаются некоторые её свойства.

Теорема 6. *Если коэффициенты уравнения (13) удовлетворяют условиям (22) и (23), то функции Римана $v(x,y)$ для оператора M существует и единственна.*

Лемма 1. *Если $a_1(x,y) < 0$, $b_1(x,y) < 0$, $\forall(x,\, y) \in D$, то функция $v(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет неравенствам:*

$$v(x,\eta;l,\eta) < 0, \quad \forall\, x \in [0,l); \quad \alpha v_x(0,\eta;l,\eta) > 1; \tag{27a}$$

$$v(\xi,y;\xi,h) < 0, \quad \forall y \in [0,h); \quad \beta v_y(\xi,0;\xi,h) > 1. \tag{27b}$$

В § 2. 3 для уравнения (13) изучается следующая

Задача Дирихле. *Требуется найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (13), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u(x,h) = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{28}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(l,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{29}$$

где $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$, $(i = 1,\ 2)$ — заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0), \quad \psi_1(l) = \varphi_2(0), \quad \psi_2(0) = \varphi_1(h), \quad \psi_2(l) = \varphi_2(h).$$

Определение 3. *Регулярным решением задачи Дирихле для уравнения (13) называется функция $u(x,y)$, непрерывная в D вместе со своими частными производными входящими в уравнение и удовлетворяющая уравнению (13) в области D.*

Разрешимость задачи Дирихле устанавливается методом Римана и полученным в параграфе 2. 1 интегральным представлением задачи Гурса для уравнения (13) и указана в следующих теоремах:

Теорема 7. *Пусть коэффициенты уравнения (13) удовлетворяют условиям (22), (23) и выполнены неравенства*

1) $a(x,y)\xi^2 + 2b(x,y)\xi\eta + c(x,y)\eta^2 \ge c_0(\xi^2+\eta^2), \qquad \forall\,\xi,\,\eta \in D;$
2) $a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1 \le 0, \qquad \forall\,(x,\,y) \in D,$

причем, если одно из неравенств выполняется строго, то регулярное в области D решение $u(x,y)$ задачи Дирихле единственно.

Теорема 8. *Если выполнены условия теоремы 7 и*

$$\varphi_i(y) \in \overset{\circ}{C}{}^2_{\varkappa}\,[0,\,h], \qquad \psi_i(x) \in \overset{\circ}{C}{}^2_{\varkappa}\,[0,\,l], \qquad i=1,\,2.$$

Тогда регулярное решение задачи Дирихле существует.

При нарушении условий на коэффициенты уравнения, задача Дирихле для уравнения (13) может оказаться некорректно поставленной.

В § 2. 4 для уравнения (13) в области D рассмотрим следующие нелокальные задачи:

Нелокальная задача 1. *Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u_y(x,0)=\psi_2(x),\ 0\le x\le l, \tag{30}$$

и следующим граничным условиям:

$$u(0,y)=\lambda u(l,y)+\varphi_1(y),\ 0\le y\le h, \tag{31}$$

$$u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{32}$$

где $\lambda=const,\ \psi_i(x),\ \varphi_i(y),\ (i=1,\,2)$ — заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования

$$\psi_1'(0)=\varphi_2(0),\, \psi_1(0)=\lambda\psi_1(l)+\varphi_1(0),\, \psi_2(0)=\lambda\psi_2(0)+\varphi_1'(0).$$

Нелокальная задача 2. *Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям (30) и граничным условиям:*

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le h, \tag{33}$$

$$u_x(0,y)=\lambda u_x(l,y)+\varphi_2(y),\quad 0\le y\le h, \tag{34}$$

где $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$, $(i=1,\,2)$ — заданные функции, причем выполняются условия согласования

$$\psi_1(0)=\varphi_1(0),\, \psi_2(0)=\varphi_1(0),\, \psi_1'(0)=\lambda\psi_1'(l)+\varphi_2(0).$$

Нелокальная задача 3. *Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям (30) и нелокальным граничным условиям:*

$$u(0,y)=\lambda_1(y)u(l,y)+\varphi_1(y),\qquad 0\le y\le h, \tag{35}$$

$$u_x(0,y) = \lambda_2(y) u_x(l,y) + \varphi_2(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{36}$$

где $\psi_i(x)$, $\lambda_i(y)$, $\varphi_i(y)$, $(i = 1,\, 2)$ — заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования

$$\psi_1(0) = \lambda_1(0)\psi_1(l) + \varphi_1(0), \quad \psi_1'(0) = \lambda_2(0)\psi_1'(l) + \varphi_1(0).$$

Согласно определению нелокальных задач, нелокальные условия (33) и (34) относится к типу условий Бицадзе–Самарского и Самарского–Ионкина, соответственно.

Теорема 9. *Пусть коэффициенты уравнения (13) и заданные функции удовлетворяют условиям:*

$$a(x,y),\, b(x,y),\, c(x,y) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D); \tag{37a}$$

$$a_1(x,y),\, b_1(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D),\, c_1(x,y) \in C(D); \tag{37b}$$

$$f(x,y) \in C(\bar{D}), \;\; f(0,y) = f(x,0) = 0; \tag{38}$$

$$\psi_i(x) \in C^2[0,l], \quad \varphi_i(y) \in C^2[0,h], \quad i = 1,\, 2. \tag{39}$$

Тогда нелокальная задача 1 при $\lambda \overline{\in} (0,1)$ *имеет единственное регулярное решение.*

Определяя, аналогично предыдущему, понятие регулярного решения нелокальной задачи, с помощью представления (26) и леммы 1 эквивалентно редуцируем нелокальную задачу 1 к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Значения λ, при которых нелокальная задача корректна поставлена, будем называть *регулярным значением* этой задачи.

