I боб. Квант статистика

1-§. Кириш

Зарралари квант механика қонунларига бўйсунадиган системани квант система дейилади. Квант системанинг хоссаларини ўрганадиган статистика физиканинг бўлими- квант статистикадир.

Кўп заррали квант системанинг хоссаларини умумий ҳолда аниқ қараш бир қанча принципиал қийинчиликларга дуч келтиради.

Системани ташкил этган зарралар етарли даражада сийрак бўлганда, масалани қараш соддалашади. Бу ҳолда битта зарранинг ҳолатларини квант механика асосида аниқлаб, сўнг шу ҳолатлар бўйича зарраларнинг тақсимланиши қонунини кўриш мумкин. Масалани *бундай соддалаштириб қарашни квант статистикада бир зарравий метод дейилади.* Бир зарравий метод билан масалаларни квант статистика асосида қаралганда зарраларнинг ўзаро таъсирини эътиборга олинмайди, фақатгина ҳар бир ҳолатдаги зарралар учун алмашинув эффект эътиборга олинади.

Алмашинув эффект-айнан бир хил зарраларнинг ўрин алмаштиришларида намоён бўладиган, системанинг симметрияси хоссаларини акс эттирадиган, классик ўхшашлиги бўлмаган, квант корреляцион ходисадир.

Температура камайиб $p \sim \sqrt{T}$ де Бройль тўлқин узунлиги $\lambda = h/p$ зарралар орасидаги масофа тартибида ёки ундан катта бўла бошлаганда, зарралар орасидаги ўзаро таъсир потенциалидан ташқари, квант корреляциясига оид алмашинув ўзаро таъсир намоён бўлади.

Бу квант корреляция зарралар ҳаракатига, уларнинг системаси хоссасига муҳим таъсир кўрсатади. Бу таъсир температура камайиши билан кучайиб боради. Квант корреляция нафақат зарралар ҳаракати қонунларини, балки классик статистикани ҳам қайта қараш зуруриятини келтириб чиқарди.

Шу муносабат билан квант механиканинг муҳим принципларидан Паули принципи катта роль ўйнайди: бу принципга асосан, система айниш гемпературасидан пастда бўлса, ҳар бир бирзарравий ҳолатда биттадан ортиқ фермион бўла олмайди. Бу принцип бозонларга тааллуқли эмас. Демак, система температураси Т айниш температураси $\mathrm{T}^* = a\left(\frac{\hbar^2}{mk}\right)n^{2/3}$ дан кичик бўлганда фермионлар статистикаси бозонлар статистикасидан муҳим фарқланадилар (қ.10§, I боб).

Назарий жиҳатдан қатъий айтиладиган бўлинса, квант статистиканинг бу методлари - постулатлари ишчи гипотеза сифатида қаралиб, уларнинг ўринли эканлиги, уларнинг натижаларининг экспериментлар натижаларига мос келиши билан исбот қилинади. Ҳақиқатдан ҳам, бир зарравий методга асосланган квант статистика натижалари тажрибада олинган натижаларга кўп ҳолларда мос (мувофиқ) келади. Шундай бўлсада, бундай қараш, умумназарий нуқтаи назардан, табиийки, тўла қониқарли эмас, чунки бундай постулатлар қаралаётган системанинг квант хоссаларидан, яъни фундаментал квант механика постулатларидан келиб чиқиши лозим эди. Аммо бундай келтириб чиқариш ҳозирги вақтда қилинмаган.

Биз қуйидаги квант статистиканинг масалаларини бир зарравий методга асосланиб қараймиз.

2-§. Система ҳолати.

1. Макроскопик ҳолат. Жуда кўп зарралардан (атомлар, молекулалар ва бошқалар) ташкил топган системанинг динамик эркинлик даражалари жуда кўп бўлади. Аммо системанинг ҳолатини аниқлаш учун одатда унинг температурасини, босимини, зичлигини ва бошқа макроскопик параметрларини ўлчайдилар. *Системанинг бундай макроскопик (термодинамик) параметрлар билан аниқланадиган ҳолатини **макроскопик ҳолат** дейилади.*

2. Динамик микроскопик ҳолат. Системани ташкил этган зарраларнинг (молекулалар, атомлар, электронлар ва бошқалар) динамик эркинлик даражалари орқали уларнинг бирининг ҳолатини классик механика ёки квант механика асосида (система гамильтонианига асосланган тенгламалар орқали) аниқлаш мумкин. Системанинг ана шундай динамик эркинлик даражалари (яъни ундаги зарраларнинг ҳар бирининг динамик ҳолатини аниқлаш билан) орқали аниқланган ҳолатини **динамик микроскопик ҳолат** деб атаймиз. Назарий жиҳатдан ҳар бир зарранинг ҳаракат тенгламасини (масалан, Ньютон тенгламаси ёки Шредингер тенгламаси) ечиб, системанинг динамик микроскопик ҳолатини аниқлаш мумкин. Аммо зарралар сони ниҳоятда кўп бўлганлиги учун системанинг ҳолатини бундай усул билан амалда аниқлаш мумкин эмас.

3. **Статистик микроскопик ҳолат.** Системанинг микроскопик ҳолатини амалда аниқлаш иложи бўлмагани учун (агар бундай микроҳолат маълум бўлса ҳам зарралар ҳаракати ва ўзаро тўқнашишлари сабабли у шундай тез ўзгариб турадики, ундан амалда

фойдаланиш яроқсиз бўлиб қолади) унинг микроскпик ҳолатини тавсифлаш учун янги метод, тушунча киритиш зарур бўлиб қолади. Шундай янги тушунча (метод) биринчи марта Гиббс томонидан киритилган статистик ансамбл тушунчасидир. Бу тушунчага асосан, қаралаётган битта реал система ўрнига, унга динамик жиҳатдан эквивалент бўлган, яъни бир хил гамильтонианга эга бўлган, аммо бошланғич шартлари билан фарқланадиган эквивалент системалар тўплами (ансамбли)ни қаралади. *Реал системага мослаштирилган бу тўпламни шу системанинг* ***статистик ансамбли*** *дейилади.*

Статистик ансамбл тушунчасига асосан, биз таъриф бўйича, системанинг динамик умумлашган координаталари q(t) ва умумлашган импульслари p(t) ни вақтга боғлиқ бўлмаган тасодифий катталиклар билан алмаштирамиз, яъни q ва p тасодифий катталиклар деб қараймиз. Тасодифий каттликлар q ва p нинг қийматлари (квант механикада q ёки p нинг қийматлари) реал системанинг эҳтимолий микроскопик ҳолатини аниқлайди. Бундай аниқланган ҳолатни **статистик микроскопик ҳолат** деб атаймиз. Статистик микроҳолатлар тўплами статистик ансамблга эквивалентдир. Шунингдек, юқоридаги таърифга асосан, динамик микроҳолатлар тўпламига ҳам эквивалентдир.

Статистик физиканинг асосий постулати. Статистик микроҳолатлар тўплами динамик мироҳлатлар тўпламига эквивалентдир (ёки унга тенгдир, ёки ўша тўпламнинг ўзидир!). Классик статистик физикада (шунингдек квант статистикада) q ва p лар демак булар билан аниқланган статистик микроҳолатнинг реализацияси, намоён бўлиши эҳтимолини аниқлаш статистик физикада асосий - марказий масаладир.

Статистик микроҳолатлар тўплами классик статистик физикада фазавий фазонинг қисмини, квант статистик физикада системанинг квант ҳолатлари тўпламини ифодалайди. Мувозанатли статистик физикани қуриш учун қуйидаги иккинчи асосий постулатни қабул қиламиз: априори (a priori) статистик микроҳолатлар тенг эҳтимолли (текис тақсимланган) деб қабул қилинади. Демак, статистик микроҳолатлар сони (статистик ансамбл элементлари сони) N_A га тенг бўлса, статистик микроҳолатлар эҳтимоли бу постулатга асосан. $1/N_A$ га тенг бўлади. Бу ерда махсус эслатамиз: анъанавий усулда микроҳолатларнинг тенг эҳтимоллиги (текис тақсимланганлиги) ҳақидаги бундай постулат яккаланган система учунгина ўринли деб қабул қилинган эди. Кузатиладиган катталик (масалан, энергия) қийматлари билан фарқланувчи баъзи микроҳолатларда система кўпроқ (каттароқ эҳтимол билан), баъзи микроҳоолатларда система камроқ (кичикроқ эҳтимол билан) бўлади.

Микроҳолатнинг эҳтимоли уни ташкил этган статистик микроҳолатлар сонига - статистик вазнга боғлиқ. Микроҳолатларнинг эҳтимоллари тақсимоти функцияси классик статистик механикада f(q, p) ва квант статистик механикада $f(E_L)$ функциялар билан аниқланади. Масалан, бирор динамик A катталикни тажрибада аниқлайдиган (ансамбл бўйича) ўртача қиймати классик ҳолда.

$$\overline{A} = \int A(p,q)\, f(p,q)\, dpdq\,,$$

квнт ҳолда

$$\overline{A} = \sum_{L} A_l f(l)$$

ифодалар билан аниқланадилар.

