

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС  
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ГУЛИСТОН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

*Физика-математика факултети*

*Математика йўналиши талабаси Акбўтаева Малика*

*Алишер қизининг*

*“Ўқувчиларга математика шакллар  
гўзаллигини ўргатиш усуллари” мавзусидаги*

# Битирув малакавий иши

Илмий раҳбар:

Физика-математика фанлари  
номзоди, доцент. Норжигитов Ҳ.

Гулистон 2014

## **М У Н Д А Р И Ж А**

|                                                     |  |
|-----------------------------------------------------|--|
| 1. Кириш.....                                       |  |
| Асосий қисм.....                                    |  |
| I-боб. Мактабда жозибали шакллари.....              |  |
| 1.1. Алгебраик масалаларнинг геометрик талқини..... |  |
| 1.2. Гиппократ ойчалар ва олтин кесим ҳақида.....   |  |
| II-боб. Оваллар ва лемписката.....                  |  |
| 2.1. Кассини оваллар.....                           |  |
| 2.2. Бернулли леммикатаси.....                      |  |
| 2.3. Никошет конхондаси.....                        |  |
| 2.4. Паскал чиғаноғи. ....                          |  |
| III-боб. Асалари уяси ҳақида масала.....            |  |
| 3.1. Паркет тузиш масаласи .....                    |  |
| 3.2. Қизиқарли масалалар .....                      |  |
| IV. Хулоса.....                                     |  |
| V. Адабиётлар рўйхати.....                          |  |

## КИРИШ

**Мавзунинг долзарблиги.** Гўзалликни кўриш ва сезиш орқали мушоҳада қилиш биринчи навбатда, унинг бошланғич элементларини-ранги, чизиқларини, чизмани, уларнинг уйғунлиги ва муносабатлигини нозик идрок этиш назарда тутати. Биз математикадан машғулотлар ўтказаятганда гўзалликнинг бошланғич, энг содда элементлари-чизма ва чизиқларга дуч келамиз. Кўпинча гўзалликнинг мазмунини ташкил этувчи муносабатлик тушунчаси асосида математик муносабатлар ётади. Бу фикр ажойиб ёзувчи К.Паустовскийнинг “Олтин гул” повестида ёрқин ифодаланган:” Поездда рассом билан учрашгандан кейин Санкт-Петербургга келдим. Шунда яна қаршимда Санкт-Петербургнинг майдонлари ва пропорционал биноларининг муҳташам ансамбллари намоён бўлди.

Мен улар архитектурасининг сирини билмоқ учун уларга узоқ тикилиб қолдим. Уларнинг сири, бинолар у қадар улкан бўлмасаларда, кишида улуғвор иморат каби таассурот қолдиришда эди. Ажойиб иншоотлардан бири-Бош штаб биноси Қишки саройнинг рўпарасида силлиқ ёй каби жойлашган, унинг баландлиги тўрт қаватли уйдан ошмайди. Бироқ бу бино Москвадаги истаган баланд қават бинодан улуғворроқ кўринади.

Бунинг сири мураккаб эмас. Биноларнинг улуғворлиги уларнинг муносиблиги, гармоник пропорсияси ва безаклари-дераза баландлари, кураш ва нақшларнинг сони унча кўп эмаслигига боғлиқдир.

Ана шу биноларга қараганимда яхши дид-бу аввало меъёр ҳисси эканлигини тушунасан киши. “Ёзувчи давом этиб,,... бу бинолар қисмларнинг мутонасиблиги, ортиқча нарса йўқлиги, безакларнинг унча кўп эмаслиги, ҳар бир чизиғи кўриниб турган ва кишига завқ бағишлинаётган соддалик қонунларининг ...” қанчилик муҳим экинлигини таъкидлайди. Шуниси қизиқки, қадимги грекларнинг эстетик онгига меъёр принципи сингиб кетган. Меъёр, мўтадиллик, мутонасиблик-ҳақиқатнинг ва гўзалликнинг кўрсаткичлари ҳисобланган. Меъёрга эга бўлмаган барча

нарса, ҳар қандай мутаносибсизлик беўхшов, хуник, ҳақиқий бўлмаган нарса каби идрок этилган. Қадимги грек философи Платон (эрамиздан олдинги 427-347-й.) бундай деб ёзган эди. “Деярли ҳамма кўриш орқали идрок қилинадиган гўзалликни қисмларини бир-бири ва бир бутун нарсанинг нафис бўёқлари билан муносабатлиги вужудга келтиради дейилади. Буни тасдиқлаётганлар учун ҳам, умуман барча қолганлар учун ҳам гўзал бўлишлик-симметрик ва мутоносиб бўлиш демакдир. “Пифагорчилар айланани ва сферани уларнинг тўлиқ айланма симметрия ва мукамал геометрик кўринишга эга бўлгани учун универсал кўркем чизма деб ҳисобланган.

Геометрияни, чизиқларнинг ва бошқа геометрик чизмаларнинг гўзаллигини, муносабатлигини, симметриклигини сезмасдан ўрганиб бўладими? Гўзаллик ҳамма ерда мавжуд,-дейди, ажойиб математикалардан бири, академик Р.С.Александров.

Фақат математика, аниқроғи геометрия ҳар бир кишига геометрик чизмалар чизиқлари гуруҳининг ташқи гўзалигидан завқ олишгагина эмас, балки гўзалликнинг асосида ётувчи мутаносиблик ва симметриянинг математик асосини тушунишга ҳам имкон беради.

Математикадан чуқур математик мазмунли ҳамда чиройли чизмалар, орнаментлари билан ажралиб турадиган ажойиб геометрик чизмаларнинг моделини яшашга доир масалалар жуда кўп. Ажойиб, жилвадор кўзни қамаштирадиган чизиқлар ҳам кам эмас. Бундай масалалар завқланиш, гўзалик ҳисларини уйғотади.

**Битирув малакавий ишнинг мақсади.** Алгебраик масалаларни геометрик шакллар орқали ўқувчиларга тушунтиришдан иборат.

**Битирув малакавий ишнинг муаммоси.**

**Битирув малакавий ишнинг объекти.**

**Битирув малакавий ишнинг предмети.**

**Битирув малакавий вазифаси.**

**Битирув малакавий ишнинг янгилиги.**

**Битирув малакавий ишнинг тузилиши ва структураси.**

## **I-БОБ. МАКТАБДА ЖОЗИБАЛИ ШАКЛЛАРИ**

### **§ 1.1. Алгебраик масалаларнинг геометрик талқини.**

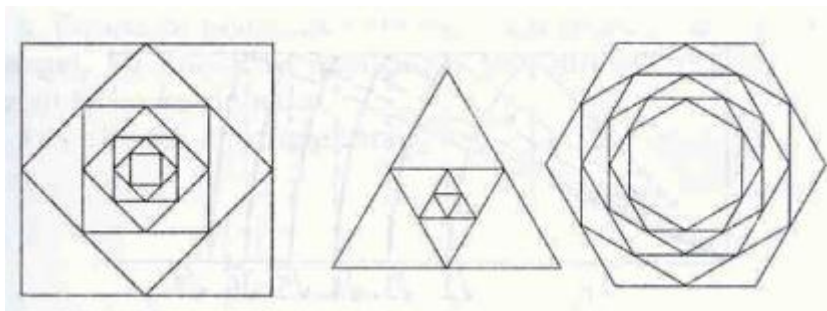
Ушбу  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$  қаторнинг йиғиндисини топинг ва унинг геометрик тасвирини беринг.

**Ечиш:** Йиғиндини чексиз камаювчи геометрик прогрессия йиғиндисининг формуласига кўра топамиз:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Масаланинг геометрик маъноси 1-чизмадан кўриниб турибди (бунда квадратнинг томони бирга тенг деб олинади). Шунга ўхшаш масалани мунтазам учбурчак ва олтибурчак учун ҳам тузиш мумкин (2-чизма.)

Қавариқ  $n$  бурчак диаголлариининг сонини топинг.  $n=5,12$  учун чизма ясанг.



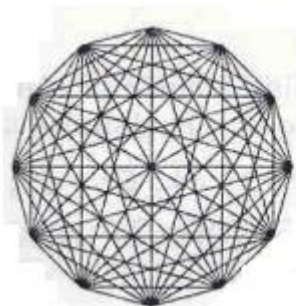
**1-чизма.**

**2-чизма.**

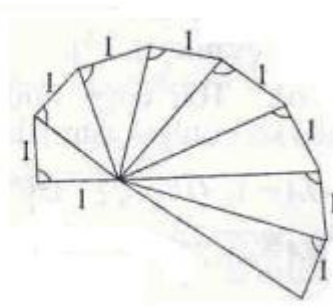
Ечиш:  $n$  бурчакнинг ҳар қайси учидан  $n-3$  та диагал, ҳаммаси бўлиб  $(n-3)n$  та диагал ўтказиш мумкин, лекин ҳар қайси диагал шундай йўл билан икки марта саналгани учун, диагаллари сони  $N$  ни топиш учун ҳосил қилинган кўпайтмани 2 га бўламиз. Шундай қилиб,  $N = \frac{(n-3)n}{2}$ . Агар битта

учдан, сўнгра қўшни учдан ва ҳаказо учлардан барча мумкин бўлган диагоналлари ўтказсак ҳам ўша натижани ҳосил қилар эдик:

$$N = ((n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1) - n \frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{(n-3)n}{2}.$$



**3-чизма.**

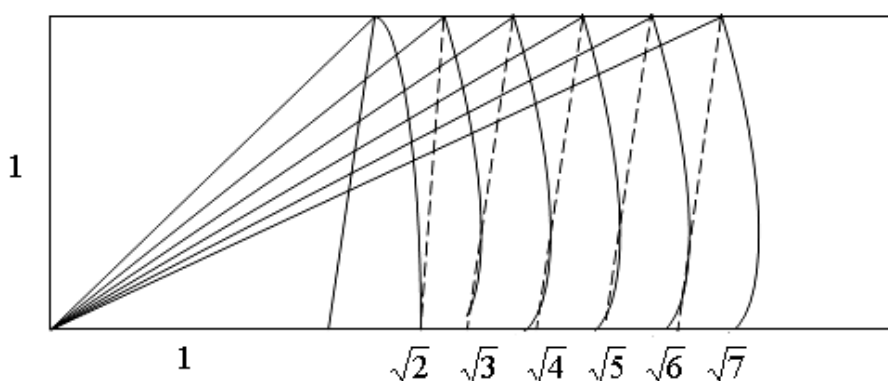


**4-чизма.**

Агар томонларининг сони етарлича катта бўлмаган мунтазам кўпбурчак олсак ва унинг барча диагоналларини чизиб чиқсак, ажойиб, кўз қамаштирувчи расм ҳосил бўлади. (3-чизма). Бунга ўхшаган чизмалар чизиш мажбурий бўлмасдан, синфдан ташқари ишларда бажарилиши мумкин.

Узунликлари  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$  ва ҳаказо сонлар билан ифодаланган кесмаларни циркул ва чизғич ёрдамида ясанг.

**Ечиш:** 4-5 чизмаларга қаранг.



**5-чизма.**

Радуси бирлик учун қабул қилинган айлана берилган. Бу айлана атрофида у билан консентрик бўлган шундай айланалар ясаганки, ҳосил бўлган

ҳалқалар бир-бирига тенгдош ва ҳар бирининг юзи кичик доиранинг юзига тенг бўлсин.

Ечиш: Радуслари  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots$  га тенг бўлган айланалар ясаб, юзи  $\pi kv$ . бирликка тенг бўлган бир хил юзли қатор ҳалқалар ҳосил қиламиз (6-чизма).

Ушбу функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

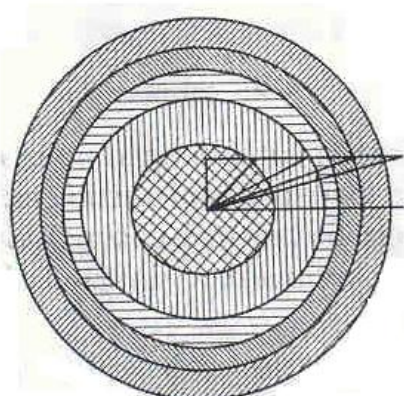
а)  $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$ ;

б)  $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$ .