Известно, что ни одно значение $\lambda \in (0,1)$ не может быть регулярным для нелокальной задачи 1.

Заметим, что не нарушая корректности задачи, краевые условия (35) и (36) можно заменить условием

$$u(0,y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(y) u(x_k, y) + \varphi_1(y), \;\; 0 \le y \le h, \tag{40}$$

$$u_x(0,y) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(y) u_x(x_k, y) + \varphi_2(y), \;\; 0 \le y \le h, \tag{41}$$

где x_k — произвольные фиксированные точки, причем $0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le l$, $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$, $(i = 1,\, 2)$, $\alpha_k(y)$, $\beta_k(y)$ — заданные функции, такие, что

$$\psi_1(0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(0)\psi_1(x_k) + \varphi_1(0), \quad \psi_1'(0) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(0)\psi_1(x_k) + \varphi_2(0).$$

В § 2. 5 рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для одного уравнения в частных производных третьего порядка.

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < l,\, 0 < y < h\}$ исследуется классическая разрешимость следующей задачи: *найти в области* D *решение* $w(x, y)$ *уравнения*

$$M_0 w \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) w_{xy} + c(x, y)w = F(x, y), \tag{42}$$

удовлетворяющее условиям:

а) если $\alpha\beta \neq 0$, *то задаются следующие условия*

$$w(x, 0) = \Psi_1(x), \qquad \int\limits_0^h w(x, y)dy = \Psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{43}$$

$$w(0, y) = \Phi_1(y), \qquad \int\limits_0^l w(x, y)dx = \Phi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{44}$$

б) если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, *то выполняются условия (43) и первое условие из условий (44);*

в) если $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, *то выполняются условия (44) и первое условие (43);*

где α, β — заданные постоянные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а $F(x, y)$, $\Psi_i(x)$, $\Phi_i(y)$, $(i = 1, 2)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющее следующим условиям согласования

$$\Phi_1(0) = \Psi_1(0), \qquad \int\limits_0^h \Phi_1(y)dy = \Psi_2(0),$$

$$\int\limits_0^l \Psi_1(x)dx = \Phi_2(0), \qquad \int\limits_0^h \Phi_2(y)dy = \int\limits_0^l \Psi_2(x)dx;$$

Очевидно, что прямые $x = const$, $y = const$ являются характеристиками уравнения (42) и граничные условия задаются в интегральном виде. Поэтому задачу (42)–(44) будем называть *интегральной задаче Гурса.*

Под классическим решением задач (42)–(44) будем понимать функцию $w(x, y)$ *из класса* $C^2(\overline{D}) \cap C^3(D)$, *удовлетворяющую уравнению (42) и условиям (43)–(44).*

Лемма 2. *Пусть функция* $u(x, y)$ *является решением задачи (42)–(44) и коэффициент* $c(x, y)$ *уравнения (42) ограничен вместе со своими производными и, в области* D *удовлетворяет условиям*

$$c(x, y) \in C^2(D); \quad c_{xy} \le 0, \quad c_x c_y - c^2 \ge 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_0^h\int\limits_0^l(\alpha w_x+\beta w_y)^2dxdy\le h^2l^2\int\limits_0^h\int\limits_0^l f^2(x,y)dxdy.$$

Из леммы 2 непосредственно следует справедливость следующей теоремы о единственности решения задачи (42)–(44):

Теорема 10. *Пусть выполнены все условия леммы 2. Тогда существует не более одного решения задачи (42)–(44) в области D.*

Доказательство существования решения задачи (42)–(44) проводится методом редукции к эквивалентной системе интегральных уравнений, которая безусловно и однозначно разрешима в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Третья глава диссертации посвящена исследованию краевых задач с локальными граничными условиями для уравнения вида (1), т. е. для уравнения третьего порядка составного типа

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(k(y)u_{xx}+u_{yy})+Lu=0, \tag{45}$$

где α и β — заданные вещественные числа, причем $\alpha^2+\beta^2\ne 0$, L — линейный дифференциальный оператор второго порядка вида (2)

Коэффициенты и правая часть уравнения (45) являются заданными действительными функциями.

Первый параграф третьей главы посвящен вопросам постановки краевых задач для линейного уравнения составного типа и доказательству теоремы о единственности решения поставленных задач.

Пусть $k(y)$ $(k(y)>0)$ — непрерывная функция в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных $(x,\ y)$, ограниченной отрезком $[A(0,0)B(1,0)]$ оси x и гладкой кривой σ, лежащей в полуплоскости $y>0$ и опирающейся на ось x в точках A и B.

Относительно кривой σ дополнительно предположим, что она с каждой прямой $x=const$ пересекается лишь в одной точке.

Разобьем кривую σ на две части σ_1 и σ_2 следующим образом:

$$\sigma_1=\{(x,y)\in\sigma:\ \alpha x_n+\beta y_n>0\},\qquad \sigma_2=\sigma\backslash\sigma_1,$$

где $x_n=\cos(n,x)$, $\quad y_n=\cos(n,y)$ и n — внешняя нормаль к границе.