Бунда A_l квант механикадаги A катталикни ўртачаси:

$$A_l = \int \psi_l^* \hat{A} \psi_l d\tau$$

бунда $\hat{A}$ оператор, ψ_l-l_n квант ҳолатининг тўлқин функцияси.

4. Идеал газ. Фараз қилайлик кўрилаётган система N та заррадан иборат бўлсин; улар орасида ўзаро таъсир бўлмасин ёки уни ҳисобга олмаслик даражада кичик бўлсин. Бундай ҳолда системанинг- идеал газнинг зарралари битта зарранинг статистик ансамбли элементларидан иборат бўлади деб қаралиши мумкин.

5. Бир зарравий метод. Идеал газ статистик ансамбли уни ташкил этган реал молекулалар, атомлар, умуман зарралар ансамбли (тўплами)дан иборат бўлади. Шу нуқтаи назардан системанинг (идеал газнинг) статистик микроҳолати битта зарранинг (атом, молекуланинг) микроҳолати билан аниқланади. *Бошқача айтганда, классик статистика* $\vec{p}$ *ва* $\vec{q}$ *катталиклар қийматлари* $\vec{q}, \vec{q}+d\vec{q}$ *ва* $\vec{p}, \vec{p}+d\vec{p}$ *интервалларда бўлиши эҳтимоли* $dW(\vec{p},\vec{q})=f(\vec{p},\vec{q})d\vec{p},d\vec{q}$ *билан аниқланади; бунда эҳтимоллар зичлиги* $f(\vec{p},\vec{q})$ *ни бир зарравий тақсимот функцияси дейилади.*

Квант статистикада зарранинг квант ҳолатларда бўлиш эҳтимолини аниқлаш муҳимдир. Сийрак квант газ ҳолатларини бир зарравий тақсимот функцияси орқали тавсифланади. Биз қуйида квант системани қараймиз.

N та бир-бири билан ўзаро таъсирда бўлмаган зарралар системаси ҳолатининг тўлқин функцияси

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N, t) \qquad (1)$$

билан аниқланган бўлсин.

Бунда гамильтониан

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hat{H}_i \qquad (2)$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hbar}{2m}\Delta_i + U_i(x_i) \qquad (3)$$

ифодалар билан аниқланган бўлсин; x_i билан $\vec{p}_i$ ёки $\vec{q}_i$ ларни белгиладик.

Стационар ҳолат учун тўлқин функция (1) Шредингер тенгламаси

$$\hat{H}\psi = E\psi \qquad (4)$$

дан топилади; бунда

$$\sum_i \hat{H}_i \psi = E\psi \qquad (5)$$

Идеал газ учун $\psi = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\ldots\psi_N(x_N)$ ва $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_N$ деб қараш мумкин. Бу ҳолда (5) дан

$$\hat{H}_i \psi_i(x_i) = E_i \psi_i(x_i) \qquad (6)$$

тенгламани оламиз. Бу тенгламани ечиб, ҳар бир i зарранинг тўлқин функциялари ва энергия сатҳларини топамиз. Ҳар бир бирзарравий ҳолат функцияси $\psi_i(x_i)$ ни аниқловчи квант сонларни (атомдаги электорон учун квант сонлар n, l, m, m_S) битта ҳарф n билан белгилайлик. Бу ҳолда

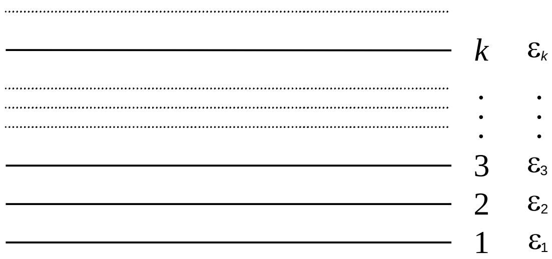
$$E_{n_1 n_2 \ldots n_N} = E_{n_1} + \ldots + E_{n_N} \qquad (7)$$

$$\psi_{n_1 n_2 \ldots n_s} = \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)\ldots\psi_{n_N}(x_N) \qquad (8)$$

Бунда система энергияси йиғинди (7) дан, система ҳолати функцияси бир зарравий функциялар кўпайтмаси (8) дан иборат.

Бу ерда шуни таъкидлаймизки, бир-бири билан ўзаро таъсирлашувчи зарралардан ташкил топган система ҳолати функциясини, кўп ҳолларда, бир зарравий ҳолат функциялари кўпайтмалари бўйича қаторга ёйилмаси сифатида қараш мумкин.

Агар система зарралари бир хил бўлса (биз статистикада шундай ҳолни қараймиз), уларнинг ҳаммаси учун тенглама (6) бир хил бўлади; уларнинг ҳолатлари ва энергия сатхлари ҳам бир хил бўлади. N заррадан иборат системанинг квант ҳолати N та бир зарравий ҳолатларнинг ҳар хил комбинацияларидан олиниши мумкин. Системанинг бундай ҳолатлари чексиз кўп бир зарравий ҳолатлар тўпламидан N - сайлаш (танлаш) орқали аниқланади.



1.1- ðàñì .

Динамик нуқтаи назардан ихтиёрий битта заррага тегишли (6) Шредингер тенгламасини ечиб, ҳолатлар $\psi_1, \psi_2 ... \psi_k, ...$ ва буларга мос энергетик сатҳлар, масалан, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... \varepsilon_k, ...$ аниқланади. Бу битта зарра учун аниқланган энергия сатхлари сонини зарралар сони N га нисбатга жуда катта деб қараб (бу идеал квант газ бўлишлик шарти), шу энергия сатҳларида N та зарранинг тақсимланиш қонунини аниқлаш бир зарравий методнинг вазифасидир (1.1-расм). Динамик нуқаи назардан битта заррага тегишли масалани ечиб, энергия сатхлари бўйича кўп зарраларнинг тақсимотини тадқиқ қилиш - бу бир зарравий методдир.

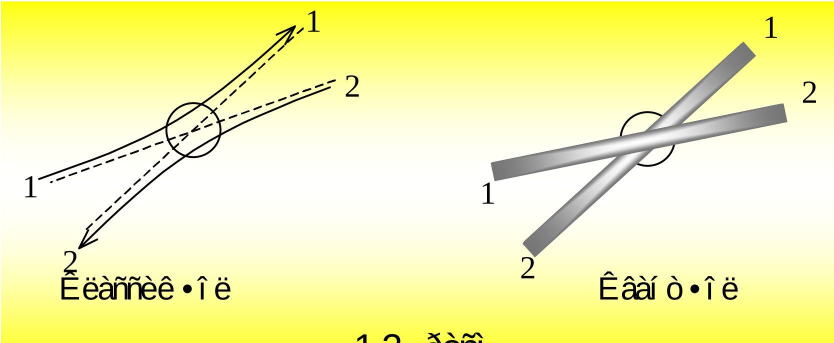
Зарралар ўзларининг ҳолат функциялари-тўлқин функцияларининг характерига қараб икки турга: бозонлар ва фермионларга бўлинади. Биз шуларга қисқача тўхтайлик.

3-§. Айнанлик принципи

Агар икки заррани классик физика нуқтаи назаридан қаралса, улар узлуксиз ҳаракатланаётганлигини кузатиш мумкин, яъни уларни принципиал жиҳатдан алоҳида кузатиш ва демак, ажратиш, фарқлаш мумкин. Квант механикада микрозарраларнинг ҳолатлари дискрет ўзгаради. Бир турга тегишли икки зарра бир хил ҳолатда бўлса, уларнинг характеристикалари бир хил бўлади. Бу эса уларнинг айнан бир хиллилигига, уларни фарқлаш мумкин эмаслигига олиб келади.

Классик зарралар тўқнашганда (1.2-расм), ҳар доим қайси бири қайси томонга кетганини аниқлаш (кўриш, билиш) мумкин.

Квант зарраларда троекториялар йўқ, шу сабабли маълум "трубка"ни ичида тўлқин пакет ҳаракатланаётир деб қараш мумкин. Агар "трубка"лар тўқнашса (ёки яқинлашса) қайси зарра қайси жойда эканлигини аниқ билиш мумкин эмас. Шу сабабли, бир зарра бир томонга, иккинчи зарра иккинчи томонга кетганлигини (импульснинг сақланиш қонуни асосида) аниқлаш мумкин (қ.1.2-расм). Шундай қилиб, квант механикада постулат сифатида айнанлик принципи қабул қилинади.



1.2- ðàñì .

Бир турдаги зррларнинг бир-биридан фарқланмаслиги, айнанлиги сабабли системадаги ихтиёрий иккита зарраларнинг ўринлари алмаштиришлари системанинг физик ҳолатини ўзгартирмайди.

Бир хил масса, спин, зарядларга эга ва бошқа бир хил ички хоссалар билан характерланувчи, тавсифланувчи зарраларни квант механикада айнан бир хил зарралар дейилади. Бошқача айтганда, масалан, бир электронни иккинчи электрондан фарқлаш принципиал мумкин эмас; барча электронлар айнан бир хил зарралардир. Айнан бир хил зарралар квант механикадаги фундаментал принцип-айнанлик принципига бўйсунади.

