

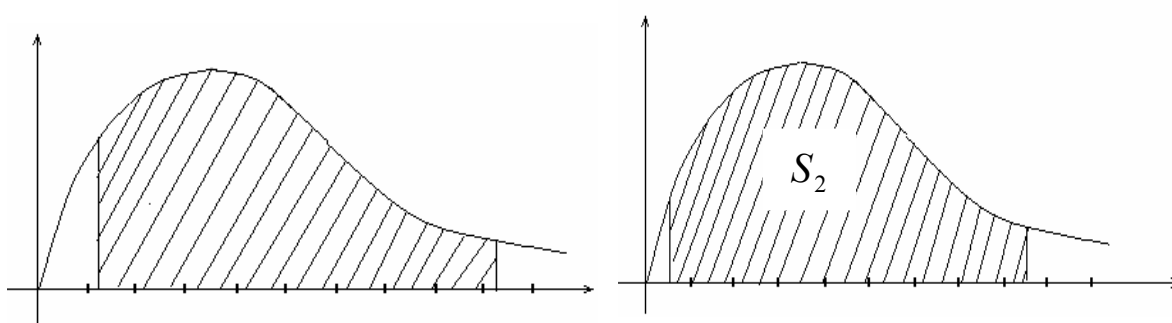
**Ўзбекстан Республикасы Жоқары ҳәм орта
арнаўлы билим ўәзирлиги**

**БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ
ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ**

У. Раметов

ИТИМАЛЛЫҚЛАР ТЕОРИЯСЫ

Университеттиң математика факультетиниң
студентлери ушын арналған лекция текстлери



Нөкис - 2007

1-lektsiya (2s.)

İtimallıqlar teoriyası pa'ni. Elementar waqiyalar ken'isligi

Tayanish so'zler

Waqiya, elementar waqiya, elementar waqiyalar ken'isligi, tosinnanli waqiya, isenimli waqiya, mu'mkin emes waqiya.

İtimallıqlar teoriyası tosinnanli qubılıslardagi (ha'diyselerdegı) nızamlıqlardı izertlewshi matematikalıq ilim bolıp tabıladı.

Tosinnanli ha'diyse (waqiya) degende ju'zege asıwı ha'm aspawı mu'mkin bolg'an ha'r qanday waqıyanı tu'sinemiz.

Ha'r qıylı fizikalıq ha'm texnikalıq ma'selelerdi ilimiy jaqtan izertlegende tosinnanli qubılıslar dep atalıwshı ayrıqsha tu'rdegı qubılıslar menen ushırasıwg'a tuwra keledi.

Tosinnanli qubılıs-bir sınawdı (ta'jiriybeni, eksperimentti) bir neshe ma'rte ta'kirarlag'anda ha'r ret ha'r qıylı o'tetug'ın qubılıs bolıp tabıladı.

Mısallar:

1. Bir deneni bir neshe ma'rte analitikalıq ta'rezide o'lshew.

2. Samolettın' berilgen biyiklikte ushıwı ha'm t.b.

Ta'biyatta tosinnanliq elementleri qatnaspaytug'ın bir de fizikalıq qubılıs joq desek qa'telespeymiz.

Ha'zirgi waqıtta itimallılıq metodları qollanılmaytug'ın ta'biyat ilimleri derlik joq...

İtimallıqlar teoriyası basqa matematikalıq ilimler sıyaqlı praktikanın' talabınan kelip shıqqan ha'm rawajlanbaqta.

Massalıq tosinnanli qubılıslarg'a baylanisli ma'selelerdi sistemalı tu'rde izertlep baslaw ha'm sa'ykes matematikalıq apparattın' payda bolıwı XVII a'sirge tiyisli. Ataqlı fizik Galiley XVII a'sirdin' basında fizikalıq o'lshewlerdegi qa'teliklerdi tosinnanli qubılıs dep qarap ha'm olardıń itimallıqların bahalap, onı ilimiy jaqtan izertlewge ha'reket etken.

İtimallıqlar teoriyasının' ha'zirgi so'z mag'anasında payda bolıwı XVII a'sirdin' ortalarına tiyisli bolıp, Paskal, Ferma ha'm Gyuygenslerdin' **QUMAR** oynılar teoriyası oblastındag'ı izertlewlerge baylanisli.

Son'gı jılları texnikalıq mashqalalardı sheshiwge baylanisli itimallıqlar teoriyasının' taza tarawları pa'n sıpatında o'z aldına payda bolıp atır. Ma'selen «Massalıq xızmet ko'rsetiw teoriyası», «İnformatsiyalar teoriyası», «Tosinnanli protsessler teoriyası» h.t.b.

Sınawg'a qoyılatug'ın tiykarg'ı sha'rt, onın' mu'mkin bolatug'ın na'tiyjesin (aqıbetin) ko'rsete biliwimizden ibarat. Biz sınawdın' na'tiyjesin waqıya dep tu'sinemiz. Sınaw ju'rgizilgende mu'mkin bolatug'ın na'tiyjelerdin' tek birewi g'ana ju'zege asıwın *elementar waqıya* deymiz ha'm onı ω_i arqalı belgileybiz. Elementar waqiyalar jiklenbeytug'ın (ajratılmaytug'ın) waqiyalar, al sınaw na'tiyjesi tek bir g'ana elementar waqıya menen ko'rsetiledi.

Sınawdın' mu'mkin bolatug'ın na'tiyjelerinin' ko'pligin, yag'nıy barlıq elementar waqiyalar ko'pligin *elementar waqiyalar ken'isligi* dep ataymız.

Onı $\Omega = \{\omega\} = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ arqalı belgileybiz.

Mısallar:

1. Monetanı bir ret taslayıq. Bul jag'dayda

$$\Omega = \{G, TS\} = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\omega_G, \omega_{TS}\}.$$

2. Kubikti bir ma'rte taslayıq. Bul jag'dayda

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \}.$$

3. Monetanı u'sh ma'rte taslayıq. Bul jag'dayda

$$\Omega = \{ GGG, GGTS, GTSG, TSGG, TSTSG, TSGTS, GTSTS, TSTSTS \}.$$

Elementar waqıyalar Ω ko'pliginin' qal'egen u'les ko'pligine tosınnanlı waqıya yaki waqıya dep ataladı. Bul tastıyıqlaw Ω shekli yamasa bolg'an jag'dayda ko'pliklerdin' ayırım klassı ushın g'ana durıs boladı.

Waqıyalardı $A, V, S, \dots$ ha'ripleri menen belgileyemiz. Ma'selen, kubikti taslag'anda barlıq mu'mkin bolg'an na'tiyjeler ko'pligi $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6 \}$ -elementar waqıyalar ken'isligi. Usı Ω ko'plikte anıqlang'an wag'ıyalardı qarastırayıq:

a) Jup nomerli oshkolar $A = \{ \omega_2, \omega_4, \omega_6 \}$ waqıyasın (ko'pligin) quraydı $A \subset \Omega$.

v) Taq nomerli oshkolar $V = \{ \omega_1, \omega_3, \omega_5 \}$ waqıyasın (ko'pligin) quraydı $V \subset \Omega$ h.t.b.

Elementar waqıyalar ken'isliginin' geometriyalıq su'wretleniwi qanday da bir ken'islik desek, onda elementar waqıyalar usı ken'isliktin' noqatları boladı.

Biz baqlaytug'in waqıyalardı mınaday u'sh tu'rge bo'liw mu'mkin: İsenimli waqıyalar, mu'mkin emes waqıyalar ha'm tosınnanlı waqıyalar.

İsenimli waqıya dep anıq bir S sha'rtler kompleksi (jıynag'ı) orınlang'anda so'zsız ju'zege asatug'in waqıyag'a ayıladı.

Ma'selen $+20^0$ temperturada «ıdistag'ı suw suyıq jag'dayında boladı» degen isenimli waqıya. Bul jerde normal atmosfera basımı ha'm suwdın' temperaturası S sha'rtler kompleksin quraydı.

Mu'mkin emes waqıya dep S sha'rtler kompleksi orınlang'anda hesh waqıtta ju'zege aspaytug'in waqıyag'a ayıladı.

Ma'selen, joqarıdag'ı mısaldag'ı sha'rtlerde «ıdistag'ı suw muz jag'dayında boladı» degen waqıya mu'mkin emes waqıya.

Tosınnanlı waqıya dep S sha'rtler kompleksi (jıynag'ı) orınlang'anda ju'zege asıwı da ju'zege aspawı da mu'mkin bolg'an waqıyag'a ayıladı.

Ma'selen monetanı taslag'anda «gerb jag'ının' shıg'ıwı»-tosınnanlı waqıya.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Waqıya tu'sinigin kiritin'.
2. Elementar waqıya terminin qalay tu'sinesiz?
3. Elmentar waqıyalar ken'isligi dep nege aytamız?
4. Tosınnanlı waqıya degenimiz ne?
5. İsenimli waqıya dep qanday waqıyalarg'a ayıladı? Mısallar keltirin'.
6. Mu'mkin emes waqıya dep qanday waqıyalarg'a ayıladı? Mısallar keltirin'.

A'debiyatlar: [1], I bap §1;2;3, [2]- [8].

2-lektsiya (2s.)

Waqiyalar algebrasi. Aksiomalar. İtimallıq ken'isligi

Tayanış so'zler

Waqiyalar algebrasi, itimallıq, waqiyalardın' qosındısı, ayırması, ko'beymesi, itimallıq ken'isligi.

Da'slep bazı bir qosımsha tu'siniklerdi kiriteyik. Bir neshe waqiyalar berilgen sınawda waqiyalardın' tolıq gruppasın hasıl etedi dep ayıladı, eger de sınaw na'tiyjesinde bul waqiyalardan en' bolmag'anda birewi so'zsiz ju'zege assa.

Bir neshshe waqiyalar berilgen sınawda birgeliksiz delinedi, eger de olardın' qa'legen ekewi bir waqıtta ju'zege aspasa.

Bir neshshe waqiyalar berilgen sınawda ten'dey imkaniyatlı delinedi, eger de bul waqiyalardın' hesh biri qalg'an basqalarına salıstırğ'anda ju'zege asıwı artıqmash dep qarawg'a tiykar bolmasa.

Mısallar:

1. Monetanı taslag'anda gerb yaki tsifr kelip shıg'ıwı.

2. Kubikti taslag'anda 1,2,4,6 oshkolarının' kelip shıg'ıwı h.t.b.

Endi waqiyalar u'stinde a'mellerdi ko'rip o'teyik. Bul a'meller ko'plikler u'stindegı a'meller sıyaqlı anıqlanadı.

1) A ha'm V waqiyaların' qosındısı dep, bul waqiyalardın' en' keminde birewine derek bolg'an elementar waqiyalardan du'zilgen waqiyalarg'a ayıladı. Onı $A+V$ yamasa $A \cup V$ arqalı belgileydi.

Solay etip, waqiyalardın' qosındısı degende yaki A waqıyası yaki V waqıyası, yaki A ha'm V ekewi de ju'zege asatug'ın waqıyanı tu'sinemiz.

2) A ha'm V waqiyaların' ko'beymesi dep, bir waqıttın' o'zinde ha'm A ha'm V g'a derek bolg'an elementar waqiyalardan du'zilgen waqıyag'a ayıladı. Onı $A \cdot V$ yamasa $A \cap V$ arqalı belgileydi.

Demek, waqiyalardın' ko'beymesi degende ha'm A waqıyası ha'm B waqıyası ekewinin' de bir waqıtta ju'zege asıwın tu'sinemiz.

3) A ha'm V waqiyaların' ayırması dep, A g'a derek, al V g'a derek bolmag'an elementar waqiyalardan du'zilgen waqıyag'a ayıladı. Onı $A-V$ yamasa $A \setminus V$ arqalı belgileydi.

Demek A-V waqıyası A waqıyasının' ju'zege asıp, B waqıyasının' ju'zege aspawın bildiredi.

Barlıq elementar waqiyalar ko'pligi yag'nıy Ω waqıyası **isenimli waqıya**, al bir de elementke iye bolmag'an $\emptyset$ bos ko'pligi **mu'mkin emes waqıya** dep ataladı.

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ waqıyası A waqıyasına qarama-qarsı waqıya dep ataladı. $\bar{A}$ waqıyası waqıyasının' ju'zege aspawın bildiredi.

Qarama-qarsı waqiyalardın' qosındısı isenimli waqıya, al ko'beymesi mu'mkin emes waqıya boladı:

$$A + \bar{A} = \Omega, \quad A \cdot \bar{A} = \emptyset.$$

Eger de $A \cdot V = \emptyset$ bolsa, onda A ha'm V waqiyaları birgeliksiz dep ataladı.

A waqıyası ju'zege asqanda V waqıyası da so'zsiz ju'zege assa, onda A nın' ju'zege asıwı V nın' ju'zege asıwın ta'miynleydi yamasa V waqıyası A waqıyasının' saldarı dep ataladı ha'm onı $V \subset A$ arqalı belgileydi.

Eger de $A \subset V$ ha'm $V \subset A$ bolsa, onda A ha'm V waqiyaları ten' ku'shli yamasa ekvivalent waqiyalar dep ataladı. Onı $A=V$ dep belgileydi.

Waqiyalardın' qosındısı ha'm ko'beymesinin' anıqlamalarınan tikkeley to'mendegi ten'liklerdin' durılıg'ı kelip shıg'adı:

$$A + A = A$$

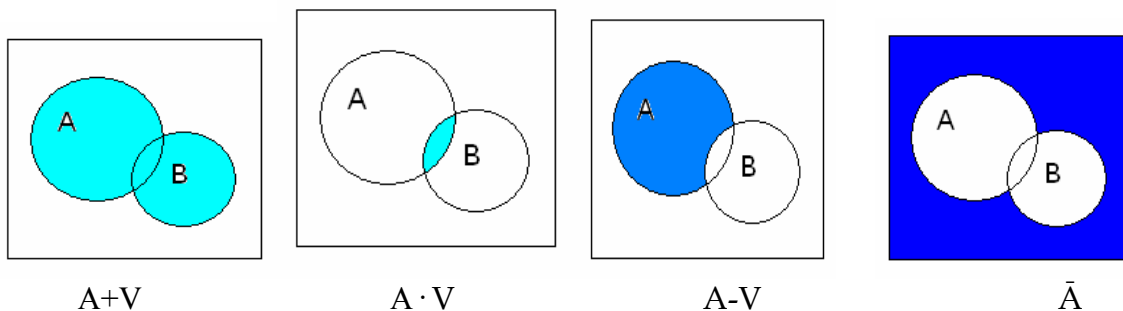
$$A \cdot A = A$$

Eger ha'm $V \subset A$ bolsa, onda

$$A + V = A$$

$$A \cdot V = V$$

Joqaridag'ı waqıyalar u'stinde keltirilgen tu'siniklerdi to'mendegi geometriyalıq tu'rde su'wretlewge boladı:



1-su'wret

Meyli Ω -qa'legen elementar waqıyalar ken'isligi, al F onın' u'les ko'pliklerinin' bazı bir klası bolsın.

Eger de qa'legen $A \in F$, $V \in F$ waqıyaları ushın $\Omega \in F$, $A+V \in F$, $A \cdot V \in F$, $A \setminus V \in F$ bolsa, onda F waqıyalar algebrası dep ataladı. Bunnan $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in F$ ekenligi kelip shıg'adı. Eger de $A_n \in F$, $n=1,2,\dots$ bolg'anda

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

bolsa, onda waqıyalar algebrası F waqıyalardıń σ -algebrası dep ataladı.

Endi biz itimallıq tu'sinigin kiritiwimizge boladı. *İtimallıq*-waqıyanın' ju'zege asıwının' mu'mkinshilik da'rejesin xarakterleytug'ın san.

Waqıyalar algebrası F ke derek bolg'an qa'legen A waqıyasının' itimallıg'ı dep to'mendegi aksiomalar orınlanatug'ın $P(A)$ sanlı funksiya ayıladı.

A1. Qa'legen $A \in F$ ushın $P(A) \geq 0$.

A2. $P(\Omega) = 1$

A3. Shekli additivlik aksioması. Eger de A ha'm B waqıyaları birgeliksiz, yag'nıy $A \cdot V = \emptyset$ bolsa, onda

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

A4. U'zliksizlik aksioması. Qa'legen kemiwshi F ten alıng'an

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots \text{ izbe-izligi ushın } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \text{ bolsa, onda } \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

boladı.

İtimallıq P A1-A4 aksiomaların qanaatlandırıtug'ın bolsa ha'm waqıyalar ko'pligi F algebra bolıw menen birge σ -algebra da bolsa, onda (Ω, F, P) u'shligi itimallıq ken'isligi dep ataladı.

Endi A2-A4 aksiomalardan kelip shıg'atug'ın itimallıqtın' bazı bir qa'siyetlerin ko'rip o'teyik.

1. $A + \bar{A} = \Omega$ bolg'anlıqtan $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

2. Eger de bunda $A = \Omega$ desek $P(\emptyset) = 0$.

3. Qa'legen A ha'm B waqıyaları ushın $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Bug'an itimallıqlardı qosıw teoreması delinedi.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Waqıyalar algebrası dep nege aytamız?
2. İtimallıq terminininin' anıqlamasın berin'.
3. Waqıyalardıń qosındısının' anıqlamasın aytın' ha'm geometriyalıq su'wretleniwin ko'rsetin'.
4. Waqıyalardıń ayırmasının' anıqlamasın aytın' ha'm geometriyalıq su'wretleniwin ko'rsetin'.
5. Waqıyalardıń ko'beymesinin' anıqlamasın aytın' ha'm geometriyalıq su'wretleniwin ko'rsetin'.
6. İtimallıq ken'isligi dep nege aytamız?

A'debiyatlar: [1], I bap §6; [2]- [8].

3-lektsiya (2s.)

Elementar waqıyalardıń diskret ken'isligi. İtimallıqtın' klassikalıq, statistikalıq ha'm geometriyalıq anıqlamaları

Tayanış so'zler

Elementar waqıyalardıń diskret ken'isligi, itimallıqtın' klassikalıq anıqlaması, itimallıqtın' statistikalıq anıqlaması, itimallıqtın' geometriyalıq anıqlaması.

Eger elementar waqıyalar ken'isligi shekli yamasa sanaqlı sandag'ı elementar waqıyalardan turatug'ın bolsa, onda bul ken'islik elementar waqıyalardıń diskret ken'isligi dep ataladı.

Meyli Ω -elementar waqıyalardıń diskret ken'isligi bolsın. Eger de Ω da
$$\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$$

bolatug'ın teris emes $P(\omega_i)$ sanlı funksiya berilgen bolsa, onda elementar waqıyalardıń itimallıqları berilgen dep ayıladı.

A waqıyasının' itimallıg'ı dep, $A \subset \Omega$ bolg'anda to'mendegi formula menen anıqlanatuğ'ın $P(A)$ sanına ayıladı:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i), A \neq \emptyset \quad (3.1)$$

Egerde $A = \emptyset$ bolsa, onda $P(A) = 0$ boladı. $P(\omega_i)$ itimallıqların elementar itimallıqlar dep ataymız.

Solay etip, A waqıyasının' itimallıg'ı A waqıyasına derek elementar waqıyalardıń itimallıqlarının' qosındısına ten'. Usılayınsha anıqlang'an itimallıq A1-A4 aksiomaların qanaatlandıradı.

Meyli elementar waqıyalar ken'isligi Ω o'z-ara ten'dey mu'mkinshilikli (ten'dey itimallıqlarg'a iye bolg'an) n elementar waqıyalardan ibarat bolsın, yag'nıy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$

A waqıyası ($A \subset \Omega$) k elementar waqıyalardan ibarat bolsın, yag'nıy $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$.

Onda (3.1) formula boyınsha

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\omega_{i_j}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Bunda k A g'a derek elementar waqıyalar sanı, n Ω g'a derek elementar waqıyalar sanı. Sonlıqtan joqarıdagı formulanı qa'legen $A \subset \Omega$ waqıyası ushın to'mendegishe jazıwg'a boladı

$$P(A) = \frac{\text{A g'a derek elem. waqıyalar sanı}}{\text{Ω g'a derek elem. waqıyalar sanı}} = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (3.2)$$

Solay etip, A waqıyasının itimallıgı A g'a derek elementar waqıyalardıń sanının ulıwma elementar waqıyalardıń sanına qatnasına ten' eken. (3.2) formula boyınsha anıqlang'an itimallıqtın anıqlaması itimallıqtın klassikalıq anıqlaması dep ataladı.

Mısallar:

1. Abonent qon'ıraw qılmaqshı bolıp, telefonnıń nomerinin' son'gı eki tsifrın umıtıp qaldı. Bul tsifrlardı ha'r qıylı ekenligin esine tu'sirip, olardı ta'wekelge aladı. Aling'an tsifrlardıń kerekli tsifrlar bolıw itimallıg'ın tabın'.
2. Eki kubik taslang'an. SHıqqan oshkolardıń qosındısının' 8 ge ten' bolıw itimallıg'ın tabın'.
3. YAshiktegi 10 detaldın' 7 detalı jaramlı. Ta'wekelge aling'an 6 detaldın' ishinde 4 detalı jaramlı bolıw itimallıg'ın tabın'.

İtimallıqtın klassikalıq anıqlamasında sınavdagı elementar waqıyalar sanı shekli dep uyg'arılıp ha'm bul elementar waqıyalar birdey imkaniyatlı edi. Biraq praktikada mu'mkin bolg'an elementar waqıyalardıń sanı sheksiz bolg'an sınavlar da ushırasadı. Sonday-aq, sınavdın juwmag'ın, ha'tte elementar waqıyalardıń sanı shekli bolg'anda da, birdey imkaniyatlı elementar waqıyalardıń qosındısı tu'rinde ko'rsetiwge mu'mkinshilik beretug'ın ulıwma metodlar joq. Sonın ushın da itimallıqtın klassikalıq anıqlaması ju'da sheklengen.

Biz endi qollanıwg'a geyde qolaylıraq bolg'an itimallıqtın basqasha anıqlamasın beremiz. A waqıyasının salıstırmalı jiyiligi dep, A waqıyası ju'zege asqan sınavlar sanı k nın ulıwma sınavlar sanı n ge qatnasına aytiladı.

Solay etip, eger de $W_n(A)$ arqalı A waqıyasının n sandagı sınavlardagı salıstırmalı jiyiligin belgilesek, mına formulag'a iye bolamız:

$$W_n(A) = \frac{k}{n},$$

bunda $0 \leq W_n(A) \leq 1$ ayqın.

İtimallıqtın ha'm salıstırmalı jiyiliktin anıqlamaların salıstırsaq mınanı bayqaymız: İtimallıqtın klassikalıq anıqlaması sınavlar haqıyqattan da ju'rgiziliwi kerek ekenligin talap etpeydi; Salıstırmalı jiyiliktin anıqlaması bolsa sınavlar haqıyqattan da ju'rgiziliwi kerek ekenligin talap etedi.

Basqasha aytqanda, itimallıq sınavg'a shekem esaplanıladı, al salıstırmalı jiyiliktı sınavdan keyin esaplaydı.

Birdey tu'rdegi massalıq sınavlarda ko'pshilik jag'daylarda waqıyanın salıstırmalı jiyiliginin turaqlılıgı bayqaladı, yag'nıy sınavlar sanı n jeterli da'rejede u'lken bolg'anda waqıyanın salıstırmalı jiyiligi $W_n(A)$ bazı bir turaqlı P sanının janında terbeletug'ınlıgı bayqaladı. Usı P sanına statistikalıq mag'anadagı A waqıyasının itimallıgı delinedi.