Определение 4. *Классическим решением уравнения (45) будем называть функцию $u(x,y)$, обладающую в области Ω непрерывными частными производными до третьего порядка включительно и обращающую его в тождество.*

Задача $A_{\alpha\beta}^k$. *Найти классическое в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения (45), непрерывное вместо со своими производными в замкнутой области* $\overline{\Omega}$ *и удовлетворяющее граничным условиям:*

а) если $0 < \dfrac{\beta}{\alpha} < +\infty$, *то задаются следующие условия*

$$u(x,y)\big|_{\sigma} = \varphi_1(x,y),\ (x,y) \in \sigma; \quad u(x,y)\big|_{AB} = \tau(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{46}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma_2} = \varphi_2(x,y),\ (x,y) \in \sigma_2; \ \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\Big|_{AB} = \nu(x),\ 0 < x < 1, \tag{47}$$

б) если $\beta = 0$, *то выполняются условия (46) и первое условие (47);*

в) если $\alpha = 0$, *то наряду с условиями (46) выполняется второе условие (47); или наряду с условиями (46) выполняется условие*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma} = \varphi_3(x,y), \qquad (x,y) \in \sigma;$$

где $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\varphi_3(x,y)$, $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные функции, причем $\varphi_1(A) = \tau(0)$, $\varphi_1(B) = \tau(1)$ $\varphi_2(A) = \nu(0)$.

Относительно коэффициентов уравнения (45) предполагается, что

$$k(y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega);\ \ a(x,y),\ \ b(x,y),\ \ c(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega);$$

$$a_1(x,y),\ \ b_1(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega);\ \ c_1(x,y) \in C(\Omega).$$

Теорема 11. *Пусть коэффициенты уравнения (45) удовлетворяют в области* Ω *следующим условиям*

$$2)\ \ \left(a + \frac{1}{2}\beta k'(y)\right)\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \ge c_0(\xi^2 + \eta^2), \qquad \forall\ \xi, \eta \in \Omega;$$

$$3)\ \ a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1 \le 0, \qquad \forall\ (x,\ y) \in \Omega.$$

Тогда классическое решение задачи $A_{\alpha\beta}^k$ *единственно.*

Утверждение теоремы 11 доказывается методом энергетических тождеств.

Для решения задачи $A_{\alpha\beta}^k$ справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть выполнены все условия теоремы 11 и*

$$2b(x,y) = \frac{\beta}{\alpha}\, a(x,y) + \frac{\alpha}{\beta}\, c(x,y), \qquad a_1(x,y) = \frac{\alpha}{\beta}\, b_1(x,y). \tag{48}$$

Если функции $\varphi_1'(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\tau'(x)$ *и* $\nu(x)$ *удовлетворяют условию Гельдера, то решение задачи* $A_{\alpha\beta}^k$ *существует.*

В § 3. 2 проводится доказательство теоремы 12 в случае а) сначала для модельного уравнения составного типа.

В § 3. 3 продолжается доказательство существования решения задачи $A^k_{\alpha\beta}$ для общего случая уравнения (45) при $k(y) \equiv 1$.

В § 3. 4 исследуется разрешимость задачи $A^k_{\alpha\beta}$ для уравнения (45), методом предложенным Т.Д.Джураевым, для модельного уравнения составного типа, и, тем самым обобщается его задача на общие линейные уравнения составного типа.

В **четвертой главе** рассматриваются нелокальные краевые задачи для одного класса уравнений третьего порядка составного типа вида

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx} + u_{yy}) + Lu = f(x, y), \tag{49}$$

где α и β — заданные вещественные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, L — линейный дифференциальный оператор второго порядка вида (2)

Коэффициенты и правая часть уравнения (49) являются заданными действительными функциями.

В § 4. 1 обсуждается постановка задачи и доказывается теоремы о единственности решения нелокальных задач для уравнения (49) в прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x < p,\, 0 < y < q\}$.

Задача $B_{\alpha\beta}$. *Найти в области D функцию $u(x, y)$, определенную при $(x, y) \in D$, непрерывную вместе с производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющую уравнению (49) в области D и граничным условиям:*

а) если $\alpha\beta \neq 0$, то задаются условия:

$$u(0, y) = \varphi_1(y),\; u(p, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le q; \tag{50}$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x),\; u(x, q) = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le p; \tag{51}$$

$$\lambda_1(y)u_x(0, y) + \lambda_2(y)u_x(p, y) = \varphi_3(y),\; 0 \le y \le q; \tag{52}$$

$$\mu_1(x)u_y(x, 0) + \mu_2(x)u_y(x, q) = \psi_3(x),\; 0 \le x \le p; \tag{53}$$

б) если $\beta = 0$, то выполняются условия (50)–(52);

в) если $\alpha = 0$, то выполняются условия (50), (51) и (53);

где $\lambda_j(y)$, $\mu_j(x)$, $(j = 1, 2)$, $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $(i = 1, 2, 3)$ — заданные функции, причем

$$\lambda_1^2(y) + \lambda_2^2(y) \neq 0, \quad \mu_1^2(x) + \mu_2^2(x) \neq 0$$

и выполняются условия согласования, обеспечивающие гладкость решения задачи $B_{\alpha\beta}$ в замкнутой области.

Из постановки задачи $B_{\alpha\beta}$ видно, что в зависимости от расположения характеристик $\beta x - \alpha y = const$ она объединяет в себе различные локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения (49).