Айнанлик принципига асосан, зарралар системасидаги зарраларнинг ўринлари алмашиниши туфайли ҳосил бўлган ҳолатларни ҳеч қандай реал эксперимент ёрдамида фарқлаш (ажратиш) мумкин эмас. Шу сабабли, бундай ўрин алмашинишлардан ҳосил бўлган ҳолатларни системанинг битта физик ҳолати деб қаралиши керак.

Айнанлик принципи квант механиканинг классик механикадан фарқловчи асосий принциплардан бири, яъни классик механикада ҳар бир зарранинг ҳаракатини, траекториясини принцип жиҳатдан кузатиш мумкин деб қаралса, квант механикада эса бундай қараш ўз маъносини йўқотади, ҳар бир зарранинг ўз индивидуаллиги йўқолади.

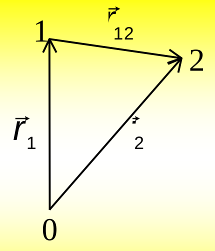
Маълумки, квант механикада зарра ҳолати тўлқин функция билан тавсифланади. Юқорида айтилганларга асосан, икки айнан бир хил зарраларнинг тўлқин функциялари фазода қисман (ўзаро қоплашувга) ўзаро ёпувга эга бўлса, у ҳолда, тўлқин функциялар аниқланган соҳанинг бирор элементар ҳажмида зарралардан қайси бири турибди, деган савол мутлақо маънога эга эмас; бу икки заррадан бирининг бу элементар ҳажмда бўлиши эҳтимоли ҳақида гапириш маъного эгадир.

Табиатдаги айнан бир хил зарралар икки турга: ҳолатлари симметрик тўлқин функциялар билан тавсифланувчи бозонларга ва антисимметрик тўлқин функцилар билан тавсифланувчи фермионларга бўлинди.

Айнанлик принципидан келиб чиқадиган тўлқин функцияларнинг бу симметриклик хоссалари, классик механикада ўхшашлиги бўлмаган, квант эффект – алмашинув ўзаро таъсир мавжудлигига олиб келади.

4-§. Симметрик ва антисимметрик тўлқин функциялар

Спинлари эътиборга олинмагандаги 2 та бир хил заррадан иборат системанинг квант холати тўлқин функция $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ билан тавсифланади; $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$-зарралар координаталарининг функцияси (қ. 1.3 расм.).



1.3- расм.

Зарраларнинг ўринларини (координаталарини) алмаштирайлик, яъни 1 нинг ўрнига 2 ва 2нинг ўрнига 1 зарра жойлашсин. У ҳолда радиус–вектор $\vec{r}_{12}$ нинг йўналиши ўзгариб $\vec{r}_{21}$ дан иборат бўлади (қ.1.3-расм).

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} \tag{9}$$

Зарраларнинг бундай ўрин алмаштиришлари системанинг ҳолатини ўзгартирмайди, чунки зарралар бир хил. Бундай (9) ўрин алмаштиришни **акслантириш** деб аталади.

Акслантириш оператори $\hat{\mathrm{P}}$ ни (*уни ўрин алмаштириш оператори ҳам дейилади*) тўлқин функция $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\psi(1,2)$ га таъсир эткизайлик:

$$\hat{\mathrm{P}}\psi(1,2)=\psi(2,1) \tag{10}$$

Бу (10) га яна бир бор $\hat{\mathrm{P}}$ ни таъсир эткизсак, равшанки, яна аввалги ҳолат ҳосил бўлади, яъни

$$\hat{P}\left(\hat{P}\,\psi(1,2)\right)=\psi(1,2) \tag{11}$$

Квант механиканинг умумий принципига асосан, операторнинг тўлқин функциясига таъсири тўлқин функцияни маълум сонга ўзгартади, яъни

$$\hat{P}\,\psi(1,2)=P\psi(2,1) \tag{12}$$

бунда маълум сон P - шу -$\hat{\mathrm{P}}$ операторнинг хусусий қиймати. (10) ифодага $\hat{\mathrm{P}}$ операторни яна таъсир эттирайлик.

$$\hat{P}\left(\hat{P}\psi(1,2)\right)=P(P\hat{\psi}(1,2))=P\hat{P}\psi(1,2)=P^2\psi(1,2) \tag{13}$$

Иккинчи томондан, икки марта алмаштиришдан $\psi(1,2)$ келиб чиққанлигини эътиборга олсак,

$$P^2\psi(1,2)=\psi(1,2)$$

ва бундан

$$P^2=1, P=\pm 1 \tag{14}$$

натижани оламиз.

Бошқача усул: айнанлик принципига асосан, зарраларнинг ўрин алмаштирилиши унинг физик ҳолатини ўзгартирмайди. Шу сабабли, бу ўрин алмаштиришда тўлқин функциясининг фазаси ўзгаради, яъни $\psi(2,1)=e^{i\alpha}\psi(1,2)$ яна бир марта ўрин алмаштирилса, $\psi(1,2)=e^{i2\alpha}\psi(1,2)$; бундан $e^{i2\alpha}=1$ ёки $e^{i\alpha}=\pm 1$.

(12) ва (14) дан кўринадики, акслантирилганда (ўрин алмаштирлганда) тўлқин функциянинг ишораси ўзгармаслиги мумкин $(P=+1 хол)$. *Бундай тўлқн функцияларни симметрик тўлқин функциялар дейилади; симметрик тўлқин функциялар билан ҳолати тавсифланадиган зарраларни, юқорида айтгандек, бозе зарралар ёки бозонлар дейилади.*

Акслантирилганда тўлқин функциянинг ишораси ўзгариши мумкин $(P=-1 хол)$. *Бундай тўлқин функцияларни антисимметрик тўлқин функциялар дейилади; антисимметрик тўлқин функциялар билан ҳолати тавсифланадиган зарраларни, юқорида айтилгандек, ферми зарралар ёки фермионлар дейилади.*

N заррадан иборат система ҳолатининг тўлқин функцияси $\psi(..x_i, x_{k,...})$ бўлсин. Айнанлик принципига асосан, тўлқин функциянинг аргументлари ўрин алмаштирса, физик ҳолат ўзгармагани сабабли, физик ҳолага тегишли бўлмаган фазавий ўзгариш бўлади, яъни $\psi(..x_k, x_i,...) = e^{i\alpha}\psi(..x_i, x_k...)$ бунда $\alpha -$ихтиёрий ҳақиқий катталик; яна иккинчи марта ўрин алмаштирилса, аввалги тўлқин функцияга келинади: $\psi(..x_i, x_k...) = e^{i2\alpha}\psi(..x_i, x_k...)$. Бундан $e^{i2\alpha} = 1$, $e^{i\alpha} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ келиб чиқади. Демак, юқорида хусусий хол учун айтганимиздек, системада икки зарра ўрин алмашганда унинг тўлқин функциясининг ишораси ўзгаради $(e^{i\alpha} = -1 хол)$ ёки ўзгармайди $(e^{i\alpha} = 1 хол)$; Ишораси ўзгармаса симметрик, ўзгарса антисимметрик тўлқин функциялар бўлиб, бу ўзгариш ёки ўзгармаслик зарраларнинг спинларига боғлиқ эканлигини В. Паули (1924 – 1925 йиллар) томонидан кўрсатилди.

Яримли спинга эга зарралар (мисол, электрон, позитрон, нейтрино, протон, нейтрон ва шу кабилар) ҳамда тоқ сондаги фермионлардан иборат мураккаб зарралар (масалан, тритий ядроси: бу ядро 1 та протон ва 2та нейтрондан иборат; гелий –3 ядроси: бу ядро 2 та протон ва 1 нейтрондан иборат ва шунга ўхшашлар) фермионлардан иборат бўлади. Фермионлардан ташкил топган системани ферми–система дейилади.

Спиннинг йўналиши ҳам эътиборга олинган аниқ квант ҳолатда, Паули принципига асосан, биттадан ортиқ фермион бўлиши мумкин эмас, яъни

$$n_i = 0{,}1 \tag{15}$$

Спинлари ноль ёки бутун сонга тенг бўлган ҳамда жуфт сондаги фермионлардан ташкил топган мураккаб зарралар – бозонлардан иборат бўлади. (Мисол фотон, мезонлар, гелий-4 ядроси, дейтрий ядроси ва шу кабилар). *Бозонлардан ташкил топган системани бозе–*

система дейилади. Бозонлар ҳар бир квант ҳолатда ихтиёрий сонда бўлиши мумкин, яъни

$$n_i = 0,1,2,... \tag{16}$$

5-§. Алмашув ўзаро таъсир. Паули принципи

Квант механиканинг постулатларидан бири-Паул принципидир. Тўлқин функциянинг симметрик ёки антисимметриклиги унинг фазовий ва спинлари ўзгарувчиларининг амаштирилгандаги хусусиятига боғлиқ.