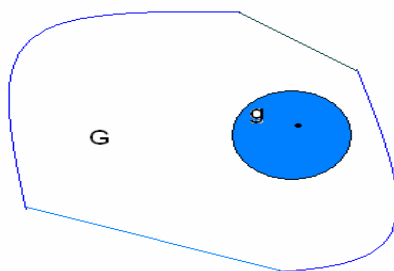
Mısalı: Monetanı taslawlardın sınavları bir neshe ret ju'rgizilip, ondagı gerb jag'ının kelip shıg'ıwların sanı esaplang'an. Bir qansha sınavlardın na'tiyjeleri mına tablitsada ko'rsetilgendey:

Sınav ju'rgiziwshi	Sınavlar sanı	Gerb shıg'ıw sanı	Jiyilik
Byuffon	4040	2048	0,5069
K.Pirson	12000	6019	0,5016
K.Pirson	24000	12012	0,5005

İtimallıqtın klassikalıq anıqlamasın sınav na'tiyjesinin sanı sheksiz, ten'dey mu'mkinshilikli ta'jiriybege qollanıwg'a bolmaydı. Bunday jag'daylarda itimallıqtın geometriyalıq anıqlaması qolaylı. Onın ushın biz G ko'pliginde noqat ten' o'lshewli

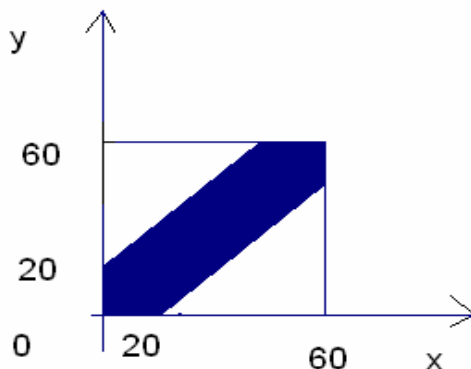
bo'listirilgan dep uyg'aramiz, al onin' qanday da u'les ko'pligin g dep belgileyik. Onda ko'p G oblastina dsmaldan taslang'an noqattin' g oblastina tu'siwin A waqiyasi dep belgilep, onin' itimallig'ina minanday aniqqlama beriwge boladı: g oblastina dsmaldan taslang'an noqattin' (A waqiyasi) usı oblastqa tu'siw itimallig'ı g nın' o'lsheмініn' G oblastının' o'lshemine (uzınlıq, maydan, ko'lem) qatnasına ten', yag'nıy

$$P(A) = \frac{\text{o'lshe}m\ g}{\text{o'lshe}m\ G} = \frac{|g|}{|G|}$$



2-su'wret

Mısalı: (Ushırasıw haqqındag'ı ma'sele): Eki joldas bir saat dawamında ushırasıwg'a kelisken. Ushırasıw ornına burın kelgen adam ekinshisin 20 minut dawamında ku'tip turadı, al onnan keyin ketip qaladı. Eger de olardıń ha'r qaysısı ushırasıw ornına bir saat aralıg'ındag'ı qa'legen waqıt momentlerinde keliwi mu'mkin bolsa, eki joldastın' ushırasıw itimallig'ı nege ten'.



3-su'wret

Eki joldastın' ushırasıw ornına keliw waqıtların sa'ykes x ha'm y arqalı belgileyik:

$$0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60.$$

Sonda $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$. A waqiyası eki joldastın' ushırasıwın bildiretug'ın bolsa, onda olar tek $|x - y| \leq 20$ min. bolg'anda ushırasadı.

$$P(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Elementar waqıyalardıń diskret ken'isligi dep nege aytamız?
2. İtimallıqtın' klassikalıq anıqlamasın keltirin'.
3. İtimallıqtın' statistikalıq anıqlamasın keltirin' ha'm onın' klassikalıq anıqlamadan parqın tu'sindirin'.
4. İtimallıqtın' geometriyalıq anıqlamasın tu'sindirin'.

A'debiyatlar: [1], I bap §3; [2]- [8].

4-lektsiya (2s.)

SHa'rtli itimallıqlar. Ko'beytiw teoreması. Waqıyalardıń g'a'rezsizligi

Tayanış so'zler

SHa'rtli itimallıq, ko'beytiw teoreması, g'a'rezsiz waqıyalar.

Ayırım jag'daylarda A waqıyasının' bazı bir B waqıyası ju'zege asqandag'ı itimallıg'ın esaplawg'a tuwra keledi. Bunday itimallıqtı *sha'rtli itimallıq* deydi ha'm onı $P(A/B)$ yamasa $P_B(A)$ tu'rinde belgileydi.

Mısallar:

1. Qutıda 2 aq shar ha'm 1 qara shar bar. Eki Adam bir birden shar aladı. To'mendegi waqıyalar qarastırıladı:

A- birinshi adamda aq shardın' shıg'ıwı,

B-ekinshi adamda aq shardın' shıg'ıwı.

Eger de B waqıyası jo'ninde hesh na'rse belgili bolmasa, onda A waqıyasının' itimallıg'ı $\frac{2}{3}$ ge ten'. Eger de B waqıyasının' ju'zege asqanlıg'ı belgili bolsa, onda A waqıyasının' itimallıg'ı $\frac{1}{2}$ ge ten' boladı. Solay etip, $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(A/B) = \frac{1}{2}$

2.Eki kubik bir waqıtta taslang'an. Kelip shıqqan oshkolardıń qosındısı jup ekenligi ma'lim bolg'anda, olardıń qosındısı 8 ge ten' ekenliginin' itimallıg'ın tabın'.

Oshkolardıń qosındısının' 8 ge ten' bolıwın bildiretug'ın waqıyanı A arqalı, oshkolardıń qosındısının' jup ekenligin bildiretug'ın waqıyanı B arqalı belgileyik. Sonda:

$$\Omega = \{(i,j): i,j=1,2,3,4,5,6\},$$

$$A = \{(i,j): i+j=8, i,j=\overline{1,6}\},$$

$$B = \{(i,j): i+j=2k, i,j=\overline{1,6}; k=\overline{1,6}\}.$$

$|\Omega| = 36$, $|A| = 5$, $|B| = 18$ bolg'anlıqtan, itimallıqtın' klassikalıq anıqlaması boyınsha

$$P(A) = \frac{5}{36}, P(B) = \frac{18}{36},$$

$$P(A/B) = \frac{5}{18} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Bul jerde $AB=A$ bolg'anlıqtan $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ dep jazıwg'a boladı.

Meyli elementar waqıyalar ken'isligi o'z-ara ten'dey mu'mkinshilikli n elementar

waqıyalardan turatug'ın bolsın, yag'nıy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = \overline{1, n}$.

Olardıń ishinde $|A| = n$, $|B| = k$, $|AB| = r$ bolsın. Eger de B waqıyası ju'zege asqan bolsa, onda og'an derek k elementar waqıyalardıń birewi ju'zege asadı. Sol waqıtta A waqıyası asıwı ushın AB g'a derek bolg'an r elementar waqıyalardıń birewi ju'zege asadı. Sonlıqtan klassikalıq anıqlama boyınsha

$$P(A/B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Meyli $\{\Omega, F, P\}$ itimallıq ken'isligi berilgen bolıp, $A, B \in F$ ha'm $P(A) > 0$ bolsın. A waqıyasının' B waqıyası ju'zege asqandaqı sha'rtli itimallıg'ı dep

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (4.1)$$

formulası menen anıqlanatuǵın itimallıqqa aytamız.
(4.1) formula sıyaqlı $P(A) > 0$ bolǵanda

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (4.2)$$

formulasına iye bolamız. Bul formulalardan

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (4.3)$$

ekenligi kelip shıǵadı. Bul ten'lik ko'beytiw teoreması dep ataladı ha'm onı to'mendegishe aytıwǵa boladı.

Qa'legen eki waqıyanın' ko'beymesinin' itimallıǵı olardıń birewinin' itimallıǵın ekinshisinin' birinshisi ju'zege asqandag'ı sha'rtli itimallıǵına ko'beytkenge ten'.

Ko'beytiw teoremasın induksiya boyınsha qa'legen sandag'ı waqıyalardıń ko'beymesi ushın ulıwmalastırıwǵa boladı.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2/A_1) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Bul ten'liktin' da'lillileniwin oqıwshılardıń o'zlerine usınamız.

A waqıyası B waqıyasınan g'a'rebsiz delinedi, eger de $P(A/B) = P(A)$ ten'ligi orınlansa. Eger A waqıyası B dan g'a'rebsiz bolsa, onda B waqıyası da A dan g'a'rebsiz boladı. Bul jag'dayda $P(B/A) = P(B)$.

G'a'rebsiz waqıyalar ushın ko'beytiw teoreması a'piwayı ko'rinske iye boladı, atap aytqanda, eger de A ha'm B waqıyaları o'z-ara g'a'rebsiz bolsa, onda

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Bul teoremanı to'mendegishe ulıwmalastırıwǵa boladı.

Eger de $A_1, A_2, \dots, A_n$, waqıyaları g'a'rebsiz bolsa, onda

$$P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

Mısalı: Qutıda 2 aq ha'm 3 qara sharlar bar. Qutıdan ta'wekelge qatarına eki shar alınıadı. Alıng'an eki shardıń da aq shar bolıw itimallıǵın tabın'.

A arqalı alıng'an eki shar da aq boladı degen waqıyana belgileyik. A waqıyası eki waqıyanın' ko'beymesinen ibarat boladı:

$A = A_1 \cdot A_2$, bunda A_1 – birinshi ma'rte alıng'an shar aq shar, A_2 -ekinshi ma'rte alıng'an shar aq shar boladı degen waqıya.

Ko'beytiw teoreması boyınsha:

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2/A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,1$$

Usı sha'rtlerde, biraq birinshi ma'rte alıng'an shar qutıǵa qaytarılıp salınıp, qutıdag'ı sharlar aralastırıladı. Bul jag'dayda A_1 ha'm A_2 waqıyaları g'a'rebsiz bolıp,

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0,16$$

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Sha'rtli itimallıq dep qanday itimallıqqa aytiladı?
2. ko'beytiw teoremasın aytıp berin' ha'm jazıp ko'rsetin'.
3. G'a'rebsiz waqıyalar dep qanday waqıyalarg'a aytiladı?

A'debiyatlar: [1], I bap §7; [2]- [8].

5-lektsiya (2s.)

Waqiyalardın' tolıq gruppası. Tolıq itimallıqtın' formulası. Bayes formulası

Tayanış so'zler

Waqiyalardın' tolıq gruppası, birgeliksiz waqiyalar, gipotezalar, tolıq itimallıqtın' formulası, Bayes formulası.

Eger de $H_1, H_2, \dots, H_n$ waqiyaları jup-juptan birgeliksiz bolsa ha'm $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$ bolsa, onda birgeliksiz $H_1, H_2, \dots, H_n$ waqiyaları waqılardıń tolıq gruppasın hasıl etedi deymiz.

Joqarıdagı tiykargı teoremlar- itimallıqlardı qosıw ha'm ko'beytiw teoremlarının saldarları retinde tolıq itimallıq formulası dep atalıwshı formulanı keltirip shıǵarayıq.

Meyli $H_1, H_2, \dots, H_n$ waqiyaları birgeliksiz waqiyalardıń tolıq gruppasın hasıl etip, bul waqiyalardan birewi menen birge ju'zege asatug'ın bazı bir A waqıyasının itimallıg'ın tabıw talap etiledi. Bul gruppanın waqıyalarına a'dette gipotezalar dep ataydı. Bul jag'dayda mına formula orınlı boladı:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) \quad (5.1)$$

(5.1) formulag'a tolıq itimallıqtın' formulası delinedi.

Da'lillew: Sha'rt boyınsha $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$, $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$ ha'm $A \in \Omega$ ha'm $A = \Omega \cdot A =$

$H_1 A + H_2 A + \dots + H_n A$

$H_1, H_2, \dots, H_n$ waqiyaları birgeliksiz bolg'anlıqtan, $H_1 A, H_2 A, \dots, H_n A$ waqiyaları da birgeliksiz boladı. Onda itimallıqlardı qosıw ha'm ko'beytiw teoremları boyınsha

$$P(A) = P(H_1 A + H_2 A + \dots + H_n A) = \sum_{i=1}^n P(H_i A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)$$

Usını da'lillew talap etilgen edi.

Mısallar:

1. Birdey u'sh qutı berilgen. Birinshi qutıda 2 aq ha'm 1 qara shar, ekinshi qutıda 3 aq ha'm 1 qara shar, u'shinshi qutıda 2 aq ha'm 2 qara sharlar bar. Birew ta'wekelge qutıdan birewin tan'lap aladı ha'm onnan bir shar aladı. Usı alıng'an shardıń aq bolıwının itimallıg'ın tabın'.

Mına u'sh boljawdı (gipotezanı) qarayıq

H_1 – birinshi qutını tan'law, H_2 – ekinshi qutını tan'law, H_3 – u'shinshi qutını tan'law ha'm A – aq shar shıǵıwshı waqıyanı an'latsın. Ma'selenin sha'rti boyınsha boljawlar birdey imkaniyatlı bolg'anlıqtan

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

A waqıyasının usı boljawlardagı itimallıg'ı sa'ykes:

$$P(A/H_1) = \frac{2}{3}, \quad P(A/H_2) = \frac{3}{4}, \quad P(A/H_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

Tolıq itimallıqtın' formulası boyınsha

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{36}$$

2. Oqıtıwshı joqarı matematikadan sınaq alıw ushın 50 ma'sele tayarlag'an. Olardıń ishinde differentsial esabınan 20 ma'sele, integral esabınan a'h ma'sele, itimallıqlar teoriyasınan 12 ma'sele bar. Student differentsial esabınan a'h ma'sele, integral esabınan 15 ma'sele, itimallıqlar teoriyasınan 10 ma'sele sheshe alatug'ın bolsa, onın' dus kelgen bir ma'seleni sheship, sınaq tapsırıwının itimallıg'ın tabın'.

To'mendegi boljawlardı kiriteyik:

H_1 –studentke ma'sele differentsial esabınan tu'sti,
 H_2 - studentke ma'sele integral esabınan tu'sti,
 H_3 - studentke ma'sele itimallıqlar teoriyasınan tu'sti.
A- student sınaq tapsırdı.

$$\text{Sonda } P(H_1) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}, P(H_2) = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}, P(H_3) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

Sa'ykes sha'rtli itimallıqlar:

$$P(A/H_1) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}, P(A/H_2) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}, P(A/H_3) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6},$$

Sonlıqtan (5.1) formula boyınsha

$$P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} + \frac{6}{25} \cdot \frac{5}{6} = \frac{43}{50} = 0,86$$

Endi itimallıqlardı ko'beytiw teoreması ha'm tolıq itimallıqtın' formulasının' saldarı retinde Bayes formulası dep atalıwshı formulanı keltirip shıǵarayıq. Mınaday ma'seleni qarastırayıq: O'z-ara birgeliksiz waqıylardıń gruppası $H_1, H_2, \dots, H_n$ berilgen. Bul boljawlardın' sınawg'a shekemgi itimallıqları belgili bolıp, olar sa'ykes $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Sınaw ju'rgizilip, na'tiyjede bazı-bir A waqıyasın' ju'zege asıwı bayqaladı. Usı A waqıyası ju'zege asıwı menen bul boljawlardın' itimallıqları qalay o'zgeredi, basqasha aytqanda ha'r bir boljaw ushın $P(H_i/A)$ sha'rtli itimallıqlardı tabayıq.

İtimallıqlardı ko'beytiw formulası boyınsha:

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$$

Bunnan

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, (i=1,2,\dots,n)$$

Bundag'ı $P(A)$ nı tolıq itimallıqtın' formulası menen an'latsaq

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}. \quad (5.2)$$

Bul formulag'a Bayes formulası dep ataladı.

Mısalı:

1. Eki atqısh bir-birinen g'a'rezsiz bir nıshanag'a ha'r qaysısı bir retten atadı. Birinshi atqıstın' nıshanag'a tiygiziw itimallıǵı 0,8; ekinshisiniki 0,4. Atıw tamam bolg'annan keyin nıshanada bir tesik tabılǵ'an (A waqıyası). Usı tesiktin' birinshi atqıshqa tiyisli bolıw itimallıǵın tabın'. Sınawg'a shekem mınaday boljawlar bolıwı mu'mkin:

H_1 –birinshi atqıstiki de, ekinshi atqıstiki de tiymeydi.

H_2 - eki atqıstiki de tiyedi,

H_3 - birinshisiniki tiyedi, ekinshisiniki tiymeydi

H_4 –birinshisiniki tiymeydi, ekinshisiniki tiyedi.

Bul boljawlardın' itimallıqları:

$$P(H_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12; \quad P(H_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32;$$

$$P(H_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48; \quad P(H_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$$

Baqlang'an A waqıyasın' usı boljawlardag'ı sha'rtli itimallıqları:

$$P(A/H_1) = 0; \quad P(A/H_2) = 0;$$

$$P(A/H_3) = 1; \quad P(A/H_4) = 1.$$

Demek H_1 ha'm H_2 boljawları joqqa shıǵadı, al H_3 ha'm H_4 boljawların' sha'rtli itimallıqları Bayes formulası boyınsha esaplanıladı:

$$P(H_3/A) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7}; \quad P(H_4/A) = \frac{0,08 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{1}{7}$$

Solay etip, tesiktin' birinshi atqışqa tiyisli bolıw itimallıg'ı $\frac{6}{7}$ g'a ten' eken.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Waqıyalardıń tolıq gruppası dep qanday sha'rtler orınlang'anda ayıladı?
2. Birgeliksiz waqıyalar dep qanday waqıyalarg'a ayıladı?
3. Gipotezalar degenimiz ne?
4. Toliq itimallıqtın' formulasın jazıp ko'rsetin'?
5. Bayes formulasın kelitirip shıg'arın'.

A'debiyatlar: [1], I bap §7; 8, [2]- [8].

6-lektsiya (2s.)

G'a'rezsiz sınavlar izbe-izligi. Bernulli sxeması. Binomial ha'm polinomial formulalar

Tayanış so'zler

G'a'rezsiz sınavlar izbe-izligi, Bernulli formulası, binomial formula, binomial bo'listiriw, polinomial.

Praktikada sınavlar tu'rli-tu'rli qaytalanıp, ta'kirarlanıp turadı. Bunda eki jag'day bolıwı mu'mkin: ju'rgizilgen sınav na'tiyjesi alding'ı ya'ki kelesi sınav na'tiyjesine ya g'a'rezsiz, ya g'a'rezli boladı. Birinshi jag'dayda-g'a'rezsiz sınavlar dep atalsa, ekinshi jag'dayda-g'a'rezli sınavlar dep ataladı.

İtimallıqlardı qosıw ha'm ko'beytiw qa'deleri waqıyalardıń a'dewir quramalı kombinatsiya itimallıqların tabıwg'a imkaniyat beredi. Biz ha'zir tanısutug'ın en' a'piwayı, sonın' menen birge en' ken' taqalg'an sxemalardan biri g'a'rezsiz sınavlardın' ta'kirarlanıw sxeması yamasa Bernulli sxeması dep atalıwshı sxema bolıp esaplanadı.

Birer sınav na'tiyjesinde A waqıyası ju'zege asıwı ya'ki aspawı da mu'mkin. A waqıyasının' ju'zege asıw itimallıg'ın $P(A)=p$, ju'zege aspawının' itimallıg'ın $P(\bar{A})=1-p=q$ dep belgileyik.

Izbe-iz o'tkerilgen eki g'a'rezsiz sınavdın' mu'mkin bolg'an na'tiyjelerin ko'reyik (1-tablitsa).

Sınavdın' na'tiyjeleri	AA	A $\bar{A}$	$\bar{A}A$	$\bar{A} \bar{A}$
İtimallıqlar	p^2	pq	qp	q^2

1-tablitsa

$$p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = 1$$

Sınavlar sanı, ma'selen u'shew bolg'anda da tap usılayınsha pikir ju'ritip, joqarıdag'ıg'a uqsas

$$p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$$

ekenligine iye bolamız.

Endi ma'seleni ulıwma tu'rde anıqlawg'a boladı.

Bernulli formulası. Eger ha'r bir sınavda waqıyanın' ju'zege asıw itimallıg'ı turaqlı ha'm ol p g'a ten' bolsa, onda n ret g'a'rezsiz sınavlar ju'rgizgende usı waqıyanın' da l m ret ju'zege asıw itimallıg'ı:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (6.1)$$

formulası menen esaplanadı.

Buni da'lillew ushın n ret g'a'rezsiz sınaqlar ju'rgizgende A waqıyasının' da'l m ret ju'zege asıwının' ha'm n-m ret aspawının' barlıq mu'mkin bolg'an izbe-izligin du'zeyik:

$$\underbrace{AA \cdots A}_{m(pem)} \underbrace{\hat{A}\hat{A} \cdots \hat{A}}_{n-m(pem)}, \dots, \underbrace{\hat{A}\hat{A} \cdots \hat{A}}_{n-m(pem)} \underbrace{AA \cdots A}_{m(pem)}.$$

Bul izbe-izlik ag'zaların' bir-birinen ayırmashılıg'ı tek ornalasıw ta'rtibinde g'ana bolıp tur, sonlıqtan onı A waqıyası m ret, $\hat{A}$ waqıyası n-m ret ta'kirarlanıp almasadı dep qarawg'a boladı. Olardıń sanı C_n^m ge ten' bolg'anlıqtan

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Kelip shıqqan formula binomial formula dep te ataladı. Sebebi (6.1) ten'likтин' on' jag'ı $(p+q)^n$ binomının' jayılmasındaǵı x^m shamasının' koeffitsienti boladı. $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$ itimallıqlarının' izbe-izligi binomial bo'listiriw dep ataladı.

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1,$$

yamasa

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1$$

Endi biz o'tkergen n sınaqda A_1 waqıyasının' m_1 ret, A_1 waqıyasının' m_2 ret, ..., A_k waqıyasının' m_k ret ju'zege asıwının' itimallıg'ın tabayıq ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$). Bul itimallıqtı $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ dep belgileyik. Bul itimallıq

$$\{ \underbrace{A_1 \cdots A_1}_{m_1(pem)} \underbrace{A_2 \cdots A_2}_{m_2(pem)} \cdots \underbrace{A_k \cdots A_k}_{m_k(pem)} \}$$

tu'rindegi elementar waqıyalardıń itimallıqlarının' qosındısına ten'. Bunday ha'r bir elementar waqıyanın' itimallıg'ı $p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k}$ ko'beymesine ten', al elementar waqıyalardıń

sanı $\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}$ polinomial koeffitsientine ten' bolg'anlıqtan

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k} \quad (6.2)$$

(6.2) formula polinomial formula dep ataladı. Sebebi bul ten'likтин' on' jag'ı $(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_kx_k)$ polinomının' jayılmasındaǵı $x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_k^{m_k}$ an'latpasının' koeffitsientleri boladı.