Определение 5. *Функцию $u(x,y)$ из класса $C^{(1,h)}(\overline{D})\cap C^3(D)$ назовем классическим решением задачи $B_{\alpha\beta}$, если она удовлетворяет уравнению (49) и краевым условиям (50)–(53).*

Предположение 1. *Пусть для любой $(x,y)\in D$,*

$$a(x,y),\quad b(x,y),\quad c(x,y)\in C^1(\overline{D});$$

$$a_1(x,y),\quad b_1(x,y)\in C(\overline{D});\quad c_1(x,y)\in C(D);$$

и

$$\frac{\partial^2 a(x,y)}{\partial x^2}\le c_1,\quad \frac{\partial^2 b(x,y)}{\partial x\partial y}\le c_2,\quad \frac{\partial^2 c(x,y)}{\partial y^2}\le c_3;$$

$$\frac{\partial a_1(x,y)}{\partial x}\le c_4,\quad \frac{\partial b_1(x,y)}{\partial y}\le c_5.$$

Предположение 2. *Пусть для $\forall\,(x,y)\in D$ $\forall\,\xi,\eta\in D$, выполнены неравенства*

$$1)\ \ a(x,y)\xi^2+2b(x,y)\xi\eta+c(x,y)\eta^2\ge c_6(\xi^2+\eta^2);$$

$$2)\ \ a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-a_{1x}-b_{1y}+2c_1\le -c_7<0;$$

$$3)\ \ \mid\lambda_1(y)\mid>\mid\lambda_2(y)\mid,\qquad \mid\mu_1(x)\mid>\mid\mu_2(x)\mid.$$

Здесь и всюду ниже через c_j, $(j=1,\ldots,7)$ будем обозначать положительные постоянные, конкретные значения которых для наших исследований принципиального значения не имеют.

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 13. *Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда классическое решение задачи $B_{\alpha\beta}$ единственно.*

Задача $B_{\alpha\beta}$ в случаях $\lambda_j(y)\neq 0$, $\lambda_{3-j}(y)=0$, $\mu_j(x)=0$, $\mu_{3-j}(x)\neq\neq 0$, $(j=1,\,2)$ неразрешима, так как характеристика $\beta x-\alpha y=0$ уравнения (49) разделяет область D на две части, в одной из которых краевые условия недостаточны для определения решения задачи $B_{\alpha\beta}$, а в другой они лишние.

Для существования решения нелокальной задачи $B_{\alpha\beta}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть наряду с условиями теоремы 13 выполнены следующие* $\psi_i(x)\in C^{(1,h)}_{1/2}[0,p]$, $\quad\varphi_i(y)\in C^{(1,h)}_{1/2}[0,q]$, $\ i=1,\ 2;$

$$\psi_3(x),\mu_j(x)\in C^{(0,h)}_{1/2}[0,p],\qquad \varphi_3(y),\lambda_j(y)\in C^{(0,h)}_{1/2}[0,q],\quad j=1,\ 2;$$

$f(x,y)\in C^{(1,h)}(\overline{D})$, $\ 0<h<1$. *Тогда решение задачи $B_{\alpha\beta}$ существует.*

В § 4. 2 указывается, что результаты, полученные в параграфе 3. 3, могут быть применены к изучению нелокальных задач для уравнения (49) в прямоугольной области. В этом случае, как и в задаче $A^1_{\alpha\beta}$ применяется метод интегральных уравнений. Однако, в отличие от § 3. 3, здесь получаются системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с логарифмической особенностью в ядре.

В § 4. 3 рассматривается вопрос о существовании решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с логарифмической особенности в ядре. Здесь приводится доказательство, основанное на частичном обращении интегральных операторов.

Пятая глава, состоящая из четырех параграфов, посвящена изучению вопросов о существовании и единственности решений некоторых краевых задач для уравнения третьего порядка смешанно–составного типа

$$\mathfrak{L}u \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) L_1 u + L_2 u = 0, \tag{54}$$

где α, $\beta = const$, причем $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, а $L_1 u \equiv\ k(y)u_{xx}+u_{yy}$, L_2 — линейный дифференциальный оператор второго порядка вида (2).

Коэффициенты уравнения (54) являются заданными действительными функциями.

Пусть $k(y)$, $(yk(y)\ >\ 0$ при $y\ \neq\ 0)$ — непрерывно дифференцируемая функция в односвязной области Ω, ограниченная при $y > 0$ простой кривой Жордана σ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, при $y < 0$ дугами характеристик

$$AC:\ x = -\int\limits_0^y \sqrt{-k(t)}dt, \qquad BC:\ x - 1 = \int\limits_0^y \sqrt{-k(t)}dt.$$

оператора L_1, выходящими из точки $C(1/2,\, y_C)$, $y_C < 0$.

Составную и гиперболическую части смешанной области Ω обозначим через Ω_1 и Ω_2 соответственно; J — единичный интервал $0 < x < 1$ при $y = 0$.

Разобьем кривую σ на две части σ_1 и σ_2, как в § 3. 1 главы 3.

В первом параграфе пятой главы обсуждается постановка краевых задач и доказывается теорема о единственности решения краевых задач для модельного уравнения смешанно–составного типа.

Пусть $L_2 u \equiv 0$ и L_1 — совпадает с оператором Лаврентьева–Бицадзе. Тогда уравнение (54) имеет вид

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx} + signy u_{yy}) = 0, \tag{55}$$

Уравнение (55) рассматриваем в области Ω^0, ограниченной при $y > 0$ нормальным контуром $\sigma:\ x^2 + y^2 = x$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$

оси x, при $y < 0$ отрезками прямых $AB : x + y = 0$; $BC : x - y = 1$, выходящими из точки $C(1/2; -1/2)$.

Задача $C_{\alpha\beta}$. *Требуется найти функцию $u(x, y)$ обладающую следующими свойствами:*

1) $u(x, y)$ — непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области $\overline{\Omega^0}$, кроме точки A, в которой эти производные могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы;

2) $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения (55) в области Ω^0 при $y \neq 0$;

3) $u(x, y)$ — удовлетворяет краевым условиям:

а) если $\alpha \geq \beta$, то задаются следующие условия

$$u\Big|_{\sigma} = f(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma_2} = \varphi(x, y), \tag{56}$$

$$u(x, y)\Big|_{AC} = \psi_1(x), \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \tag{57}$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n}\Big|_{AC} = \psi_2(x); \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \tag{58}$$

б) если $\alpha < \beta$, то наряду с условиями (56), (57) выполняется и условие

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{BC} = \psi_3(x); \tag{59}$$

4) функция $u(x, y)$ ее первые и вторые производные на отрезке AB удовлетворяют непрерывным условиям склеивания.