Агар зарралар орасидаги ўзаро таъсир кучлари зарралар спинларига боғлиқ бўлмаса, системанинг тўлқин функциясини фақат координаталарга ва фақат спинларга боғлиқ функциялар кўпайтмаси кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\psi(x_1, x_2, ..., x_N; m_{s1}, m_{s2}, ..., m_{sN}) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_N) U(m_{s1}, m_{s2}, ..., m_{sN})$$

Демак, бундай зарралар, агар бозонлардан иборат бўлса, у холда кооординаталар ва спинлар функциялари бир хил симметрияларга эга бўлишлари шарт, яъни $\varphi_c U_C$ ёки $\varphi_A U_A$ (бунда индекс "С" симметрик "А" эса антисимметрикликни кўрсатади); агар фермионлардан иборат бўлса, $\varphi_A U_C$ ёки $\varphi_c U_A$ дан иборат бўлиши керак.

Бошқача айтганда, айнанлик принципига асосан, айнан бир хил зарраларнинг фазодаги ҳолатини тавсифловчи тўлқин функциянинг симметриклик хоссаси спин тўлқин функциянинг симметриклик хоссасига боғлиқдир. Бу эса, зарраларнинг фазодаги ҳаракатида бир–бири билан маълум мувофиқлашиш, квантовий корреляция (ҳатто зарралар орасидаги ўзаро таъсир кучи бўлмаган ҳолда ҳам) мавжудлигини кўрсатади. Айнан бир хил зарраларнинг фазодаги ҳолатида (спинлар симметриясига боғлиқ равишда) бундай мувофиқлашишлар, квантовий корреляциялар системанинг энергияси қийматида ўз аксини топади. *Бу квантовий корреляция билан боғлиқ энергияни ўзаро таъсир алмашув энергияси дейилади.* Алмашув таъсир энергияси алоҳида зарралар тўлқин функцияларининг ёпув (қоплашув) даражасига боғлиқ; бу ёпув соҳаси қанча катта бўлса, алмашув энергия шунча катта бўлади.

Шуни таъкидлаймизки зарралар орасидаги ўзаро таъсир бўлмаганда ҳам, яъни айнан бир хил зарралардан ташкил топган идеал газда ҳам, айнанлик принципи туфайли алмашув ўзаро таъсир келиб чиқади. Алмашув ўзаро таъсир–квантовий корреляция зарралар орасидаги ўртача масофа де Бройль тўлқин узунлигиннинг ўртача қиймати тартибида ёки ундан кичик бўлганда эффектив намоён бўлади. Бунда алмашув ўзаро таъсирини характери фермионлар ва безонлар учун ҳар хил бўлади. Фермионлар учун $\psi_A = \varphi_A U_C$ тўлқин функцияда спинлар параллел эканлигидан зарраларнинг яқинлашувида итариш кучлари намоён бўлади; бу итариш кучларини акс эттирувчи Паули принципи икки ва ундан ортиқ зарраларнинг бир ҳолатда бўлишига қарашлик (тўсқинлик) қилади. Бозонлар учун алмашув ўзаро таъсир эса, спинларнинг антипараллеллигидан зарраларнинг ўзаро тортишиш кучи содир бўлишлигидандир. Шу сабабли, бозонлар бир ҳолатда бўла олишлари мумкин.

Ўзаро таъсирлашувчи айнан бир хил зарраларнинг ташқи майдондаги энергиясига ҳам квантовий корреляция мавжудлиги таъсир кўрсатади. Аммо бу таъсир зарраларнинг ўрин алмашишларидаги таъсирга нисбатан ишораси, одатда, тескари бўлганлиги учун бу таъсирларнинг хиссалари бир-бирига нисбатан катта ёки кичиклигига қараб, системанинг умумий энергияси ортиши ёки камайиши мумкин, яъни система ҳолатининг қулайлиги спинларнинг параллелигида (масалан, ферромагнетизмда) ёки антипараллелигида (масалан H_2,O_2 молекулаларда) содир бўлиши мумкин.

Бир-бирига боғлиқ бўлмаган N та зарралар системаси ҳолатлари учун

$$\psi_{n_1,n_2,\dots n_N} = \psi_{n_1}\psi_{n_2}\dots\psi_{n_N} \qquad (17)$$

функция киритган эдик. Аммо у симметриклик хоссасига эга бўламагани учун система ҳолатини тавсифлашга ярамайди. Системанинг ҳолатини тавсифлаш учун (17) нинг чизиқли комбинациядан симметрик ёки антисимметрик функцияларни олиш керак.

Масалан, иккита бир зарравий функциялар $\varphi_n 1(x)$ ва $\varphi_n 2(x)$ берилган бўлса, ундан симметрикликка эга бўлган ҳолат функцияларини ҳосил қилишимиз мумкин:

$$\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_{n1}(x_1)\varphi_{n2}(x_2) + \varphi_{n1}(x_2)\varphi_{n2}(x_1)\right]$$

$$\varphi_C = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_{n1}(x_1)\varphi_{n2}(x_2) - \varphi_{n1}(x_2)\varphi_{n2}(x_1)\right] \qquad (18)$$

(18) ифодадан кўринадики, $n_1 = n_2$ ёки $x_1 = x_2$ бўлганда $\varphi_A = 0$ бўлади; яъни антисимметрик тўлқин функция билан тавсифланувчи икки бир хил зарралар (фермионлар) бир ҳолатда ёки бир жойда бўлиши мумкин эмас.

Бу (18) ифодани N та бир-бири билан ўзаро таъсирлашмайдиган зарралар системаси учун умумлаштирайлик:

$$\psi_C = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum \psi_{n1}(x_1)\psi_{n2}(x_2)\ldots\psi_{nN}(x_N) \tag{19}$$

n_i–спин квант сонни ҳам акс эттиради. Ўрин алмаштиришлар сони яъни (19) да хадлар сони N!. Бунда ўрин алмаштиришлар ψ_C нинг ишорасини ўзгартирмайди!

Антисимметрик функция ψ_A ни қуйидаги детерминантдан иборат деб қаралади:

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{n1}(x_1)\varphi_{n1}(x_2)\ldots\varphi_{n1}(x_N) \\ \varphi_{n2}(x_1)\varphi_{n2}(x_2)\ldots\varphi_{n2}(x_N) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{nN}(x_1)\varphi_{nN}(x_2)\ldots\varphi_{nN}(x_N) \end{vmatrix} \tag{20}$$

Зарраларнинг ўрин алмаштиришга (20) детерминантдаги устунларнинг ўзаро алмаштирилиши мос келади.

Агар ихтиёрий икки зарранинг, масалан 1 ва 2 нинг квант ҳолатлари бир хил бўлса, яъни $n_1 = n_2$ бўлса, у ҳолда детерминантнинг икки қатори бир хил бўлади. Икки қатори бир хил бўлса, бундай детерминант ҳар доим нолга тенг бўлади, яъни $\psi_A = 0$. Бундай ҳолат реализацияланмайди бу эса Паули принципидир. Демак, бу принципга асосан бир хил ҳолатда 2 та фермион бўлиши мумкин эмас.

6-§. Квант зарраларнинг бир зарравий ҳолатлар бўйича тақсимоти

Маълумки, квант системалр учун тақсиомт функциялари ҳар хил усуллар билан (хусусан, катта каноник тақсимоти асосида; зарраларнинг сони, энергияси ва энтропия ифодалари асосида) олинади.

Биз қуйида услубий жиҳатдан нисбатан оддий метод билан бир зарравий ҳолатлар бўйича зарралар тақсимоти қонунини ва Бозе – Эйнштейн, Ферми –Дирак тақсимоти функцияларини оламиз.

Система зарралари квант механика асосида тавсифлансин. Бундай система термодинамик мувозанатда бўлса, унинг қонуниятларини мувозанатли квант статистик физика ўрганади.

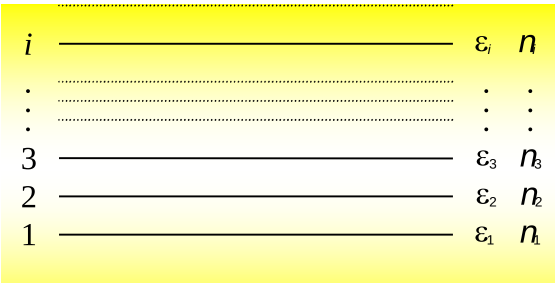
Агар системанинг зарралари орасидаги ўзаро таъсир куч етарли даражада заиф, кучсиз бўлса, (ёки *бу ўзаро таъсир йўқ бўлса, бу ҳолда системани квант идеал система (газ) дейилади*), ҳар бир зарра, бошқа зарраларга боғлиқ бўлмаган равишда, эркин ҳаракатланади. Бу ҳолда зарранинг квант ҳолатлари Шредингер тенгламаси (6) $(\mathrm{H}\psi_i = E_i\psi_i)$ асосида аниқланади; ψ_i- тўлқин функциялар $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_i, ...$- энергия сатҳлари; ε_i – зарранинг i ҳолатдаги энергияси.