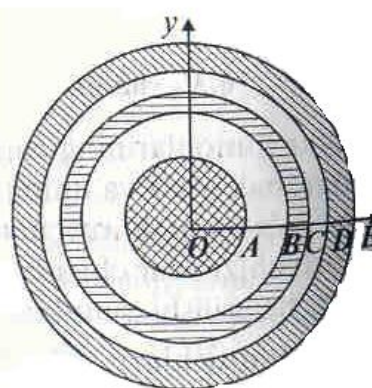
**Жавоб:** Ҳар қайси функциянинг аниқланиш соҳаси 7-чизмада кўрсатилган (штрихланган қисм). Функциялар учун:

а)  $AO = 1, OB = \sqrt{2}; OC = \sqrt{3}; OD = \sqrt{4}; OE = \sqrt{5}; \dots$

б)  $AO = \sqrt{\pi}; OB = \sqrt{2\pi}; OC = \sqrt{3\pi}; OD = \sqrt{4\pi}; OE = \sqrt{5\pi}; \dots$



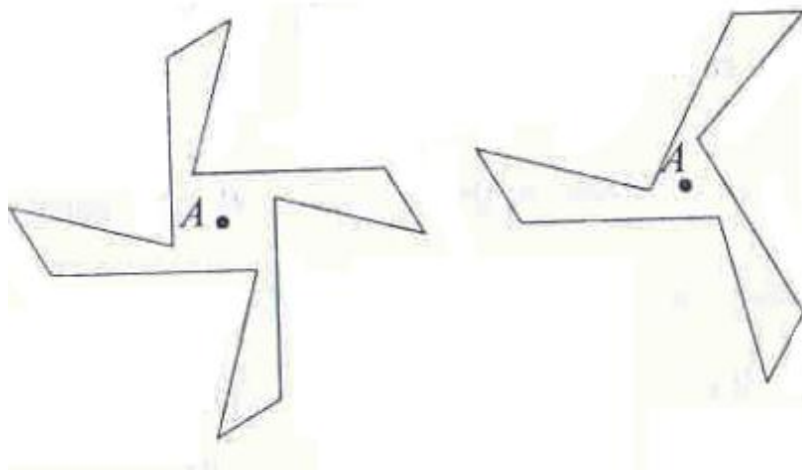
6-чизма.



7-чизма.

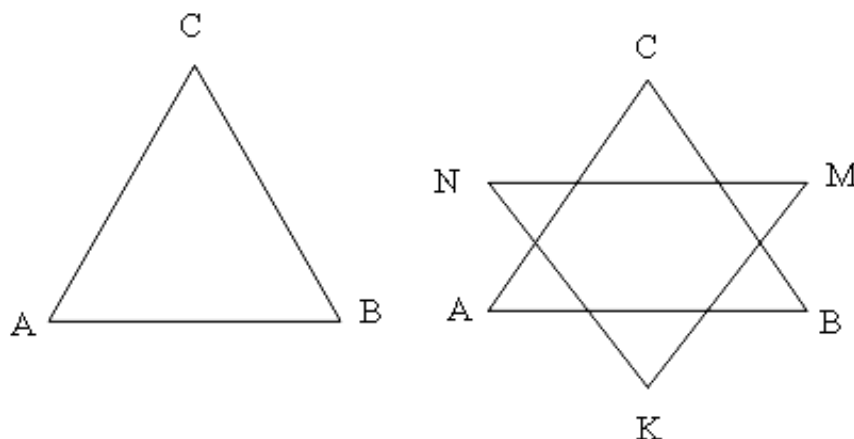
Бирорта кўпбурчак ва унинг ичидаги ва унинг ичида шундай бир А нуқтани ясангки, бу нуқтадан қаралганда кўпбурчакнинг ҳеч бир томони тўлиқ кўринмасин.

**Жавоб.** 8-чизмага қаранг.



8-чизма.

$AB$  томони бирга тенг бўлган “тиканли” чизиқ синиқ чизиқларнинг тенг бўғинларини сони чексиз ўсиб борганда унинг узунлигини ҳисобланг (9-чизма).



9-чизма.

**Ечиш.**  $ABC$  учбурчакнинг периметри учга тенг,  $AKBMCN$  синиқ чизиқнинг периметрини  $P_1$  десак  $P_1 = 4$ ; навбатдаги синиқ чизиқнинг периметри  $P_2 = \frac{16}{3}$  ва ҳаказо.

$$P_1 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 3 = 4; P_2 = \frac{1}{9} \cdot 16 \cdot 3 = \frac{16}{3};$$

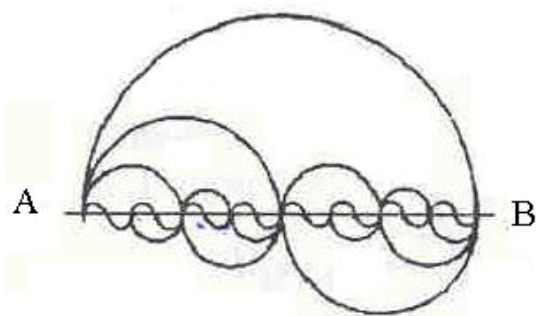
$$P_3 = \frac{1}{27} \cdot 64 \cdot 3 = \frac{64}{9}; \dots P_n = \frac{4^n}{3^{n-1}}; \dots$$

Ўзгарувчи периметрининг лимитини топиш осон:

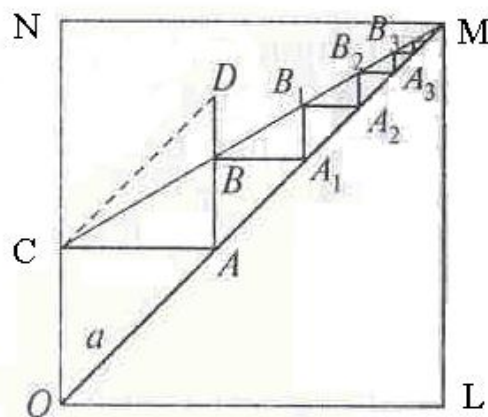


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{3} \right)^n = \infty$$

Софизм. “ $\pi$  сони 2 га тенг”. Диаметри  $AB = a$  бўлган ярим айлана берилган. Диаметрни 2, 4, 8, ... тенг қисмларга бўламиз ва 10-чизмада кўрсатилгандек ярим айланалар чизамиз. Бўлиш жараёнини чексиз давом эттириб,  $AB$  кесмага жуда ҳам яқинлашиб келадиган ва лимит шу  $AB$  га тенг бўлган тўлқинсимон чизиқлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:  $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = AB$ . Ихтиёрий тўлқинсимон чизиқ узунлигини ҳисоблаб,  $l_n = \frac{\pi}{2} \cdot AB$  ўзгармас катталиқни ҳосил қиламиз, демак, унинг лимити  $\frac{\pi}{2} \cdot AB$  га тенг. Оҳирги натижани олдинги натижа билан солиштириб,  $\frac{\pi}{2} \cdot AB = AB$ ; бундан  $\pi = 2$  ни ҳосил қиламиз.



**10-чизма.**



Айтайлик,  $OC = a; AB = aq, q < 1$  бўлсин.  $OLMN$  – квадрат. У ҳолда

$$\frac{AB}{OC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_2A_2}{A_1B_1} = \dots = \frac{A_nB_n}{A_{n-1}B_{n-1}} \quad \text{ёки} \quad \frac{aq}{a} = \frac{A_1B_1}{aq}, \quad \text{бундан} \quad A_1B_1 = aq^2 \text{ ни топамиз,}$$

$$\text{сўнггра: } \frac{aq^2}{aq} = \frac{A_2B_2}{aq^2}, \quad \text{бундан} \quad A_2B_2 = aq^3.$$

Шунга ўхшаш  $A_3B_3 = aq^4, \dots, A_nB_n = aq^{n+1}$  эканини топамиз.

$$LM = OC + AB + A_1B_1 + A_2B_2 + \dots \text{ эканини,} \quad \text{яъни} \quad LM = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

эканини кўрамыз.

Квадратнинг  $LM$  томони нимага тенглигини бошқа йўл билан ҳисоблайлик. Бунинг учун баъзи бир геометрик ясашларни бажарамиз.

Улардан

$$AD = OC; \angle BDC = 40^\circ.$$

$CDB$  ва  $MCO$  учбурчакларнинг ўхшашлигидан

$$\frac{BD}{OC} = \frac{CD}{OM} \quad (2)$$

пропорсия ҳосил бўлади.  $\triangle CDA \sim \triangle OML$  дан

$$\frac{CD}{OM} = \frac{AD}{ML} \quad (3)$$

ни топамиз (2) ва (3) тенгликларни солиштирилиб,

$$ML = \frac{OM \cdot AD}{CD} = \frac{AD \cdot OC}{ML} = \frac{a}{1-q} \quad (4)$$

ни ҳосил қиламиз. (1) ва (4) тенгликларни солиштириб, ишбуни топамиз:

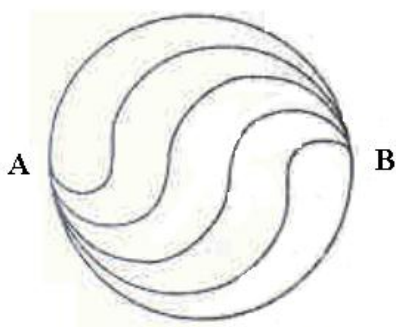
$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q}.$$

Айлана диаметри ҳар бири  $a$  га тенг бўлган  $n$  та қисмга бўлинган.  $a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a$  кесмаларда ярим айланалар ясалган (12-чизма). Ҳосил бўлган барча полосалар тенгдошлигини исбот қилинг.

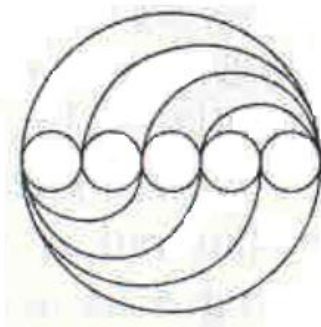
Ечиш. Битта полосанинг юзини ҳисоблаймиз.  $AB$  диаметрнинг бир томонида диаметри  $ka$  га тенг айрим айлана олинади, у ҳолда  $r = \frac{ka}{2}$  ва ярим доиранинг юзи  $S = \frac{\pi a^2 k^2}{8}$  га тенг бўлади.

Полосанинг кўрилатган қисмининг остки чегараси радиуси  $r_1 = \frac{k-1}{2}a$  га тенг, юзи эса  $S_1 = \frac{\pi a^2}{8}(k-1)^2$  га тенг бўлган ярим доирадан иборат.

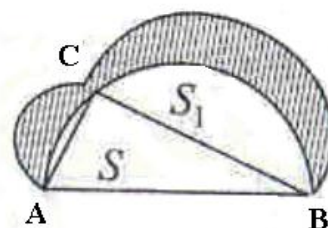
Полоса  $AB$  диаметрининг иккинчи томонидаги қисми радиуслари  $R = \frac{(n+k+1)a}{2}$  ва  $R_1 = \frac{(n-k)a}{2}$



12-чизма.



13-чизма.



14-чизма.

бўлган, юзлари мос равишда

$$\sigma = \frac{\pi a^2}{8}(n-k+1)^2 \quad \text{ва} \quad \sigma_1 = \frac{\pi a^2}{8}(n-k)^2$$

бўлган ярим доиралар билан чегараланган. Изланган юза

$$S - S_1 + \sigma - \sigma_1 = \frac{\pi a^2}{4} n.$$

Шундай қилиб, истаган бир полосанинг юзи  $k$  га боғлиқ эмас ва  $a$  диаметрнинг  $n$  та доирасига тенг (13-чизма).

## § 1.2. Гиппократ “Ойча”лари ва олтин кесим ҳақида

Штрихланган иккита “Ойча”нинг юзи юрми доирага ички чизилган тўғри бурчакли  $ABC$  учбурчакнинг юзига тенг эканлигини исботланг (14-чизма).

**Ечиш:**  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  тенгликнинг ҳар икки томонини  $\frac{\pi}{4}$  га кўпайтириб,  
 $\pi \cdot \frac{AB^2}{4} = \pi \cdot \frac{AC^2}{4} + \pi \cdot \frac{BC^2}{4}$  ни ҳосил қиламиз. Энди ҳосил қилинган тенгликнинг ҳар қайси томонидан иккита сегментнинг йиғиндиси  $S + S_1$  ни айирамиз, натижада тенг юзлари қолади.