Здесь $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi_i(x)$, $(i = 1, 2, 3)$ — заданные гладкие функции причем выполняются некоторые условия согласования, обеспечивающие гладкость решения задачи $C_{\alpha\beta}$ в замкнутой области.

Определение 6. *Под регулярным решением уравнения (55) в области Ω^0 будем понимать функцию $u(x, y) \in C^1(\overline{\Omega^0})$ и удовлетворяющую уравнению (55) в области Ω^0 при $y \neq 0$.*

При исследовании задачи $C_{\alpha\beta}$ используется тот факт, что любое регулярное решение уравнения (55) в эллиптической части области Ω^0 может быть представлено в виде

$$u_1(x, y) = v_1(x, y) + \omega_1(\beta x - \alpha y),$$

где $v_1(x, y)$ — решение уравнения Лапласа, а $\omega_1(\beta x - \alpha y)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\omega_1(A) = \omega_1(N) = 0.$$

Здесь N — точка, принадлежащая кривой σ, в которой $\alpha x_n + \beta y_n = 0$.

Теорема 15. *Регулярное решение задачи $C_{\alpha\beta}$ единственно.*

Единственность решения задачи $C_{\alpha\beta}$ устанавливается с помощью метода интегралов энергии.

В § 5. 2 доказывается существование решения задачи $C_{\alpha\beta}$.

В § 5. 3 приводится постановка задачи для общего уравнения (54) и доказывается единственность её решения.

В области Ω рассмотрена следующая

Задача $D_{\alpha\beta}$. *Требуется найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами*

1) $u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap C^3(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;

2) $u(x,y)$ — *является регулярным решением уравнения (50) в области Ω при $y \neq 0$;*

3) $u(x,y)$ — *удовлетворяет краевым условиям:*

а) *если $\alpha > \beta$, то задаются следующие условия*

$$u(x,y)\Big|_{\sigma} = f(x,y), \tag{60}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma_2} = \varphi(x,y), \tag{61}$$

$$u(x,y)\Big|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{62}$$

$$u(x,y)\Big|_{BC} = \psi_2(x), \quad \frac{1}{2} \le x \le 1, \tag{63}$$

б) *если $\alpha < \beta$, то наряду с условиями (60)–(63) выполняется условие*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{BC} = \psi_3(x), \quad \frac{1}{2} \le x \le 1; \tag{64}$$

в) *если $\beta = 0$, то выполняются условия (60) – (63);*

г) *если $\alpha = 0$, то выполняются условия (60), (62), (63) и условие*

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma} = \varphi(x,y); \tag{65}$$

4) *функция $u(x,y)$, кроме случая в), удовлетворяет на J непрерывным условиям склеивания со своими первыми и вторыми производными, а в случае в) только первыми производными,* где $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ и $\psi_i(x)$, $(i = \overline{1,3})$ — заданные функции, причем выполняются некоторые условия согласования, обеспечивающие гладкость решения задачи $D_{\alpha\beta}$, а σ_2 — часть σ, которая определена в § 3. 1 главы 3.

Определение 7. *Под регулярным в области Ω решением уравнения (54) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям $u(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \cap C^3(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, уравнению*

$$\mathfrak{L}u \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) L_1 u + L_2 u = 0, \qquad (x,\, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

и такую, что к интегралам

$$\iint\limits_{\Omega} u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) L_1 u dxdy, \qquad \iint\limits_{\Omega} uL_2 u dxdy$$

можно применить формулу Грина.

Методом интегралов энергии доказана справедливость следующей теоремы единственности решения задачи $D_{\alpha\beta}$.

Теорема 16. *Пусть коэффициенты уравнения (54) таковы, что*

$$k(y) \in C^1(\Omega),\, a(x,y),\, b(x,y),\, c(x,y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2);$$

$$a_1(x,y),\, b_1(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2);\;\; c_1(x,y) \in C(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

и удовлетворяют следующим неравенствам

1) $\lim\limits_{y \to 0} [k(y) - k(-y)] \geq 0;$

2) $\left(a + \dfrac{1}{2}\beta k'(y)\right)\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \geq c_0(\xi^2 + \eta^2), \qquad \forall\, \xi, \eta \in \Omega_1 \cup \Omega_2;$

3) $a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - a_{1x} - b_{1y} + 2c_1 \leq 0, \qquad \forall\, (x,\ y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2;$

тогда задача $D_{\alpha\beta}$ в области Ω не может иметь более одного регулярного решения.

§ 5. 4. В этом параграфе исследуем разрешимость задачи $D_{\alpha\beta}$. При этом для простоты будем предполагать, что $k(y) = sign y$ и σ совпадает с нормальным контуром $x^2 + y^2 = x$.

Теорема 17. *Пусть выполнены все условия теоремы 16 и*

$$2b(x,y) = \frac{\beta}{\alpha}\, a(x,y) + \frac{\alpha}{\beta}\, c(x,y), \qquad a_1(x,y) = \frac{\alpha}{\beta}\, b_1(x,y).$$

Если $f''(x,y)$, $\varphi'(x,y)$ $\psi_i'(x)$, $(i = \overline{1,\ 4})$ — непрерывны по Гельдеру, то регулярное в области Ω решение задачи $D_{\alpha\beta}$ существует.