Мисаллар:

1. Электроэнергияның bir сутка dawamında sarıplawının' belgilengen normadan asıp ketpew itimallıg'ı $p=0,75$ ke ten'. Jaqın 6 sutkanın' 4 sutkası dawamında elektroenergiyanın' sarıplawının' normadan asıp ketpew itimallıg'ın tabın'.
2. Bazı bir elatlı punkte sentyabr ayında orta esap penen 12 ku'n jawın jawadı. Sentyabr ayında dusmaldan alıng'an 8 ku'nnin' ishinde 3 ku'nde jawın jawatug'ınlıg'ının' itimallıg'ın tabın'.
3. Moneta 6 ma'rte taslanadı. Gerb jag'ının' 0,1,...,6 ma'rte kelip shıg'ıwının' itimallıg'ı nege ten'?

4. Eki ten' ku'shli shaxmatshı oynag'anda 4 partiyadan 3 partiyanı utıw itimallıg'ı ko'p pe yamasa 8 partiyadan 5 partiyanı utıw itimallıg'ı ko'p pe?

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. G'a'rezsiz sınavlar izbe-izligi dep qay waqıtta ayıldı?
2. Bernulli formulasın jazın'.
3. Binomial formula dep ne ushın ayıldı?
4. Binomial bo'listiriw degenimiz qanday bo'listiriw?

A'debiyatlar: [1], 2-bap §9; [2]- [8].

7-lektsiya (2s.) Bernulli sxeması ushın sheklik teoremları

Tayanış so'zler

Asimptotikalıq juwıqlasıw, Muavr-Laplas teoremasi, Laplastın' lokallıq teoremasi, Laplastın' integrallıq teoremasi, Laplas funksiya, Puasson formulası.

Biz joqarıda n sınavda waqıyanın' m ma'rte ju'zege asıwın esaplaw ushın Bernulli formulasın keltirip shıg'ardıq. Bul formulanı keltirip shıg'arg'anda biz ha'r bir sınavda waqıyanın' ju'zege asıw itimallıg'ın turaqlı dep uyg'ardıq. Bernulli formulasınan, n nin' u'lken ma'nislerinde paydalanıw a'dewir qıyın ekenligin an'sat ko'riwge boladı, sebebi og'ada u'lken sanlar menen a'meller ju'rgiziwge tuwra keledi. Ma'selen, eger $n=50$, $m=30$, $p=0,1$ bolsa. Onda

$$P_{50}(30) = \frac{50!}{30!20!} (0,1)^{30} (0,9)^{20} \quad \text{bolıp, bunda}$$

$$50! = 30\,414\,093 \cdot 10^{57}, \quad 30! = 26\,525\,286 \cdot 10^{25}, \quad 20! = 24\,329\,020 \cdot 10^{11}$$

Arnawlı tablitsalardan paydalanıp esaplawdı a'dewir a'piwayılastırıwga boladı, degen menen bul joldın' o'zi de biraz quramalı, sonday-aq aytarlıqtay kemshilikke iye: tablitsalar juwıq ma'nislerdi o'z ishine aladı, sonın' ushın da esaplaw protsesinde qa'telikler jıynalıp, en' juwmag'ındag'ı na'tiyje da'l ma'nisinen a'dewir parq qılıwı mu'mkin. Mınaday soraw tuwadı: bizdi qızıqtırıwshı itimallıqtı Bernulli formulasınan paydalanbay-aq esaplaw mu'mkin emes pe? Mu'mkin eken. Laplastın' lokallıq teoremasi sınavlar sanı jeterli ko'p bolg'anda n sınavda waqıyanın' m ma'rte ju'zege asıwının' itimallıg'ın juwıq tabıwga mu'mkinshilik beretug'ın asimptotikalıq formulanı sıpatlaydı. ($\varphi(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaının' asimptotikalıq juwıqlasıwı delinedi, eger de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1$ bolsa).

$p = \frac{1}{2}$ bolg'an jag'day ushın asimptotikalıq formula 1730-jılı Muavr ta'repinen tabılğan; 1783 j. Laplas onı 0 ha'm 1 den o'zgeshe qa'legen p ushın ulıwmalastırğan. Sonın' ushın ga'p etip atırğan teoremanı geyde Muavr-Laplas teoremasi dep te ataydı.

Laplastın' lokallıq teoremasının' da'lilleniwi a'dewir quramalı bolg'anlıqtan onın' tek g'ana formulirovkasin berip, mısıl ko'rsetiw menen sheklenemiz.

Laplastın' lokallıq teoremasi. Eger A waqıyasının' ju'zege asıw itimallıg'ı p ha'r bir sınavda turaqlı ha'm ol 0 ha'm 1 den o'zgeshe bolsa, onda A waqıyasının' n sınavdı da'l m ma'rtesinde ju'zege asıw itimallıg'ı shama menen

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

funktsiyasının' $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ bolg'andag'ı ma'nisine ten' (n qanshelli u'lken bolsa, sonshelli da'l boladı).

Argument x tın' on' ma'nislerine sa'ykes keliwshi $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funktsiyasının' ma'nisleri jaylastırılğan tablitsalar bar. $\varphi(x)$ funktsiyası jup funktsiya bolg'anlıqtan, yag'nıy

$\varphi(-x) = \varphi(x)$, x tın' teris ma'nisleri ushın da tap sol tablitsalardan paydalanamız.

Solay etip,

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad \text{bunda} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Mısalı: Eger A qıyasının' ha'r bir sıawda ju'zege asıw itimallıg'ı 0,2 ge ten' bolsa, 400 sıawdın' da'l 80 ma'rtesinde onın' ju'zege asıw itimallıg'ın tabın'.

SHa'rt boyınsha n=400, m=80, p=0,2; q=0,8.

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{4000,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x).$$

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{8} = 0$$

Tablitsadan $\varphi(0) = 0,3989$ ekenin tabamız. Demek $P_{400}(80) = 0,04986$.

Eger de Bernulli formulası boyınsha esaplasaq $P_{400}(80) = 0,0498$.

Meyli ja'ne n sıaw ju'rgizilgen bolıp, olardıń ha'r birinde A waqıyasının' ju'zege asıw itimallıg'ı p turaqlı bolsın ($0 < p < 1$).

$P_n(m_1, m_2)$ itimallıqtı, yag'nıy A waqıyası n sıawda « m_1 den m_2 ge shekem » ju'zege asadı degen itimallıqtı qalay esaplasa boladı? Bug'an Laplastın' integrallıq teoremasi juwap beredi.

Laplastın' integrallıq teoremasi: Eger A waqıyasının' bir sıawdag'ı ju'zege asıw itimallıg'ı p turaqlı ha'm ol 0 ha'm 1 den o'zgeshe bolsa, onda $P_n(m_1, m_2)$ itimallıq shama menen mına anıq integraldın' ma'nisine ten':

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^I}^{x^{II}} \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (7.2)$$

$$\text{bunda } x^I = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{ha'm} \quad x^{II} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Bul jerde de arawlı tablitsalardan paydalanamız; tablitsa

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

funktsiyası ushın keltirilgen (bug'an Laplas funktsiyası delinedi). Tablitsada $F(x)$ funktsiyasının' $x > 0$ ha'm $x = 0$ bolg'andag'ı ma'nisleri berilgen; $x < 0$ ushın da sol tablitsadan ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$ ekenligin esapqa alıp) paydalanamız.

Tablitsadan paydalanıw mu'mkin bolıwı ushın (7.2) an'latpanı to'mendegishe tu'rlandiremiz:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^I}^0 \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^{II}} \ell^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(x^{II}) - \Phi(x^I).$$

Solay etip

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x^{II}) - \Phi(x^I).$$

$$\text{bunda } x^I = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{ha'm } x^{II} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Mısalı: Detaldın' texnikalıq qadag'alaw bo'liminen o'tpew itimallıg'ı $p=0,2$ ge ten'. Tosınnan alıng'an 400 detaldın' ishinde tekserilmegenleri 70 ten 100 ge shekem bolıwının' itimallıg'ın tabın'. SHa'rt boyınsha $n=400$, $m_1=80$, $m_2=100$, $p=0,2$; $q=0,8$.

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x^{II}) - \Phi(x^I).$$

$$x^I = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25$$

$$x^{II} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5$$

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

$$\text{Tablitsa boyınsha: } \Phi(2,5) = 0,4938; \quad \Phi(1,25) = 0,3944.$$

$$\text{İzlep atırğ'an itimallıq: } P_{400}(70, 100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Puasson formulası. Meyli g'a'rezsiz n sınaqlar ju'rgizilgen bolsın. Olardın' ha'r birinde A waqıyasının' ju'zege asıw itimallıg'ı p g'a ten' bolsın. $P_n(m)$ itimallıqtı anıqlaw ushın Bernulli formulasınan paydalanamız.

Eger de n jeterli u'lken bolsa, onda Laplastın' asimptotalıq formulasınan paydalanamız. Biraq, eger de waqıyanın' ju'zege asıw itimallıg'ı ju'da' kishi (ma'selen $p < 0,1$) bolsa, bul formula jaramsız. Bunday jag'daylarda (n u'lken, p kishi) Puassonnın' asimptotikalıq formulasınan paydalang'an qolaylı. Demek, mınaday ma'seleni qaraymız: Sınaqlar sanı og'ada ko'p bolg'anda ha'm ha'r bir sınaqda waqıyanın' ju'zege asıw itimallıg'ı ju'da' az bolsa, waqıyanın' da'l m ma'rte ju'zege asıw itimallıg'ın tabıw talap etiledi. Mına sha'rt orınlansın dep uyg'aramız: np ko'beyme turaqlı ma'nisin saqlasın, yag'nıy $np = \lambda$ bolsın.

Bizdi qızıqtırırwshı itimallıqtı tabıw ushın Bernulli formulasınan paydalanamız:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-m) [n - (n-m) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n]}{m! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-m)} \cdot p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot [n-(m-1)]}{m!} \cdot p^m (1-p)^{n-m}$$

Bizde $np=\lambda$, yag'nıy $p=\frac{\lambda}{n}$ bolg'anlıqtan

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m)$ di tabayıq. Sonda $P_n(m) \approx$

$$\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}\right] = \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}$$

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

Solay etip (a'piwayılıq ushın $\approx$ belgisin qaldıramız)

Bug'an Puasson formulası delinedi (massalıq (n u'lken) siyrek (p kishi) waqıyalar itimallıg'ı).

Mısalı: Zavod bazag'a 5000 sıpatlı buyım jo'neltken. Jolda buyımın' za'lelleniw itimallıg'ı 0,0002 ge ten'. Bazag'a 3 jaramsız buyımın' kelip tu'siwinin' itimallıg'ın tabın'.

SHa'rt boyınsha $n=5000$, $m=3$, $p=0,0002$. Onda $\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1$ Demek

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0,06.$$

$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m=1,2,\dots$ itimallıqlarının' izbe-izligi Puasson bo'listiriliwi dep ataladı.

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = 1 \text{ ekenligin an'sat ko'riwge boladı.}$$

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. $f(x)$ funktsiyasının' asimptotikalıq juwıqlasıwı dep qası funktsiyag'a ayıladı?
2. Muavr-Laplas teoremasın aytn'.
3. Laplastın' lokallıq teoreması, Laplastın' integrallıq teoremları qanday mag'anag'a iye?
4. Laplas funktsiyasın jazıp ko'rsetin'.
5. Puasson formulasın jazın'.

A'debiyatlar: [1], 2-bap §10-13; [2]- [8].

II bap

Tosınnanlı shamalar ha'm olardın' bo'listiriw nızamları 8-lektsiya (2s.)

Tosinnanlı shamalar. Bo'listiriv funktsiyasi ha'm bo'listiriv tıg'ızlıg'ı

Tayanış so'zler

Tosinnanlı shama, diskret tosinnanlı shama, u'zliksiz tosinnanlı shama, bo'listiriv nıزامı, bo'listiriv qatarı, Puasson bo'listirivi, bo'listiriv funktsiyasi, binomial bo'listiriv, bo'listiriv tıg'ızlıg'ı.

Biz burın,yag'nıy itimallıqlar teoriyasının' tiyarg'ı tu'siniklerin bayanlag'anımızda og'ada a'hmiyetli tu'sinik bolıp esaplanatug'ın tosinnanlı shama tu'sinigin kiritken edik.

Ma'selen, kubikti taslag'anda 1,2,3,4,5,6 sanlarınan birewi shıg'ıwı mu'mkin edi. Tosinnanlı sebeplerge baylanışlı shıqqan oshkolardın' sanın aldın-ala anıqlaw mu'mkin emes. Usı mag'anada oshkolar sanı tosinnanlı shama bolıp esaplanadı; 1,2,3,4,5,6 sanları bul tosinnanlı shamanın' qabıl etiwi mu'mkin bolg'an ma'nisler bolıp tabıladı.

Tosinnanlı shama dep sınaw na'tiyjesinde a'welden belgisiz anaw yamasa mınaw ma'nisti qabıl etiwi mu'mkin bolg'an shamag'a ayıladı.

Mısallar:

1. U'sh ma'rtebe nıshanag'a atqandag'ı tiyiwlər sanı;
2. Jan'adan tuwılg'an 100 na'restenin' ishinde er balalar sanı;
3. Bir sutka dawamında telefon stantsiyasına kelip tu'sken shaqırıqlar sanı.

Bul keltirilgen mısallardın' u'shewinde de tosinnanlı shamalarımız sanap shıg'ıwg'a bolatug'ın bo'lek-bo'lek ma'nislerdi qabıl etedi. Bunday tosinnanlı shamalarg'a diskret yamasa u'zilikiz tosinnanlı shamalar delinedi.

Basqa tu'rdegi tosinnanlı shamalar da ushırasadı, ma'selen: 1.Deneni analitikalıq ta'rezide o'lshegendegi qa'telik;2.usıw apparatının' berilgen biyiklikke ko'terilgen momenttegi tezligi.

Bunday tosinnanlı shamalardın' qabıl etiwi mu'mkin bolg'an ma'nisleri bazı-bir aralıqtı toltıradı. Bunday tosinnanlı shamalarg'a u'zliksiz tosinnanlı shamalar delinedi. Solay etip:

Diskret tosinnanlı shama dep, onın' qabıl etiwi mu'mkin bolg'an ma'nislerin sanap shıg'ıw yamasa nomerlep shıg'ıw mu'mkin bolg'an shamag'a ayıladı.

U'zliksiz tosinnanlı shama dep, onın' qabıl etiwi mu'mkin bolg'an ma'nisleri bazı bir shekli yamasa sheksiz aralıqtı u'zliksiz toltıratug'ın sh ayıladı.

Tosinnanlı shamalardı $\xi, \eta, \zeta, \dots$ ha'ripleri menen, mu'mkin bolg'an ma'nislerin $x, y, z, \dots$ ha'ripleri menen belgileyimiz. Ma'selen, eger de ξ - u'sh ma'rte atqandag'ı tiyiwlər sanın an'latsa, onda onın' mu'mkin bolg'an ma'nisleri: $x_1=0; x_2=1; x_3=2; x_4=3$ boladı.

Meyli diskret ξ tosinnanlı shaması berilgen bolıp, ol $x_1, x_2, \dots, x_n$ ma'nislerden birewin qabıllasın, yag'nıy jup-juptan birgeliksiz waqıyalardın' tolıq gruppasın jasaytug'ın:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = x_1, \\ \xi = x_2, \\ \dots\dots\dots \\ \xi = x_n \end{array} \right\} \quad (9.1)$$

Waqıyalardan birewi ju'zege assın. Bul waqıyalardın' itimallıqların sa'ykes indeksli p lar menen belgileyik: $P\{\xi=x_1\}=p_1, P\{\xi=x_2\}=p_2, \dots, P\{\xi=x_n\}=p_n$.

Biregliksiz (9.1) waqıyaları, waqıyalardın' tolıq gruppasın jasag'anlıqtan

$$\sum_{i=1}^n P\{\xi = x_i\} = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Bul qosındı itimallıq tosınnanlı shamanın' (dara) x_i ma'nisleri boyınsha qanday da bir jollar menen bo'listirilip, taratılıp turadı.

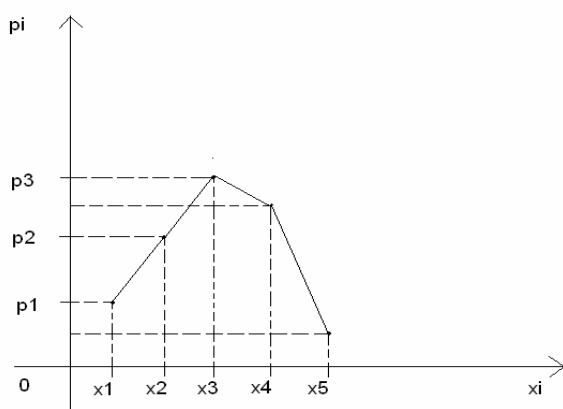
Tosınnanlı shamanın' bo'listiriw nızamı dep tosınnanlı shamanın' ma'nisleri menen olarg'a sa'ykes itimallıqlardı baylanıstırıwshı qa'dege aytladı.

Tosınnanlı shamag'a usı nızamg'a boysınadı dep ataymız. Bul nızam tablitsalıq, grafikalıq ha'm analitikalıq usıllarda beriliwi mu'mkin.

ξ	x_1	x_2	x_3		x_n
p	p_1	p_2	p_3		p_n

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Bunday tablitsag'a tosınnanlı ξ shamasının' bo'listiriw qatarı delinedi. Bo'listiriw qatarın anıg'ıraq ko'z aldımızg'a keltiriw ushın onın' grafigin sızg'an qolaylı boladı:



3-su'wret.

Binomial bo'listiriw, Puasson bo'listiriwleri bo'listiriw nızamının' analitikalıq usılda beriliwi bolıp esaplanadı.

Mısalı: Atqısh nıshag'a 3 ma'rte oq atadı. Ha'r bir atqandag'ı nıshanag'a tiyiw itimallıg'ı 0,4 ke ten'. Ha'r bir tiygizgeni ushın atıwshıg'a 5 oshko jazıladı. Payda bolg'an oshkolardı bo'listiriliw qatarın du'zin'.

x_i	0	5	10	15
P	0,9'a'6	0,432	0,288	0,064

Bo'listiriw funktsiyası. U'zliksiz tosınnanlı shama bazı bir aralıqtı tutas toltırıwshı sheksiz ko'p (sanaqsız ko'plik) mu'mkin bolg'an ma'nislerge iye. Bunday tosınnanlı shamalar ushın tablitsa (bo'listiriw qatarın) du'ziw mu'mkin emes.

Tosınnanlı ξ shamasının' bo'listiriw funktsiyası dep

$$F(x) = P\{\xi < x\}$$

funktsiyag'a aytladı. Bo'listiriw funktsiyası tosınnanlı shamanın' universal xarakteristikası bolıp tabıladı. Ol barlıq tosınnanlı shamalar ushın bar boladı. Onın' bazı bir qa'siyetlerin keltireyik:

1. $F(x)$ kemeymeytug'in funktsiya, yag'nıy $x_1 > x_2$ bolg'anda $F(x_1) \geq F(x_2)$
2. $F(-\infty) = 0$.
3. $F(+\infty) = 1$

Eger de ξ diskret tosınnanlı shama bolsa, onda ol shekli yamasa sheksiz ko'p ma'nislerdi qabıllaydı ha'm onın' ha'r bir x_i ma'nisti qabıl etiw itimallıg'ı $P\{\xi = x_i\} = p_i$ boladı. Sonlıqtan $F(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{x_i < x} P\{\xi = x_i\} = \sum_{x_i < x} p_i$.

Mısalı: Tosınnanlı ξ shaması bir ma'rte oq atqanda tiyiwler sanı bolıp, nıshanag'a tiyiw itimallıg'ı 0,3 ke ten'. Onın' bo'listiriw funktsiyasın du'zin' ha'm grafigin jasan'.

Bo'listiriv qatari mına ko'riniste boladı:

x_i	0	1
p	0,7	0,3

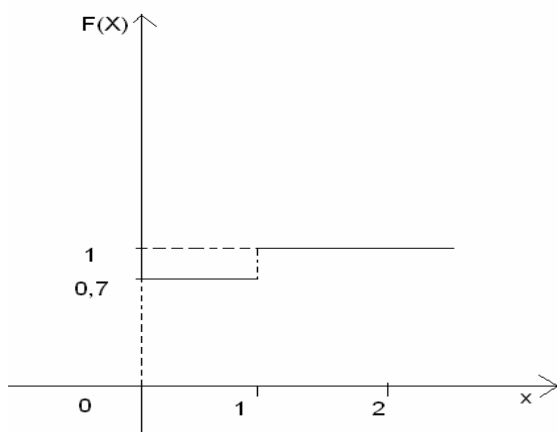
Tosinnanlı ξ shamasının' bo'listiriv funktsiyasın anıqlayıq:

$x \leq 0$ bolg'anda $F(x) = P\{\xi < x\} = 0$;

$0 < x \leq 1$ bolg'anda $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} = 0,7$;

$x > 1$ bolg'anda $F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = 1$

Bo'listiriv funktsiyasının' grafigi mına su'wrette ko'rsetilgendeı:



4-su'wret.

Bo'listiriv tıg'ızlıg'ı. Tosinnanlı ξ shamasının' bo'listiriv funktsiyasın bilgen jag'dayda onın' $\alpha < \xi < \beta$ ten'sizliklerdi qanaatlandırıwshı itimallıg'ın tabıwg'a boladı. İtimallıqlardı qosıw teoreması boyınsha

$$P\{\xi < \beta\} = P\{\xi < \alpha\} + P\{\alpha \leq \xi < \beta\}.$$

Bunnan

$$P\{\alpha \leq \xi < \beta\} = P\{\xi < \beta\} - P\{\xi < \alpha\},$$

yamasa

$$P\{\alpha \leq \xi < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha).$$

Bul ten'likten $P\{\xi = \alpha\}$ itimallıqtı tabıwg'a boladı.

$$P\{\xi = \alpha\} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} P\{\alpha \leq \xi < \beta\} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)]$$

Eger $F(x)$ funktsiya u'zliksiz bolsa, aqırğ'ı shek nolge ten'. Demek,

$$P\{\xi = \alpha\} = 0.$$

Tosinnanlı shamanın' bo'listiriv funktsiyası u'zliksiz bolsa, onda tosinnanlı shamanın' qa'legen bo'lek bir ma'nisti qabıl etiw itimallıg'ı nolge ten' boladı.

Bo'listiriv funktsiyasının' tuwındısı

$$f(x) = F'(x)$$

bo'listiriv tıg'ızlıg'ı yamasa bo'listirivdin' differentsiallıq funktsiyası delinedi.

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

yamasa

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < \xi < x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

ten'likti jaza alamız. Bizde

$$P\{\alpha < \xi < \beta\} = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} F'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Sonday-aq, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ ekenligi kelip shıg'adı. Bo'listiriw tıg'ızlıg'ı

mınaday qa'siyetlerge boysınadı:

$$1. f(x) \geq 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\text{Мысалы: } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ ax^2, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = ?, \quad a = ?, \quad P\{0,25 < \xi < 0,5\} = ?$$

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Tosınnanlı shama dep qanday shamg'a aytamız?
2. Diskret tosınnanlı shama dep qanday tosınnanlı shamalarg'a ayıladı?
3. U'zliksiz tosınnanlı shamanın' anıqlamasın keltirin'.
4. Bo'listiriw nızamı dep nege ayıladı?
5. Bo'listiriw qatarı degenimiz ne?
6. Puasson bo'listiriwin jazıp ko'rsetin'.
7. Bo'listiriw funktsiyası dep nege aytamız ha'm onın' formulası qanday?
8. Bo'listiriw tıg'ızlıg'ı degenimiz ne ha'm onı qanday anıqlaymız?

