АДАПТИВНЫЙ КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА ОДНОМЕРНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ

У.Аббосов

Узбекистан, Самаркандский государственный университет

В компьютерных системах передачи и обработки информации, в частности, в системах обработки результатов различных экспериментальных и лабораторных исследований формируется большой объем непрерывной по природе информации. Причем, на практике обработки информации представляет большой интерес проведение исследований для повышения качества контроля передачи информации непрерывной природы, что достигается благодаря априорным сведениям о статистических и динамических характеристиках [1,2]. Использование динамических характеристик информации может осуществляться различными способами, в частности, методами статистического предсказания, аппроксимации динамического ряда полиномами различной степени, сплайн-функциями. Для эффективной аппроксимации нестационарного процесса предпочтение отдается применению полиномиальных сплайн-функций .

В настоящее время имеется ряд работ, посвященных исследованию свойств сплайн-функций и их возможностей для различных технических приложений, в частности для контроля точности передачи информации нестационарного процесса [3]. Широкая популярность методов сплайн-аппроксимации объясняется тем, что они служат универсальным инструментом моделирования функций и по сравнению с другими математическими методами при равных с ними информационных и аппаратных затратах обеспечивают большую точность вычислений.

Для наиболее эффективного применения сплайн-функций исходные данные задаются в дискретном виде. Дискретные задания исходных данных рассматриваются на отрезке [a,b] в виде сетки Δ:

$$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Полиномиальный сплайн произвольной степени m дефекта d (d – целое число, 1≤d≤m) с узлами на сетке Δ определяется как функция $S_{m,d(x)}$,

$$S_{m,d(x)} = \sum_{s=0}^{m} d_{i,s}(x - x_i)^s$$

$$1) \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$2) \quad S_{m,d}(x) \in C^{m-d}[a,b] \qquad (1)$$

Производная от сплайна порядка (m-d+1) может быть разрывной на [a,b]. Поэтому говорят о разных порядках гладкости сплайнов: первом, втором и т.д.

В рассматриваемой задаче контроля точности информации наиболее употребительными являются сплайны невысокой степени, в частности параболические и кубические. Процесс построения таких сплайнов значительно проще, чем процесс построения сплайнов более высокой степени. Матрица системы уравнений, определяющей параметры сплайна, является трехдиагональной с доминирующей главной диагональю, и при решении системы можно использовать эффективные методы.

Теоретические проблемы сплайнов четных и нечетных степеней существенным образом различаются. Для обеспечения существования и единственности интерполяционного сплайна четной степени его узлы не должны совпадать с узлами интерполяции. Поэтому задаются два множества узлов:

1) узлы интерполяции:

$$\Delta n: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, n \geq 2;$$

2) узлы сплайна (точки возможного разрыва m-й производной):

$$\Delta: \tilde{x}_0 = a < \tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_n < b = \tilde{x}_{n+1}$$

В частности, функция S2 (x) представляет собой интерполяционный параболический сплайн для функции f(x), если:

1) $S_2(x) \in P_2; \quad x \in (\tilde{x}_i, x_{i+1}), \quad i = 0,1,\ldots,n-1$;

2) $S_2(x) \in C^{(1)}[a,b]$;

3) $S_2(x) = f(x)$.

Наиболее просто реализуется сплайн при h=2, если сетка является равномерной и узлы сплайна $\tilde{x}_i$ расположены посередине между узлами интерполяции xi, i=0,1,2, …,n-1 т.е.

$$\tilde{x}_0 = a$$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\tilde{x}_{n+1} = b$$

Если функция f(x) является (b-a) периодической, то обычно требуют, чтобы сплайн S(x) также был (b-a) периодическим и имел непрерывную первую производную на (-∞,∞) и чтобы точка x0=a не являлась узлом сплайна. Таким образом, периодический сплайн S(x) удовлетворяет условиям:

$$S_2^{(i)}(a) = S_2^{(i)}(b), \quad (i = 1,2) \qquad (2)$$

В общем случае наиболее употребительны следующие краевые условия:

$$S_2'(a) = a_n, \qquad S_2'(b) = b_n, \qquad (3)$$

$$S_2''(a) = A_n, \qquad S_2''(b) = B_n, \qquad (4)$$

где an, bn, An, Bn – заданные действительные числа.