Система N та идеал квант зарралардан иборат бўлсин. Бундай системани бир зарравий метод асосида қаралади.[1]

Бу система бир зарра учун статистик ансамблдир. Қаралаётган зарра нусхалари N энергия сатҳларига нисбатан оз (кичик) бўлсин. Бу ҳолда N та зарраларнинг энергия сатҳлари бўйича тақсимланиши қонунини аниқлайлик.

[1] Зарралар орасида ўзаро таъсир кучли бўлганда системани квант механика асосида тавсифлаш мумкин. Аммо бу масала мураккаб ва šийиндир. Кўп зарраларни тадкикот киладиган физиканинг бўлимини кўп зарралар физикаси дейилади. Бу бир зарравий методни баъзан мос равишда ўзгартириб, зарралари орасидаги кучли ўзаро таъсир бўлган системани тавсифлаш учун šўллаб яхши натижалар олинди.

Фараз қилайлик, N та зарралар бир зарравий ҳолатлар бўйича қуйидагича тақсимланган бўлсин $n_1, n_2, ..., n_i,$ (1.4-расм)



1.4- ðàñì .

Бунда i ичи ҳолатдаги n_i зарраларнинг энергияси $E_i = n_i \varepsilon_i$ дан иборат. Демак, l ҳолатдаги система энергияси $E_l = \sum_i n_i \varepsilon_i$; зарралар сони $N = \sum_i n_i$.

Шуни айтиш лозимки, системанинг квант ҳолатини аниқлайдиган l, энергетик сатҳлардаги зарралар сонлари тўплами билан берилади, яъни $l = (n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots)$ I- энергетик сатҳдаги n_i зарралар очиқ системани ташкил қилади, яъни унда n_i ўзгариши мумкин. Берилган n_i зарралардан иборат системача учун (умумий системанинг қисми учун) тақсимот функциясини қуйидагича

$$f(E_i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta(E_i - \mu n_i)} \tag{21}$$

ёзамиз. Бунда Z i нчи системачага тегишли статистик йиғинди,

$$\beta = \frac{1}{KT} \tag{22}$$

Термодинамика потенционал Φ_i

$$\Phi_i = n_i \mu_i \tag{23}$$

μ химик потенциал.

Мувозанатли ҳолатда фазалар мувозанати учун ёзилган

$$T_1 = T_2 = \ldots T, \; P_1 = P_2 = \ldots P_i, \; \mu_1 = \mu_2 \ldots = \mu_i = \mu \tag{24}$$

дан ва

$$E_i = n_i \varepsilon_i \tag{25}$$

ифодадан фойдаланиб, тақсимот қонуни учун

$$f(E_i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta n_i(\varepsilon i - \mu)} \tag{26}$$

ифодани оламиз; бунда статистик йиғинди

$$Z = \sum_{ni} e^{-\beta n_i(\varepsilon i - \mu)} \tag{27}$$

нормалаш шарти

$$\sum_{ni} f(E_i) = 1 \tag{28}$$

асосида топилади.

Тақсимот функцияси (26) квант система хоссасини тавсифлаш учун асос бўлади.

7-§. Квант статистиканинг тақсимот функцияси

Физика нуқтаи назардан, ҳар бир энергетик ҳолатда зарралар сонининг ўртача қиймати муҳим аҳамиятга эга. Шунинг учун таксимот функцияси (26) асосида i ҳолатдаги зарраларнинг ўртача сони $\langle n_i \rangle$ ни топайлик.

Умумий қоидага асосан, зарралар сонининг ўртачаси қуйидагича аниқланади:

$$\langle n_i \rangle = \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i f(E_i)$$

(26) ва (27) ифодаларни назарда тутиб, $\langle n_i \rangle$ ни

$$< n_i >= \frac{1}{\beta Z} \cdot \frac{dZ}{d\mu} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{d \ln Z}{d\mu}$$

кўринишда ёзиш мумкин. $\langle n_i \rangle \equiv f(\varepsilon_i)$ белгилаш киритиб, охирги ифодани ёзамиз.

$$f(\varepsilon_i) = \frac{d \ln Z}{\beta d\mu} \tag{29}$$

$f(\varepsilon_i)$ ни квант статистиканинг тақсимот функцияси дейилади. Шундай қилиб, $f(\varepsilon_i)$ ни, яъни зарралар сони ўртачасини аниқлаш учун статистик йиғинди Z ни билиш зарур.

Бизга маълумки, ярим спинли зарралар-Паули принципига бўйсунадиган зарралар-фермионлар бир зарравий ҳолатда биттадан ортиқ бўла олмайди, яъни $n_i = 0{,}1$.

Бутун спинли ёки ноль спинга эга бўлган зарралар-бозонлар бир зарравий ҳолатда ихтиёрий сонда бўлиши мумкин, яъни $n_i = 0{,}1{,}2{,}...$.

Шу сабабли, фермионлар (электронлар, протонлар, нейтронлар, позитронлар ва бошқалар), бозонлар (фотонлар, фононлар, мезонлар ва жуфт сонда фермионлардан иборат мураккаб зарралар) тақсимот функцияларини алоҳида – алоҳида қараш лозим бўлади.

8-§. Бозе – Эйнштейн статистикаси

Бозонларнинг бир зарравий ҳолатлардаги тақсимот қонунини кўрайлик. Бу ҳолда, $n_i = 0{,}1{,}2{,}...$ Статистик йиғинди

$$Z = \sum_{n_i} e^{-\beta n_i(\varepsilon_i - \mu)} \tag{30}$$

бозонлар учун $\mu \le 0$ шарт бажарилиши зарур. Акс ҳолда $f(\varepsilon_i)$ фунция $\mu > \varepsilon_i$ ва $n_i \to \infty$ да чегараланмаган ва демак физик маънога эга бўлмаган функцияга айланади. $\mu \le 0$ бўлганда (30) ифода камаювчи геометрик прогрессиядан иборатдир. Унинг йиғиндиси

$$Z = \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}} \tag{31}$$

ифода билан аниқланади.

Статистик йиғинди (31) нинг ифодасидан фойдаланиб, $f(\varepsilon_i)$ учун (29) асосида қуйидагича ифодани оламиз.

$$< n_i > \equiv f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \tag{32}$$

Ҳолатлар бўйича зарралар ўртача сонларни аниқлайдиган (32) ифодани Бозе- Эйнштейн ёки Бозе тақсимоти – статистикаси дейилади.

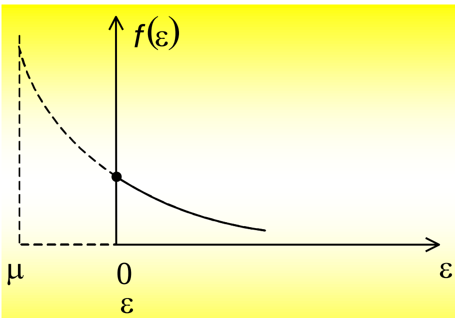
Бозонларнинг умумий сони N ва ихтиёрий ҳолатдаги ўртача сони $< n_i >$ ўзларининг маъноларига кўра мусбат катталиклар $N > 0$ ва $< n_i >> 0$ бўлади. Шунинг учун (32) дан $\beta(\varepsilon_i - \mu) > 0$ ёки умуман $-\beta\mu \geq 0$ келиб чиқади. Бундан, $\beta > 0$ эканлигини назарда тутсак, $\mu \leq 0$ келиб чиқади.

Ўзгарувчи сонли бозонлар (зарралар), хусусан фотонлар, фононлар учун химик потенциал $\mu = 0$. Умуман бозонлар учун химик потенциал

$$\mu \leq 0 \tag{33}$$

шартга бўйсунади.

Бозонлар учун $\varepsilon \to \mu$ бўлганда, Бозе тақсимот $< n_i >= f(\varepsilon_i) \to \infty$ бўлади, $\varepsilon = 0$ бўлганда эса (қ.1.5-расм).



1.5-ðàñì .

$$f(0) = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}, \mu < 0 \tag{34}$$

ифода олинади.

Умумий ҳолда химик потенциал μ ни зарраларнинг умумий сони ифодаси

$$N = \sum_i < n_i > = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \tag{35}$$

асосида аниқланади. Агар энергия қийматлари узлуксиз ўзгаради деб қаралса,

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} \tag{36}$$

ифодадан аниқланади. Бунда $g(\varepsilon)$ бирлик энергия интервалига тўғри келган ҳолатлар сони-ҳолатлар зичлигидир.

9-§. Ферми-Дирак статистикаси

Фермионларнинг бир зарравий ҳолатлардаги тақсимотида $n_i = 0,1$ бўлганлиги учун, бу ҳолдаги статистик йиғинди Z ифодаси

$$Z = \sum_{n_i} e^{\beta n_i (\mu - \varepsilon_i)} = 1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \tag{37}$$

кўринишда бўлади.