A'debiyatlar: [1], 4-bap §18;19, [2]- [8].

9-lektsiya (2s.)

Tosınnanlı shamalardıń sanlı xarakteristikaları ha'm olardıń qa'siyetleri

Tayanış so'zler

Matematikalıq ku'tiliw, dispersiya, orta kvadratlıq awısıw.

Praktikanın' ko'pshilik ma'selelerinde tosınnanlı shamanı tolıq xarakterlew sha'rt bolmay, al onın' tek g'ana ayırım sanlı parametrlerin ko'rsetiw jetkilikli boladı. Bunday xarakteristikalarđ tosınnanlı shamanın' sanlı xarakteristikaları delinedi.

Meyli ξ -diskret tosınnanlı shama bolıp, onın' qabıl etiwı mu'mkin bolg'an ma'nisleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olardı qabıl etiw itimallıqları $p_1, p_2, \dots, p_n$ bolsın.

Tosınnanlı ξ shamasının' matematikalıq ku'tiliwi dep

$$M\xi = \sum_{k=1}^n x_k p_k \quad (10.1)$$

sanına ayıladı. Diskret tosınnanlı shamanın' mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' sanı sheksiz bolıwı da mu'mkin. Bul jag'dayda

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (10.2)$$

Bunda (10.2) qatardı absolyut jıyınalıq dep uyg'arıladı.

Bo'listiriw tıg'ızlıg'ı $f(x)$ bolg'an u'zliksiz tosınnanlı ξ -shamasının' matematikalıq ku'tiliwi dep

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (10.3)$$

sanına aytiladi. Buni bilay jazıwg'a da boladı:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \quad (10.4)$$

Mısallar:

1. Meyli ξ shaması $x_1, x_2, \dots, x_n$ ma'nislerdi $\frac{1}{n}$ itimallıq penen qabıl etsin. Onda

$$M\xi = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$2. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{16}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases} \quad f(x)=? \quad M\xi = ?$$

3. Meyli ξ shaması $[a; b]$ aralıqta ten' o'lsheqli bo'listirilgen bolsın. Onda

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x \notin [a; b] \end{cases} \quad M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

Endi matematikalıq ku'tiliwdin' bazı bir qa'siyetlerin ko'rip o'teyik.

1. $MC=C$, C-turaqlı san.

2. $M(C\xi)=CM\xi$

3. Eki g'a'rezsiz tosınnanlı shamanın' ko'beymesinin' matematikalıq ku'tiliwi olardin' matematikalıq ku'tiliwlerinin' ko'beymelerine ten':

$$M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$$

4. Eki tosınnanlı shamanın' qosındısının' matematikalıq ku'tiliwi, qosılıwshılardin' matematikalıq ku'tiliwlerinin' qosındısına ten':

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$$

$$5. \quad M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta$$

Bul qa'siyetlerdin' durıslıg'ın tekseriw oqıwshılardin' o'zlerine usınıladı.

Meyli ξ -tosınnanlı shama, al $M\xi$ -onın' matematikalıq ku'tiliwi bolsın.

$\xi - M\xi - M$ ayırmag'a tosınnanlı shamanın' o'zinin' matematikalıq ku'tiliwinen awısıwı dep ataladı. Awısıwdın' matematikalıq ku'tiliwi nolge ten':

$$M(\xi - M\xi) = 0$$

Praktikada ko'pshilik jag'daylarda tosınnanlı shamanın' mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' o'zinin' orta ma'nisi do'gereginde shashıran'qılıg'ın bahalaw talap etiledi.

Tosınnanlı shamanın' dispersiyası dep, bul tosınnanlı shamanın' onın' matematikalıq ku'tiliwinen awısıwının' kvadratının' matematikalıq ku'tiliwine aytiladı:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

$$\text{Eger de } M M\xi = m \text{ desek, onda} \quad D\xi = M(\xi - m)^2$$

Solay etip, eger de ξ diskret tosınnanlı shama bolsa, onda

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - m)^2 p_k,$$

al eger de ξ bo'listiriw tıg'ızlıg'ı $f(x)$ bolg'an u'zliksiz tosınnanlı shama bolsa, onda

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx$$

Geyde tosınnanlı ξ shamasının' dispersiyasın to'mendegi formula boyınsha esaplag'an qolaylı boladı.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

Endi dispersiyanın' bazı bir qa'siyetlerin ko'rip o'teyik.

1. $DC=C$, C -turaqlı san.

2. $D(C \cdot \xi) = C^2 \cdot D\xi$

3. Eki g'a'rezsiz to'sinnanlı shamanın' qosındısının' dispersiyası bul shamalardıń dispersiyaların' qosındısına ten':

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

4. Eger de ξ ha'm η lar g'a'rezsiz to'sinnanlı shamalar bolsa,

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$$

Bul qa'siyetlerdin' durıslıg'ın tekseriw oqıwshılardıń o'zlerine usınıladı.

$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ -orta kvadratlıq awısıw delinedi.

Mısallar:

1. Tosinnanlı ξ shaması to'mendegi bo'listiriw nızamı menen berilgen:

ξ	2	3	10
p	0,1	0,4	0,5

Matematikalıq ku'tiliwin, dispersiyanı ha'm orta kvadratlı awısıwın tabın'. Dispersiyadan alıng'an kvadrat koreng'e orta kvadratlı awısıw yamasa standart awısıw dep ataladı yag'nıy

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$$

$$M\xi = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,5 = 6,4$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 10^2 \cdot 0,5 - (6,4)^2 = 54 - (6,4)^2 = 13,04$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{13,04} \approx 3,61$$

2. Meyli ξ shaması $[a;b]$ aralıqta ten'o'lsheqli bo'listirilgen bolsın.

M $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$ bolg'anlıqtan

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Matematikalıq ku'tiliw dep nege aytamız ha'm onın' formulasın jazıp ko'rsetin'.
2. Tosinnanlı shamanın' dispersiyası dep qanday shamag'a aytamız ha'm onın' formulasının' ko'rinisi qanday?
3. Orta kvadratlıq awısıw dep nege aytamız?

A'debiyatlar: [1], 5-bap §23-25; [2]- [8].

10-lektsiya (2s.)

Tosinnanlı shamalar sisteması. Tosinnanlı shamalardıń g'a'rezsizligi

Tayanış so'zler

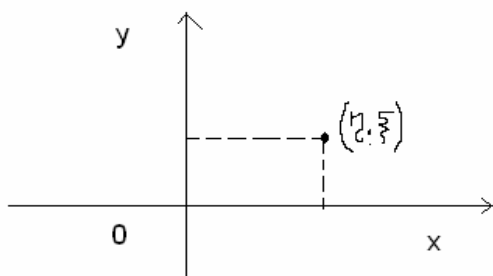
Tosinnanlı shamalar sisteması, g'a'rezsiz to'sinnanlı shamalar, birgelikte bo'listiriw tıg'ızlıg'ı.

İtimallıqlar teoriyasının' praktikalıq qollanıwlarında sınawdın' na'tiyjesi bir tosınnanlı shama menen emes, al eki yamasa onnan da ko'p tosınnanlı shamalar menen su'wretlenetug'ın ma'seleler menen jiyi ushırasıwg'a tuwra keledi.

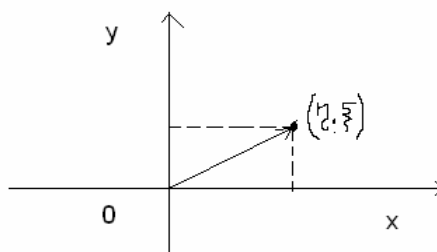
Birgelikte qaralatug'ın eki tosınnanlı (ξ, η) shamalar jıynag'ın eki tosınnanlı shamalar sisteması deymiz.

Tosınnanlı shamalar sistemasına baylanıslı ma'selelerdi qarastırğ'anda sistemanın' geometriyalıq interpretatsiyasın paydalang'an qolaylı boladı.

Ma'selen, eki tosınnanlı (ξ, η) shamalar sistemasın koordinataları ξ ha'm η bolg'an shamalar xoy tegisligindegi tosınnanlı noqat, yamasa qurawshıları ξ ha'm η shamalarınan ibarat koordinata basınan (ξ, η) noqatqa bag'ıtlang'an tosınnanlı vektor dep qarawg'a boladı.



5-su'wret



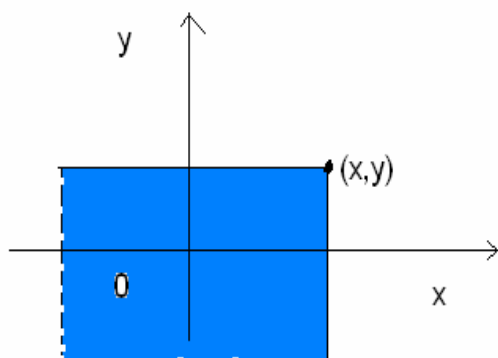
6-su'wret

U'sh tosınnanlı (ξ, η, ζ) shamalar sistemasın u'sh o'lsheмли ken'isliktegi tosınnanlı noqat yamasa tosınnanlı vektor ha'm t.b. dep qarawg'a boladı.

Tosınnanlı eki (ξ, η) shamalar sistemasının' birgelikte bo'listiriw funktsiyası dep, $\{\xi < x\}$ ha'm $\{\eta < y\}$ waqıyalarınan' bir waqıtta ju'zege asıw itimallıg'ına aytıladı, yag'nıy

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}. \quad (11.1)$$

Geometriyalıq jaqtan $F(x, y)$ funktsiya tosınnanlı (ξ, η) noqattın' to'besi (x, y) noqatta bolg'an sheksiz kvadratqa tu'siwinin' itimallıg'ın bildiredi.



7-su'wret

Tosınnanlı shamalar sistemasının' bo'listiriliw funktsiyası mınaday qa'siyetlerge boysınadı(geometriyalıq intepretatsiyasınan an'sat ko'riwge boladı).

1.Bo'listiriliw funktsiyası $F(x, y)$ o'zinin' eki argumentine qarata da kemeymeytug'ın funktsiya, yag'nıy $x_2 > x_1$ bolg'anda $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$;

$y_2 > y_1$ bolg'anda $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

2. $F(-\infty, -\infty) = F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

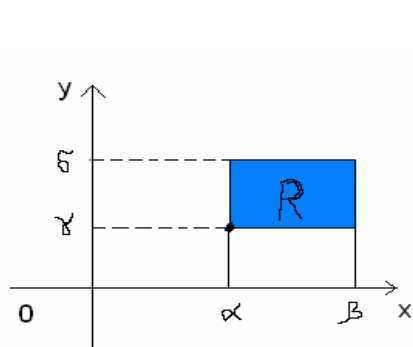
3. Tosinnanli ξ ha'm η shamalarinin' birgelikte bo'listiriliw funktsiyasin bile otirip ha'r bir ξ ha'm η shamalarinin' bo'listiriliw funktsiyasin tabiwg'a boladi. Haqiqatinda da

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi < x, \eta < +\infty\} = F(x, +\infty);$$

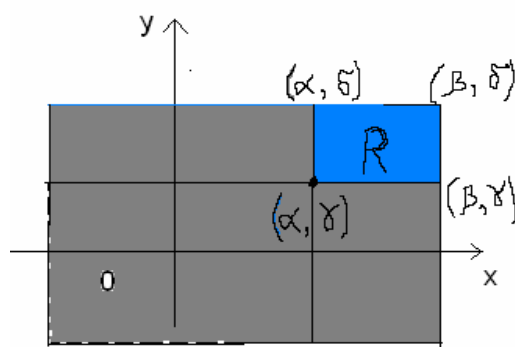
$$F_{\eta}(y) = P\{\eta < y\} = P\{\xi < +\infty, \eta < y\} = F(+\infty, y)$$

4. $F(+\infty, +\infty) = 1$ Meyli D – tegisliktegi qa'legen oblast bolsin. Tosinnanli noqattin' berilgen oblastqa tu'siw itimallig'i, bul oblast ta'repinen koordinata ko'sherlerine parallel bolg'an tuwri mu'yeshlik bolg'an jag'dayda an'sat esaplanadi.

Tosinnanli (ξ, η) noqattin' $x=\alpha$, $x=\beta$ ha'm $y=\gamma$, $y=\delta$ tuwirlari menen shegaralang'an tuwri mu'yeshlikke tu'siw itimallig'in sistemanin' bo'listiriw funktsiyasi arqali an'latayiq. Bir tosinnanli shamadagi siyaqli, R tuwrimu'yeshlikke onin' to'mengi ha'm sol shegaralarin kiritiwdi, al onin' joqarg'i ha'm on' shegaralarin kiritpewdi sha'rtlesemiz.



8-su'wret



9-su'wret

$(\xi, \eta) \in R$ waqiyasi mina eki waqiyaning' ko'beymesine ten': $\alpha \leq \xi < \beta$ ha'm $\gamma \leq \eta < \delta$.

Bul waqiyaning' itimallig'in sistemanin' bo'listiriw funktsiyasi arqali an'latayiq. To'mendegi formula orinli ekenligi ayqin:

$$P\{(\xi, \eta) \in R\} = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma) \quad (11.2)$$

Endi sistemanin' bo'listiriw tigrizlig'i tu'sinigin kiritayik.

XOY tegisliginde ta'replari Δx ha'm Δy bolg'an kishkene R_{Δ} tuwrimu'yeshligin alayiq. Dara jag'dayda,

$$P\{a \leq \xi < b, c \leq \eta < d\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy,$$

ha'm

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

Tosinnanli ξ ha'm η shamalarinin' birgelikte bo'listiriw tigrizlig'i boyinsha ha'r bir ξ ha'm η shamalarinin' bo'listiriw tigrizlig'in an'latiwg'a boladi. Mina formula orinli boladi:

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Eger x ha'm y ler qanday bolg'anda da $\{\xi < x\}$ ha'm $\{\eta < y\}$ waqiyalari g'a'rezsiz bolsa, onda tosinnanli ξ ha'm η shamalari g'a'rezsiz delinedi. Bul jag'dayda

$$F(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\} \cdot P\{\eta < y\} = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$$

Demek, g'a'rezsiz to'sinnanli shamalardın' birgelikte bo'listiriw funktsiyası bul shamalardın' bo'listiriw funktsiyalarının' ko'beymesine ten'.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Tosinnanli shamalar sisteması dep qanday shamalarg'a ayıladı?
2. G'a'rezsiz to'sinnanli shamalar degenimiz ne?
3. Birgelikte bo'listiriw tıg'ızlıg'ı tu'sinigin aytın'.

A'debiyatlar: [1], 4-bap §20; [2]- [8].

11-lektsiya (2s.) Tosinnanli shamanın' funktsiyası

Tayanış so'zler Tosinnanli shamanın' funktsiyası, Koshi nızamı.

İtimallıqlar teoriyasının' bir qatar a'meliy ma'selelerinde ξ to'sinnanli shama menen baylanisqan

$$\eta = \varphi(\xi)$$

tosinnanli shamanı u'yreniwge tuwra keledi, bul jerde $u = \varphi(x)$ berilgen funktsiya.

Meyli ξ -diskret to'sinnalı shama bolsın:

ξ	x_1	x_2	x_3		x_n
p	p_1	p_2	p_3		p_n

Onda $\eta = \varphi(\xi)$ to'sinnanli shamanın' matematikalıq ku'tiliwi ha'm dispersiyası to'mendegi formulalar menen anıqlanadı:

$$m_{\eta} = M\eta = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i$$

$$D_{\eta} = D\eta = M(\eta - m_{\eta})^2 = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i) - m_{\eta}]^2 \cdot p_i$$

Eger η u'zliksiz to'sinnanli shama bolsa, onda $\eta = \varphi(\xi)$ to'sinnanli shamanın' matematikalıq ku'tiliwi ha'm dispersiyası to'mendegi formulalar menen anıqlanadı:

$$m_{\eta} = M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx,$$

$$D_{\eta} = D\eta = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - m_{\eta}]^2 f(x) dx.$$

Praktikanın' ko'pshilik ma'selelerinde, a'sirese matematikalıq statistikada, to'sinnanli argumenttin' funktsiyasının' matematikalıq ku'tiliwi ha'm dispersiyasın tabıwdın' o'zi ko'binese jetkilikli bolmaydı, onın' bo'listiriw nızamın da tabıw za'ru'r boladı.

Bul jerde mınaday ma'sele qoyıladı: bo'listiriw tıg'ızlıg'ı belgili ha'm ol $f(x)$ qa ten' bolg'an ξ to'sinnanli shama berilgen; basqa η to'sinnanli shama menen onın' menen $\eta = \varphi(\xi)$ funktsiyalıq baylanıs arqalı baylanisqan, bul jerde $\varphi(\xi)$ funktsiya ξ shamanın' barlıq mu'mkin bolg'an ma'nisleri jaylasqan bazı bir (a, b) aralıqta u'zliksiz funktsiya ($a =$

∞ , $b=+\infty$ bolıwı da mu'mkin). Tosınnanlı η shamanın' $g(y)$ bo'listiriw tıg'ızlıg'ın tabıw talap etiledi.

Bul ma'seleni sheshiwde eki jag'daydı qarastıramız:

1. Monoton funksiya bolg'an jag'day.

Da'slep $\varphi(x)$ funksiya joqarıda ko'rsetilgen aralıqta monoton o'siwshi ha'm og'an keri $x=\psi(y)$ funksiya tiyisli aralıqta monoton o'siwshi, u'zliksiz ha'm differentsiallanıwshi bolsın. OY ko'sherinde $(y, y+\Delta y)$ intervaldı alamız ha'm onı $x=\psi(y)$ fnksiya ja'rdeminde OX ko'sherge sa'wlelendirip $(x, x+\Delta x)$ intervaldı hasıl qılamız.

$(y < \eta < y+\Delta y)$ ha'm $(x < \xi < x+\Delta x)$ waqıyalar ekvivalent, yag'nıy

$$P(y < \eta < y+\Delta y) = P(x < \xi < x+\Delta x).$$

Demek,

$$g(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < \eta < y+\Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < \xi < x+\Delta x)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < \xi < x+\Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = f(x) \cdot x'_y = f(x) \cdot \psi'(y).$$

Eger $\varphi(x)$ funksiya monoton kemeyiwshi bolsa, onda joqarıdag'ı talqılawlar sıyaqlı

$$g(y) = -f(\psi(y)) \cdot \psi'(y).$$

ekenligine iye bolamız. Eki jag'daydı birlestirsek

$$g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|.$$

dep jazıwg'a boladı.

Mısalı: Tosınnanlı ξ shaması bo'listiriw tıg'ızlıg'ı

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

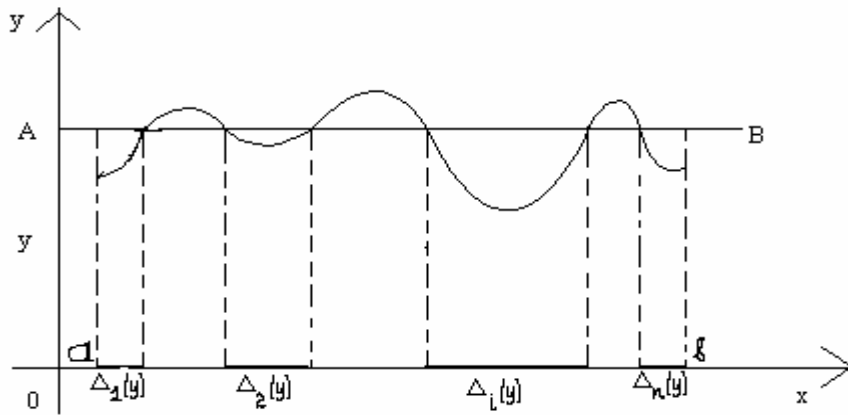
bolg'an Koshi nızamına boysınadı. Tosınnanlı η shaması $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

shaması menen $\eta=1-\xi^3$ tu'rinde baylanısqa. Tosınnanlı η shamasının' $g(y)$ bo'listiriw tıg'ızlıg'ın tabın'.

SHeshiw: $y=1-x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ aralıqta monoton bolg'anlıqtan joqarıdag'ı formulanı qollanıwg'a boladı. Ma'selenin' sheshimin to'mendegi eki bag'ana tu'rinde jaylastırayıq: sol jaqtag'ı bag'ana ma'selenin' ulıwma sheshiminde qabıl qiling'an funksiya. On' jaqtag'ı bag'ana qaralıp atırg'an ma'selege sa'ykes anıq funksiya jaylastırıladı.

$f(x)$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$
$y=\varphi(x)$	$y=1-x^3$
$x=\psi(y)$	$x=\sqrt[3]{1-y}$
$\psi'(y)$	$\frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}$
$ \psi'(y) $	$\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}}$
$g(y) = f(\psi(y)) \psi'(y) .$	$g(y) = \frac{1}{3\pi(1+\sqrt[3]{(1-y)^2})\sqrt[3]{(1-y)^2}}.$

Meyli endi bo'listiriw tıg'ızlıg'ı $f(x)$ bolg'an u'zliksiz tosınnanlı ξ shama berilgen bolıp, tosınnanlı η shaması onın' menen $\eta=\varphi(\xi)$ funksiya baylanıs penen baylanısqa ha'm $y=\varphi(x)$ funksiya argumentin' (a,b) aralıqtag'ı mu'mkin bolg'an ma'nislerinde monoton emes bolsın. Tosınnanlı η shamasının' bo'listiriw funksiya $G(y)$ ti tabayıq. Onın' ushın OX ko'sherinen y aralıqta jaylasqa ha'm OX ko'sherine parallel AB tuwrısın ju'rgizeyik ha'm $y=\varphi(x)$ iymeginin' $\eta < y$ sha'rti orınlanatug'ın aralıqların ajratıp alayıq.



Bul aralıqlarg'a abstsissa ko'sherinin' $\Delta_1(y), \Delta_2(y), \dots$ aralıqları sa'ykes kelsin. $\eta < y$ waqıyası tosınnanlı ξ shamasının' $\Delta_1(y), \Delta_2(y), \dots$ aralıqlardan birewine-qaysısına bolıwına parıqsız ten' ku'shli.

Sonın' ushın

$$G(y) = P(\eta < y) = P(\xi \in \Delta_1(y) + \xi \in \Delta_2(y) + \dots) = \sum_i P(\xi \in \Delta_i(y)) = \sum_i \int_{\Delta_i(y)} f(x) dx$$

Solay etip, $\eta = \varphi(\xi)$ shamasının' bo'listiriw funktsiyası ushın to'mendegi formulag'a iye bolamız:

$$G(y) = \sum_i \int_{\Delta_i(y)} f(x) dx$$

$\Delta_i(y)$ intervallardın' shegaraları y ke baylanıslı bolıp, $y = \varphi(x)$ funktsiyasının' konkret ko'rinishinde y tin' anıq funktsiyası sıpatında an'latılıwı mu'mkin. $G(y)$ funktsiyasın integrallardın' shegaralarında qatnasıwshı y shaması boyınsha differentsiallap η shamasının' $g(y)$ bo'listiriw tıg'ızlıg'ına iye bolamız:

$$g(y) = G'(y)$$

Mısalı: Tosınnanlı ξ shaması parametrleri m ha'm σ bolg'an normal bo'listiriw ge iye. Tosınnanlı $\eta < \xi^2$ shamasının' bo'listiriw tıg'ızlıg'ın tabın'.