При выполнении условий теоремы 5.3 задача $D_{\alpha\beta}$ превращается в задачу Трикоми для общего уравнения Лаврентьева–Бицадзе с неизвестной правой частью.

Решив задачу Трикоми, сведём задачу $D_{\alpha\beta}$ к решению интегрального уравнения второго рода, разрешимость которого следует из теоремы Фредгольма и теоремы единственности решения задачи $D_{\alpha\beta}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию корректных краевых задач для неклассических уравнений с частными производными третьего порядка. На основании выше сказанного можно сделать выводы о том, что в результате проведенных исследований были выяснены следующие вопросы:

1. Установлены достаточные условия разрешимости задачи Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка в характеристической треугольной области.

2. Выявлены эффекты влияния коэффициенты при младших производных в уравнении, на корректность задачи Дирихле, приведены некоторые примеры показывающие, что задача может оказаться некорректно поставленной.

3. Построен аналог функции Римана для общего линейного гиперболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами и получено представление общего решения уравнения третьего порядка с волновым оператором в главной части.

4. Исследованы на разрешимость нелокальные задачи с условиями типа Бицадзе–Самарского, Самарского–Ионкина и интегральными условиями для гиперболического уравнения третьего порядка.

5. Изучены краевые задачи с нормальной производной на границе рассматриваемой области для уравнения составного типа третьего порядка с оператором $L_1 u \equiv k(y)u_{xx} + u_{yy}$ в главной части и доказаны теоремы единственности и существования решения локальных краевых задач при $k(y) \equiv 1$ и $k(y) = y^m, \quad m = const > 0$.

6. Доказана однозначная разрешимость нелокальных задач для уравнения составного типа в классе функций $C^{(1,h)}(\overline{D}) \cap C^3(D)$.

7. Выявлены условия неразрешимости нелокальных задач. Это возможно, так как характеристика $\beta x - \alpha y = 0$ уравнения разделяет область на две части, в одной из которых граничные условия недостаточны для определения решения поставленных задач, а в другой они лишние.

8. Доказаны существование и единственность решений краевых задач для уравнения смешанно–составного типа третьего порядка.

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при построении математических моделей физических процессов и явлений, приводящихся к таким уравнениям.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ.

1. Статьи, опубликованных в научных журналах:

1. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Об одном способе решения локальных и нелокальных краевых задач для уравнения составного типа.//Узб. матем. журнал. – Ташкент. 1993. – № 3. – С. 45 – 52.

2. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Задачи Гурса и нелокальная задача для одного класса уравнений третьего порядка.//Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск. 2005. – С. 98 – 109.

3. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. О некоторых задачах для уравнения в частных производных третьего порядка.//Узб. матем. журнал. – Ташкент. 2006. – № 3. – С. 13 – 25.

4. Зикиров О.С. Об одной граничной задаче для уравнения в частных производных третьего порядка.//Математический журнал. – Алматы. 2006. – том 6, №1 (19). – С. 96 – 102.

5. Зикиров О.С. Об одной задаче с интегральными условиями для уравнения третьего порядка.//Узб. матем. журнал. – Ташкент. 2006. № 4. – С. 26 – 31.

6. Зикиров О.С. Об одном уравнении в частных производных третьего порядка.//Доклады АН РУз. – Ташкент. 2007. – № 1. – С. 10 – 13.

7. Зикиров О.С. О краевых задачах для гиперболического уравнения третьего порядка.//Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. Академии наук. – Нальчик. 2007. – том 9, № 1. – С. 45 – 48.

8. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Нелокальные краевые задачи для одного класса уравнений третьего порядка составного типа.//Неклассические уравнения математической физики. – Новосибирск. 2007. – С. 137 – 149.

9. Zikirov O.S. On Boundary–value Problem For Hyperbolic–Type Equation of The Third Order.//Liet. Matem. Rink. – Vilnius. 2007. – vol. 47, No 4. – P. 591 – 603.

   (имеется перевод на английский язык: On Boundary–value Problem For Hyperbolic–Type Equation of The Third Order.//Lith. Math. J. – Vilnius. 2007. – vol. 47, No 4. – P. 484 – 495.)

10. Zikirov O.S. On the non–local boundary value problem of the third order hyperbolic equation.//Int. J. Dynamic.Syst. and Differ.Equations. – Geneve. 2008. – vol. 1, No 3. – P. 205 – 209.

11. Зикиров О.С. О разрешимости нелокальной задачи для одного класса уравнений третьего порядка.//Узб. матем. журнал. – Ташкент. 2008. – №. 3. – С. 34 – 40.

12. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Задачи Гурса и Дирихле для уравнения третьего порядка.//Нелинейные колебания. – Киев. 2008. – том 11, № 3. – С. 305 – 315.

(имеется перевод на английский язык: On Goursat and Dirichlet problems for one equation of third order.//Nonlinear Oscillations. – Kiev. 2008. – vol. 11, No 3. – P. 320 – 330.)

13. Zikirov O.S. A non–local boundary value problem for third–order linear partial differential equation of composite type.//Math. Model.and Anal. – Vilnius. 2009. – vol. 14, No 3. – P. 407 – 421.

14. Зикиров О.С. О корректности задачи Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка.//Узб. матем. журнал. – Ташкент. 2009, № 4. – С. 70–75.

15. Zikirov O.S. On Solvability of the Dirichlet Problem For the Third Order Hyperbolic Equation.//Lith. Math. J. – Vilnius. 2010. – vol. 50, No 2. – P. xx – xx.