Бир зарравий ҳолатдаги фермионларнинг ўртача сони $< n_i >$ учун (29) дан фойдаланиб оламиз.

$$< n_i > \equiv f(\varepsilon_i) = \frac{d \ln Z}{\beta d\mu} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \tag{38}$$

Фермионлар ўртача сонининг $<n_i>$ *бир зарравий ҳолатлар бўйича тақсимоти (38) ни Ферми – Дирак ёки Ферми тақсимоти – статистикаси дейилади.* қулайлик учун Ферми – Дирак ва Бозе – Эйншейн тақсимотларини

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1} \tag{39}$$

кўринишда ёзилади. Бунда мусбат ишорали ифода Ферми – Дирак, манфий ишорали ифода Бозе – Эйнштейн тақсимотларига тегишли.

Ферми система температураси $T = 0$ да $\varepsilon \le \mu$ бўлган ҳамма бир зарравий ҳолатлар (энергетик сатҳлар) зарралар билан тўлган бўлади; $\varepsilon_i > \mu$ сатҳлар эса ҳаммаси бўш бўлади. (қ.1.6-расм).

Температура нолдан фарқли $T > 0$ бўлганда тақсимот функция пунктир чизиқ билан кўрсатилган (қ.1.6-расм).

Фермионларнинг химик потенциали μ *ни Ферми сатҳи ёки Ферми потенциали дейилади, баъзан уни Ферми энергияси дейилади.*

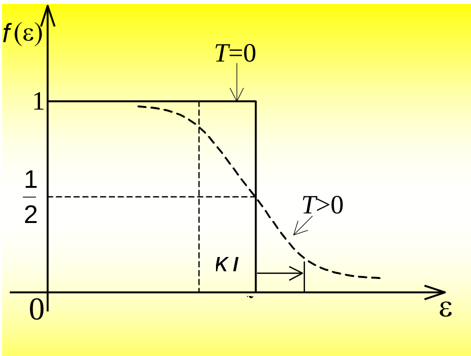
Шуни таъкидлаймизки, $T > 0$ бўлгандаги Ферми тақсимотининг $T = 0$ даги тақсимотдан фарқи, асосан Ферми сатҳининг атрофида, kT интервалда бўлади. Бошқача айтганда, $T > 0$ да $\varepsilon_i > \mu$ энергияли фермионлар асосан Ферми сатҳи яқинида бўладилар (қ.1.6-расм), яъни улар Ферми сатҳи яқинидаги сатҳлардан "буғланиб" Ферми сатҳи юқорисидаги бўш сатҳларга ўтадилар.

Ферми потенциалини (энергияси μ ни) зарраларнинг умумий сони ифодасидан, яъни қуйидаги ифодадан

$$N = \sum_i <n_i> = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \tag{40}$$

аниқланади. Агар энергиянинг қийматлари узлуксиз ўзгаради, деб қаралса, (40) нинг ўрнига қуйидаги ифода

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \tag{41}$$



1.6-расм.

олинади; бу (41) ифодадан μ аниқланади.

Бунда $g(\varepsilon)$ бирлик энергия интервалига тўғри келган ҳолатлар сони – ҳолатлар зичлигидир.

Тарихий маълумот. Бозе – Эйнштейн статистикаси 1924 йилда ҳинд физиги Ш. Бозе томонидан фотонларн тавсифлаш учун кашф этилган. Шу йили А. Эйнштейн идеал газларни тавсифлаш учун ҳам қўллаган.

1926 йилда италиялик олим Э. Ферми фермионларни тавсифлаш учун Ферми-Дирак статистикасини кашф этади, шу йили инглиз олими П. Дирак бу статистиканинг квант хоссасини тушунтирди. 1940 йилда швецарияли олим В. Паули статистика турлари зарраларнинг спинларига боғлиқ эканлигини кўрсатди.

10-§. Классик статистика – квант статистиканинг хусусий ҳоли. Айниш температураси

Бозе ва Ферми тақсимотларини ёзайлик:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)} \pm 1} \tag{42}$$

бу тақсимотларда

$$e^{-\beta\mu} >> 1 \qquad (43)$$

шарт бажарилса, махраждаги 1 ни эътиборга олмасдан тақрибан ёзиш мумкин:

$$f(\varepsilon_i) \approx \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}} = e^{\beta\mu} \cdot e^{-\beta\varepsilon_i} = Ae^{-\beta\varepsilon_i} \qquad (44)$$

бунда $\beta = 1/kT, \varepsilon_i$ – зарранинг тўла энергияси.

Демак, (43) шарт бажарилганда квант статистикалари Максвелл – Больцман тақсимотига, классик статистикага ўтади.

Классик ва квант статистикаларни умумий кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)} + \delta} \qquad (45)$$

Бунда

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{êëàññèê çàððàëàð óчóн} \\ +1 & \text{ôåðìèîíëàð óчóн} \\ -1 & \text{áîçîíëàð óчóн} \end{cases}$$

Квант статистикадан классик статистикага ўтишдаги (43) шартни классик идеал газ мисолида кўрайлик.

(44) ни энергия сатҳлари бўйича йиғиштирайлик

$$\sum_i f(\varepsilon_i) = \sum_i < n_i > = e^{\beta\mu} \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} \qquad (46)$$

Бизга маълум

$$\sum_i < n_i > = N$$

$$Z_1 = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i} \qquad (47)$$

узлуксиз ҳол учун эса

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (48)$$

Бу (47) ва (48) ифодалардан фойдаланиб, (46) ни ўзгартириб ёзамиз

$$N = e^{\beta\mu} Z_1$$

ёки

$$e^{-\beta\mu} = \frac{Z_1}{N} = \frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (49)$$

Демак, (43) га биноан

$$\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} >> 1 \quad (50)$$

ёки

$$\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} >> \frac{N}{V} \quad (51)$$

шарт бажарилганда квант статистикаси классик статистикага ўтади. (48) ёки (49) дан кўринадики, бу шарт зичлик $n = N/V$, температура T ва зарра (молекула, атом) массаси m га боғлиқ, яъни система етарли даражада сийрак ва юқори температурада бўлса, квант статистиканинг ўрнига классик статистикадан фойдаланиш мумкин, аммо (50) бажарилмаса, яъни

$$\frac{N}{V} \approx \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (52)$$

ёки

$$\frac{N}{V} > \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (53)$$

бўлса, система хоссаларини тавсифлаш учун квант статистикадан фойдаланиш зарур.

(49) тенглик асосида $e^{-\beta\mu}$ ни бир неча мисолларда баҳолайлик; бунда $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг /град $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг сек.

А) Водород атомлари системаси учун $\exp(-\beta\mu)$ ни баҳолаймиз; водород атом массаси $m \approx 10^{-24}$ г. Бу ҳолда

$$e^{\beta\mu} \approx 1,89 \cdot 10^{20} \cdot T^{3/2} \frac{V}{N}$$

Агар зичлик $N/V = 1.89 \cdot 10^{20} см^{-3}$ бўлса, (бу зичлик $p \approx 7$ атм. $t = 0^0 C$ га тўғри келади). Бу ҳолда

$$e^{-\mu/kT} = T^{3/2}$$

Агар $T \approx 10K$ бўлса,

$T^{3/2} \approx 31,6K$ бўлади.

Демак, $T \approx 10^0 K$ даги водород атомлари системаси учун

$$e^{-\mu/kT} \approx 31,6 >> 1$$

Хатто шундай паст температурада ҳам водород атомлари системасини классик статистикаси аосида қараш мумкин экан. Бундай, умуман атомлар, молекулаларни классик статистика аосида қараш, тадқиқ қилиш мумкин. Ниҳоятда паст температура бундай истисно!

б) Электрон учун $(m_e \approx 10^{-27} гр)$

$$e^{-\mu/kT} = 2,42 \cdot 10^{15} T^{3/2} \frac{V}{N}$$

ифодани оламиз. $N/V \approx 2,42 \cdot 10^{22} см^{-3}$ -бу металлардаги эркин электронлар зичлигига тахминан тенг. Бу ҳолда

$$e^{-\mu/kT} = 10^{-7} T^{3/2}$$

Бундан $T \approx 10000K$ бўлганда ҳам, $e^{-\mu/kT} \approx 0,1$ бўлади, яъни

$$e^{-\mu/kT} =<< 1$$

бўлади.

Демак, металлардаги электронларни квант статистика асосида қараш керак. Ярим ўтказгичларда эркин электронлар зичлиги

$$\frac{N}{V} \sim \frac{\left(10^9 - 10^{17}\right)}{см^3}$$

тартибда бўлади. Агар температура $T = 400K$ бўлса,

$$e^{-\beta\mu} \sim \left(80 \div 8 \cdot 10^9\right) >> 1$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, ярим ўтказгичлардаги электронларни (шунингдек ковакларни) тавсифлашда квазиклассик статистикани қўллаш ўринли бўлади.

(52) ифодан температура Т ни топайлик

$$T = T^* = \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2\pi mk} = \alpha \frac{\hbar^2}{mk}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (54)$$

бунда $a = 2\pi.$

Бу температура T^* ни айниш температураси дейилади.