SHeshiw: Bul jag'dayda $\varphi(x) = x^2$, $a = -\infty$, $b = +\infty$; $y = \varphi(x) = x^2$ funktsiya $(-\infty, +\infty)$ aralıqta monoton emes. Biraq $x \in (-\infty, 0)$ bolg'anda kemeyedi ha'm $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$ kerı funktsiyag'a iye, $x \in (0, +\infty)$ bolg'anda o'sedi ha'm $\psi_2(y) = \sqrt{y}$ kerı funktsiyag'a iye. Tosınnanlı shamasının' bo'listiriw tıg'ızlıg'ı

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ko'riniste ekenligin esapqa alsaq, to'mendegini hasıl qılamız:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \quad (y > 0).$$

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Tosınnanlı shamanın' funktsiyası degenimiz ne?
2. Koshi nızamın jazıp ko'rsetin'.

A'debiyatlar: [4], gl.5, §6; [2] gl.4, §g'a'; [5] gl.10, §§10.1-10.3.

12-lektsiya (2s.) Tosinnanli shamalardın' momentleri

Tayanish so'zler

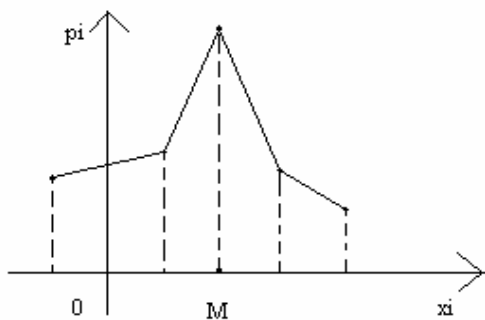
Tosinnanli shamanın' modası, Tosinnanli shamanın' medianası, polimodalliq bo'litiriv, baslang'ish moment, orayliq moment, absolyut baslang'ish momenti, absolyut orayliq momenti, orta arifmetikaliq awısıw.

Tosinnanli shamanın' en' a'hmiyeti xarakteristikaları bolg'an matematikalıq ku'tiliw ha'm dispersiyadan tısqarı basqa xarakteristikalarǵ'a da , ma'selen tosinnanli shamanın' *modası* ha'm *medianası* xarakteristikaları da qollanıladı.

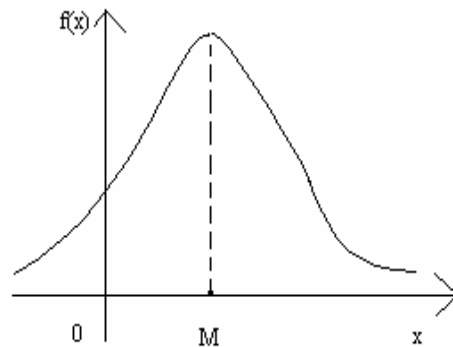
Tosinnanli shamanın' *modası* dep, onın' en' ko'p itimallıqqa iye ma'nisine aytıladı.

«En' ko'p itimallıqqa iye ma'nisi» termini qatal aytqanda diskret tosinnanli shamalarǵ'a tiyisli.

U'zliksiz tosinnanli shamalar bolg'an jag'dayda bo'listiriv tıǵ'ızlıǵı maksimal bolatug'in ma'nisine aytıladı. Modanı M ha'ribi menen belgilewdi sha'rtlesemiz.



11-su'wret



12-su'wret

Eger de bo'listiriv ko'pmu'yeshligi (bo'listiriv iymegi) birewden artıq maksimumǵ'a iye bolsa, onda bo'listirivge «polimodalliq» delinedi.

Tosinnanli ξ shamasının' *medianası* dep, onın' sonday Me ma'nisine aytılıp, bul ma'nis ushın

$$P\{\xi < Me\} = P\{\xi > Me\}$$

Basqasha aytqanda, bo'listiriv tıǵ'ızlıǵı $f(x)$ bolg'an tosinnanli ξ shamasının' Me medianası mına ten'lik penen anıqlanadı:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x) dx = \int_{Me}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Tosinnanli shamalardın' tiykarg'ı sanlı xarakteristikalarının' ulıwmalasqan jag'dayı sıpatında momentler tu'sinigi kiritiledi. Moment tu'sinigi massanın' bo'listiriliwin su'wretlew ushın mexanikada ken' qollanıladı. Tap usı sıyaqlı tosinnanli shamanın' bo'listiriliwinin' tiykarg'ı qa'siyetlerin su'wretlew ushın itimallıqlar teoriyasında da momentler jiyi isletiledi. İtimallıqlar teoriyasında eki tu'rdegi momentler qollanıladı: baslang'ish ha'm orayliq momentler.

Tosinnanli ξ shamanın' k -shi ta'rtpili baslang'ish momenti dep, ξ^k shamanın' matematikalıq ku'tiliwine aytıladı:

$$\alpha_k = M\xi^k$$

Diskret tosinnanli ξ shaması ushın

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i$$

U'zliksiz to'sinnanli ξ shaması ushın

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

$$\alpha_1 = M\xi \text{ ko'rinip turıptı.}$$

Tosinnanlı ξ shamanın' k-shi ta'rtpili oraylıq momenti dep, $(\xi - M\xi)^k$ shamanın' matematikalıq ku'tiliwine ayıladı:

$$\mu_k = M(\xi - m_\xi)^k \text{ bunda } m_\xi = M\xi$$

Diskret to'sinnanli ξ shaması ushın

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_\xi)^k \cdot p_i$$

U'zliksiz to'sinnanli ξ shaması ushın

$$\xi$$

Qa'legen to'sinnanli ξ shaması ushın birinshi ta'rtpili oraylıq momentin' nolge ten' ekenligi ayqın ($\mu_1=0$).

Ekinshi ta'rtpili oraylıq moment dispersiyanı beredi. İtimallıqlar teoriyasında u'shinshi ha'm to'rtinshi ta'rtpili oraylıq momentler de qollanıladi. U'shinshi ta'rtpili oraylıq moment μ_3 -bo'listiriwdin' asimetriyasının' xarakteristikası bolıp xızmet etedi.

Tosinnanlı ξ shamanın' bo'listiriliwi $M\xi = m_\xi$ matematikalıq ku'tiliwge qarata simmetriyalı delinedi, eger de $y=f(x)$ bo'listiriw iymegi $x = m_\xi$ tuwrısına qarata simmetriyalı bolsa.

$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, bunda $\sigma = \sqrt{D\xi}$ shamasına «asimetriya koeffitsienti» delinedi.

Simmetriyalı bo'listirilgen to'sinnanlı shamanın' barlıq taq ta'rtpitegi oraylıq momentleri nolge ten'.

Tosinnanlı ξ shamasının' k-ta'rtpili absolyut baslang'ısh momenti mına ten'lik penen anıqlanadı:

$$\beta_k = M|\xi|^k$$

al absolyut oraylıq momenti

$$\nu_k = M|\xi - m_\xi|^k$$

ten'ligi menen anıqlanadı. Jup ta'rtpitegi absolyut momentler a'dettegi momentler menen sa'ykes keledi. Birinshi ta'rtpili absolyut oraylıq moment

$$\nu_1 = M|\xi - m_\xi|$$

orta arifmetikalıq awısıw dep ataladı.

Mısalı: Meyli bo'listiriw tıg'ızlıg'ı $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ bolg'an to'sinnanlı ξ shaması berilsin.

Usı shamanın' matematikalıq ku'tiliwin, dispersiyasın, orta kvadratlı awısıwın, modasın, medianasın tabın'.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Tosinnanlı shamanın' modası dep nege aytamız?
2. Tosinnanlı shamanın' medianası degnimiz ne ha'm onın' ko'rinisin jazıp berin'.
3. Polimodalıq bo'litiriw dep nege aytamız?
4. Baslang'ısh moment tu'sinigin kiritin' ha'm formulasın jazıp berin'.
5. Oraylıq moment dep qanday shamag'a aytamız?

6. Absolyut baslang'ish momenti, absolyut oraylıq momenti tu'siniklerin aytıp berin'.

7.Orta arifmetikalıq awısıw degenimiz ne?

A'debiyatlar: [1], 5-bap,§26; [2]-[8].

13-lektsiya (4s.)

Xarakteristikalıq funktsiyalar ha'm olardıń qa'siyetleri

Tayanış so'zler

Xarakteristikalıq funktsiya, haqıyqıy parametr, jorımal birlik, qayta tiklew formulası, birden-birlik teoreması, Xellidin' birinshi teoreması, Xellidin' ekinshi teoreması, tuwrı sheklik teorema, keri sheklik teorema, Oraylıq shek teoreması, Lyapunov teoreması, Lindeberg sha'rti.

Xarakteristikalıq funktsiyalar-itimallıqlar teoriyasının' ko'p g'ana ma'selelerin sheshiwge qolaylı bolg'an, tosınnanlı shamalardı su'wretlew ushın qollanılatus'an arnawlı metod bolıp tabıladı.Ol A.M.Lyapunov ta'repinen Oraylıq shek teoremasının' a'piwayı formalarınan birin da'lillew ushın jaratılğ'an.

Tosınnanlı ξ shamasının' xarakteristikalıq funktsiyası dep $\ell^{it\xi}$ -tosınnanlı shamasının' matematikalıq ku'tiliwine ayıladı, yag'nıy

$$\varphi(t) = M\ell^{it\xi}$$

bunda t=haqıyqıy parametr, i-jorımal birlik. Tosınnanlı ξ shamasının' bo'listiriw nızamın bile otırıp, onın' xarakteristikalıq funktsiyasın an'sat tabıwg'a boladı.

Eger de ξ -diskret tosınnanlı shama bolıp, bo'listiriw qatarı menen berilse, yag'nıy:

ξ	x_1	x_2	x_3		x_n
p	p_1	p_2	p_3		p_n

Onda onın' xarakteristikalıq funktsiyası

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n \ell^{itx_k} \cdot p_k \quad (13.1)$$

Eger de ξ -u'zliksiz tosınnanlı shama bolıp, f(x) onın' bo'listiriw tıg'ızlıg'ı (F(x)-bo'listiriw funktsiyası) bolsa, onda

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{itx} f(x) dx \quad (13.2)$$

yamasa

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{itx} dF(x) \quad (13.3)$$

Mısallar:

1.Tosınnanlı ξ shaması bir ma'rte nıshanag'a atqandag'ı tiyiwler sanın an'latsın. Tosınnanlı ξ shamasının' x.f. sın tabın'. (13.1) formula boyınsha:

$$\xi$$

2. Tosınnanlı ξ shaması parametrleri (m, σ^2) bolg'an normal nızam boyınsha bo'listirilgen delinedi eger de onın' bo'listiriw tıg'ızlıg'ı to'mendegishe anıqlansa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma} \ell^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

bunda

$$M\xi = m, D\xi = \sigma^2$$

Meyli ξ normal bo'listirilgan to'sinlanli shama bolip, bolsin.

$$M\xi = 0, D\xi = 1$$

Onda

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \ell^{-\frac{x^2}{2}}$$

onin' x.f. sin tabiw talap etilsin. (13.2) formula boyinsha :

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{x^2}{2}} dx = \ell^{-\frac{t^2}{2}}$$

Barliq haqiqiy t larda $|\ell^{itx}| = 1$ ekenligin esapqa alsaq, (13.2) ha'm (13.3) integrallardin' barliq tug'izliq yaki bo'listiriw funktsiyalari ushin bar bolatug'inlig'ina iye bolamiz.

Demek x.f. ha'r bir to'sinlanli shama ushin aniqlanivi mu'mkin.

Endi xarakteristikalq funktsiyalardin' tiykarg'i qa'siyetlerin ko'rip o'teyik.

1. X.f. pu'tkil san ko'sherinde ten' o'lsheqli u'zliksiz bolip, to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlandiradi:

$$\varphi(0) = 1, \quad |\varphi(t)| \leq 1, \quad (-\infty < t < +\infty)$$

Bul sha'rtlerdin' durislig'i x.f. nin' aniqlamasidan darhal kelip shig'adi.

Endi $\varphi(t)$ funktsiyasinin' ten' o'lsheqli u'zliksizligin ko'rseteyik.

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = \left| \int \ell^{itx} (\ell^{ixh} - 1) dF(x) \right| \leq \int |\ell^{ixh} - 1| dF(x)$$

Meyli $\varepsilon > 0$ qa'legeninshe kishi san bolsin. A sanin to'mendegishe ten'sizlik orinlanatug'inday qa'legenshe u'lken etip alayiq.

$$\int_{|x| > A} d(x) < \frac{\varepsilon}{4};$$

h sanin $|x| < A$ bolg'anda qa'legenshe kishi $|\ell^{ixh} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ bolsin. Onda

$$|\ell^{ixh} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Eger $\eta = a\xi + b$ bolsa, bunda a ha'm $b = \text{const}$; onda

$$\varphi_{\eta}(t) = \ell^{ibt} \cdot \varphi_{\xi}(at)$$

Haqiqattan da, x.f. nin' aniqlaması boyinsha

$$\varphi_{\eta}(t) = M\ell^{itb} = M\ell^{it(a\xi+b)} = M\ell^{itb} \cdot \ell^{i(at)\xi} = \ell^{itb} \varphi_{\xi}(at)$$

3. Eki g'a'rezsiz to'sinlanli shamanin' qosindisinin' xarakteristikalq funktsiyasi olardin' xarakteristikalq funktsiyalarinin' ko'beymelerine ten'.

Haqiqattan da, meyli ξ ha'm η - g'a'rezsiz to'sinlanli shamalar bolsin. ha'm $\varsigma = \xi + \eta$ deyik. Onda

$$\varphi_{\varsigma}(t) = M\ell^{it\varsigma} = M\ell^{it(\xi+\eta)} = M\ell^{it\xi} \cdot M\ell^{it\eta} = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t)$$

Solay etip,

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t)$$

Buni to'mendegishe uliwmalastirwg'a boladi.

Eger $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ler jup-juptan g'a'rezsiz tosinnanlı shamalar bolsa, onda

$$\varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdots \varphi_{\xi_n}(t)$$

Qayta tiklew formulası ha'm birden-birlik teoreması

Eger tosinnanlı ξ shamasının' bo'listiriw funktsiyası belgili bolsa, onda onin' xarakteristikalıq funktsiyasın ha'mme waqıt tabıwg'a boladı. Bunın' kerisi de orınlı boladı, yag'nıy xarakteristikalıq funktsiya belgili bolg'an jag'dayda bo'listiriw funktsiyasın bir ma'nisli anıqlawg'a boladı.

Teoremag'. Meyli $\varphi(t)$ ha'm $F(x)$ tosinnanlı ξ shamasının' xarakteristikalıq funktsiyası ha'm bo'listiriw funktsiyası bolsın. Eger x_1 ha'm x_2 noqatları $F(x)$ funktsiyasının' u'zliksizlik toshkalrı bolsa, onda

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt \quad (1)$$

Da'lillew. Xarakteristikalıq funktsiyanın' anıqlamasınan

$$J_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \varphi(t) dt$$

Integral to'mendegige ten':

$$J_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(z-x_1)} - e^{it(z-x_2)}}{it} dF(z) dt$$

Son'gı integraldı integrallaw ta'rtibin o'zgeritiwge boladı (sebebi z boyınsha integral absolyut shaması jıynaqlı, al t boyınsha integrallaw shegaraları shekli sanlar)

$$J_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(z-x_1)} - e^{it(z-x_2)}}{it} dt \right] dF(z)$$

Bunda bazı bir tu'rlendiriwlerdi jasag'annan keyin mınag'an iye bolamız:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} J_c = F(x_2) - F(x_1)$$

(1) ten'lik qayta tiklew formulası delinedi. Bul formulanı to'mendegi birden-birlik teoremasın Da'lillewde paydalanadı.

Teorema 2. Bo'listiriw funktsiyası o'zinin' xarakteristikalıq funktsiyası menen bir ma'nisli anıqlanadı.

Da'lillew. Haqıyqattan da teorema 1 den $F(x)$ funktsiyasının' ha'r bir u'zliksizlik noqatında mına formula orınlı: ($x_2 \sim x$, $x_1 \sim y$)

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{y \rightarrow -\infty} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{ity} - e^{itx}}{it} \varphi(t) dt$$

Bunda y bo'yinsha shek $F(x)$ funksiyasining u'zliksizlik noqatlari bolatug'in y noqatlarining ko'pligi bo'yinsha alinadi.

Son'g'i teoremaning qollanilishi sifatida to'mendegi tasiyiqti misal retinde keltireyik.

Misal:

1. Eger de g'a'rezsiz ξ_1 ha'm ξ_2 to'sinnanli shamalari normal bo'listirilgen bolsa, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ qosindi da normal bo'listirilgen boladi.

Haqiqattan da eger de $M\xi_1 = m_1$, $D\xi_1 = \sigma_1^2$; $M\xi_2 = m_2$, $D\xi_2 = \sigma_2^2$ bolsa, onda ξ_1 ha'm ξ_2 shamalarining xarakteristikaliq funksiyalari

$$f_1(t) = e^{im_1t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2},$$

$$f_2(t) = e^{im_2t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} \quad \text{Onda qosindining xarakteristikaliq funksiyasi}$$

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = e^{it(m_1+m_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}$$

boladi. Bul bolsa, matematikaliq ku'tiliwi $m = m_1 + m_2$ ha'm dispersiyasi $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ bolg'an normal nizamning xarakteristikaliq funksiyasi. Birden-birlik teoremasi bo'yinsha ξ shamasining bo'listiriv funksiyasi normal degen juvmaqqa kelemiz.

Misal2. Eger de ξ_1 ha'm ξ_2 shamalari g'a'rezsiz bolip, Puasson nizamini bo'yinsha bo'listirilse, onda $\xi = \xi_1 + \xi_2$ shamasida Puasson nizamini bo'yinsha bo'listirilip, oning parametri $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ bolatug'inlig'in ko'rsetin (o'z betinshe).

Endi teoriyalik ma'selelerde ken' qollanilatug'in Xelli teoremlari dep atalishli teoremlardi da'lillewsiz keltireyik.

Kemeymeytug'in funksiyalardining $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$, ... izbe-izligi tiykarinan kemeymeytug'in $F(x)$ funksiyag'a jynaladi delinedi, eger de $n \rightarrow \infty$ da ol son'g'i funkiyaning ha'r bir u'zliksizlik noqatida og'an jynalatug'in bolsa.

Xellidin' birinshi teoremasi. Ha'r qanday shegaralang'an kemeymeytug'in funksiyalardining $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$, ... izbe-izligi tiykarinan kemeymeytug'in $F(x)$ funksiyag'a jynalishli keminde bir $F_{n_1}(x)$, $F_{n_2}(x)$, ..., $F_{n_k}(x)$, ... u'les izbe-izlikke iye boladi.

Xellidin' ekinshi teoremasi. Meyli $f(x)$ u'zliksiz funksiya bolip, kemeymeytug'in shegaralang'an funksiyalardining $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$, ... izbe-izligi ba'zi-bir $a \leq x \leq b$ araliqta tiykarinan $F(x)$ funksiyag'a jynalsin, bunda a ha'm b noqatlari $F(x)$ funksiyasining u'zliksizlik noqatlari; onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dF_n(x) = \int_a^b f(x) dF(x)$$

Endi xarakteristikaliq funksiyalar ushun ba'zi bir sheklik teoremlar keltireyik. Tuwri ha'm keri teoremlar dep atalishli bul teoremlar xarakteristikaliq funksiyalardining qollanilishinda belgili a'hmiyetke iye.

Tuwri sheklik teorema. Eger de bo'litiriv funksiyalar izbe-izligi $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$, ... tiykarinan bo'listiriv funksiyasi $F(x)$ qa jynalsa, onda xarakteristikaliq funksiyalar izbe-izligi $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, ... xarakteristikaliq funksiya $f(t)$ g'a jynaladi. Bul jynaqliliq t ning ha'r bir shekli intervalinda ten' o'lsheqli boladi.

Keri sheklik teorema. Eger de xarakteristikaliq funksiyalar izbe-izligi $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, ... u'zliksiz $f(t)$ funksiyag'a jynalsa, onda bo'listiriv funksiyalar izbe-izligi $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_n(x)$, ... tiykarinan ba'zi bir bo'listiriv funksiyasi $F(x)$ qa jynaladi.

A'debiyatlar: [1], 7-bap, §33-35, [2], 9-bap, §38-39; [3], 7-bap, §2-3.

Oraylıq shek teoremasi. (Lyapunov teoremasi. Lindeberg sha'rti).

Oraylıq shek teoremasının' ha'r qıylı formaları bir-birinen tosınnanlı qosılıwshılardıń' bo'listiriliwine qoyılatug'ın sha'rtler menen bir-birinen parq qıladı.

Biz bul jerde birdey bo'listirilgen qosılıwshılar ushın oraylıq shek teoremasının' en' a'piwayı formalarından birewin formulirovkalaymız ha'm da'lilleymiz.

Teorema. Eger de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - g'a'rezsiz tosınnanlı shamarlar bolıp, matematikalıq ku'tiliwi m ha'm dispersiyası σ^2 bolg'an birdey bo'listiriw nızamına iye bolsa, onda n jeterli da'rejede artqanda

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k \quad (13.4)$$

qosındının' bo'listiriw nızamı normal nızamg'a juwıqlasadı.

Da'lillew. Teoremanı u'zliksiz tosınnanlı shamarlar bolg'an jag'day ushın da'lilleyik. Tosınnanlı η shamasının' xarakteristikalıq funktsiyası qosılıwshılardıń' xarakteristikalıq funktsiyalarından' ko'beymesine ten'. Tosınnanlı $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ shamarları bo'listiriw tıg'ızlıg'ı $f(x)$ bolg'an birdey bo'listiriw nızamına iye, demek birdey xarakteristikalıq funktsiyag'a

$$g_{\xi_1}(t) = g_{\xi_2}(t) = \dots = g_{\xi_n}(t) = g_{\xi}(t)$$

ıye boladı.

$$g_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (13.5)$$

demek,

$$g_{\eta_n}(t) = [g_{\xi}(t)]^n \quad (13.6)$$

$g_{\xi}(t)$ funktsiyanı tolıg'ıraq izertleyik. Onı $t=0$ noqattın' do'geresinde Makleron formulası boyınsha jayıp, u'sh ag'za alıw menen shekleneyik:

$$g_{\xi}(t) = g_{\xi}(0) + \frac{g'_{\xi}(0)}{1!} t + \left[\frac{g''_{\xi}(0)}{2!} + \alpha(t) \right] t^2, \quad (13.7)$$

bunda $t \rightarrow 0$ da $\alpha(t) \rightarrow 0$. Bundag'ı $g_{\xi}(0), g'_{\xi}(0), g''_{\xi}(0)$ lerdi tabayıq.

(13.5) formulada $t=0$ desek

$$g_{\xi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

(13.5) ni t boyınsha differentsiallayıq:

$$g'_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ix e^{itx} f(x) dx = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} f(x) dx$$

Eger de bunda $t=0$ desek

$$g'_{\xi}(0) = i \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = iM_{\xi} = im$$

A'piwayılıq ushın $m=0$ dep esaplawg'a boladı. Solay etip, $g'_{\xi}(0) = 0$ dep uyg'aramız.

$$g'_{\xi}(0) = 0$$

bunnan

$$g_{\xi}''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = -\sigma^2$$

Bul tabilg'an ma'nislerdi (13.7) ge aparip qoyayiq:

$$g_{\xi}(t) = 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha(t) \right] t^2, \quad (13.8)$$

Biz n nin' artıwı menen tosınnanlı η_n shamasının' bo'listiriw nızamı normal nızamg'a umtılatug'ınlıg'ın da'lillemekshimiz.