Конкретный выбор этих чисел зависит от рассматриваемой задачи, например, если функция f(x) имеет соответствующие производные, то можно положить an= f ’(a), bn= f ’(b), An= f ’’(a), Bn= f ’’(b) или заменить их приближенными значениями соответствующих производных.

Если выбор краевых условий затруднителен, то можно потребовать, чтобы в точках $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_n$ сплайн S2(x) имел непрерывную вторую производную. Это эквивалентно условиям;

$$S_2''(z-0) = S_2(z+0); \quad Z = \tilde{X}_i, \quad (i = 1, n) \qquad (5)$$

Положим $m_i = S_2'(x_i) \quad (i = 0,1,\ldots,n)$, (6)

$M_i = S_2''(x_i) \quad (i = 0,1,\ldots,n)$. (7)

Так как $S_2''(x)$ – кусочно-постоянная функция, то

$$S_2''(x) = M_i, \quad \tilde{x}_i \le x \le \tilde{x}_{i+1} \quad (i = 0,1,...,n) \qquad (8)$$

Пусть

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\bar{h}_i = x_{i+1} - \bar{x}_i$$

и f(xk-1, xk, xk+1) – вторая раздельная функция f(x) относительно точек xk-1, xk, xk+1.

Таким образом, построение параболического сплайна сводится к отысканию значений mi путем решения систем уравнений, общий вид которой

Az=q (9)

Их матрицы во всех случаях ленточные диагональным преобладанием, т.е., если aij – элемент i-й строки и j-го столбца, то

$$r_i = \left|a_{ij}\right| - \sum_{j \ne 1} \left|a_{ij}\right| > 0$$

для всех i.

Приведем систему уравнений с трехдиагональной матрицей .

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & & 0 & C_1 \\ C_2 & a_2 & b_2 & \dots & & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & C_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ b_N & 0 & 0 & & 0 & C_N & a_N \end{vmatrix} \qquad (10)$$

После того, как найдены mi при расчетах можно пользоваться представлением сплайна в форме (9). При этом требуется запоминать $\{x_i\}, \ \{f(x_i)\}, \ \{\tilde{x}_i\}, \ \{m_i\}$. Из (9) имеет S''(Xi)=2Ci поэтому на $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}], \ i = 0,1,\dots,n$ можно пользоваться представлением

$$S(x) = f(x_1) + m_i(x - x_1) + + c_i(x - x_i)^2 \qquad (11)$$

Оценка погрешности интерполяции параболическим сплайном трижды дифференцируемой функции f(x) определяется неравенством:

$$\sum \le \frac{\sqrt{3}}{216} max\left|f'''(x)\right|h_i^3 \qquad (12)$$

Любой сплайн достаточной гладкости может быть представлен через базисные сплайны. В частности, при d=1 для разложения используются так называемые «нормализованные» базисные сплайны степени m (B - сплайны). Они являются локальными (финитными), кусочно-полиномиальными функциями и удовлетворяют следующим условиям:

1) $B_m(x) \equiv 0$ при $x \notin (X_i, X_{i+m+1})$;

2) $B_m(x) > 0$ при $x \notin (X_i, X_{i+m+1})$;

3) $\int_a^b B_m(r)dr = \int_{x_i}^{X_{i+m+1}} B_m(r)dr = 1$.

Литература:

1. Жуманов И.И., Абдуллаев А.Н. Построение алгоритмов контроля информации методами анализа динамики случайного процесса.// НТЖ «Химические технологии, контроль и управление», №6, ТГТУ, Ташкент, 2005, с. 29-34.
2. Касымов С.С., Зайнидинов Х.Н. Базисные сплайны в задачах восстановления одномерных и многомерных зависимостей. //Известия международной академии наук высшей школы. Москва, 2002, №1, С. 162 –167.