(54) ифодада ячейкалар (ҳолатлар) сони сатҳлар сонига тенг деб қабул қилинган. Аммо паст температураларда квант механик хоссалар намоён бўла бошлайди. Шу туфайли зарраларнинг айнанлик принципини эътиборга олиш натижасида ҳолатнинг айниш каррасини ҳисобга олиш лозим. Бошқача айтганда, ҳолатлар сонига мослаштирилган N нинг ўрнига сатҳлар сонини олиш учун, (54) ифодада N нинг ўрнига N/g ни ёзиш лозим.

У ҳолда айниш температураси

$$T^* = a\frac{\hbar^2}{mk}(\frac{N}{gV})^{2/3,} \tag{55}$$

ифода билан аниқланади, бунда $a = 2\pi$ классик идеал зарралар учун. Бозе ва Ферми тақсимотлари асосида квант идеал зарралар учун аниқ ҳисоблаш кўрсатадики,

$$\alpha = \begin{cases} 3{,}3/\xi^{2/3} & \text{идеал бозе-газ учун} \\ \\ 0{,}5(6\pi/\xi)^{2/3} & \text{идеал ферми-газ учун} \end{cases}$$

$\xi = 2S + 1$ учун спинлар (ориентацияларини) вазиятларини эътиборга олингандаги фактор (омил).

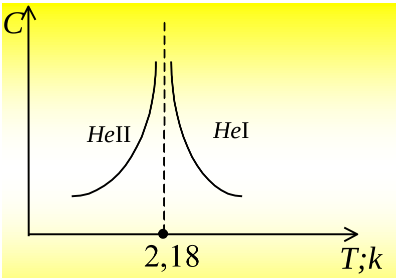
Мисол He^4 учун $T^* \sim 3K$; металлардаги электронлар учун $T^* \sim 10^4 K$. Айниш температурасидан пастда газ зарраларининг (молекулалар, атомларнинг) айнанлик принципини намоён бўла бошлайди. Бозе-газ учун айниш температурасидан паст температурада Бозе-Эйнштейн конденсацияси ҳодисаси содир бўла бошлайди.

Ферми-газ учун айниш температураси Бозе-газ каби фазавий ўтишлар билан боғланган эмас, бу температура Ферми энергияси билан аниқланади (масалан, $\mu./k$ билан айниш температураси аниқланади). Электронлар системаси учун $T^* \approx 10^4 K$ тартибда.

Температуранинг бу $T \leq T^*$ қийматларида айнанлик принципи намоён бўлганлиги учун, газнинг хоссалари классик газ хоссасидан фарқли бўлади. Шу сабабли, масалан, иссиқлик сиғим, босимнинг температурага боғлиқлиги классик газдагидан фарқли бўлади.

Температура пасайиши билан, агар зарралар орасидаги ўртача масофа r, зарранинг де Бройль тўлқин узунлигини $\bar{\lambda} = \frac{h}{m\bar{v}}$ дан кичик бўла бошласа, яъни $\bar{\lambda} > r$ бўлган ҳолда айнанлик принципи кучлироқ (муҳимроқ) намоён бўла боради. Бу ерда шуни таъкидлаймизки, реал газ ва суюқликлардан фақат гелий атомлари учун $T < T^*$ шарт бажарилади. Қолган атомлар системаси айниш температураси T^* га қадар, яъни улардаги квант хоссалари намоён бўлгунга қадар қаттиқ агрегат ҳолатларига ўтиб улгурадилар. Гелий He^4 суюқлик учун эса бир томондан атом массаси кичик, иккинчи томондан гелий суюқликнинг масса зичлиги етарли даражада катта.

Гелий газ $4{,}2K$ да гелий суюқликка айланади; температурани янада пасайтирилса, $2{,}18K$ да гелий I суюқликдан гелий II суюқликка ўтади, яъни бу температурада фазавий ўтиш юз (содир) бўлади (1.7-расм). Квант ҳолатдаги гелий II суюқлик ўта ўтказувчанлик хоссасига эга бўлади, у ёпишқоқликка эга бўлмайди, яъни унинг ёпишқоқлик коэффициенти нолга тенг бўлади. $2{,}18K$ температурада иссиқлик сиғим С нинг ўзгариши λ кўринишда бўлади.



1.7-ðàñì .

11-§. Ҳолатлар зичлиги

Бир зарравий методга асосан, квант система зарраларнинг умумий сони

$$N = \sum_i n_i = \sum_i < n_i > = \sum_i 1/(e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1), \tag{57}$$

Умумий энергияси Е

$$E = \sum_i E_i = \sum \varepsilon_i n_i = \sum_i < \varepsilon_i n_i >= \sum_i \frac{\varepsilon_i}{\left(e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1\right)} \qquad (58)$$

ифодалар билан аниқланади. Бунда

$$f(\varepsilon_i) \equiv < n_i >= \frac{1}{\left(e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1\right)}, \ \beta = \frac{1}{kT} \qquad (59)$$

Бу ифодаларда “+” ишора Ферми тақсимотига “-” ишора Бозе тақсимотга тегишлидир.

Фараз қилайлик, энергия сатҳлари бир-бирига жуда яқин, зич жойлашган бўлсин. Бундай ҳол системанинг ҳажми V етарли даражада катта бўлганда содир бўлади, чунки энергия $E \sim \frac{1}{V}$ бўлганлиги учун бир зарравий ҳолатлар зичлиги катталашиб, дискретлик характери камайиб, сатҳлар бир-бирига яқинлашади. Бу ҳолда дискрет ҳолатлар ўрнига энергия узлуксиз қийматларни қабул қилади деб ҳисоблаш мумкин. Бу шарт бажарилганда,. (57), (58) ифодаларда йиғинсди ишорасини интеграллаш билан алмаштириш мумкин бўлади. Бунинг учун $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ интервалда $g(\varepsilon)d\varepsilon$ ҳолатлар (энергия сатҳлари) мавжуд деб қарайлик. Энергиянинг қийматлари узлуксиз ўзгарган бу ҳолда (57) ва (58) ифодаларни

$$N = \int \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{(e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1)}, \qquad (60)$$

$$E = \int \frac{\varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon}{(e^{\beta(\varepsilon - \mu)} \pm 1)}, \qquad (61)$$

кўринишда ёзиш мумкин: бунда $g(\varepsilon)$ ҳолатлар зичлиги.

Бир зарравий ҳолатлар зичлиги $g(\varepsilon)$ ни аниқлайлик $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ интервалдаги ҳолатлар сони қуйидагича аниқланади:

$$dn(\varepsilon) = g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{d\Gamma(\varepsilon)}{h^3} \tag{62}$$

$$dT(\varepsilon) = \left[\int dxdydz\right]\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right] p^2 dp = V \cdot 4\pi p^2 dp = 4\pi V \cdot p^2 dp \tag{63}$$

Зарра спини векторининг фазодаги ориентациялари (вазиятлари) сони ξ ни эътиборга олинса, ҳолатлар сони

$$dn(\varepsilon) = \frac{4\pi V\xi}{h^3} p^2 dp \tag{64}$$

ифода билан аниқланади. Бунда ориентациялар сони $\xi = 2_S + 1$; S - квант сон. $S = 1/2$ спинли фермионлар (электрон, протон, нейтрон ва бошқалар) учун $\xi = 2; S = 1$ спинли бозонлар учун $\xi = 3$ (аммо фотон учун $\xi = 2$). Умумий ҳолда ε билан p орасидаги боғланиш $\varepsilon(p)$ мураккаб; Аммо идеал газ учун, яъни зарранинг эркин ҳаракати учун

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \tag{65}$$

ифода ўринли. Эркин зарра учун (65) дан фойдаланиб ҳолатлар сони (зичлиги) (64) ни қуйидаги кўринишга келтирамиз.

$$dn(\varepsilon) = g(\varepsilon)d\varepsilon = 2\pi V\xi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \tag{66}$$

бунда ҳолатлар зичлиги

$$g(\varepsilon) = aV\varepsilon^{1/2} \tag{67}$$

$$a = 2\pi\xi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \tag{68}$$

Шундай қилиб, заррaларнинг умумий сони N ва энергияси E учун

$$N = aV\int \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{(e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1)}, \tag{69}$$

$$E = aV\int \frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{(e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1)}, \tag{70}$$

ифодаларни оламиз. Бу ифодалардан β ва μ ларни аниқлаш мумкин.

II боб. Бозе-Эйнштейн статистикасининг тадбиқи

1-§. Кириш

Бозе – тақсимоти $f(\varepsilon_i)$,, зарралар сони N ва энергия E

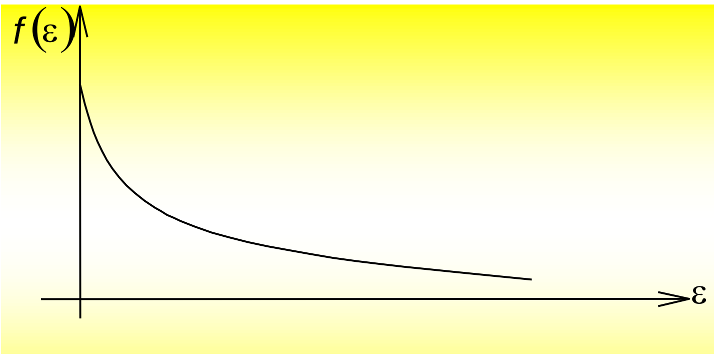
$$f(\varepsilon_i) \equiv < n_i > = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1},$$

$$N = \sum_i n_i = \sum_i < n_i >$$

$$E = \sum_i \varepsilon_i n_i = \sum_i \varepsilon_i < n_i >$$

ифодалар билан аниқланади; бунда $f(\varepsilon_i) i$ ҳолатдаги бозонларнинг ўртача сони.