Onın' ushın η_n shamasınan «normalastırılğ'an» to'mendegi shamag'a o'teyik ($M\eta_n=0$):

$$\zeta_n = \frac{\eta_n}{\sigma\sqrt{n}} \quad (13.9)$$

Bul shama ushın

$$D\zeta_n = \frac{D\eta_n}{n\sigma^2} = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2} = 1$$

Eger de biz ζ_n nin' bo'listiriw nızamı normal nızamg'a juwıqlasatug'ının da'lillesek, onda bul η_n ushın da orınlı bolatug'ınlıg'ı ayqın.

Tosınnanlı ζ_n shamasının' bo'listiriw nızamının' n artqanda normal nızamg'a juwıqlasatug'ının da'lillewdin' ornına, onın' xarakteristikalıq funktsiyasının' normal nızamnın' xarakteristikalıq funktsiyasına juwıqlasatug'ının ko'rseteyik. Tosınnanlı ζ_n shamasının' xarakteristikalıq funktsiyasın tabayıq:

$$g_{\zeta_n}(t) = g_{\eta_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad (13.10)$$

(13.6) ha'm (13.10) formulalar boyınsha

$$g_{\zeta_n}(t) = \left[g_{\eta}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n,$$

yamasa (13.8) formulanı esapqa alsaq

$$g_{\zeta_n}(t) = \left\{ 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right] \frac{t^2}{n\sigma^2} \right\}^n$$

Bul an'latpanı logarifmleyik

$$\ln g_{\zeta_n}(t) = n \ln \left\{ 1 - \left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right] \frac{t^2}{n\sigma^2} \right\}$$

mınaday belgilew kiriteyik: $\left[\frac{\sigma^2}{2} - \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right] \frac{t^2}{n\sigma^2} = \chi$ onda

$$\ln g_{\zeta_n}(t) = n \ln \{1 - \chi\}$$

eger de $n \rightarrow \infty$, onda $\chi \rightarrow 0$. Demek n jeterli u'lken bolg'anda, onı qa'legenshe kishi etiwge boladı. $\ln \{1 - \chi\}$ di qatarg'a jayıp, bir ag'zasın alıw menen shekleneyik (qalg'anları $n \rightarrow \infty$ da esapqa almastay kishi boladı):

$$\ln \{1 - \chi\} \approx -\chi$$

Onda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\zeta_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (-\chi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ - \left[\frac{t^2}{2} + \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right] \frac{t^2}{\sigma^2} \right\} = -\frac{t^2}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^2}{\sigma^2} \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

SHa'rt boyınsha $t \rightarrow 0$ da $\alpha(t) \rightarrow 0$. Demek,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0$$

ha'm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln g_{\xi_n}(t) = -\frac{t^2}{2},$$

bunnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\xi_n}(t) = \ell^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Al bul bolsa parametrleri $m=0$, $\sigma^2=1$ bolg'an normal nızamnın' xarakteristikalıq funktsiyası.

Bazı bir sha'rtler orınlang'anda bul teorema birdey bo'listirilmegen qosılıwshılar ushın da orınlı boladı.

Ma'selen, A.M.Lyapunov oraylıq shek teoremanı to'mendegi sha'rtlerde da'lilledi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{(\sum_{k=1}^n D_k)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

bunda $b_k = \nu_3[\xi_k] = M[|\xi_k|^3]$, $k=1, 2, \dots, n$

$$D_k = D_{\xi_k}$$

Oraylıq shek teoremasının' orınlı bolıwının' ulıwmalıraq sha'rti Lindeberg sha'rti bolıp tabıladı: qa'legen $\tau > 0$ bolg'anda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-m_k| > \tau B_n} (x-m_k)^2 f_k(x) dx = 0$$

bunda $m_k = M\xi_k$, $f_k(x)$ bolsa ξ_k nın' bo'listiriw tıg'ızlıg'ı, $B_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n D_k}$.

Praktikalıq ma'selelerde oraylıq shek teoremasın bir neshe tosınnanlı shamaların' qosındısının' berilgen aralıqta jatiw itimallıg'ın esaplawda qollanıwg'a boladı.

Meyli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ g'a'rezsiz tosınnanlı shamalar bolıp, $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ bolsın. Onda

$$P(\alpha < \eta < \beta) = \Phi^*\left(\frac{\beta - m_\eta}{\sigma_\mu}\right) - \Phi^*\left(\frac{\alpha - m_\eta}{\sigma_\mu}\right)$$

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \ell^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad F(x) = \Phi^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$(0;1) \quad (m; \sigma^2)$$

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Tosınnanlı shamanın' xarakteristikalıq funktsiyası degenimiz ne?
2. Haqıyqıy parametr dep qaysı shamag'a aytamız?
3. Jormal birlik dep nege aytamız?
4. Qayta tiklew formulasın jazıp ko'rsetin'.
5. Birden-birlik teoremasın aytn'.
6. Xellidin' birinshi teoremasın aytp berin'.
7. Xellidin' ekinshi teoremasın atıp berin'.
8. Tuwrı sheklik teoremasın tu'sindirip berin'.
9. Keri sheklik teoremasın aytn'.

10. Oraylıq shek teoremasın da'lillep ko'rsetin'.

A'debiyatlar: [1], 8-bap, §39;40; [2], 10-bap §40;41, [3], 8-bap §2-4.

III bap

İtimallıqlar teoriyasının' sheklik teoremları.

14-lektsiya (2s.)

U'lken sanlar nızamı. SHEbishev teoreması ha'm onın' saldarları

Tayanış so'zler

U'lken sanlar nızamı, SHEbishev ten'sizligi, SHEbishev teoreması, Bernulli teoreması, Markov teoreması.

U'lken sanlar nızamı termini menen biz burın aq Bernulli teoremasın kiritkende dus kelgen edik. Bul teoremada so'z sınawlar sanı jeterli u'lken bolg'anda birer waqıyanın' ju'zege asıw jiyiligi onın' itimallıg'ınan qa'legenshe kishi shamağa'a parq qılıwı haqqında barg'an edi. Ulıwma aytqanda, u'lken sanlar nızamı delingende og'an a'dewir ken' mag'ana berip, ha'r birinin' bo'lek-bo'lek ta'siri ju'da' kem bolg'an ha'm sanı sheksiz artatug'ın waqıyalarg'a baylanışlı bolg'an waqıyanın' ju'zege asıwın 1 ge jaqın itimallıq penen tastıyıqlaytug'ın teoremlardı tu'sinemiz.

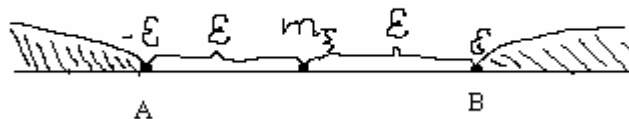
Bunday teoremlardı da'lillew ushın 1845-1846 jıllarda P.L.SHEbishev og'ada a'hmiyetli ten'sizlikti- SHEbishev ten'sizligi dep atalıwshı ten'sizlikti da'lillegen.

SHEbishev ten'sizligi. Meyli tosınnanlı ξ shaması m_ξ matematikalıq ku'tiliwge ha'm shekli D_ξ dispersiyag'a iye bolsın. Onda qa'legen $\varepsilon > 0$ ushın ξ din' o'zinin' matematikalıq ku'tiliwinen awısıwının' ε nan kishi bolmawının' itimallıg'ı joqarıdan $\frac{D_\xi}{\varepsilon^2}$ shaması menen shegaralang'an boladı:

$$P\{|\xi - m_\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D_\xi}{\varepsilon^2} \quad (14.1)$$

Da'lillew. ξ -u'zliksiz tosınnanlı shama bolg'an jag'day ushın da'lilleyik.

$$P\{|\xi - m_\xi| \geq \varepsilon\} = P\{\xi \notin AB\}$$



13-cyŷper

$$P\{|\xi - m_\xi| \geq \varepsilon\} = \int_{|x - m_\xi| \geq \varepsilon} f(x) dx$$

bunda $f(x)$ -tosınnanlı ξ shamasının' bo'listiriw tıg'ızlıg'ı. Bizde

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m_{\xi}|^2 f(x) dx \geq \int_{|x - m_{\xi}| \geq \varepsilon} |x - m_{\xi}|^2 f(x) dx$$

bunda integraldın' to'menindegi $|x - m_{\xi}| \geq \varepsilon$ belgi, integrallaw AB kesindisinin' sırtı boyınsha alınadı degendi an'latadı. İntegral belgisi astındag'ı $|x - m_{\xi}|$ di ε g'a almasırsa q'ınag'an iye bolamız:

$$D_{\xi} \geq \varepsilon^2 \int_{|x - m_{\xi}| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^2 P\{|\xi - m_{\xi}| \geq \varepsilon\}$$

Solay etip,

$$P\{|\xi - m_{\xi}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D_{\xi}}{\varepsilon^2}$$

(Diskret bolg'an jag'day oqıwshılardıń' o'zlerine usınıladı.)

SHebishev teoreması. Biz bul jerde u'lken sanlar nızamının' en' a'piwayı, sonın' menen birge en' a'hmiyetli formalarınan biri bolg'an SHEbishev teoremasın da'lilleybiz. Bul teorema baqlang'an ma'nislardıń' arifmetikalıq ortası menen onıń' matematikalıq ku'tiliwi arasındag'ı baylanısı an'latadı.

Meyli ξ tosınnanlı shaması berilip, onıń' matematikalıq ku'tiliwi m_{ξ} , dispersiyası D_{ξ} bolsın. Bul shama u'stinde g'a'rebsiz n sınaqlar ju'rgizilgen bolsın: ξ din' birinshi sınaqlag'ı ma'nisin ξ_1 ,

ξ din' ekinshi sınaqlag'ı ma'nisin ξ_2 h.t.b. dep belgileyik. Bul $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ shamaları n g'a'rebsiz tosınnanlı shamalar bolıp, olardıń' ha'r biri ξ shaması bo'listirilgen nızam boyınsha bo'listirilgen. Bul shamalardıń' arifmetikalıq ortasın alayıq:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}$$

Bul shamanıń' matematikalıq ku'tiliwin ha'm dispersiyasın anıqlayıq:

$$M\eta = m_{\eta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M\xi_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m_{\xi} = m_{\xi};$$

$$D\eta = D_{\eta} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\xi_i = \frac{1}{n^2} n D_{\xi} = \frac{D_{\xi}}{n}$$

Bug'an qarag'anda baqlang'an ma'nislardıń' arifmetikalıq ortası sınaqlar sanı jeterli u'lken bolg'anda derlik tosınnanlı shama emestey ko'rsetedi eken. SHEbishev teoreması arifmetikalıq ortanın' usı turg'ınlıq qa'siyetin an'latadı:

Teorema. G'a'rebsiz sınaqlar sanı jeterli u'lken bolg'anda tosınnanlı shamanıń' baqlang'an ma'nislernin' arifmetikalıq ortası itimallıq boyınsha onıń' matematikalıq ku'tiliwine jıynaladı (juwıqlasadı).

(ξ shaması itimallıq boyınsha a shamasına jıynaladı delinedi, eger de n nin' jeterli u'lken ma'nislerinde

$$P\{|\xi_n - a| < \varepsilon\} > 1 - \delta$$

bolsa, bunda ξ, δ – qa'legenshe kishi on' sanlar). SHEbishev teoreması boyınsha

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m_{\xi}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \delta$$

Da'lillew. $\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}$; $m_{\eta} = m_{\xi}$, $D_{\eta} = \frac{D_{\xi}}{n}$ Tosinnanli η shamasina SHEbışhev ten'sizligin qollansaq

$$P\left\{|\eta - m_{\eta}| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D_{\eta}}{\varepsilon^2} = \frac{D_{\xi}}{n\varepsilon^2}, \frac{D_{\xi}}{n\varepsilon^2} < \delta$$

Onda

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m_{\xi}\right| \geq \varepsilon\right\} < \delta$$

yamasa

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - m_{\xi}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \delta$$

Teorema da'lillendi.

Bul teoremanin' saldarı retinde to'mendegi ulıwmalasqan SHEbışhev teoremasın da'lillew qıyın emes.

Teorema. Eger $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - g'a'rezsiz tosinnanli shamalar bolıp, matematikalıq ku'tiliwleri $m_{\xi_1}, m_{\xi_2}, \dots, m_{\xi_n}$ ha'm dispersiyalardıń barlıg'ı da joqarıdan bir L sanı menen shegaralansın: $D_{\xi_i} \leq L$ ($i=1, 2, \dots, n$)

Onda

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n m_{\xi_i}}{n}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \delta$$

Da'lillew. $\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}$ deyik. Onda $m_{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^n m_{\xi_i}}{n}$,

$$D_{\eta} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D_{\xi_i} \leq \frac{1}{n^2} \cdot nL = \frac{L}{n}$$

Eger de η shamasına SHEbışhev ten'sizligin qollansaq

$$P\left\{|\eta - m_{\eta}| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D_{\eta}}{\varepsilon^2} < \frac{L}{n\varepsilon^2}$$

yamasa ma'nislerin oranlarına qoyg'annan keyin

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n m_{\xi_i}}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} < \frac{L}{n\varepsilon^2}$$

ten'sizlikke iye bolamız, bunda $\frac{L}{n\varepsilon^2} < \delta$ etiwge boladı. Demek,

$$P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n m_{\xi_i}}{n}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \delta$$

degen so'z. Teorema da'lillendi.

Bernulli teoreması. Sınawlar sanı n jeterli artqanda A waqıyasının' salıstırmalı jiyiligi itimallıq boyınsha onın' P itimallıg'ına umıladı, yag'nıy

$$P\{|W_n - p| < \varepsilon\} > 1 - \delta,$$

bunda ξ, δ – qa'legenshe kishi on' sanlar.

U'lken sanlar nızamı g'a'rezli tosınnanlı shamalg'a da tarqatılıwı mu'mkin.

Markov teoreması. Eger de g'a'rezli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - shamaları berilgen bolsa ha'm eger de $n \rightarrow \infty$ da

$$\frac{D(\sum_{i=1}^n \xi_i)}{n_2} \rightarrow 0,$$

onda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - tosınnanlı shamaların' baqlang'an ma'nislerinin' arifmetikalıq ortası itimallıq boyınsha olardı' matematikalıq ku'tiliwlerinin' arifmetikalıq ortasına umıladı.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. U'lken sanlar nızamı dep qanday nızamg'a ayıladı?
2. SHEbishev ten'sizligin jazıp berin'.
3. SHEbishev teoremasın atıp berin'.
4. Bernulli teoremasın aytn' ha'm formulasın jazıp ko'rsetin'.
5. Markov teoremasın aytıp berin'.

A'debiyatlar: [1], 6-bap, §27-28; [3], 5-bap §1, [2]-[8].

15-lektsiya (2s.)

Tosınnanlı protsessler teoriyasının' tiykarg'ı tu'sinikleri

Tayanış so'zler

Tosınnanlı funktsiyalar teoriyası, tosınnanlı protsessler, tosınnanlı funktsiyanın' realizatsiyası, tosınnanlı protsesstin' kesimi, tosınnanlı protsesstin' matematikalıq ku'tiliwi, tosınnanlı protsesstin' dispersiyası, tosınnanlı protsesstin' korrelyatsiyalıq funktsiyası.

İtimallıqlar teoriyası kursında biz tosınnanlı shamalar menen shug'ıllang'an edik.

Tosınnanlı shama-sınaw na'tiyjesinde a'welden belgisiz tek bir g'ana ma'nisti qabıl etetug'm edi.

Praktikada sınaw na'tiyjesinde u'zliksiz o'zgerip turatug'm tosınnanlı shamalar menen jiyi ushırasıwg'a tuwra keleledi.

Ma'selen: O'zgerip turıwshı aralıqtı u'zliksiz o'lshegendegi radiodanomerdin' qa'teligi, basqarılıwshı snaryadtın' traektoriyasının' basqarıw protsesinde teoriyalıq traektoriyadan

awısıwı ha'm t.b. Sınaw na'tiyjesinde o'zgerip turatug'ın bunday tosınnanlı qubılıslarg'a tosınnanlı funktsiyalar delinedi.

Bunday tosınnanlı qubılıslardı (tosınnanlı protsess formasında ju'zege asastug'ın) izertleytug'ın itimallıqlar teoriyasının' arnawlı tarawı- tosınnanlı funktsiyalar teoriyası (basqasha aytqanda tosınnanlı yaki stoxastikalıq protsessler teoriyası) bolıp tabıladı.

Tosınnanlı protsessler teoriyası itimallıqlar teoriyasının' en' taza tarawlarınan bolıp, ha'zirgi waqıtta bul taraw og'ada tez pa't penen rawajlanbaqta. Bul ko'p g'ana texnikalıq ma'selelerdi sheshiwdin' za'ru'rligine baylanisli praktikanın' talabınan kelip shıg'ıp atır.

O'zgeriwshi shama turaqlı shama tu'sinigine qarag'anda qanshelli ken' ha'm bay tu'sinik bolsa, tosınnanlı funktsiya tu'sinigi de tosınnanlı shama tu'sinigine qarag'anda sonshelli ken' ha'm bay tu'sinik bolıp tabıladı.

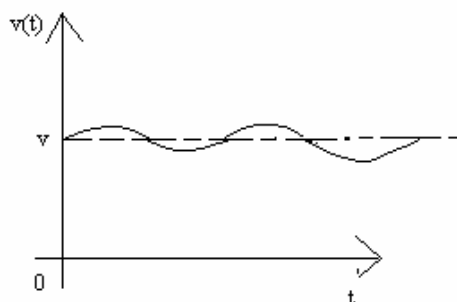
Tosınnanlı funktsiya dep sınaw na'tiyjesinde a'welden belgisiz anaw yamasa mınaw konkret ko'riniske iye bolıwı mu'mkin bolg'an funktsiyag'a aytıladı.

Tosınnanlı funktsiyanın' sınaw na'tiyjesinde qabıl etken konkret ko'rinisine tosınnanlı funktsiyanın' *realizatsiyası* delinedi.

Eger de tosınnanlı funktsiya u'stinde bir-neshe sınawlar yag'nıy sınawlar gruppasın ju'rgizsek, onda biz tosınnanlı funktsiyanın' realizatsiyalar gruppasına yaki «jıynag'ına» iye bolamız.

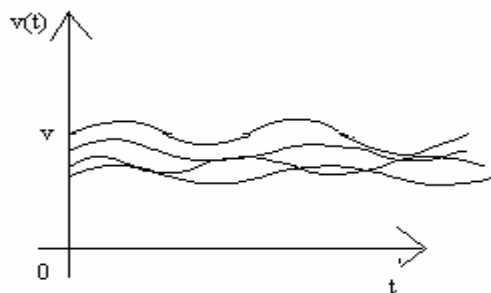
Mısallar:

1. Samolyot teoriyalıq jaqtan v tezlikke iye. Biraq haqıyqatında onın' tezligi bul orta ma'nistin' do'geresinde terbelip, waqıttın' tosınnanlı funktsiyanın an'latadı. Ushıwdı sınaw dep qarasaq, tosınnanlı funktsiya $v(t)$ funktsiyası anıq bir realizatsiyanı qabıl etedi.



1-su'wret

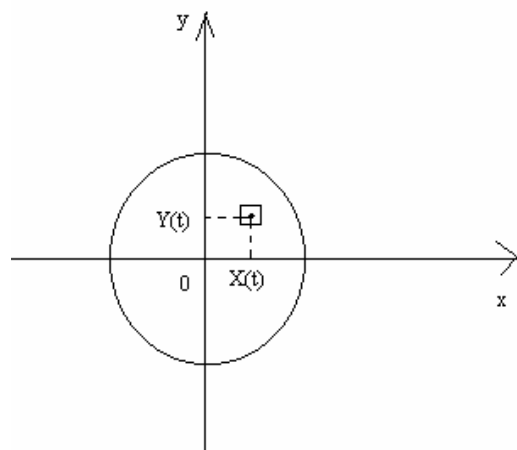
Sınawların' o'zgeriwi menen realizatsiyanın' ko'rinisi de o'zgeredi. Bir neshe ushıwların' na'tiyjesinde tosınnanlı $v(t)$ funktsiyanın' realizatsiyaların' jıynag'ına iye bolamız.



2-su'wret

2.Samolyottan samoyotqa atqanda pitseldin' kesispesi bazı bir waqıt aralıg'ı dawamında nishana menen betlesiwı u'stpe-u'st tu'siwı kerek. Bul na'rse nishanag'a

tuwırılardıń gorizontal ha'm vertikal qa'teliklerine,yag'nıy olardıń u'zliksiz o'zgeriwi menen eki $X(t)$ ha'm $Y(t)$ tosınnanlı funksiya-larına iye bolamız.



3-su'wret

A'meliyatta tek bir argumentke emes, al bir neshe argumentke baylanıslı tosınnanlı funksiya-lar da ushırasadı.Bul argument ko'binese waqıt bolg'anlıqtan onı t dep belgileyemiz.

Eger de tosınnanlı funksiya waqıt t g'a baylanıslı bolsa, tosınnanlı funksiyanı tosınnanlı protsess dep ataymız.

Tosınnanlı protsesslerdi a'dette $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ ha'm t.b. arqalı belgileydi (ayırım a'debiyatlarda $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ ha'm t.b. arqalı da belgilengen).

Bazı bir tosınnanlı $\xi(t)$ protsesin qarastramız. Bul protsess u'stinde g'a'rezsiz n sınavlar ju'rgizilgen bolıp, na'tiyjede n realizatsiyag'a iye boldıq deyik. Ha'r bir realizatsiyası a'dettegi tosınnanlı emes funksiyanı beredi. Solay etip, ha'r bir sınavdın' na'tiyjesinde tosınnanlı $\xi(t)$ protsesi a'dettegi tosınnanlı emes funksiya-g'a aylanadı.

Argument t nın' bazı bir ma'nisin fiksrleyik. Bul jag'dayda tosınnanlı $\xi(t)$ protsesi tosınnanlı shama-g'a aylanadı. Bul tosınnanlı shamanı t g'a sa'ykes keliwshi tosınnanlı protsesstin' *kesimi* dep ataladı.

Tosınnanlı protsesslerdin' tiykarg'ı xarakteristikaları

İtimallıqlar teoriyasında tosınnanlı shamalardıń tiykarg'ı sanlı xarakteristikalarınnı' qanday u'lken a'hmiyetke iye ekenligi bizge belgili.

Sanlı xarakteristikalar apparatı ko'p g'ana a'meliy ma'selelerdi an'sat sheshiwde en' qolaylı apparat bolıp tabıladı. Usı sıyaqlı apparat penen tosınnanlı protsessler teoriyasında da paydalanadı. Tosınnanlı protsessler ushın da tiykarg'ı xarakteristikalar kritiledi ha'm olar u'stindegı a'meller qa'desi ornatıladı.

Tosınnanlı shamalardıń sanlı xarakteristikaları anıq sanlardan ibarat edi, al tosınnanlı protsessleridin' xarakteristikaları ulıwma alg'anda funksiya-lardan ibarat boladı.

Tosınnanlı $\xi(t)$ protsesinin' matematikalıq ku'tiliwin to'mendegishe anıqlaymız:

Tosınnanlı $\xi(t)$ protsesinin' t nın' fiksr lengen ma'nisindegi kesimin qarastramız. Bul kesimde a'dettegi tosınnanlı shama-g'a iye bolamız; onnı' matematikalıq ku'tiliwin anıqlaymız.