Штрихланган “Ойча”лар юзларининг йиғиндиси  $ABCD$  квадрат юзига тенглигини исбот қилинг (15- а чизма).

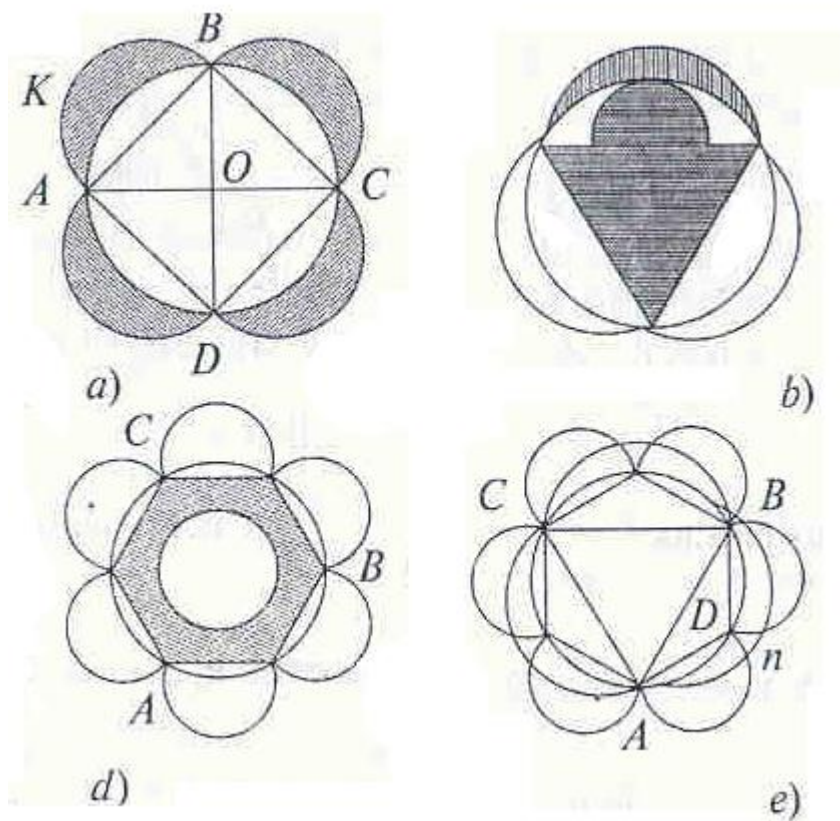
И с б о т. Доираларнинг ёки юрим доиралар юзларининг нисбати улар диаметрлари квадратларўнинг нисбати каби бўлгани учун шубани ёза оламиз:

$$\frac{S_{AKB}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2}{AC^2}, \quad \text{лекин} \quad AC^2 = 2AB^2, \quad \text{яъни} \quad \frac{S_{AKB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2}; S_{AKB} = \frac{1}{2} S_{ABC}, \quad \text{демак}$$

штрихланган битта “ойча”нинг юзи  $ABO$  учбурчакнинг юзига тенг. Квадратнинг юзи тўртта “ойча” юзларининг йиғиндисидан тенг.

**Машқлар.**  $R$  радиусли доирага ( $ABCD$  квадрат бўлган ҳолдагига ўхшаш) мунтазам учбурчак, мунтазам олтибурчак ва ҳаказоларни ички чизиб “ойча”ларнинг юзларини ҳисобланг, унга тенг чизмаларни топинг.

Ечишнинг баъзи вариантлари 15-чизмаларда келтирилган: 15-б чизмада учта “ойча” юзларининг йиғиндиси ички чизилган учбурчак юзи билан радиуси  $R$ га тенг бўлган ярим доира юзининг йиғиндисига тенг. 15-д чизмада олти “ойча” юзларининг йиғиндиси штрихланган соҳанинг юзига тенг. 15-е чизмада юзи  $A_n B$  “ойча”нинг юзига тенг учта катта “ойча”нинг юзи учта кичик “ойча” юзига  $BD$  диаметрли доиранинг юзи қўшилган тенг.



15-чизма

Архимед теоремаси. Арбелон (штрихланган ўроқ) юзи доира юзига тенг (16-чизма).

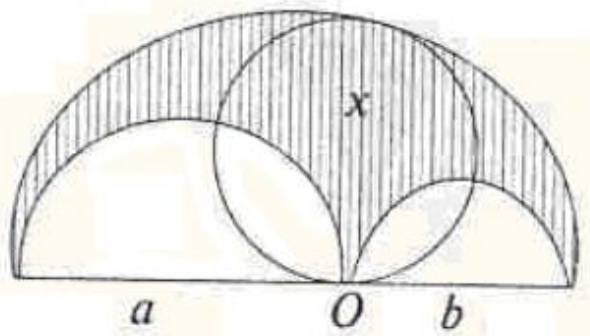
Исбот.  $x^2 = ab$ ,  $\frac{\pi}{4} \cdot x^2 = \frac{\pi}{4} \cdot ab$  ушбу  $(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$  айниятнинг ҳар икки томонини  $\frac{\pi}{8}$  га кўпайтириб,  $\frac{\pi}{8}(a+b) - \frac{\pi}{8}a^2 - \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{4}ab$  ни ҳосил қиламиз, бундан исботланиш керак бўлган ифода келиб чиқади:

$$\frac{\pi}{8}(a+b)^2 - \frac{\pi}{8}a^2 - \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{4}x^2 \quad (x - \text{доиранинг радиуси}).$$

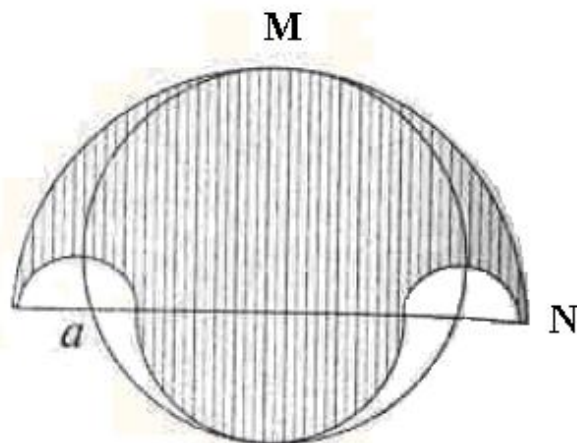
Маркази  $O$  бўлган  $AB$  диаметрли ярим айлана, диаметрнинг иккинчи томонда эса маркази ўша  $O$  нуқта бўлган ихтиёрий  $r$  радиуси ярим айлана чизилган. Диаметрнинг қолган бўлакларида (17-чизмада кўрсатилганидек) яна иккита ярим айлана чизилган, уларнинг радиусини  $a$  билан белгилаймиз.  $CD$  кесмани диаметри қилиб доира ясалган. Шу доиранинг юзи штрихланган чизма (салинон)нинг юзига тенг эканлигини исбот қилинг.

Ечиш.  $r$  радиусли ва  $(r+2a)$  радиусли ярим доираларнинг юзаларини қўшиб ундан  $a$  радиусли

Иккита ярим доира юзини айириб, салиноннинг юзини ҳисоблаш мумкин:



16-чизма.



17-чизма.

$$S = \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi(r+2a)^2}{2} - \pi a^2 = \pi(a+r)^2.$$

$$CD \text{ диаметрга ясалган доиранинг юзи } \frac{\pi \cdot CD^2}{4} + \frac{\pi(2r+2a)^2}{2} = \pi(a+r)^2.$$

Демак, у салиноннинг  $S$  юзига тенг экан.

Юзини ҳисоблашга доир чиройли ва ажойиб чизмали бир нечата масала келтирамиз.

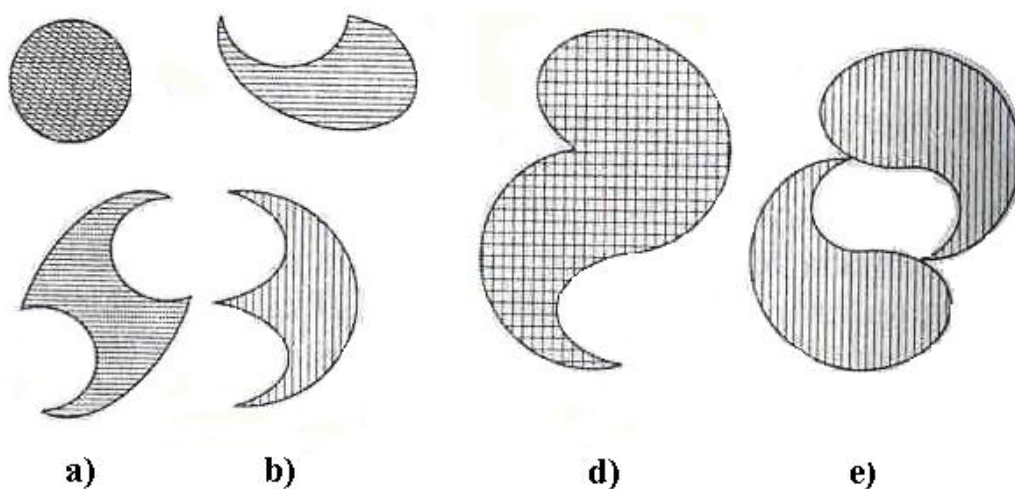
1. Юзи,

А) Берилган доира юзига тенг бўлган (18-а чизма).

Б) Берилган доира юзидан икки марта катта бўлган (18-б чизма),

Д) Уч марта катта бўлган (18-д чизма),

Е) Тўрт марта катта бўлган (18-е чизма) эгри чизиқли чизма (доира эмас) ясанг. (Бошқача жавоблар ҳам келтириш мумкинлигини равшан.)



18-чизма

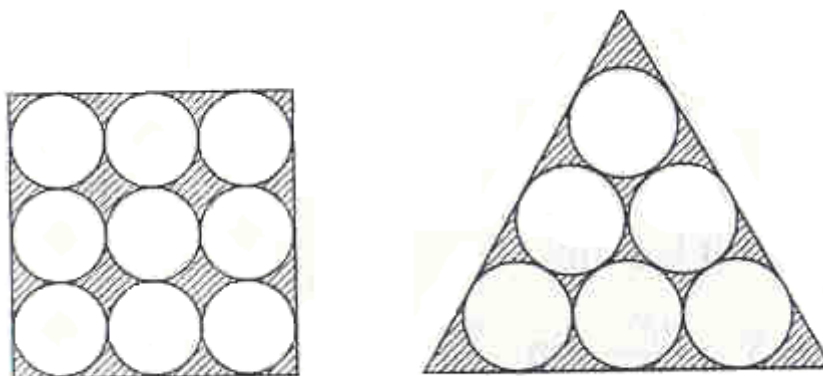
2. Квадратларга бир хил радиусли доиралар ички чизилган (19-чизма). Бу доиралар юзлари йиғиндисининг квадрат юзи нисбат доиралар сонидан қатий назар  $\frac{\pi}{4}$  га эканлигини исботланг.

3. Тенг томонли учбурчакка бир хил радиусли доиралар 20-чизмадагидек ички чизилган. Ички чизилган доирлар юзлари йиғиндисининг учбурчак юзига нисбати доиралар сони чексиз ўсганда  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$  га тенг эканлигини исбот қилинг.

4.  $R$  радиусли айланага бир-бири билан ва катта айлана билан уринадиган  $n$  та ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) айлана ички чизилган (21-чизма).

а) Ички чизилган айлананинг радиуси  $r$  ни аниқланг.

Жавоб.  $r = \frac{R \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ , бу ерда  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ .



**19-чизма.****20-чизма.**

б) Берилган айланага консентирик бўлган кичик айлананинг радиусини аниқланг;

Жавоб:  $\frac{R(1 - \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha}$

д) Штрихланган қисмнинг юзини топинг.

Жавоб  $\pi R^2 \left[ 1 - n \left( \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^2 \right]$ .