(имеется перевод на английский язык: On Solvability of the Dirichlet Problem For the Third Order Hyperbolic Equation.//Lith. Math. J. – Vilnius. 2010. – vol. 50, No 2. – P. 239 – 247.)

2. Работы, опубликованные в материалах и тезисов конференции:

16. Зикиров О.С. К теории уравнений смешанно-составного типа.//Тезисы докл. Междунар. конф. "Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа". – Ташкент. 1993. – С.72.

17. Зикиров О.С. О нелокальной задаче для уравнения составного типа третьего порядка.//Тезисы докл. I съезд математиков Казахстана. – Шымкент. 1996. – С. 95 – 96.

18. Зикиров О.С. Об одном дифференциальном уравнении третьего порядка.//Тезисы докл. Междунар. науч. конф. "Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа". – Фергана. 1998. – С. 78 – 80.

19. Зикиров О.С. О разрешимости краевых задач для уравнения третьего прядка.// Ill–posed and non–classical problems of mathematical physics and analysis: Abstracts of Int. conference. – Samarkand. 2000. – P. 39.

20. Зикиров О.С. О разрешимости нелокальных задач для уравнения третьего порядка.//Вопросы вычисл. и прикладной математики. – Ташкент. 2001. – вып. 109. – С. 172 – 179.

21. Зикиров О.С. Некоторые краевые задачи для уравнения третьего порядка.//Материалы Междунар. российско–узбекского симпозиума "Урав. см. типа и родственные проблемы анализа и информатики". – Нальчик – Эльбрус. 2003. – С.53.

22. Зикиров О.С. О некоторых нелокальных задачах для уравнения третьего порядка.//Труды Междунар. науч. конф. "Спектральная теория дифферен. операторов и родственные проблемы". – Уфа. 2003. – С. 131 – 133.

23. Зикиров О.С. О некоторых локальных и нелокальных задачах для уравнения третьего порядка.//Труды Междунар. науч. конф. "Современные проблемы матем. физики и информац. технологий". – Ташкент. 2003. – ч. II. – С. 43 – 44.

24. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Об одном уравнении третьего порядка смешанно–составного типа.//Материалы Междунар. российско–казахского симпозиума "Урав. см. типа и родственные проблемы анализа и информатики". – Нальчик. 2004. – С. 160 – 163.

25. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Задача Гурса и нелокальные задачи для уравнения третьего порядка.//Труды Междунар. науч. конф. "Дифференц. урав. с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики". – Ташкент. 2004. – том 1. – С. 64 – 67.

26. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Задача Дирихле для уравнения в частных производных третьего порядка.//Труды Междунар. науч. конф. "Современные проблемы матем. физики и информац. технологий". – Ташкент. 2005. – том 1. – С. 269 – 272.

27. Зикиров О.С. Нелокальные граничные задачи для уравнения в частных производных третьего порядка.//Тезисы докл. Междунар. конф.

"Проблемы современной математики и механики". – Алматы. 2005. – С. 81.

28. Зикиров О.С. Задача с интегральными условиями для одного уравнения третьего порядка.//Тезисы докл. Междунар. конф. "Тихонов и современная математика". – Москва. 2006. – Секция № 1. – С. 309 – 310.

29. Зикиров О.С. Решение одной нелокальной задачи для уравнения в частных производных третьего порядка.//Тезисы Междунар. конф. "Современные проблемы дифференц. урав., теории операторов и космических технологий". – Алматы. 2006. – С. 46 – 47.

30. Зикиров О.С. Задача с нелокальными условиями А.М.Нахушева для одного класса уравнений в частных производных третьего порядка.// Материалы III Междунар. конф. "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы матем. биологии, информатики и физики". – Нальчик. 2006. – С. 127 – 129.

31. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для уравнения в частных производных третьего порядка.// Тезисы докл. Междунар. конф. "Дифференц. урав., теорий функций и приложения"посвященной 100 - летию со дня рождения академика И.Н.Векуа 28 мая 2 июня 2007 г. – Новосибирск. 2007. – С.132 – 133.

32. Зикиров О.С. О корректности одной нелокальной задачи для уравнения третьего порядка.//Материалы Междунар. конф. "Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач". – Самарканд. 2007. – С. 244 – 246.

33. Зикиров О.С. Об одной нелокальной задаче для уравнения третьего порядка.// Материалы Междунар. российско–азербайджанского симпозиума "Уравн. см. типа и родственные проблемы анализа и информатики"Нальчик, 12 – 17 мая. – Нальчик. 2008. – С. 69 – 70.

34. Зикиров О.С. О разрешимости нелокальной задачи для одного класса уравнений третьего порядка.//Тезисы докл. Междунар. конф. "Дифференц. урав. Функ. пространства. Теория приближений"посвященной 100 – летию со дня рождения академика С.Л.Соболева. Новосибирск, 5 – 12 октября 2008 г. – Новосибирск, 2008. – С. 139.

35. Зикиров О.С. Об одной неклассической задаче для одного уравнения третьего порядка.//Тезисы докладов научной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения СамДиф – 2009". Самара 29 июня 2 июля 2009 г. – Самара, 2009. – С 26–27.

36. Джураев Т.Д., Зикиров О.С. О корректности задачи Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка.//Труды международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий Аль-Хорезми 2009". Ташкент 18–21 сентября 2009 г. – Ташкент, том 1. – С. 69–72.