Ulıwma alg'anda ol t g'a baylanıslı bolatug'ınlıg'ı ayqın, yag'nıy t nın' funksiya-sı boladı:

$$m_{\xi}(t) = M\xi(t)$$

Solay etip tosınnanlı $\xi(t)$ protsesinin' matematikalıq ku'tiliwi dep, t nın' ha'r bir ma'nisinde tosınnanlı protsesstin' sa'ykes kesiminin' matematikalıq ku'tiliwine ten' bolg'an tosınnanlı emes $m_{\xi}(t)$ funktsiyag'a aytıladı.

Mag'anası boyınsha tosınnanlı protsesstin' matematikalıq ku'tiliwi bazı bir ortasha funktsiyanı an'latıp, tosınnanlı prtsesstin' konkret realizatsiyaları onın' do'gereginde jaylasqan boladı.

Usıg'an uqsas tosınnanlı protsesstin' dispersiyası da anıqlanadı.

Tosınnanlı $\xi(t)$ protsesinin' dispersiyası dep, t nın' ha'r bir ma'nisinde tosınnanlı protsesstin' sa'ykes kesiminin' dispersiyasına ten' bolg'an tosınnanlı emes $D_{\xi}(t)$ funktsiyasına aytıladı:

$$D_{\xi}(t) = D\xi(t).$$

Mag'anası boyınsha ol t nın' ha'r bir ma'nisinde tosınnanlı protsesstin' mu'mkin bolg'an realizatsiyalarının' orta ma'nis do'geregindegi shashıran'qılıg'ın an'latadı.

Mına

$$\sigma_{\xi}(t) = \sqrt{D\xi(t)}$$

funktsiyasına orta kvadratlı awısıw delinedi.

Tosınnanlı protsesslerdi tolıq su'wretlew ushın bul xarakteristikalar jetkiliksiz. Meyli eki $\xi_1(t)$ ha'm $\xi_2(t)$ protsessleri berilgen bolıp, olardıń matematikalıq ku'tiliwleri ha'm dispersiyaları shama menen birdey, biraq bul protsesslerdin' xarakterleri pu'tkilley basqasha bolsın. Ma'selen, $\xi_1(t)$ protsesi ushın tegis, izbe-iz o'zgeriw, al $\xi_2(t)$ protsesi ushın ta'rtipsiz terbelisli o'zgeriw xarakterli bolsın.

Bunday o'zgerislerdi xarakterlew ushın korrelyatsiyalıq funktsiya dep atalıwshı arnawlı xarakteristika kiritiledi.

Solay etip korrelyatsiyalıq funktsiya ha'r qıylı t g'a sa'ykes keliwshi tosınnanlı protsesstin' kesimleri arasındag'ı baylanıs da'rejesin su'wretlewshı xarakteristika bolıp tabıladı.

Meyli tosınnanlı $\xi(t)$ protsesi berilsin. Ha'r qıylı t ha'm t' waqıt momentlerine sa'ykes keliwshi onın' eki kesimin qarastrayıq. Olar tıg'ız baylanısqan. Eger de t ha'm t' larg'a sa'ykes keliwshi kesimler arasındag'ı interval artsa, onda baylanıs ulıwma alg'anda kemeyedi.

Tosınnanlı $\xi(t)$ ha'm $\xi(t')$ shamaların' baylanıs da'rejesin korrelyatsiyalıq funktsiya xarakterleydi. Ol eki t ha'm t' argumentlerdin' funktsiyası bolıp tabıladı.

Solay etip, tosınnanlı $\xi(t)$ protsesinin' korrelyatsiyalıq funktsiyası dep t ha'm t' lardıń ha'r bir jubına tosınnanlı protsesstin' sa'ykes kesiminin' korrelyatsiyalıq momentine ten' bolg'an eki argumenttin' tosınnanlı emes $R_{\xi}(t, t')$ funktsiyasına aytıladı:

$$R_{\xi}(t, t') = M[\xi(t) - m_{\xi}(t)]^2 = D\xi(t)$$

yag'nıy korrelyatsiyalıq funktsiya tosınnanlı protsesstin' dispersiyasına aylanadı eken.

Demek, tosınnanlı protsesstin' tiykarg'ı xarakteristikaları sıpatında onın' matematikalıq ku'tiliwin ha'm korrelyatsiyalıq funktsiyasın qarastırsaq boladı.

To'mendegi ten'likti an'sat tekseriwge boladı:

$$R_{\xi}(t, t') = R_{\xi}(t', t)$$

yag'nıy korrelyatsiyalıq funktsiya o'zinin' argumentlerine qarata simmetriyalı funktsiya.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Tosınnanlı funktsiyalar teoriyası haqqında tu'sinik berin'.
2. Tosınnanlı protsessler dep nege aytamız?
3. Tosınnanlı funktsiyanın' realizatsiyası degenimiz ne?
4. Tosınnanlı protsesstin' kesimi dep nege aytamız?

5. Tosinnanlı protsesstin' matematikalıq ku'tiliwinin' formulasın jazın'.
6. Tosinnanlı protsesstin' dispersiyasının' formulasın jazıp ko'rsetin'.
7. Tosinnanlı protsesstin' korrelyatsiyalıq funktsiyası dep nege aytamız ha'm onın' ko'rinisi qanday?

A'debiyatlar: [3], gl.10,§50; [1],gl.12, §1; [8], gl.VII, §qa'.

16-lektsiya (2s.)

G'a'rezsiz o'simli protsessler. Puasson protsesi. Broun qozg'alısı protsesi. Statsionar to'sinnanli protsessler

Tayanish so'zler

G'a'rezsiz o'simli protsessler, broun qozg'alısı, Puasson protsesi, statsionarliq sha'rti, ordinarliq sha'rti, keyinge ta'sirsizlik sha'rti, statsionar to'sinnanli protsessler.

G'a'rezsiz o'simli protsessler-to'sinnanli protsessler teoriyasinin' en' da'slep ha'm en' ko'birek izertlengen tarawlarinin' biri. To'sinnanli protsesslerdin' uliwma teoriyasın jaratıw usı g'a'rezsiz o'simli protsessler teoriyasın u'yreniwden baslang'an. To'mende keltiriletug'in Puasson protsesi, broun qozg'alısı (Viner) protsesi-g'a'rezsiz o'simli protsesslerdin' konkret ko'rinishlerinen bolıp, bular en' bir a'hmiyetli fizikalıq, biologiyalıq, ximiyalıq ha'm t.b. ma'selelerdi sheshiwden kelip shıg'ıp, olardı izertlew ele dawam etpekte.

Anıqlama. To'sinnanli $\xi(t)$ protsesi, $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, g'a'rezsiz o'simli protsess delinedi, eger de qa'legen $t_1, t_2, \dots, t_n$ ler ushın ($t_k \in T$)

$$\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

to'sinnanli shamaları g'a'rezsiz bolsa.

Puasson protsesi. Meyli to'mendegi sha'rtler orınlansın (biz $(t, t+h)$ intervalın qa'legenshe kishi dep uyg'aramız):

1. $(t, t+h)$ intervalda talaptın' bir ma'rte kelip tu'siwiniń itimallıg'ın $\lambda h + o(h)$ qa ten' dep esaplaymız (statsionarlıq sha'rti sha'rti).
2. $(t, t+h)$ intervalda talaptın' birewden artıq kelip tu'siwiniń itimallıg'ı $o(h)$ g'a ten' bolsın, yag'nıy $h \rightarrow 0$ da $\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$ (ordinarlıq sha'rti).
3. Kesispeytug'in waqıt aralıqlarında g'ı talaplardıń kelip tu'siwiniń an'latıwshı waqıyalardı g'a'rezsiz dep esaplaymız (keyinge ta'sirsizlik sha'rti).

Biz $\xi(t)$ arqalı $[0; t]$ aralıg'ında g'ı talaplardıń kelip tu'siwler sanın belgileyik; $\xi(0) = 0$ dep uyg'aramız (baslang'ısh sha'rt).

G'a'rezsiz o'simli protsesstin' bo'listiriliwin anıqlaw ushın t nın' ha'r bir ma'nisindegi $\xi(t)$ shamasının' bo'listiriliwin ha'm $s < t$ bolg'anda $\xi(t) - \xi(s)$ shamasının' bo'listiriliwin biliw jetkilikli.

Bizge belgili bo'listiriliw funktsiyası ha'm xarakteristikalıq funktsiya bir-birin bir ma'nisli anıqlaydı; olardan birewin bile otırıp ekinshisin anıqlawg'a boladı. Bul jerde protsesstin' xarakteristikalıq funktsiyasın tapqan qolaylı boladı.

To'sinnanli $\xi(t)$ protsesinin' xarakteristikalıq funktsiyası dep

$$\varphi(t, z) = M e^{iz\xi(t)}$$

funktsiyasına ayıladı, bunda z -parametr. Puasson protsesinin' xarakteristikalıq funktsiyası

$$\varphi(t, z) = \exp\{\lambda t(\ell^{iz} - 1)\}$$

ko'riniske iye ekenligin keltirip shıg'arıw qıyın emes (bizge belgili, Puasson nızamı boyınsha bo'listirilgen to'sinnanli ξ shamasının' xarakteristikalıq funktsiyası to'mendegishe edi:

$$\varphi(z) = \exp\{\lambda(\ell^{iz} - 1)\}$$

Demek, to'sinnanli $\xi(t)$ protsess bolg'an jag'dayda λ ornında λt boladı eken).

Al $\xi(t+h) - \xi(t)$ o'simnin' xarakteristikalıq funktsiyası

$$\xi(t+h) - \xi(t) \Big|_{o.x.\phi.} = \exp\{\lambda h(\ell^{iz} - 1)\}$$

bolatug'ınlıg'ın bayqaw qıyın emes, yag'nıy waqıt t g'a baylanıslı bolmaydı. G'a'rezsiz o'simli $\xi(t)$ protsesi bir tekli delinedi, eger de $\xi(t+h) - \xi(t)$ o'simnin' bo'listiriliwi t g'a baylanıslı bolmasa. Ma'selen, Puasson g'a'rezsiz o'simli bir tekli protsess bolıp tabıladı.

Broun qozg'alısı protsesi. Suyıqlıqqa salıng'an kishkene bo'lekshe u'zliksiz xaostikalıq ha'rekette bolatug'ının bayqawg'a boladı. Bul ha'diyse XIX a'sirde anglıshan vrashı R.Broun ta'repinen ashılıp, onın' atı menen Broun qozg'alısı protsesi dep ataladı. Bo'lekshe-suyıqlıqtın' «tosınnanlı» ha'rekettegi molekulları menen sanaqsız soqlıg'ısıwılg'a iye boladı; ha'r bir bo'lekshege soqlıg'ısıwdın' ta'siri derlik bolmaydı, biraq barlıg'ı qosılıp esletilgen ha'reketi hasıl etedi.

Broun qozg'alısı protsesin matematikalıq jaqtan izertlep, tiykarlag'an adam N.Viner boldı (1923 j.) Sonın' ushın da geyde bul protsessti Viner protsesi dep ataydı.

Meyli $\xi(t)$ -broun bo'lekshesinin' t waqıt momentindegi koordinatasın an'latsın ha'm $\xi(0)=0$ dep esaplayıq (baslang'ısh sha'rt).

To'mendegi sha'rtler orınlansın dep uyg'arayıq:

1. Meyli $\xi(t)$ -g'a'rezsiz o'simli bir tekli protsess bolsın;
2. $\xi(t+h) - \xi(t)$ o'simnin' matematikalıq ku'tiliwi ha'm III ta'rtpi momenti bar bolsın;
3. $M[\xi(t+h) - \xi(t)] = 0$
4. $M[\xi(t+h) - \xi(t)]^3 = 0(h)$ bolsın.

Bul sha'rtler orınlang'anda $\xi(t)$ protsesinin' xarakteristikalıq funktsiyası

$$\varphi(t, z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 t\right\}$$

bolatug'ınlıg'ın keltirip shıg'arıw qıyın emes.

Bizge belgili, eger de ξ normal nızamg'a boysınıwshı tosınnanlı shama bolıp, onın' parametrleri $N(m, \sigma^2)$ bolsa, onda onın' xarakteristikalıq funktsiyası

$$\varphi(z) = \exp\{imz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\}$$

edi.

$$\text{Demek, tosınnanlı } \varphi(z) = \exp\{imz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2\}$$

(t) protsesi de normal nızam boyınsha bo'listirilgen bolıp, onın' parametrleri $N(0; \sigma^2 t)$ boladı eken.

O'simnin' xarakteristikalıq funktsiyası $\xi(t+h) - \xi(t)]_{s.x.\phi.} = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 h\}$

bolatug'ınlıg'ın tekserip ko'riw qıyın emes.

Demek, $\xi(t+h) - \xi(t)$ o'simde normal nızam boyınsha bo'listirilgen bolıp, onın' parametrleri $N(0; \sigma^2 h)$ eken, yag'nıy t g'a baylanıslı emes, bir tekli protsess degen so'z.

Statsionar to'sinnanli protsessler

Praktikada ko'binese barliq waqt momentlerinde o'zin bir tekli alip baratug'in protsessler de ushirasadi. Bul jag'dayda protsesstin' orta ma'nisi do'geregindegi terbelisinin' amplitudasi, xarakteri waqitqa hesh qanday baylanisli bolmaydi. Bunday protsesslarga statsionar to'sinnanli protsessler delinedi.

Ma'selen,

1. Samolyottin' gorizontal rejimdegı ushıwı;
2. Elektr shınjırındag'ı kernewliliktin' terbelisi ha'm t.b.

Solay etip $\xi(t)$ protsesi statsionar to'sinnanli protsess delinedi, eger de onın' barliq itimallıq xarakteristikaları t g'a baylanisli bolmasa.

Biz bul jerde statsionar to'sinnanli protsesslerdi bayanlag'anda tiykarınan matematikalıq ku'tiliw, dispersiya, korrelyatsiyalıq funktsiya xarakteristikalar arqalı bayanlaymız.

Statsionar to'sinnanli protsesstin' o'zgeriwi waqitqa baylanisli bolmag'anlıqtan

$$M\xi(t) = m_\xi(t) = m_\xi = \text{const} \quad (1)$$

bolıwı gerek.

Ha'mme waqt $\xi(t)$ protsessten oraylasqan $\overset{o}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$ protsesske o'tiwge bolg'anlıqtan ($M\overset{o}{\xi}(t) = 0$), ko'binese $\overset{o}{\xi}(t)$ protsesi qarastırıladi.

Statsionar to'sinnanli protsess ushın qoyılatug'in ekinshi sha'rt- dispersiyanın' turaqlılıg'ı

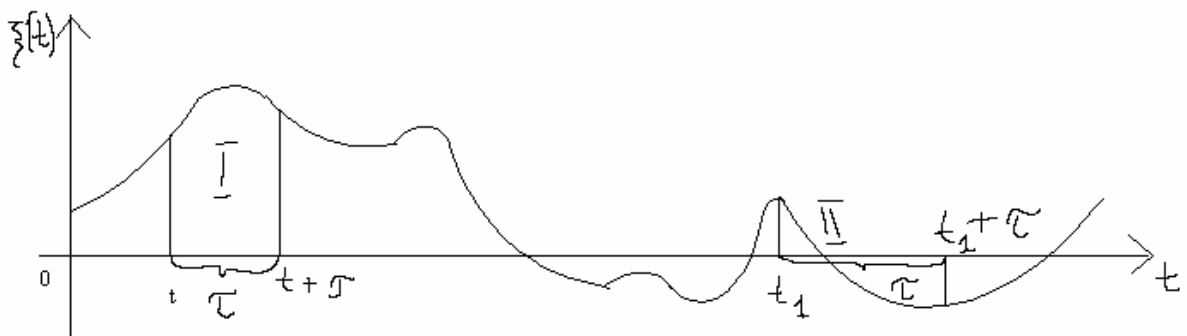
$$D\xi(t) = D_{\overset{o}{\xi}}(t) = D_{\overset{o}{\xi}} = \text{const} \quad (2)$$

Statsionar to'sinnanli protsesstin' korrelyatsiyalıq funktsiyası qanday sha'rtke boysınatug'inlıg'ın ko'rip o'teyik.

$R_\xi(t, t')$ an'latpada $t' = t + \tau$ deyik ha'm waqt aralıg'ı τ bolg'an $R_\xi(t, t + \tau)$ korrelyatsiyalıq momentti qarastırayıq.

Eger $\xi(t)$ haqıyqattan da statsionar bolsa, onda bul korrelyatsiyalıq moment ot ko'sherin τ ushastkanın' qay jerinen alıng'anına baylanisli bolmawı gerek, al tek g'ana usı ushastkanın' uzınlıg'ına baylanisli bolıwı gerek.

Demek, $R_\xi(t, t + \tau)$ ha'm $R_\xi(t_1, t_1 + \tau)$ lar birdey bolıwları gerek.



Sonın' ushın da statsionar to'sinnanli protsesstin' korrelyatsiyalıq funktsiyası birinshi ha'm ekinshi argumenttin' ayırmasına yag'nıy τ aralıqqa baylanisli bolıwı gerek.

$$R_\xi(t, t + \tau) = R_\xi(\tau) \quad (3)$$

Bul jag'day statsionar protsessler u'stindegi a'mellerdi ko'pshilik jag'daylarda a'piwayılastıradi.

(3) de $t + \tau = t$ desek

$$R_\xi(t, t) = D_\xi(t) = R_\xi(0) = \text{const}$$

ekenligi kelip shıg'adı. Sonday-aq

$$R_{\xi}(t, t') = R_{\xi}(t', t)$$

bolg'anlıqtan,

$$R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(-\tau)$$

yag'nıy onın' korrelyatsiyalıq funktsiyası jup funktsiya eken.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. G'a'rezsiz o'simli protsessler dep qanday protsesslerge aytamız?
2. Broun qozg'alısı dep qanday qozg'alısqa ayıladı ha'm ol Kim ta'repinen ashılǵ'an?
3. Puasson protsesi dep qanday protsesske ayıladı?
4. Statsionarlıq sha'rti, ordinarlıq sha'rti, keyinge ta'sirsizlik sha'rtlerin tu'sindirip berin'.
5. Statsionar tosınnanlı protsessler dep qanday protsesslerge aytamız?

A'debiyatlar: [1], gl.12, §1-4; [2], gl.15, gl.a'w; [3], gl.10, §50-57.

17-lektsiya (2s.)

Matematikalıq statistikanın' tiykarg'ı ma'seleleri. Tan'lanba xarakteristikalar

Tayanış so'zler

Statistikalıq mag'lıwmatlar, jıynaq (toplam), tan'lanba, bas toplam, tan'lanba toplam, toplamnın' ko'lemi, variantalar, variatsiyalıq qatar, salıstırmalı jiyilik, empirikalıq bo'listiriw funktsiyası.

Massalıq tosınnanlı qubılıslar boysing'an nızamlılıqlardı ornatiw-statistikalıq mag'lıwmatlardı yag'nıy baqlawlardın' na'tiyjelerin izertlewge tiykarlang'an.

Matematikalıq statistikanın' birinshi ma'selesini-statistikalıq mag'lıwmatlardı ha'm (eger de olar ju'da' ko'p bolsa) gruppalawdan ibarat.

Matematikalıq statistikanın' ekinshi ma'selesini-izertlewdegi maqsetimizge baylanışlı statistikanın' mag'lıwmatlardı analizlewden ibarat.

Matematikalıq statistikanın' metodları menen anaw yamasa mınaw qubılıslardı izertlew-ilim ha'm praktika using'an ko'p ma'selelerdi sheshiwde aytarlıqtay xızmet etedi.

Solay etip, matematikalıq statistikanın' wazıypası ilimiy ha'm praktikalıq juwmaqlar shıg'arıw ushın statistikalıq mag'lıwmatlardı jıynaw ha'm statistikalıq mag'lıwmatlardı analizlewdegi metodların islep shıǵıwdan ha'm jetilistiriwden ibarat.

Meyli bir tekli ob'ektlerdin' jıynag'ın. Bul ob'ektlerdi xarakterlewshi bazı bir «sıpat» yamasa «mug'dar» belgisine qarata izertlew talap etilsin.

Ma'selen, eger de buyımlar partiyası berilse, onda sıpat belgisi bolıp onın' tekserilip atırǵ'an razmeri (ko'lemi) xızmet etiwı mu'mkin.

Geyde tutas, tolıq tekseriliw ju'rgiziliwi, yag'nıy joqarıdag'ı belgilerge qarata ha'r bir bizdi qızıqtırıwshı ob'ekt tekseriliwi mu'mkin. Biraq praktikada tutas tekseriliw siyrek qollanıladı.

Ma'selen, eger jıynaq (toplam) ju'da' ko'p sandag'ı ob'ektlerdi o'z ishine alsa, onda tolıq tekseriw og'ada qıyın.

Tan'lanba toplam yamasa tek tan'lanba dep, tosınnan tan'lap alıng'an ob'ektlerdin' toplamına ayıladı.

Bas toplam dep, tan'lanba ju'rgizilgen ob'ektlerdin' toplamına ayıladı. Toplamnın' ko'lemi dep bul toplamdag'ı ob'ektlerdin' sanına ayıladı.

Ma'selen, eger 1000 buyımnan tekseriw ushın 100 buyım tan'lap alınsa, onda bas toplamnıń ko'lemi $N=1000$, al tan'lanbanıń ko'lemi $n=100$.

Endi tan'lanba xarakteristikalarǵa toqtap o'teyik.

Meyli bas toplamnan tan'lanba toplam ajratıp alınıp, x_1 ma'nis n_1 ma'rte, x_2 ma'nis n_2 ma'rte, ..., x_i ma'nis n_i ma'rte baqlang'an bolsın ha'm $\sum_i n_i = n$ tan'lanba toplamnıń

ko'lemin an'latsın. Baqlang'an x_i ma'nisler-variantalar delinedi, al o'siw ta'rtibinde jazılǵ'an varintalar izbe-izligi variatsiyalıq qatar dep ataladı.

Baqlawlar sanı jiyilik delinedi, al olardıń tan'lanbanıń ko'lemine qatnası, yag'nıy $\frac{n_i}{n} = w_i$ -salıstırmalı jiyilik dep ataladı.

Tan'lanbanıń statistikalıq bo'listiriliwi dep, variantalar ha'm olarg'a sa'ykes keliwshi jiyilikler yamasa salıstırmalı jiyilikler arasındag'ı sa'ykeslilikke aytiladı.

İtimallıqlar teoriyasında bo'listiriliw nızamı dep, tosınnanlı shamanıń mu'mkin bolg'an ma'nisleri ha'm olardıń itimallıqları arasındag'ı sa'ykeslilikke aytilatug'ın edi.

Mısal. Ko'lemi 20 g'a ten' bolg'an tan'lanbanıń bo'listiriliwi berilgen:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Salıstırmalı jiyiliklerdin' bo'listiriliwin jazın'.

SHeshiw. Salıstırmalı jiyiliklerdi tabayıq:

$$W_1 = \frac{3}{20} = 0,15; \quad W_2 = \frac{10}{20} = 0,5; \quad W_3 = \frac{7}{20} = 0,35.$$

Salıstırmalı jiyiliklerid bo'listiriliwin jazayıq:

x_i	2	6	12
w_i	0,15	0,5	0,35

Tekseriw: $0,15+0,5+0,35=1$

Endi empirikalıq bo'listiriw funktsiyası tu'sinigin anıqlayıq.