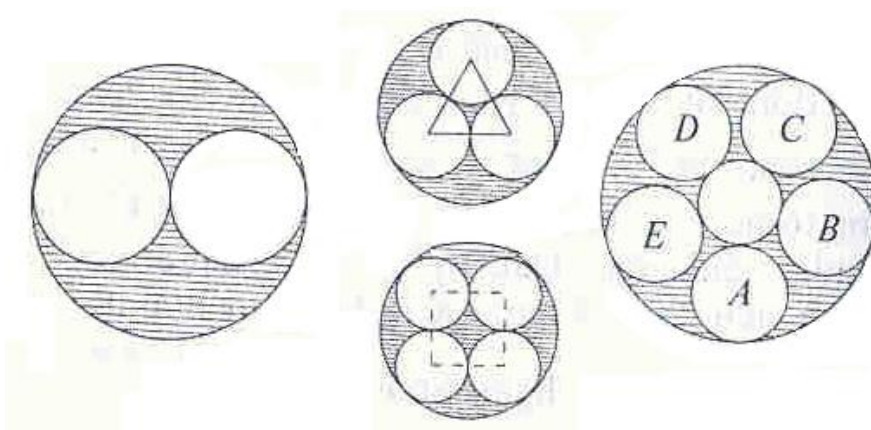
е) Эгри чизиқли  $ABCDE$  юлдузнинг юзини топинг.

Жавоб:  $2r^2(3\sqrt{3} - \pi)$ .

ф) Бу юзнинг  $n$  чексиз ўсгандаги лимитин топинг.

Жавоб:  $\pi R^2$

5.  $R$  радиусли айланага мунтазам  $n$  бурчак ички чизилган. Кўпбурчакнинг ҳар бир томонига уни диаметр қилиб ярим айлана ички чизилган (22-чизма).

**21-чизма.**

а)  $n$  бурчакли  $ABCDEF$  юлдузининг юзини топинг.



Жавоб:  $S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left( 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \pi + 2\alpha - 2 \sin \alpha \right)$ , бу ерда  $\alpha$  – мунтазам

кўпбурчакнинг марказий бурчаги.  $n = 4$  да юзининг қиймати нолга тенг ( $n = 3$  да манфий ишорага эга) эканлигини эслатиб ўтамыз.

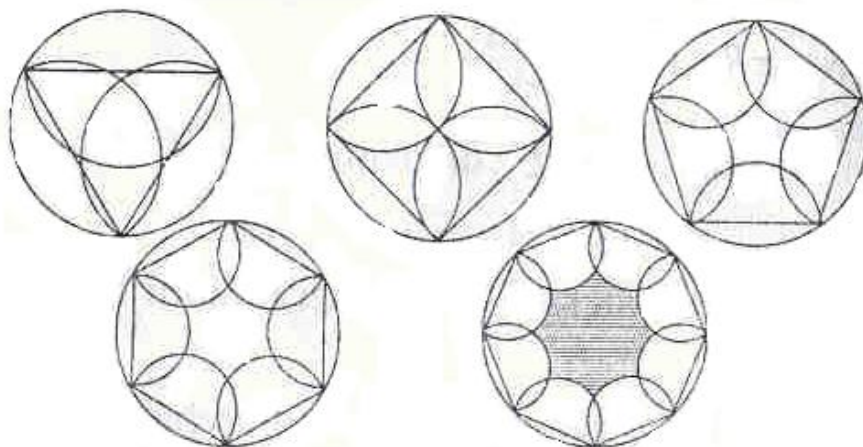
б) Ҳосил бўлган бутун “гул”нинг-юлдузчанинг япроқлари билан бирга юзини топинг.

Жавоб:  $S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left( 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \pi + 2\alpha - 2 \sin \alpha \right)$

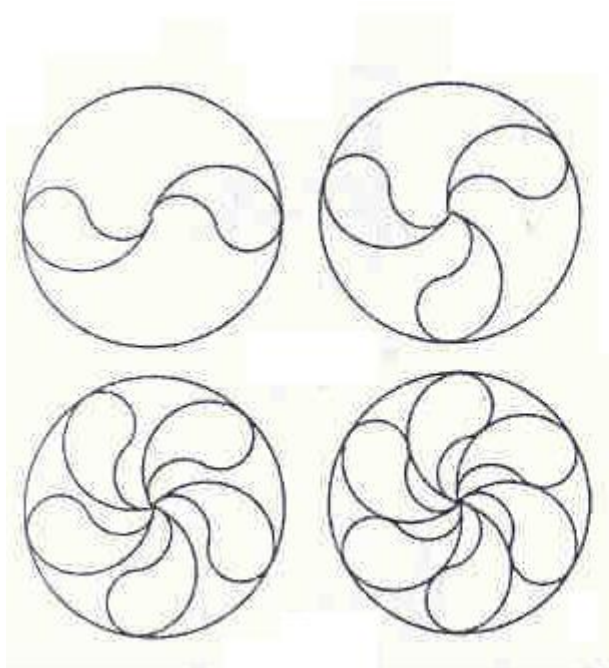
д) “Гул”юлдузнинг  $n$  чексиз боргандаги лимитни топинг.

Жавоб:  $\pi R^2$

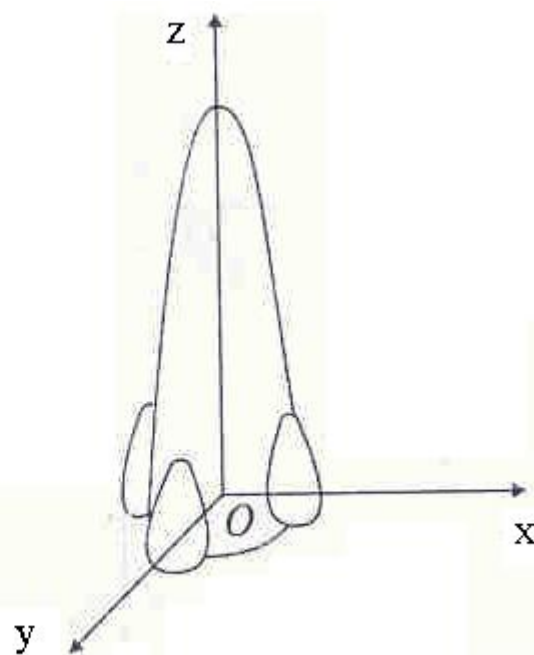
6.  $R$  радиусли доира  $n$  та тенг бўлакка бўлинган ва ҳар бир бўлиниш радиусларида 23-чизмада кўрсатилгани каби “қанот”лар ясалган. Қайси  $n$  номердан бошлаб қанотлар бир бириринг устига тушади. Жавоб:  $n = 6$ .



**22-чизма.**



**23-чизма.**



**24-чизма.**

Нуқтанинг координаталари тўғри тўртбурчак бурчакли декарт координаталари системасида

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 \leq -(z - 12), \\ 3(x - \sqrt{3})^2 + 3y^2 \leq -(z - 3), \\ 3(x + \sqrt{3})^2 + 3y^2 \leq -(z - 3), \\ 3x^2 + 3(y - \sqrt{3})^2 \leq -(z - 3), \\ 3x^{2+3}(y + \sqrt{3})^2 \leq -(z - 3), \\ z \geq 0 \end{cases}$$

шартларни қаноатлантирувчи сиртлар билан чегараланган геометрик жисмни аниқланг.

Жавоб: 24-чизмадан равшан.

Функцияларнинг графикларини ясанг.

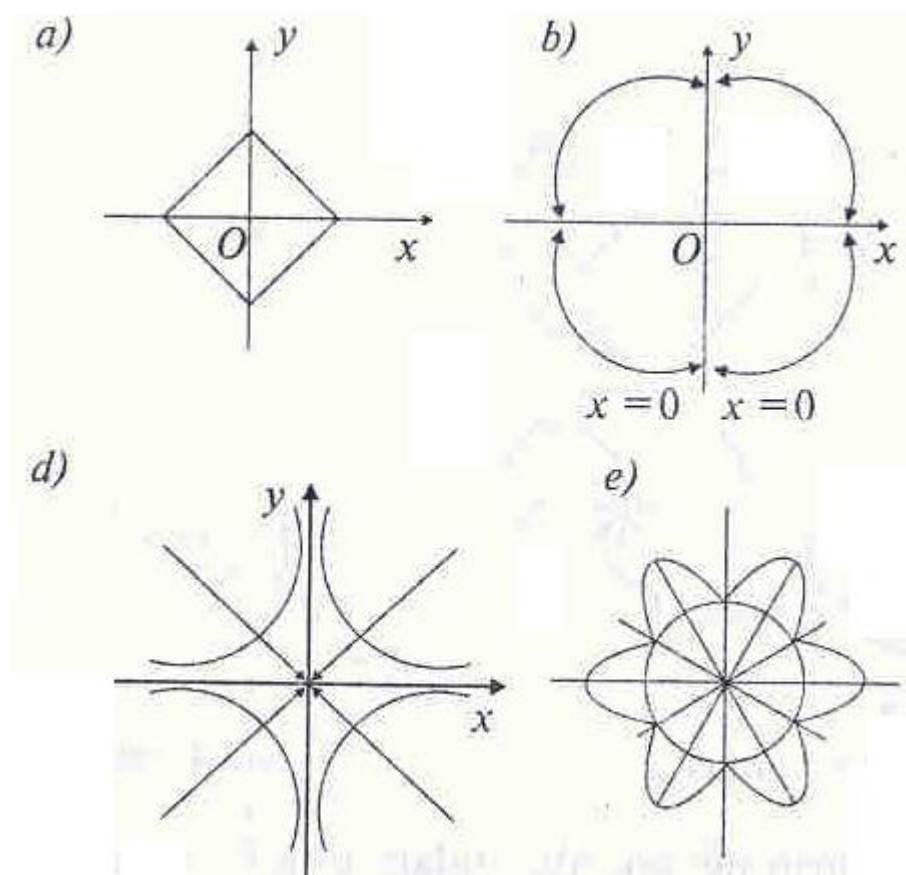
а)  $|x| + |y| = 1;$

б)  $\left(x - \frac{|x|}{x}\right)^2 + \left(y - \frac{|y|}{y}\right)^2 = 4;$

д)  $|y| + \frac{1}{|y|} = |x| + \frac{1}{|x|};$

е)  $(\rho - 2)(\rho - 2 - |\cos 3\varphi|) = 0$

Жавоб: 25-чизмага қаранг.



25-чизма.

Функциянинг аниқланиш соҳаларини топинг:

а)  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;

б)  $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ ;

д)  $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$ ;

е)  $y = \arcsin \frac{x}{y^2 + \arcsin x^2} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .

Жавоблар: 26-чизмаларга қаранг.

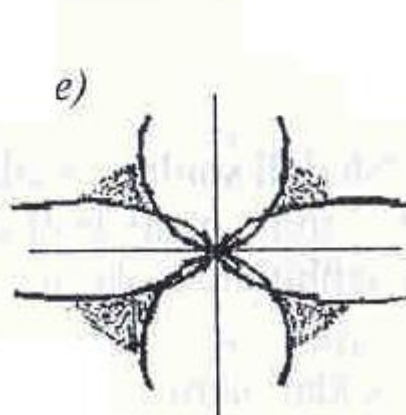
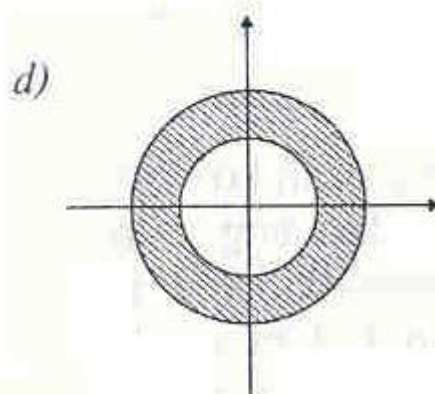
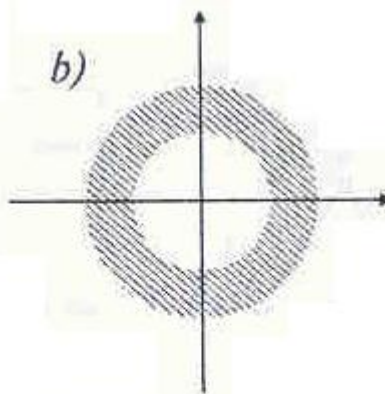
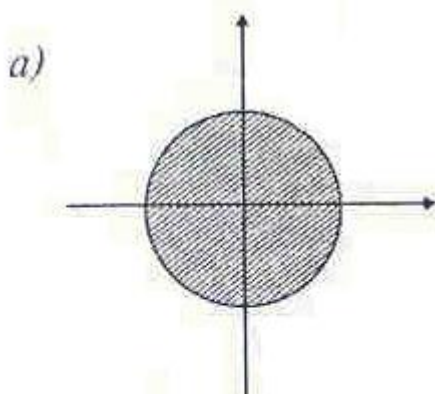
Қоғоздан а) битта, иккита, учта, тўртта ва ҳаказо симметрия ўқиға эға бўлған;

б) симметриянинг марказига эға бўлған:

д)  $n$  – тартибли айланиш марказига эға ( $n = 2, 3, 4, 5$ ), лекин симметрияға ўқиға эға бўмаған чизма қўйиб олинг.