Физика–математика фанлари доктори илмий даражасига талабгор ЗИКИРОВ Обиджан Салижановичнинг 01.01.02 – дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича "Учинчи тартибли хусусий ҳосилали ноклассик тенгламалар учун чегаравий масалалар" мавзусидаги диссертациясининг

Р Е З Ю М Е С И

Таянч сўзлар: чегаравий масалалар, нолокал, локал, учинчи тартибли тенглама, қўшма тип, аралаш–қўшма тип, ноклассик тенглама, экстремум принципи, ечим, мавжудлик, ягоналик, шарт, интеграл, юклатилган тенглама, интеграл тенглама.

Тадқиқот объектлари: учинчи тартибли хусусий ҳосилали ноклассик тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалалар.

Ишнинг мақсади: учинчи тартибли хусусий ҳосилали ноклассик тенгламалар учун янги локал ва нолокал чегаравий масалаларнинг қўйилиши ва уларнинг ечилиши муаммолари.

Тадқиқот методлари: интеграл тенгламалар назарияси, чегаравий масалаларни интеграл тенгламаларга келтириш, Риман усули, Грин функцияси усули, экстремум принципи, интеграл айниятлар, энергия интеграллари ва кетма–кет яқинлашиш усуллари.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: учинчи тартибли гиперболик тенглама учун характеристик учбурчакда Дирихле масаласини ечишнинг етарли шарти топилган; умумий чизиқли учинчи тартибли гиперболик тенглама учун Риман функцияси қурилган ва Риман функциясининг айрим хоссалари ўрганилган; учинчи тартибли гиперболик тенглама учун янги нолокал чегаравий масалаллар тадқиқ этилган. Қўшма ва аралаш–қўшма типдаги тенгламалар учун соҳа чегарасида нормал ҳосила берилган чегаравий масалалар ўрганилган. Қўшма типдаги тенгламалар учун тўртбурчакли соҳада нолокал чегаравий масалаларнинг ечимга эга бўлмаслик шартлари аниқланган.

Диссертацияда олинган барча натижалар янги.

Амалий аҳамияти: иш назарий аҳамиятга эга. Диссертацияда олинган илмий натижалар ва усуллардан дифференциал тенгламалар ҳамда математик физика соҳасидаги тадқиқотчилар фойдаланишлари мумкин.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар асосида магистрантларга махсус курслар ўқилади.

Қўлланиш соҳаси: диссертацияда олинган натижалар хусусий ҳосилали ноклассик тенгламаларга келтириладиган физикавий жараёнларнинг математик моделларини қуришда қўлланиши мумкин.

Р Е З Ю М Е

диссертации ЗИКИРОВА Обиджана Салижановича на тему: "Краевые задачи для неклассических уравнений в частных производных третьего порядка" на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: краевые задачи, нелокальные, локальные, уравнения третьего порядка, составного типа, смешанно–составного типа, неклассические уравнение, экстремум, разрешимость, решения, существование, единственность, условия, интегральные, нагруженные уравнения.

Объекты исследования: локальные и нелокальные краевые задачи для неклассических уравнений в частных производных третьего порядка.

Цель работы: постановке и исследование вопросов о разрешимости новых как локальных, так и нелокальных краевых задач для неклассических уравнений в частных производных третьего порядка.

Методы исследования: в работе в основном использованы методы редукции краевых задач к интегральным уравнениям типа Вольтерра и Фредгольма первого и второго родов, методы аналога функции Римана, функции Грина, принцип экстремума, методы интегральных тождеств, интегралов энергии и метод последовательных приближений.

Полученные результаты и их новизна: найдены достаточные условия разрешимости задачи Дирихле для гиперболического уравнения третьего порядка в характеристической треугольной области; построен аналог функции Римана для общего линейного гиперболического уравнения третьего порядка и изучены некоторые свойства функции Римана; исследованы новые нелокальные краевые задачи для гиперболического уравнения третьего порядка. Изучены краевые задачи с нормальной производной на границе рассматриваемой области для уравнения составного и смешанно–составного типов.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

Практическая значимость: работа носит теоретический характер. Могут быть использованы в научных исследованиях специалистами по математической физике и дифференциальным уравнениям.

Степень внедрения и экономическая эффективность: на основе полученных результатов читается спецкурс для магистрантов.

Область применения: результаты могут быть использованы при построении математических моделей физических процессов и явлений, приводящихся к неклассическим уравнениям в частных производных.

R E S U M E

Thesis of ZIKIROV Obidjan Salijanovich on the scientific degree competition of the doctor of sciences in Physics and Mathematics, on speciality 01.01.02 – differential equations;
subject: **"Boundary–value problems for the nonclassical partial differential equations of the third order."**

Key words: boundary–value problem, non–local problem, local problem, equation of the third order, composite type, mixed–composite type, nonclassical equation, solvability, solution, existence, uniqueness, condition, integral equation, loaded equation.

Subjects of research: local and non–local boundary–value problems for the nonclassical partial differential equations of the third order.

Purpose of work: statement and study of the questions of solvability of the new local and non–local boundary value problems of the non–classical partial differential equations of the third order.

Methods of research: in the work used the methods of the theory integral equations of Fredholm and Volterra types; methods of the Riemann's and Green's functions; methods of the integral identity and integral energy; method of extremum principle and method of successive approximations.

The results obtained and their novelly: are formed conditions of solvability of the Dirichlet problem for the hyperbolic type equation of the third order on characteristic triangular domain; construction an analogy Riemann's function for the linear hyperbolic equation of the third order and studied some property of Riemann's function. Studied new non–local problems for the hyperbolic equation of third order. Theorems of the uniqueness and existence classical solutions of the boundary value problems for the equations composite and mixed–composite types were proved.

All results in dissertation work are new.

Practical values: the work has theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: special course for master is read on base of obtained results.

Field of application: results obtained in the dissertation can be used in solutions of problems of differential equations and mathematical physics.