Meyli ξ din' mug'darlıq belgisinin' jiyiliklerinin' statistikalıq bo'listiriliwi belgili bolsın. Mınaday belgilewlerdi kiriteyik:

n_x -belginin' ma'nisi x tan kishi baqlawlar sanı (x tan kishi variantalar sanı); n - ulıwma baqlawlar sanı (tan'lanbanıń ko'lemi).

$\xi < x$ waqıyanın' salıstırmalı jiyiligi $\frac{n_x}{n}$ -salıstırmalı jiyilik x tın' funktsiyası boladı. Bul funktsiya empirikalıq (ta'jiriybe) jolı menen tabılatug'ın bolg'anlıqtan, onı empirikalıq funktsiya deydi.

Empirikalıq bo'listiriw funktsiyası dep, x tın' ha'r bir ma'nisi ushın $\xi < x$ waqıyanın' salıstırmalı jiyiligin anıqlaytug'ın $F^*(x)$ funktsiyag'a aytiladı.

Solay etip, anıqlama boyınsha

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

Bunda n_x degenimiz x tan kishi variantalar sanı, n -tan'lanbanıń ko'lemi.

$F(x)$ penen $F^*(x)$ tın' ayırması: $F(x)$ degenimiz $\xi < x$ waqıyanın' itimallıg'ı, $F^*(x)$ usı waqıyanın' salıstırmalı jiyiligin anıqlaydı.

$F^*(x) \rightarrow F(x)$ itimallıq boyınsha. $F^*(x)$ funktsiyası $F(x)$ boysing'an barlıq qa'siyetlerge boysınadı:

1. $0 \leq F^*(x) \leq 1$.

2. $F^*(x)$ - kemeymeytug'ın fnuktsiya.

3. Eger x_1 -en' kishi varianta bolsa, onda $x > x_k$ bolg'anda $F^*(x)=1$.

Mısal. Tan'lanbanıń berilgen bo'listiriliwi boyınsha empirikalıq bo'listiriw funktsiyasın jazın':

x_i	2	6	10
n_i	12	a'h	30

SHeshiw. Tan'lanba ko'lemi: $n=12+a'h+30=60$. En' kishi varianta $x_1=2$, demek $F^*(x)=0$, $x \leq 2$ bog'anda; $\xi < 6$ ma'nis, yag'nıy $x_1=2$ ma'nis 12 ma'rte baqlang'an, demek

$$F^*(x) = \frac{12}{60} = 0,2, \quad 2 < x \leq 6 \text{ bolg'anda};$$

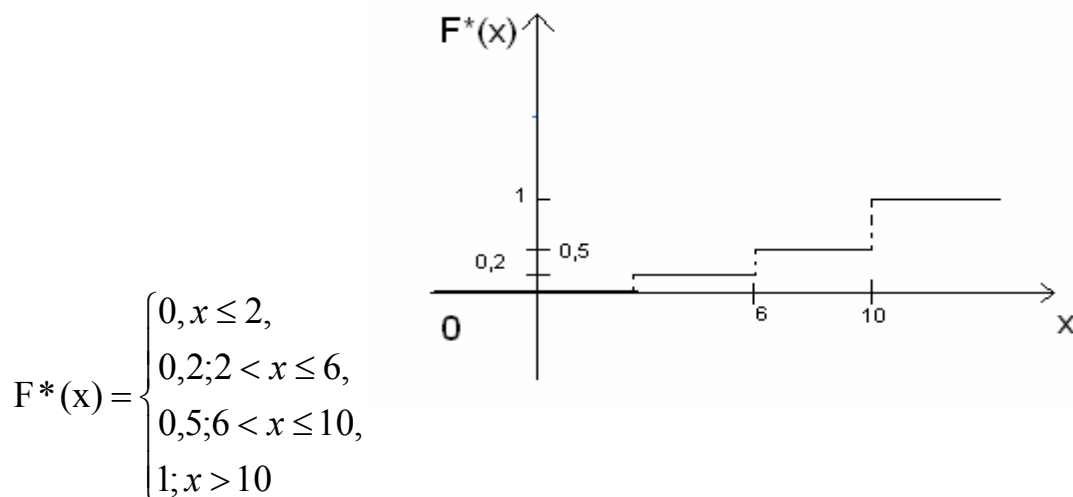
$\xi < 6$ ma'nisler, yag'nıy $x_1=2$ ha'm $x_2=6$ ma'nisler $12+a'h=30$ ma'rte baqlang'an, demek

$$F^*(x) = \frac{30}{60} = 0,5, \quad 6 < x \leq 10 \text{ bolg'anda}.$$

En' u'lken varianta $x_3=10$ bolg'anlıqtan,

$$F^*(x)=1, \quad x > 10 \text{ bolg'anda}.$$

Biz izlep atırg'an empirikalıq funktsiya



Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Statistikalıq mag'lıwmatlar dep qanday mag'lıwmatlarga ayıladı?
2. Jıyın (toplam) degen ne?
3. Tan'lanba dep nege aytamız?
4. Bas toplam degenimiz ne?
5. Tan'lanba toplam degenimiz ne?
6. Toplamnın ko'lemi dep nege aytamız?
7. Variantalar degenimiz ne?
8. Qanday qatar variatsiyalıq qatar delinedi?
9. Salıstırmalı jiyilik dep nege aytamız?
10. Empirikalıq bo'listiriw funktsiyası tu'sinigin aytıp berin'.

A'debiyatlar: [1], gl.11, §60-61; [6], gl.9, §1-2.

18-lektsiya (2s.)

Belgisiz parametrlərni nöqətiqə ha'm intervallıq bəhalaw. Statistikalıq gipotezalardı təkseriw

Tayanış so'zler

Parametrlər bəhası, jılımaytug'ın bəha, statistikalıq bəha, effektivli bəha, nöqətiqə bəha, intervallıq bəha, bəhanın' da'lligi, isenim itimallıg'ı, isenimlilik intervallı, statistikalıq kriteriy, kritikalıq oblast, kritiklıq nöqə, nolinshi (tiykarg'ı) gipotezani.

Bul jerde qaralattug'ın ma'sele ulıwma aytqanda to'mendegiden ibarat.

Bazı bir θ shamanı yamasa ($\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$) shamalar sistemasın ta'jiriybeden aling'an mag'lıwmatlar boyınsha bəhalaw talap etilsin dep uyg'arayıq. A'piwayılıq ushın biz tek bir θ shama haqqında ga'p etemiz.

Meyli qanday da eksperiment yamasa eksperimentler izbe-izligi ju'rgizilip, olardan ha'r birinde θ shaması menen anaw yamasa mınaw ko'riniste baylanısqan bazı bir tosınnanlı shama o'lsenetug'ın bolsın. Eksperiment θ shamanın' o'zin o'lshewden ibarat bolıwı da mu'mkin, biraq onın' juwmag'ına az da bolsa o'lshewdegi qa'telikler a'lbette ta'sir etedi.

n eksperiment ju'rgizilip, o'lshewdin' juwmag'ının'

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \quad (18.1)$$

izbe-izligine iye bolamız.

Bug'an tan'lanba dep ataymız, al n sanına tan'lanbanın' ko'lemi delinedi. Biz ju'rgiziletug'ın eksperimentlerdi g'a'rezsiz ha'm o'lshewler uqsas birdey jag'daylarda o'tkeriledi dep esaplaymız. Bul (18.1) birdey $F(x, \theta)$ bo'listiriw funktsiyalı tosınnanlı shamalar izbe-izligin an'latadı degendi bildiredi.

Ma'sele (18.1) shamaların' ma'nisleri boyınsha θ parametrdi anıqlawdan ibarat; η_k shamaları tosınnanlı bolg'anlıqtan, θ nın' ma'nisin da'l anıqlaw ulıwma alg'anda mu'mkin emes.

Sonın' ushın da ga'p to'mendegi juwıq ten'likti izlew haqqında baradı:

$$\theta \approx \hat{\theta}_n = f_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n). \quad (18.2)$$

Bul ten'liktin' on' jag'ında baqlawlar sanı n ge, (18.1) tan'lanbag'a ha'm ba'lkim η_k shamaların' bo'listiriliwin xarakterlewshi belgili parametrlerge de g'a'rezli bazı bir funktsiya turıptı.

Ha'r qanday bunday tu'rdegi funktsiyag'a statistika delinedi.

Eger de ju'rgizilgen eksperimentlerdin' sanı no'p bolmasa, onda θ parametrdin' belgisiz ma'nisin u'lken da'llik penen anıqlawg'a boladı dep ayta almaymız. Ekinshi ta'repten, bazı bir ma'selelerde n ju'da' u'lken bolıwı da mu'mkin.

Eger de $n \rightarrow \infty$ da qa'legenshe kishi $\varepsilon > 0$ shaması ushın

$$P\left\{\left|\theta - \hat{\theta}_n\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0 \quad (18.3)$$

bolsa, onda θ parametrdin' $\hat{\theta}_n$ bəhası ($n=1,2,\dots$) tiykarlı bəhası delinedi. (a'h.3) an'latpa

$n \rightarrow \infty$ da $\hat{\theta}_n$ statistikalar itimallıq boyınsha θ shamag'a jıynaladı degendi bildiredi.

Eger de θ parametrdi bəhalaw ko'p sandag'ı baqlawlar boyınsha ju'rgizilse, onda tiykarlılıq tu'sinigi paydasız boladı. Onı jılımag'anlıq talabı menen almasırw mu'mkin.

Eger de

$$M\hat{\theta}_n = \theta$$

Bolsa, onda θ parametrdin' $\hat{\theta}_n$ bahası bahası jılımaytug'ın baha dep ataladı.

En' kishi dispersiyag'a iye bolatug'ın statistikalıq baha effektivli baha delinedi. (18.2) juwıq ten'liginin' da'lliginin' ko'birek qollanılatus'ın ha'm qolaylı xarakteristikası-onın' orta kvadratlı qa'teligi δ^2 bolıp, onı to'mendegishe anıqlaymız:

$$\delta^2 = M(\hat{\theta}_n - \theta)^2$$

Bir san menen anıqlanatus'ın baha noqatlıq baha dep ataladı. Kishi ko'lemdegi tan'lanbada noqatlıq baha turpayı qa'telerge alıp keliwi mu'mkin. Usıg'an baylanışlı kishi ko'lemdegi tan'lanba bolg'an jag'dayda intervallıq bahalawdan paydalanıwg'a tuwra keledi.

Meyli θ -belgisiz parametr, $\hat{\theta}_n$ -onın' tan'lanba mag'lıwmatlar boyınsha tabılğan bahası bolsın.

$|\theta - \hat{\theta}_n|$ qansha kishi bolsa, yag'nıy $|\theta - \hat{\theta}_n| < c$ sha'rtte s qansha kishi bolsa, $\hat{\theta}_n$ - baha sonsha da'l bolatug'ınlig'ı ayqın.

Bunda s sanı θ nın' bahasının' da'lligi dep ataladı.

$|\theta - \hat{\theta}_n| < c$ ten'sizlikтин' a'melge asıwının' α itimallıg'ı θ nın' $\hat{\theta}_n$ boyınsha *isenimli itimallıg'ı* dep ataladı.

Meyli

$$P\{|\theta - \hat{\theta}_n| < c\} = \alpha$$

Eger de $|\theta - \hat{\theta}_n| < c$ ten'sizlikti og'an ten' ku'shli bolg'an $-c < \theta - \hat{\theta}_n < c$ qos ten'sizlik penen almasırısaq, yamasa

$$\hat{\theta}_n - c < \theta < \hat{\theta}_n + c,$$

minag'an iye bolamız:

$$P\{\hat{\theta}_n - c < \theta < \hat{\theta}_n + c\} = \alpha$$

Belgisiz θ parametri berilgen α isenimli itimallıq penen (isenimlilik penen) qaplaytug'ın $(\hat{\theta}_n - c, \hat{\theta}_n + c)$ aralıqqa isenimlilik intervalı dep ataladı.

Bul son'gı $(\hat{\theta}_n - c, \hat{\theta}_n + c)$ interval α itimallıq penen θ parametrdin' belgisiz ma'nisin jabadı degendi bildiredi.

Matematikalıq statistikada belgisiz parametrdi bahalaw ushın ha'r tu'rli usıllardı paydalanadı; ma'selen, bayeslik usıl, en' kishi kvadratlar usılı, momentler usılı, Fisher usıng'an shınlıqqa maksimal uqsaslıq usılı ha'm t.b.

Ha'zirgi waqıtta son'gı usıl ko'birek qollanımaqta.

Meyli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - parametrleri (a, σ^2) bolg'an normal bo'listirilgen g'a'rezsiz tosınnanlı shamaları berilgen bolıp, olar birdey bo'listirilgen bolsın, demek birdey xarakteristikalar'g'a iye.

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \text{ deyik. Onda}$$

$$M\xi = a, D\xi = \frac{\sigma^2}{n}; \sigma_\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Biz σ belgili bolg'an jag'dayda tan'lanba orta $\bar{x}$ boyınsha normal bo'listiriwdin' matematikalıq ku'tiliwinin' bahası ushın isenimlilik intervalın anıqlayıq. Biz to'mendegini talap etiwimiz kerek:

$$P\{|\xi - a| < c\} = \alpha$$

Bizde mınaday baylanıs bar:

$$P\{|\xi - a| < c\} = P\{a - c < \xi < a + c\} = \Phi\left[\frac{(a+c)-a}{\sigma_\xi}\right] - \Phi\left[\frac{(a-c)-a}{\sigma_\xi}\right] = \\ = \Phi\left[\frac{c}{\sigma_\xi}\right] - \Phi\left[-\frac{c}{\sigma_\xi}\right] = 2\Phi\left[\frac{c}{\sigma_\xi}\right]$$

Demek,

$$P\{|\xi - a| < c\} = 2\Phi\left[\frac{c\sqrt{n}}{\sigma}\right] = 2\Phi[t],$$

bunda $t = \frac{c\sqrt{n}}{\sigma}$. Bunnan $c = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bolg'anlıqtan

$$P\{\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\} = 2\Phi(t) = \alpha$$

Bul ten'liktin' mag'anası mınanı an'latadı: belgisiz a parametrdi $(\bar{x} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ isenimlilik intervalı menen qaplaw itimallıg'ı α ge ten' bolıp, bahanın' da'lligi $c = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Ge ten'. Bul jerde t sanı $2\Phi(t) = \alpha$, $\Phi(t) = \frac{\alpha}{2}$ ten'likten Laplas funktsiyasının' tablitsası boyınsha anıqlanadı.

Mısal. Meyli ξ -normal bo'listirilgen tosınnanlı shama bolıp, onın' orta kvadratlı awısıwı σ bolsın. Eger tan'lanbanın' ko'lemi $n=36$, bahanın' isenimliliği $\alpha=0,95$ berilgen bolsa, tan'lanba orta $\bar{x}$ boyınsha belgisiz matematikalıq ku'tiliw a nı bahalaw ushın isenimlilik intervalın tabın'.

SHeshiw. Da'slep t nı tabayıq.

$$2\Phi(t) = 0,95; \Phi(t) = 0,475$$

Tablitsadan $t=1,96$ ekenligine iye bolamız. Bahanın' da'lligin anıqlayıq:

$$c = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98$$

İsenimlilik intervalı to'mendegishe boladı:

$$(\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98).$$

Ma'selen, eger $\bar{x}=4,1$ bolsa, onda isenimlilik intervalı to'mendegishe:

$$(3,12; 5,08)$$

yag'nıy

$$3,12 < a < 5,08$$

Endi statistikalıq gipotezalarđı tekseriwge qısqasha toqtap o'teyik.

Ko'pshilik jag'daylarda ξ belgili bas toplamnın' bo'listirw nızamın biliw kerek boladı. Eger bo'listirw nızamı anıq bir ko'rinske iye bolsa (onı A dep atayıq), onda to'mendegi gipoteza alg'a su'riledi: ξ belgili bas toplam A nızam boyınsha bo'listirilgen.

Bo'listirw nızamın' ko'rinisi belgi, al onın' parametrleri belgisiz jag'daylarda bolıwı mu'mkin. Eger belgisiz θ parametr anıq bir θ_0 ke ten' dewge tiykar bolsa, onda $\theta=\theta_0$ degen gipoteza alg'a su'riledi.

Basqa gipotezalar da bolıwı mu'mkin:

Ma'selen, eki yamasa bir neshe bo'listiriwlerdin' parametrlerin' ten'ligi haqqında, tan'lanbalardin' g'a'rezsizligi haqqında ha'm t.b.

Statistikalıq gipotezalar dep tosınnanlı shamanın' belgisiz bo'listiriwinin' ko'rinisi yamasa belgili bo'listiriwinin' belgisiz parametrleri haqqındag'ı gipotezalarg'a aytiladı.

Ma'selen, to'mendegiler statistikalıq gipotezalar boladı:

- 1) bas toplam Puasson nızamı boyınsha bo'listirilgen;
- 2) eki normal bo'listiriliwdin' dispersiyaları o'z-ara ten'.

Birinshi gipotezada belgisiz bo'listirwdin' ko'rinisi haqqında uyg'arıw jasalg'an, al ekinshisinde eki belgili bo'listiriwlerdin' parametrleri haqqında.

«1980-jılı urıs bolmaydı» degen gipoteza statistikalıq gipoteza bolmaydı, sebebi onda yaki bo'listirwdin' ko'rinisi, yaki bo'listirwdin' parametrleri haqqında ga'p barmaydı.

Gipotezalardı statistikalıq tekseriw ma'selesin ulıwma tu'rde formulirovkalayıq.

Meyli $f(x, \theta)$ -bir θ parametrge g'a'rezli bolg'an tosınnanlı ξ shamasının' bo'listirw nızamı bolsın.

Parametr $\theta = \theta_0$ ma'nisti qabıl etedi degen gipotezanı tekseriw za'ru'r dep uyg'arayıq. Bul gipotezanı nolinshi (tiykarg'ı) gipoteza dep, onı H_0 arqalı belgileymiz; $\theta = \theta_1$ ma'nisti qabıl etedi degen gipotezanı nolinshi gipotezag'a konkurent (qarama-qarsı) gipoteza dep, onı H_1 arqalı belgileymiz. Geyde H_1 gipotezanı alternativ gipoteza yamasa tek alternativ dep te ataydı.

Tiykarg'ı gipoteza durıs yaki nadurıs bolıwı mu'mkin.

Statistikalıq kriteriy dep nolinshi (tiykarg'ı) gipotezanı qabıl qılıw yaki qabıl qılmaw haqqındag'ı qa'dege aytiladı.

Bul qa'de to'mendegiden ibarat: onın' ushie qanday da $\zeta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistika alınıp, onın' (da'l yamasa juwıq) bo'listiriliwi tiykarg'ı gipoteza orınlı bolg'anda tabıladı. Keyin statistikanın' ma'nisler oblastı ekige ajratıladı.

Eger statistikanın' baqlang'an $\zeta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ma'nisi bul oblasttın' birinshisine tu'sse, H_0 gipoteza qabıl qılınadı, eger ekinshisine tu'sse, H_0 gipoteza qabıl qılınbaydı.

Birinshi oblast gipotezanın' qabıl qılınıw oblastı (onı O arqalı belgileydi), ekinshisi bolsa kritikalıq oblast (onı W arqalı belgileydi) delinedi.

$\zeta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistikalıq qabıl qılıwı mu'mkin bolg'an barlıq ma'nisleri bazı bir intervalg'a tiyisli boladı. Usı sebepli kritikalıq oblast ha'm gipotezanın' qabıl qılınıw oblastı da intervallar boladı. Olardı noqatlar ajratıp turadı. Bul noqatlardı kritikalıq noqatlar dep ataydı ha'm ζ_{kr} arqalı belgilenedi.

Kritikalıq oblastlar to'mendegishe bolıwı mu'mkin:

1. On' tamanlama kritikalıq oblast:

$$\zeta > \zeta_{kr};$$

2. Sol tamanlama kritikalıq oblast:

$$\zeta < \zeta_{kr};$$

3. Eki tamanlama kritikalıq oblast:

$$|\zeta| > \zeta_{kr}.$$

$\zeta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statistikanın' kritikalıq oblastqa tu'siw itimallıg'ı α -onın' da'llik da'rejesi delinedi.

Statistikalıq gipotezalardı tekseriw na'tiyjesinde eki tu'rli qa'tege jol qoyıw mu'mkin.

Birinshi tu'r qa'te-bunda durıs gipoteza biykar etiledi. Basqasha aytqanda nolinshi gipoteza H_0 durıs bolg'anda H_0 biykar etiledi, yag'nıy gipoteza H_1 qabıl etiledi.

Ekinshi tu'r qa'te-bunda nadurıs gipoteza qabıl etiledi. Basqasha aytqanda gipotez H_1 durıs bolg'anda gipoteza H_0 qabıl etiledi.

Kriteriydin' quwatı dep, konkurent gipoteza orınlı bolıw sha'rtinde ζ kriteriydin' kritikalıq oblastqa tu'siw itimallıg'ına aytiladı.

Kriteriydin' quwatı qansha u'lken bolsa, ekinshi tu'r qa'tege jol qoyıw itimallıg'ı sonsha kishi boladı.

Nolinshi (tiykarg'ı) gipotezanı tekseriw ushın statistikalıq kriteriylerdin' bir neshe tu'rlerinen paydalanıladı.

Bekkemlew ushın sorawlar:

1. Parametrler bahası degenimiz ne?
2. Jılımaytug'ın baha dep nege aytamız?

3. Statistikalıq baha qanday baha?
4. Baha qay waqıtta effektivli baha dep ataladı?
5. Noqatlıq baha, intervallıq baha, bahanın' da'lligi terminlerin tu'sindirip berin'.
6. İsenim itimallıg'ı degenimiz ne?
7. İsenimlilik intervalı dep nege aytamız?
8. Statistikalıq kriteriy dep nege aytamız?
9. Kritikalıq oblast, kritiklıq noqat terminleri tu'sindirin'.
10. Nolinshi (tiykarg'ı) gipoteza dep nege aytamız?

A'debiyatlar: [1], gl.11, §§62-64; [2],gl.14, §§52-53,gl.15, §§58-62.

A'debiyatlar

1. B.V.Gnedenko, Kurs teorii veroyatnostey, M.Nauka,1988
2. B.A.Sevastyanov, Kurs teorii veroyatnostey i matematisheskoy statistiki,M.Nauka,1982.
3. A.A.Borovkov, Teoriya veroyatnostey, M.Nauka 1988.
4. İ.N.Kovalenko, A.A.Filippova,Teoriya veroyatnostey i matematisheskaya statistika, M.,Vısshaya shkola,1973
5. Q.Q.Qaljanov, İtimallıqlar teoriyasının' elementleri, No'kis, Bilim,1992.
6. B.G.Volodin i dr.-Sbornik zadash po teorii veroyatnostey, matematisheskoy statistike i teorii slushaynıx funktsiy, M.,1970.
7. B.Orımbetov, U.Rametov, İtimallıqlar teoriyasına kirisiw, No'kis, 1989.
8. B.Orımbetov, U.Rametov, Tosınnanlı shamalar sisteması ha'm bo'listiriwlerdin' parametrlerinin' statistikalıq bahaları, No'kis,1989.