Тушунтириш. Битта симметрия ўқиға эға бўлған чизмани ҳосил қилиш учун бир варақ қоғозни иккиға буклаш, унда ихтиёрий нақишни чизиш ва у бўйича қийиш етарли.

$n$  та симметрия ўқиға эға бўлған чизма ҳосил қилиш учун қоғоз мунтазам  $2n$  бурчак яшаш, қоғоз варағини марказда учратадиган радиуслари бўйича  $2n$ га буклаш керак.



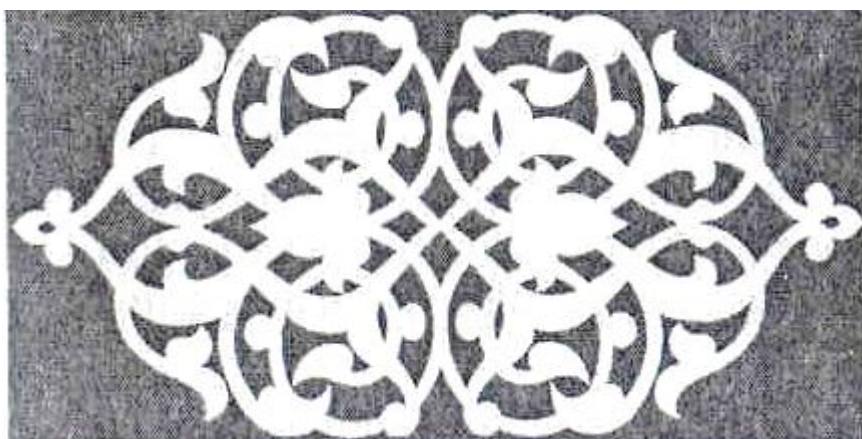
### 26-чизма.

Икки ўзаро перпендикуляр симметрия ўқига эга бўлган ихтиёрий чизма симметрия марказига эга эканлигини кўрсатиш осон.

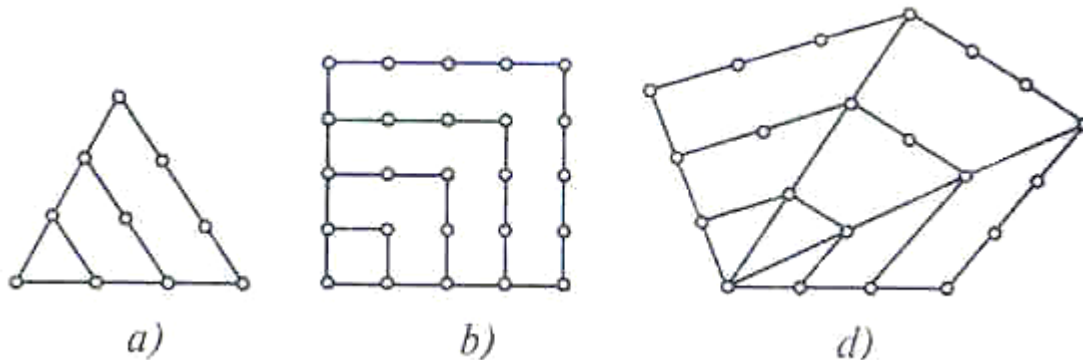
$n$  – тартибли симметрия марказга эга бўлган чизма яшаш учун қуйидагича иш кўрилади: учи  $O$  нуқтадан бўлган тўлиқ бурчакни  $n$  та тенг бўлакка бўламиз.

Тўлиқ бурчакнинг  $\frac{1}{n}$  қисмга жойлашадиган ихтиёрий чизма чизиб олиб, уни қайчи билан қиямиз ва “андаза” ҳосил қиламиз. Андазани  $O$  нуқта атрофида айлантириш билан ўйлаган натижага эришамиз.

27-чизма қоғоздан қирқилган симметрик чизмаларга мисоллар келтирилган.



27-чизма.



**28-чизма.**

**Шаклли сонлар.** Шаклли сонлар асосан кўпбурчаклар билан иш кўрилганда ҳосил бўлади. Томонлари энг кам нуқталардан тузилган учбурчак оламиз, сўнгра томонлари икки марта орттирилган (6 та нуқта), уч марта орттирилган (10 та нуқта) ва ҳаказо учбурчакларни оламиз. Натижада “учбурчакли” сонлар ҳосил бўлади. Асос учун квадрат олсак, “квадратли” сонлар ҳосил қиламиз ва ҳаказо.

Шаклли ёки “кўп бурчакли” сонлар билан қадим замонда пифагорчилар ҳам шуғуланганлар. Улар бирликларни мунтазам кўпбурчаклар чизмаида жойлашган нуқталар ёрдамида ифодаланган 28-а чизмада “учбурчакли” сонлар тасвирланган  $1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10$  (бу сонларнинг умумий ифодаси айирмаси бирга тенг бўлган арифметик прогрессиянинг йиғиндисидан иборат:  $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ).

28- б чизмада “квадрат” сонларни кўрамиз:  $1, 1+3=4, 1+3+5=9, \dots$  (бу сонларнинг умумий ифодаси  $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ ).

“Беш бурчакли” сонлар:  $1, 1+4=5, 1+4+7=12$  28-д чизма. Уларнинг умумий ифодаси  $1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{n(3n+1)}{2}$

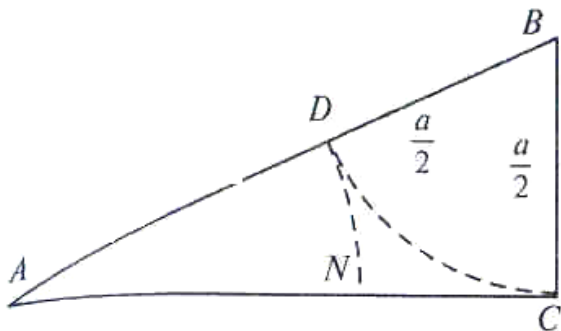
Бу жараён ҳар бир таркибли “кўп бурчакли” сонларни аниқлайди.

**Олтин кесма.** Олтин кесма (чет ва ўрта нисбатда бўлиши) деб аталувчи бу шоирона ибора остида қуйидаги масала ётади: берилган  $a$  кесмани

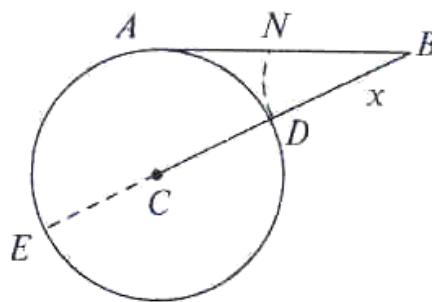
шундай икки бўлакка бўлиш керакки, катта кесманинг кичкина нисбати берилган кесманинг катта кесмага нисбат каби бўлсин.

Катта қисмнинг узунлиги  $x$  билан белгилаймиз, у ҳолда  $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$  бўлади.

Бундан



**29-чизма.**



**30-чизма.**

$$x^2 = a(a-x); x^2 = a^2 - ax; x^2 + ax - a^2 = 0 \quad (1)$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}, \quad \text{бундан} \quad x_1 = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618a$$

Геометрик яшаш. 1-усул. Сиркул ва чизғич ёрдамида  $x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$

кесмани бир кетида  $AC = a$ , иккинчи катети  $BC = \frac{a}{2}$  бўлган тўғри бурчакли

учбурчакнинг гипотенузасидан иккинчи  $\frac{a}{2}$  катетнинг айирмаси каби топамиз.

29-чизма.  $AN = AD = x$  эканини кўрамиз, демак,  $N$  – керакли нисбатда бўлувчи нуқтадур.

2-усул. (1) тенгликдан

$$a^2 = x(a+x) \quad (2)$$

экани чиқади.

Яшаш.  $AB = a$  бўлсин (30-чизма).  $\frac{a}{2}$  радиус билан айлана чизамиз ва

А нуқтада  $AB$  уринма ўтказамиз. Сўнгра,  $B$  нуқтадан ва марказдан кесувчи ўтказамиз.  $CD = a$  бўлган учун:  $a^2 = (a+x)x$ , демак,  $BD = x$  ва  $N$  олтин кесмани ҳосил қилувчи нуқта экан. Олтин кесим мунтазам кўпбурчакларга доир қатор масалаларини ечишга имкон беради.

Кўпчилик айланани сиркул ва чизғич ёрдамида бешта тенг қисмга бўлиш усулини билади, бироқ бу яшашни математик жихатдан асослаб бериша олмайди.

Айланани тенг беш қисмга бўлишга олиб келувчи амаллар кетма-кетлигини, яъни мунтазам бешбурчак яшашни кўриб чиқамиз. 31-чизма.

$AB$  ва  $PQ$  – радиуси  $R$  га тенг бўлган айлананинг диаметрлари бўлсин.  $OP$  радиусининг ўртасини ва сиркулни  $AL$  қадар лчиб ( $L$  ни марказ қилиб) ёй чизамиз. Ёйнинг диаметр билан кесишиш нуқтаси  $N$  ни  $A$  нуқта билан тутуаштирамиз, ҳосил бўлган  $AN$  кесма излаган кесмадир-у ички чизилган мунтазам бешбурчакнинг томонига тенг.

Кўриб чиқилган математик жихатдан асослашга ҳаракат қиламиз.

$R$  радиусли айланага мунтазам ва юлдузсимон бешбурчаклар ички чизилган бўлсин. 32-чизма. Баъзи бир штрих чизиқларни ўтказиб ва кўпбурчакларнинг бурчакларини аниқлаб, қуйидаги учбурчакларнинг ўхшашлигини исбот қилиш осон:

$$\triangle BKJ \sim \triangle ABK \sim \triangle DAB \sim \triangle ODM \sim$$

Учбурчакнинг ўхшашлигидан мос томонларининг пропосиналлиги келиб чиқади:

$$\frac{JK}{BK} = \frac{BK}{AK} = \frac{AB}{BD} = \frac{DM}{OD}$$

Ушбу белгилашларни киритамиз:  $JK = x, AJ = y, DM = a_{10}, OD = R$ ,  $y$  ҳолда қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x+y} = \frac{x+y}{x+2y} = \frac{a_{10}}{R}$$

бунда  $y^2 = x(x+y)$ ,  $(y+y)^2 = y(x+2y)$  тенгликлар келиб чиқади. Бу тенгликлар  $AC$  кесма  $K$  нуқта билан ўрта ва чет нисбатда, унинг катта қисми  $AK$  ҳам  $L$  нуқта ёрдамида ўрта ва чет нисбатда бўлиниши кўрсатади.



(3) тенгликнинг биринчи касрини унинг охирги касрга тенглаб,  $\frac{x}{y} = \frac{a_{10}}{R}$  ёки

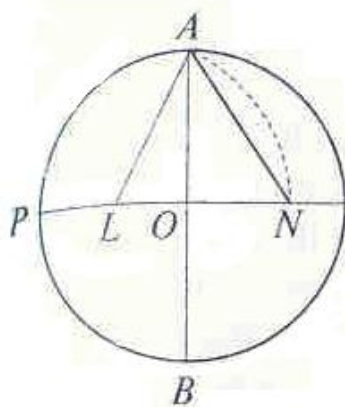
(ҳосила пропорсияни татбиқ этиб)  $\frac{x+y}{y} = \frac{a_{10}+R}{R}$  ни топамиз, бундан

$$\frac{y}{x+y} = \frac{R}{a_{10}+R}.$$

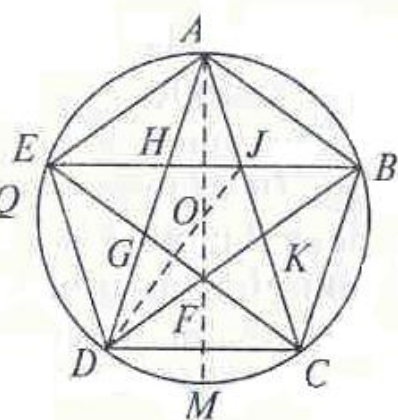
Энди (3) тенгликнинг иккинчи касрини шу тенгликнинг охириги касри билан тенглаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{y}{x+y} = \frac{a_{10}}{R}$$

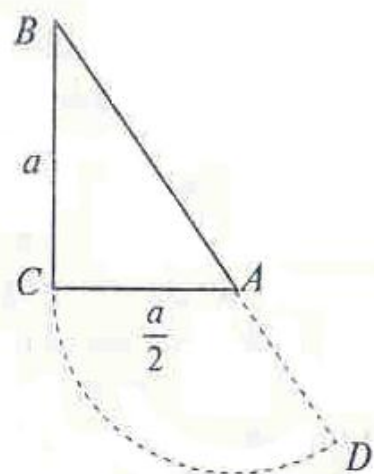
(4) ва (5) тенгликларни солиштирсак:



31-чизма.



32-чизма.



33-чизма.

$$\frac{a_{10}}{R} = \frac{R}{a_{10}+R},$$

$$a_{10} + Ra_{10} - R^2 = 0, \quad (6)$$

$$a_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad (7)$$

(6) ва (1) тенгликларни таққослаб, қуйидаги хулосага келамиз: олтин кесмадаги икки кесмадан каттаси шундай айлананинг радиуси мунтазам мумкинки, бу айланага томони кичик жкесмага тенг бўлган мунтазам ўнбурчакни ички чизиш мумкин:

Бундан қуйидаги масалалар келиб чиқади:

1.  $R$  радиусли айланани 10 та тенг бўлакка бўлинг.

Берилган  $R$  кесмани олтин кесим нисбатида бўламиз. Унинг катта кесмаси изланган кесма бўлади. Уни  $a_{10}$  билан белгилаймиз. Дарҳақиқат, олтин кесмада бўлган иккита  $R$  ва  $a_{10}$  кесмадан кичиги (яъни  $a_{10}$ ) ички чизилган мунтазам ўнбурчакнинг томони бўлади.

2. Томони берилган  $a$  кесмага тенг бўлган мунтазам ўнбурчак ясанг.

$a$  кесмани ўрта ва чет нисбатда бўлинган бирорда кесманинг кичик бўлгани деб оламиз. Бу кесманинг катта бўлгани  $R$  билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\frac{a}{R} = \frac{R}{a+R}; a^2 + aR = R^2; R^2 - aR - a^2 = 0.$$

$$R = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

$R$  ни сиркул чизғич ёрдамида яшаш осон. 33-чизма.  $BD = R$  эканлиги кўриниб туради.

3. Сиркул ва чизғич ёрдамида  $36^\circ$  ли бурчак яшаш.

**Ечиш.** 32-чизмадаги  $DOM$  тенг ёнли учбурчакнинг  $O$  учидаги бурчак  $36^\circ$  га тенг, бу бурчак қаршисида ётган  $DM$  кесма ички чизилган мунтазам ўнбурчакнинг томони, кесма ички чизилган мунтазам ўнбурчакнинг томони, учбурчакнинг  $OM$  ва  $OD$  томонлари айлананинг радиуслари.  $R$  ни билган сиркул ва чизғич ёрдамида  $a_{10}$  ни топамиз, ундан томони учун ихтиёрий кесмани, асоси учун эса бу кесманинг учбурчакнинг учидаги бурчак  $36^\circ$  га тенг.

4. Сиркул ва чизғич ёрдамида  $3^\circ$  ли бурчак яшаш.

**Ечиш.** Бурчакнинг тенг иккига бўлишни билган ҳолда қуйидагини топамиз:

$$\frac{36^0}{2} = 18^0; \frac{18^0}{2} = 9^0; \frac{60^0}{2} = 30^0, 15^0 - 9^0 = 6^0; \frac{6^0}{2} = 3^0.$$

5.  $n^0$  ли бурчакни ( $n$  – ихтиёрий, учга бўлинмайдиган натурал сон) стркул ва чизғич ёрдамида  $n$  та тенг бўлакка бўлиш мумкинлигини исбот қилиш.

**Ечиш.**  $3^0$  ли бурчак ясашни билан ҳолда сиркул ва чизғич ёрдамида катталиги  $3k^0$  бўлган ихтиёрий бурчак ясаймиз, шундай қилиб  $n^0$  ли бурчакнинг қисми ясай оламиз. Демак,  $n^0 = 3k^0 + 1^0$  ёки  $n^0 = 3k^0 - 1^0$ , демак, бир градусли бурчакни ҳосил қиламиз.

Айланани ўнта тенг бўлакка бўлишни билиб олгач, ички чизилган мунтазам бурчакларни ҳам яшаш йўлини топамиз. Бунинг учун ўнбурчакнинг учларини биттадан туташтириб чиқиш кифоя. Аммо ҳали олдимизда айланани тенг беш бўлакка бевосита бўлиш масаласини ечиб турибди. Геометрик яшашнинг тўғарагини исбот қилайлик 31-чизма. Бу яшашнинг асосида Евдокс теоремаси ётади. Теорема бундан ифодаланади: айланган ички айланага ички чизилган мунтазам олтибурчак ва ўнбурчаклар томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг:

$$a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2 \quad (8)$$

(8) тенгликнинг тўғрилигини мунтазам кўпбурчакларнинг томонларини уларга ташқи чизилган айлана радиуси билан ифодалаб кўрсатиш осон.

Маълумки,  $a_6 = R$ ,  $a_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ .  $a_5$  ни топиш учун мунтазам кўпбурчак томонларини иккилантириш формуласидан фойдаланамиз:

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

$a_{10}$  ни билган ҳолда  $a_5^2 = \frac{5R^2 - \sqrt{5}R^2}{2}$  ни топамиз. Энди  $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$  эканлигига

ишонч ҳосил қилиш мумкин. Евдокс теоремасининг жуда ажойиб исботи

Г.Тимердингнинг 1924-йилда босилиб чиққан “Золотое деление” (“олтин кесим”) китобидан топиш мумкин. Ана шу исбот билан танишиб чиқайлик.

(3) тенгликдаги нисбатни  $t$  билан белгилаймиз, у холда  $\frac{x}{y} = t$ ;  $\frac{y}{x+y} = t$ .

Иккала тенгликни хадма-хад кўпайтурсак

$$\frac{x}{x-y} = t^2. \quad (9)$$

## **II-БОБ. ОВАЛЛАР ВА ЛЕМПИСКАТА**

### **2.1. Кассини оваллар**

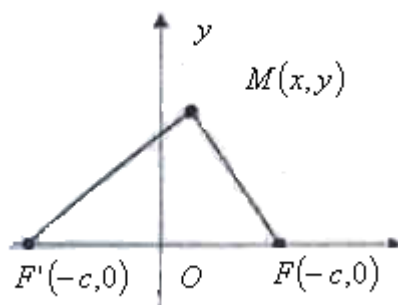
Табиатда математика деган мавзуга доир қуйидаги масалани кўриб чиқамиз.

Кассини овали деб шундай нуқталарнинг геометрик ўрнига айтиладики, улардан ҳар бирининг фокуслар деб аталувчи маълум икки нуқтагача бўлган масофанинг кўпйтмасининг  $a^2$  билан белгилаймиз. 34-чизмада кўрсатилганидек, тшғри бурчакли Декарт координаталари системасини

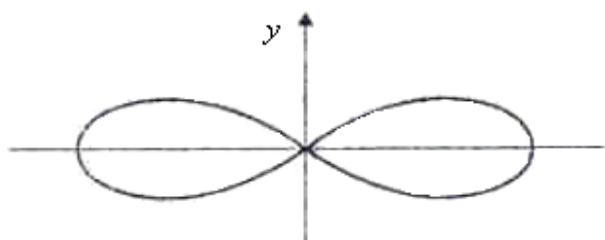
оламиз ва эгри чизиқнинг тенгламасини тузамиз.  $M(x, y)$  овалнинг нуқтаси бўлсин, у ҳолда  $MF \cdot MF' = a^2$ ;  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2$  ни соддалаштириб,

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4 \quad (1)$$

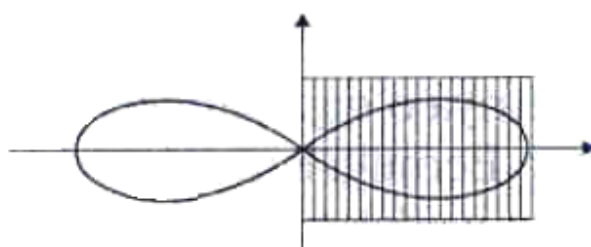
тенгликни ҳосил қиламиз.



34-чизма.



35-чизма.



36-чизма.

(1) тенгламага кирувчи  $a$  ва  $c$  ҳарфларнинг ҳар хил қийматларида рўй бериши мумкин бўлган барча ҳолларни текшираамиз.

Биринчи ҳол.  $a = c$ . Бунда (1) тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади. N

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$$

Қутб координаталари  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  га ўтсак;  $\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$  ҳосил бўлади.

Ҳосил қилган эгри чизиқ Кассини овалининг бир кўринишидир. Бу эгри чизиқни машҳур математик Яков Бернулли текширган, шунинг учун у Бернулли лемнискатаси деб аталади. (Эгри чизиқнинг номи грекча леменискос, яъни ўров деган маънони билдирувчи сўздан келиб чиққан.)

Лемниската графигини унинг қутб тенгламаси бўйича ясаймиз. Тенгламанинг чап томонидан манфий бўлмаган  $\rho^2$  миқдор тургани учун унинг ўнг томони ҳам манфий қийматлари қабул қила олмайди, демак,  $\cos 2\varphi \geq 2$ , яъни

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi;$$

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Радиус-вектор  $2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$  да ёки  $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  да нолга айланиш кўрамиз.  $\varphi = 0$  қийматга  $\rho = \pm c\sqrt{2}$  қиймат мос келади, қутуб бурчаги  $\varphi$  ортиши билан  $\rho$  нинг абсолют қиймати камаяди ва  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  да  $\rho = 0$  бўлади 35-чизма. Эгри чизиқ  $O$  нуқтага нисбатан симметрик, чунки қутб бурчагининг ҳар бир мумкин аталадиган радиус-векторнинг эгри чизиқ тенгламасини қаноатлантирадиган иккита (мусбат ва манфий) қиймати мос келади. Эгри чизиқ координата ўқлари билан устма-уст тушадиган иккита симметрия ўқиға ҳам эга.

Бернулли лемнискатаси кўпгина ажойиб математик хоссаларга эга, шунингдек техникада ва физикада амалий тадбиқ қилинади. Техникада лемнискатдан темир ва трамвай йўлларининг кичик радиусли бурулишларни ҳисоблашда фойдаланилади.

Интеграллашнинг энг содда қоидаларидан ва юзнинг қутб координаталардаги  $S = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\varphi$  формуласидан фойдаланиб лемниската ичига жойлашган қисмнинг юзини ҳисоблашимиз мумкин.

$$\frac{1}{4} S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \rho^2 d\varphi = \frac{c^2}{2}; \quad S = 2c \quad \text{ёки} \quad S = (c\sqrt{2})^2$$

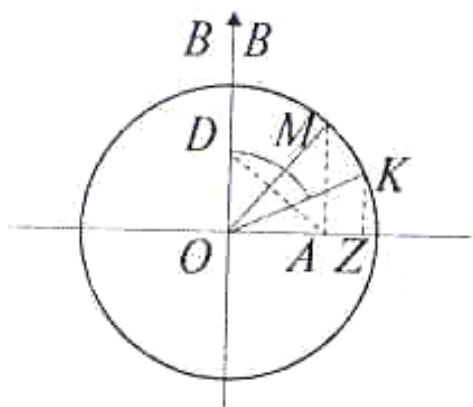
Шундай қилиб, эгри чизиқ иккита япроқнинг юзи томони  $c\sqrt{2}$  га тенг бўлган квадрат юзга тенг экан 36-чизма.

## §2.2. Бернулли лемнискатаси

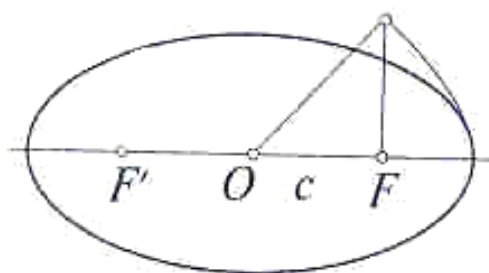
Лемниската тенгламасини ёзайлик:  $\rho^2 = 2m^2 \cos 2\varphi$ . Уни соддалаштирсак:  $\rho^2 = 2m^2(\cos^2 \varphi - 1)$ . Бу ерда  $2m^2 = c^2$  десак, тенглама  $\rho^2 = c^2 2 \cos^2 \varphi - c^2$  кўринишга келади.

Тенгламанинг кўриниши бизни эгри чизиқ ихтиёрий нуқтасининг радиус-векторини гипотенузаси  $c\sqrt{2} \cos \varphi$  га, бир катети  $c$  га тенг бўлган учбурчакнинг катети сифатида яшаш фикрига олиб келади.  $OA = c$  ни ясаймиз,  $OB = c\sqrt{2}$  радиусли айлана ўтказамиз 37-чизма.

Ихтиёрий  $\frac{\pi}{2}$  дан кичик  $\varphi$  бурчак остида  $OK$  нур ўтказамиз,  $K$  нуқтадан қутб ўқиға  $KZ$  перпендикуляр туташтирамиз.



37-чзма.



38-чизма.

$OZ = c\sqrt{2} \cos \varphi$  эканини кўрамиз. А нуқтадан  $OZ$  радиусга тенг ёй билан  $OE$  да  $D$  нуқтани белгилаймиз. Гипотенузаси  $AD = OZ = c\sqrt{2} \cos \varphi$ , бир катети  $OA = c$  бўлган тўғри бурчакли учбурчак ҳосил қиламиз. Демак иккинчи  $OD$  катет қутб аргументи  $\varphi$  бўлган лемниската нуқтаси радиус-векторнинг изланаётган катталаги бўлади. Бу нуқтани топиш учун  $OK$  нур билан кесишгунча  $OD$  радиусли ёй чизамиз. Шундай қилиб, координаталар лемнескатнинг  $\rho^2 = 2c^2 \cos^2 \varphi - c^2$  тенгламасини қаноатлантирадиган  $M(\rho, \varphi)$  нуқтани ясадик.

$\varphi$  бурчакнинг қийматини ўзгартира бориб, эгри чизиқнинг исталганча нуқталарини ясаймиз, (1) тенгламани текширишни давом эттирайлик. Унда ўзгарувчиларни фақат жуфт даражаларикатнашгани учун  $Ox$  ва  $Oy$  ўқи Кассини овали учун симметрия ўқи, координаталар боши-симметрия маркази бўлади дея оламиз. Дарҳақиқат,  $M(x_0, y_0)$  нуқта (1) эгри чизиққа тегишли бўлсин. У ҳолда координаталари (1) тенгламани қаноатлантирадигани учун берилган координаталар ўқиға нисбатан симметрик бўлган  $M_1(-x_0, y_0)$  нуқта ҳам (1)ни қаноатлантиради. Тенгламага  $x_0, y_0$  сонлар қўйганимизда, тенгламанинг шarti бўйича қаноатлантирувчи  $x_0, y_0$  қийматларни қўйгандаги каби натижани ҳосил қиламиз. Шунга ўхшаш  $M$  нуқтаға абссиссалар ўқиға нисбатан симметрик бўлган  $M_2(x_0, -y_0)$  нуқта ҳам,  $M$  нуқтаға  $O$  овалнинг нуқталари бўлади. Демак, эгри чизиқнинг ихтиёрий  $M$  нуқтаси учун шу эгри чизиқнинг ўзида унга иккита координата ўқиға ва координаталар бошиға нисбатан симметрик нуқталар мавжуд экан. Симметрия ўқлари одатда эгри чизиқнинг ўқилари деб, қутб координаталар системасида қайта ёзиб олайлик:

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)}} \quad (1)$$

Юқори  $a = c$  бўлиб, Кассини овали Бернулли лемнискатаси бўлган ҳолни кўрган эдик. Яна икки ҳолни қараймиз:

Иккинчи ҳол.  $a > c$ . (2) тенгламада илдиз остида манфий ифода ҳосил қиладиган минус ишорасини ташлаб юборамиз. Натижада

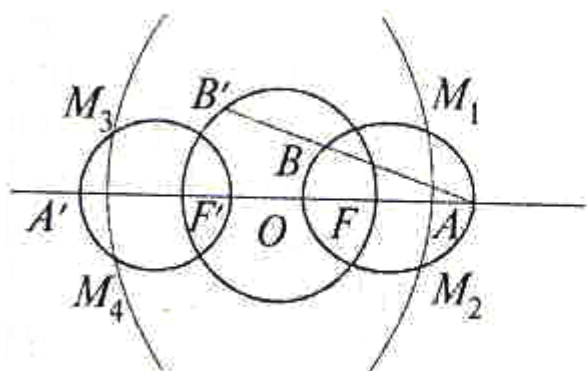
$$\rho = c \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Эгри чизиқни яшаш учун  $\varphi = 0$  деб оламиз, у ҳолда радиус векторнинг абсолют қиймати бўйича энг катта қиймати  $\rho = \pm \sqrt{a^2 + c^2}$  ни ҳосил қиламиз.  $\varphi$

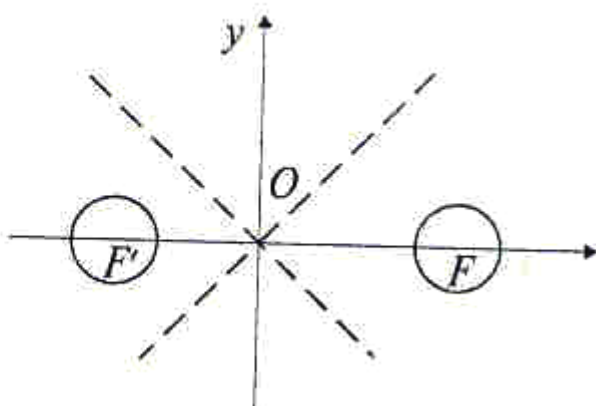


бурчак ортиши билан  $\cos 2\varphi$  нинг қиймати камаяди, демак,  $\rho$  ҳам камаяди,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  да радиус-вектор қуйидагига тенг бўлади:  $\rho = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$  38-чизма.

**Кассини овалининг нуқталарини яшаш.**  $a$  ва  $c$  билган ҳолда  $F'$  ва  $F$  фокусларнинг ва  $A', A$  учларининг вазиятини аниқлаймиз ( $\varphi = 0$  да  $\rho = \pm\sqrt{a^2 + c^2}$ ) 39-чизма.  $c$  га тенг радиус билан маркази координаталар бошида бўлган айлана чизамиз, сўнгра  $A$  нуқтадан бу айлана билан иккита  $B$  ва  $B'$  нуқтада кесишадиган ихтиёрий нур ўтказамиз.  $F$  ва  $F'$  фокусларни марказ қилиб,  $AB$  ва  $AB'$  радиусли айланалар чизамиз.



39-чизма.



40-чизма.

Уларнинг жуфт-жуфт кесишиш нуқталари овалга тегишли бўлади, чунки  $M_1F \cdot M_1F' = M_2F \cdot M_2F' = M_3F \cdot M_3F' = M_4F \cdot M_4F' = AB \cdot AB' = a^2$

тенглик бажарилди.  $ABB'$  нурунинг йўналиши ўзгартириб овалнинг истаганча кўп нуқталарни яшаш мумкин. Учинчи хол.  $a < c$ .  $a < c$  эканлигини,

демак  $\frac{a^2}{c^2} < 1$  эканлигини назарга олиб,  $\frac{a^2}{c^2} = \sin 2\alpha$  белгилашни киритамиз.

$\frac{a^2}{c^2} \neq 1$  бўлгани учун  $\sin 2\alpha < 1$  бўлиб,  $\alpha < \frac{\pi}{4}$  бўлади.

Овалнинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\rho = c\sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi - \cos^2 2\alpha}}.$$

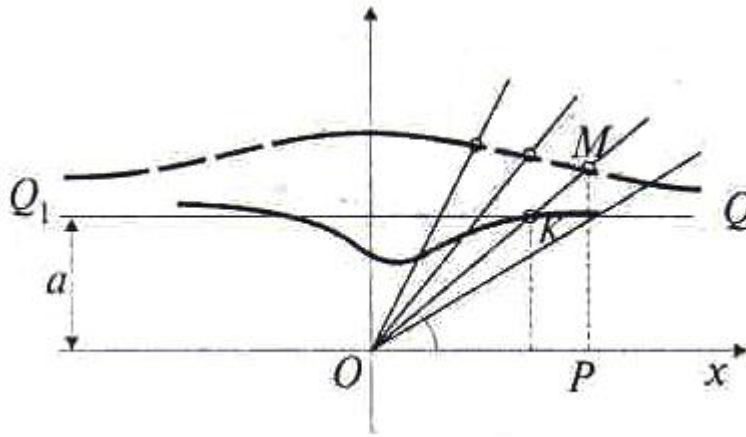
### §2.3. Никошет конхондаси

Бирорта чизиқнинг конхоидаси-бу белгиланган чизиқ ҳар бир нуқтанинг радиус-векторини бир хил катталиқка орттириш ёки камайтириш натижасида ҳосил бўладиган силлиқ эгри чизиқдир. Агар чизиқнинг қутб тенгламаси  $\rho = f(\varphi)$  маълум бўлса, унинг конхоидасининг тенгламаси  $\rho = f(\varphi) \pm l$  кўринишда бўлади. Конхоидани яшаш (ҳар бир нуқтанинг радиус-векторини узайтириш ёки қисқартириш керак) бир қараўда содда бўлиб кўринсада, аслида кўпгина чизиқларнинг конхоидалари жуда мураккаб ва уларнинг графиклари қизиқ чизмаларга эга. Ҳатто энг содда чизиқ-тўғри чизиқнинг конхоидаси ҳам анча мураккаб чизиқ конхоидаси уни бурчак трисексияси ва кубни иккилантириш ҳақидаги масалаларни ечишга тадбиқ этган қадимги юнон геометри Никомел (эрамиздан олдинги II аср) номи билан юритилади. Никомет конхоидасини миқдори ўзгаришларнинг сифат ўзгаришларга ўтишни кўрсатувчи ёрқин мисол сифатида қараб чиқамиз. Шундай қилиб, конхоиданинг базаси деб аталувчи берилган  $Q_1Q$  тўғри чизиқдан  $a$  масофада жойлашган нуқта-конхоида қутби берилган бўлсин. Конхоида қутбини қутб координаталар системасинининг қутби деб олиб, қутб ўқиини  $Q_1Q$  базисга параллел қилиб ўтказамиз. 42-чизма.  $Q_1Q$  тўғри чизиқнинг тенгламаси:  $\rho = \frac{a}{\sin \varphi}$  кўринишга, конхоиданинг қутб тенгламаси эса  $\rho = \frac{a}{\sin \varphi} + l$  кўринишга эга. Тўғри бурчакли Декарт координаталарига ўтиб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\sqrt{x^2 + y^2} (y - a) = ly \quad (1)$$

ёки

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = l^2 y^2 \quad (2)$$



42-чизма

Ҳосил қилинган тенгламада  $x$  иккинчи даражада қатнашгани учун конхоида ординаталар ўқига симметрик дейиш мумкин.

Конхоиданинг  $Oy$  ўқи билан кесишиш нуқталарини аниқлаш мақсадида (1) тенгламада  $x = 0$  дейлик,  $y$  ҳолда  $|y|(y - a) = ly$  тенглама ҳосил бўлади, буни ечиб  $y > 0$  да  $y = a + l$ ,  $y < 0$  да ва  $y = 0$  да  $y = a - l$  эканлигини топамиз.

Шундай қилиб, эгри чизик ордината ўқи билан  $(0; a + l)$ ,  $(0; a - l)$ ,  $(0; 0)$  нуқталар ушрашар экан ( $l = a$  бўлган ҳолда иккинчи нуқта координаталар боши билан устма-уст тушади).

Бизис чизик  $Q_1Q$  тўғри чизик конхоиданинг асимптотаси эканини кўрсатамиз. Конхоиданинг ихтиёрий нуқтасидан қутб ўқигача бўлган масофани ҳисоблайлик.

$$MP = \rho \sin \varphi = \left( \frac{a}{\sin \varphi} + l \right) \sin \varphi = a + l \sin \varphi$$

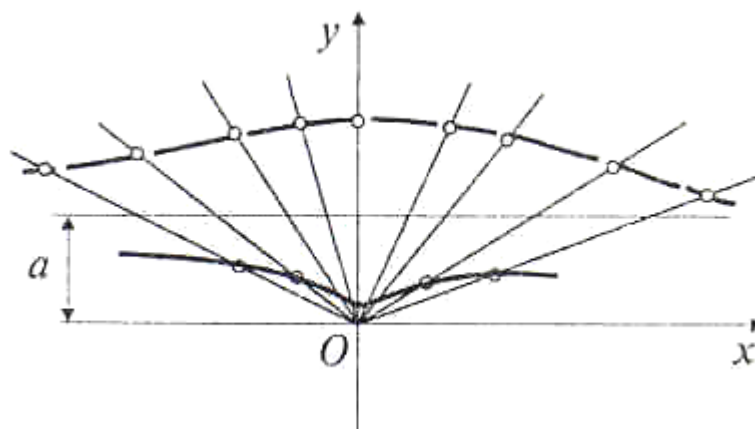
сўнгра  $MP$  қийматининг лимитини аргумент нолга интилганда топамиз.

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} MP = \lim_{\varphi \rightarrow 0} (a + l \sin \varphi) = a$$

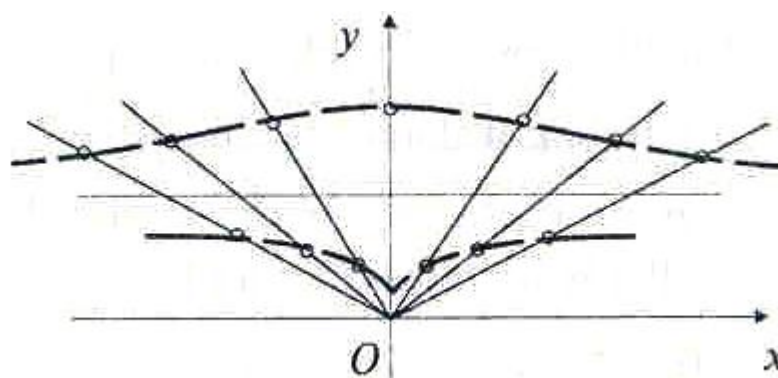
Конхоиданинг таърифидан, унинг нуқталарини яшаш учун  $OM$  нурни ўтказиш кераклигини ва уни  $O$  нуқта атрофида айлантириб, унинг  $Q_1Q$  тўғри чизик билан кесишган ҳар бир ҳолатида кесишиш нуқтасидан  $KM = l$  кесмани қўйиб чиқиш кераклиги маълум бўлади. Никомед конхоидаси икки тармоқдан

иборат: биринчи тармоқ нурни нолдан  $180^0$  гача буришда, иккинчи  $180^0$  дан  $360^0$  гача буришда ҳосил бўлади. 42-чизма.

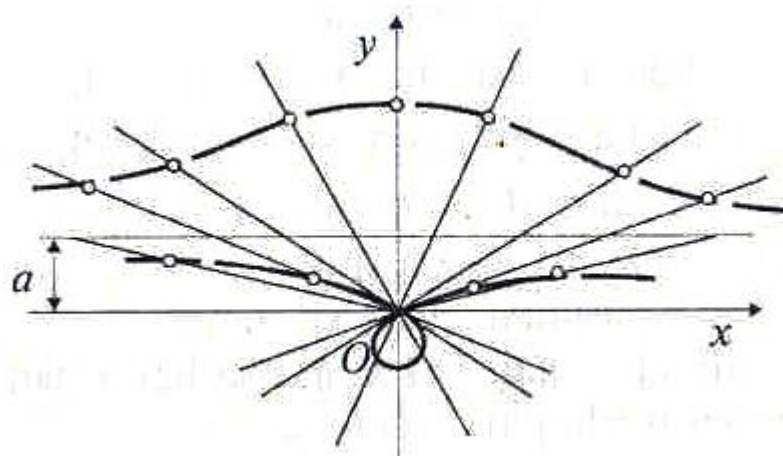
Никомед конхоидасини учта:  $l < a$  43-чизма,  $l = a$  44-чизма,  $l > a$  45-чизма ҳолни қараш билан ясаймиз.



43-чизма.



44-чизма.

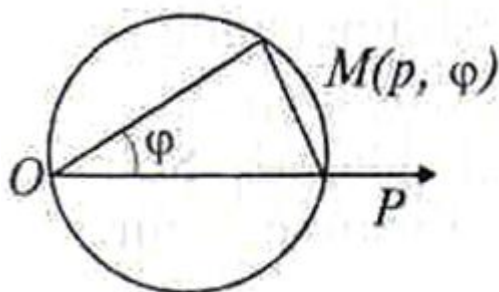


#### 45-чизма.

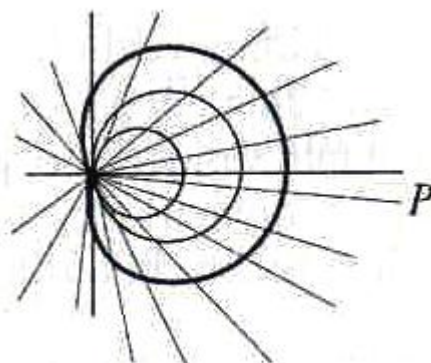
Чизмалардан юқоридаги тармоқнинг чизмани учала ҳолда ҳам бир хиллиги ва унга қарашли  $(0, a + j)$  нуқта экстремум нуқта эканлиги кўриниб турибди. Эгри чизиқнинг қолган қисми бутунлай  $l$  параметрга боғлиқ. Агар  $l < a$  бўлса, у ҳолда конхоида пастки тармоқдан ташқари махсус нуқта деб аталувчи ажратилган  $O$  нуқта ҳам тегишли бўлади.  $l = a$  да  $O$  нуқта махсус қайтиш нуқтаси,  $l > a$  бўлганда-махсус тугун нуқта бўлади.

#### §2.4. Паскал чиғаноғи.

Паскал чиғаноғи деб айлана конхоидасига айтилади. Радиуси  $r$  га тенг бўлган  $\rho = 2r \cos \varphi$  базис айлана берилган бўлсин 46-чизма. О нуқта тенгламаси  $\rho = 2r \cos \varphi + l$  бўлган конхоиданинг қутб системасининг қутби бўлсин.



46-чизма



47-чизма.

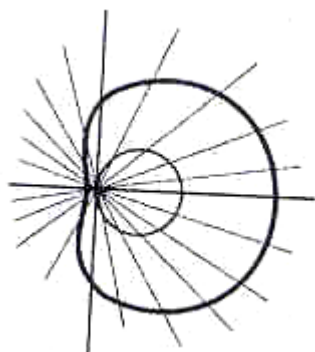
$l$  нинг турли қийматларида конхоиданинг графигини ясаймиз.  $l < 2r$  бўлсин.  $\varphi$  бурчак 0 дан  $\frac{\pi}{2}$  гача ўзгарганда радиус-вектор  $2r + l$  дан  $\rho = l$  гача ўзгаради, сўнгра (II чоракда)  $\rho$  нинг қиймати  $\rho = 0$  гача камайиб боради.

$$\rho = 0; 2r \cos \varphi + l = 0; \cos \varphi = -\frac{l}{2r};$$

шундан кейин  $\rho$  манфий қийматлар олиб камая боради, демак  $\rho$  нинг қийматларини нурларнинг давомида қўйиш керак, яъни нуқталар 4 чоракда жойлашган  $\varphi = \pi$  қийматга  $\rho = -2r + l$ ,  $OA = |\rho|$  мос келади. 47-чизма. Сўнгра графикни қутб ўқиға нисбатан каслантириш мумкин, чунки конхоида тенгламасига кирувчи  $\cos \varphi$  катталиқ жуфт функциядир.

Китобхонга бир масалаҳат: агар сиз параметри  $l < 2r$  бўлган Паскал чиғаноғининг нуқталарини ясамоқчи бўлсангиз, қулайлик учун,  $l = r$  қийматни олинг.

$l = 2r$  бўлган ҳолни кўриб чиқайлик, бунда  $\rho = 2r \cos \varphi + 2r = 2r(\cos + 1)$ .  $\varphi$  аргумент 0 дан  $\pi$  гача ўзгарганда  $\rho$  нинг қиймати  $\rho = 4r$  дан 0 гача ўзгаради,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  қутб бурчакка  $\rho = 2r$  қиймати мос келади 48-чизма.



**48-чизма.**

Бу эгри чизиқ кардиоида (юураксимон эгри чизиқ) деб аталади, унинг декарт координаталар системасидаги тенгламаси.

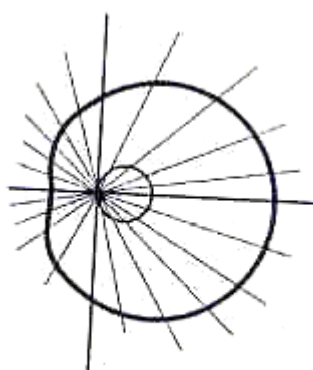
$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$$

Интеграл ҳисобнинг унча мураккаб бўлмаган формулаларини тадбиқ этиб, кардиоида юзини ҳисоблашимиз мумкин.

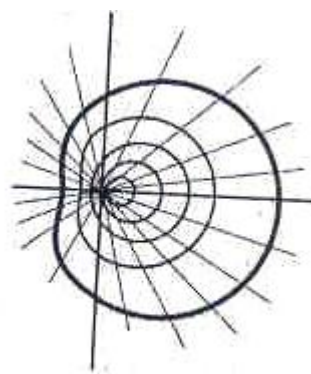
$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 d\varphi, \quad S = \frac{1}{2} \int_0^\pi \rho^2 d\varphi = 4r^2 \int_0^\pi (\cos^2 \varphi + 2 \cos \varphi + 1) d\varphi = 6\pi r^2,$$

демак, кардиоиданинг юзи олтига базис айланасининг юзига тенг. Энди паскал чиғиноғи графигини  $l$  параметрнинг  $2r$  дан катта бўлган ҳоли учун ясаймиз.  $\varphi$  га нолга тенг қиймат бериб, радиус векторнинг мос қиймати  $2r + l$  ни ҳосил

қиламиз. Сўнгра, қутб бурчаги  $\varphi$  нинг ортиши билан радиус-вектор қийматининг камайишини кўрамиз.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  бурчакка  $\rho = l$  қиймат,  $\varphi = \pi$  га эса радиус векторининг  $l - 2r$  қиймати мос келади.  $l > 2r$  бўлгани учун  $\rho = 2r \cos \varphi + l$  нинг қиймати манфий бўлиши мумкин эмаслиги равшан 49-чизма.



**49-чизма**



**50-чизма.**

Айлананинг конхоидаси бўлган Паскал чиғаноғининг тенгламаси Декарт координаталар сиситемасида қуйидаги кўринишда бўлади.

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = l^2(x^2 + y^2).$$

Демак қаралаётган эгри чизиқ сон параметр  $l$  га боғлиқ бўлмаган ҳолда 4-тартибли алгебраик чизиқдир. Декарт координаталари боши эгри чизиққа тегишли ва махсус нуқтадир:  $l < 2r$  бўлган ҳолда-тутган,  $l = 2r$  да қайтиш нуқтаси ва  $l > 2r$  да ажратилган махсус нуқтадир. Охриги учта график  $\rho = 2r \cos \varphi + l$  тенглама билан ифодаланадиган эгри чизиқни тасвирлайди. Уларда миқдорий ўзгаришлар асосли сифат ўзгаришларни келтириб чиқаради 50-чизма.

Математик билимлар авлодларимизнинг машаққатли меҳнатдар эвазига тўплагандир.

Ўқувчилар фан узлуксиз ривожланишда эканлиги ва ўз тараққиёти давомида уни ҳеч нарса тўхтатиб қололмаслигини билишлари керак.