Бир зарравий методда энергия сатҳи ε_i системанинг ҳажми V га тескари пропорционал бўлгани сабабли, ҳажм катталашган сари сатҳлар бир-бирига яқинлашиб боради. Ҳажм етарли даражада катта бўлганда, дискрет энергия сатҳлари ўрнига улар ҳосил қилган зонани қараш мумкин бўлади, яъни ε ни узлуксиз ўзгаради деб қабул қилинса бўлади (2.1 расм).



2.1- ðàñì .

Биз юқорида $\varepsilon \geq 0$ бўлгани ҳолда μ мусбат қиймат қабул қилиши мумкин эмаслигини, яъни $\mu \leq 0$ эканлигини айтган эдик. Агар акс ҳол бўлса, $\varepsilon = \mu$ бўлганда N ва E чексиз қийматлар қабул қилади. Бу эса реал ҳолда мумкин эмас, у тажрибага зиддир.

Агар $\frac{|\mu|}{kT} >> 1$ шарт бажарилса, система классик системага ўтишини юқорида биз кўрдик. Бозе-газ, агар $|\mu| \sim kT$ бўлса, қисман айниган ҳолатга ўтади.

2-§. Айнилган бозе – газ. Бозе – конденсация

Бозонлар сони N ва энергияси E ни узлуксиз ҳолатлар учун ёзайлик. $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ интервалдаги ҳолатлар сонини $g(\varepsilon)d\varepsilon$ билан белгиласак, (2) ва (3) ни қуйидагича ёзиш мумкин.

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}, \tag{4}$$

$$E = \int_0^\infty \frac{\varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}, \tag{5}$$

Эркин бозонлар учун $g(\varepsilon)d\varepsilon = aV_{\varepsilon}^{1/2}d\varepsilon$ эканлигидан

$$N = aV\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{{}^{\beta_\varepsilon-\beta_\mu} - 1}, \tag{6}$$

$$E = aV\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\beta_\varepsilon-\beta_\mu} - 1}, a = 2\pi(2m/h^2)^{3/2} \tag{7}$$

(6) ва (7) ларда $\beta_\varepsilon = \varepsilon / kT = x$ белгилаш киритайлик. У ҳолда

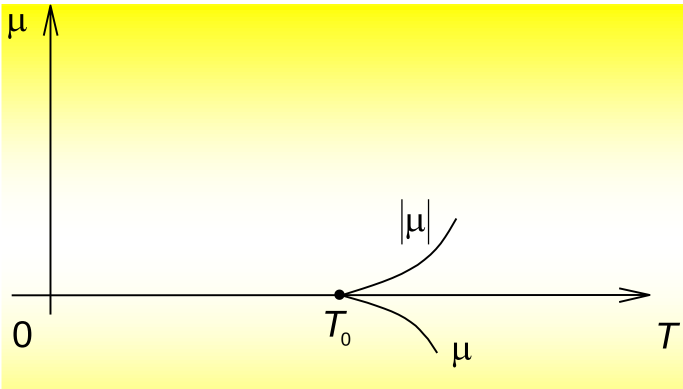
$$N = aV(kT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^{x-\beta_\mu} - 1} \tag{8}$$

$$E = aV(kT)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{e^{x-\beta_\mu} - 1} \tag{9}$$

(8) асосида μ ни $\frac{N}{V}, T$ параметрларнинг функцияси сифатида аниқлаш мумкин.

(6) ифодадан кўринадики, агар температура пасайиб борса, унга мос $|\mu|$ ҳам шундай камайиб бориши керакки, натижада интеграл

ишораси остидаги ифода қиймати ва демак бозонлар сони N ўзгармасин (2.2 расм). Температура камайиб бориши билан $|\mu|$ камайиб бориб (μ ортиб бориб) маълум температура T_0 да $\mu = 0$ қийматни қабул қилади. Температуранинг янада камайиши билан, яъни $T \leq T_0$ соҳада $\mu = 0$ бўлиб қолаверади. *Бу $T \leq T_0$ соҳада $\mu = 0$ бўлгани учун температура T ўзгарганда (6) ёки (8) нинг ўнг томони ўзгаради, аммо уларнинг чап томонидаги зарралар сони N эса ўзгармаслиги керак эди. Бу зиддиятни Эйнштейн парадокси дейилади.*



2.2- ðàñì .

$\mu = 0$ бўлгандаги температура T_0 ни (8) асосида қуйидаги тенгликдан аниқланади.

$$N = aV(kT_0)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}dx}{e^x - 1} \tag{10}$$

Мисол. (8) ва (9) ифодалардаги

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^{x-a} - 1}, \alpha = \beta\mu \leq 0, \mu \leq 0 \tag{1}$$

интегрални $T \leq T_0$ соҳасида аниқланг. $T \leq T_0$ соҳада $\mu = 0$.

Ечиш. $T \leq T_0$ соҳада $\mu = 0$ Шунинг учун

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x} dx}{1 - e^{x-}} = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^n e^{-kx} dx, \tag{2}$$

Ўзгарувчини алмаштирайлик: $kx = y$

$$In = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \int_0^{\infty} y^n e^{-y} dy = \xi(n+1)\Gamma(n+1) \qquad (3)$$

Бунда зета – функция $\xi(n)$ ва гамма-функция $\Gamma(n)$

$$\xi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}\,; \Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy$$

1) $\quad n = 1/2, \Gamma(1/2+1)\xi(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\xi(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 2{,}612 \approx 2{,}31$

2) $\quad n = 3/2, \Gamma(3/2+1)\xi(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\xi(5/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot 1{,}341 \approx 1{,}78$

$I_n = \Gamma(n+1)\xi(n+1)$ ифодадан фойдаланиб,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-1}} = \Gamma(3/2)\xi(3/2) = 2{,}31 \qquad (11)$$

қийматни топамиз. (11) қийматни (10)га қўйилса,

$$kT_0 = 0{,}084 \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \qquad (12)$$

ифода топилади.

Яна таъкидлаймизки, $T \le T_0$ соҳада $\mu = 0$ ва температура камайганда интеграл ифода (6) ёки (8) ҳам камаяди. Аммо (6) нинг чап томони N эса ўзгармаслиги керак. Бу парадоксни қуйидагича ҳал этилади. (6) интеграл ифода қуйидаги

$$N = \sum_i < n_i > \qquad (13)$$

ифодадаги йиғинди интеграл билан алмаштириш орқали олинган. (13) ни асосий ҳолатдаги $(\varepsilon = 0)$ зарралар сони N_0 ва уйғонган ҳолатдаги зарралар сони N^* дан иборат деб қарайлик:

$$N = N_0 + N^*, \qquad (14)$$

бунда

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\beta_\mu} - 1}, N^* = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}} \qquad (15)$$

Асосий ҳолдаги зарралар сони N_0 температура камайиши билан, унинг ифодасидан кўринадики, ортиб боради ва $\mu = 0$ бўлганда ҳамма зарралар шу $\varepsilon_0 = 0$ асосий ҳолатда ўтадилар. Шу сабабли, $\varepsilon_0 = 0$ энергияли асосий ҳолатни $\mu = 0$ бўлган $T \leq T_0$ соҳада махсус қаралади. Уйғонган ҳолатлардаги зарралар N^* учун йиғинди ифодани яна интегралифода билан алмаштирилади:

$$N^* = aV\int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \approx aV(kT)^{3/2}\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^{x-\beta_\mu} - 1}, \qquad (16)$$

бунда интегралнинг қуйи чегараси ноль билан алмаштирилади (бу унчалик муҳим хато эмас).

Энди $T \leq T_0$ соҳа учун $(\mu = 0)$ (10) ва (16) ифодалардан асосий ҳолатдаги зарралар сонини аниқлаймиз:

$$N_0 = N - N^* = N(1 - \frac{N^*}{N}) = N\left[1 - (T / T_0)^{3/2}\right] \qquad (17)$$

(17) дан кўринадики, агар $T \to T_0$ (температура T критик температура T_0 га интилса)

$$N_0 \to 0, N^* \to N \qquad (18)$$

бўлади, яъни ҳамма бозонлар уйғонган ҳолатларда бўлади. Агар $T \to 0^0 K$ бўлса, (17) дан олинади:

$$N_0 \to N, N^* \to 0 \qquad (19)$$

бу ҳолда ҳамма зарралар энергияси $\varepsilon_0 = 0$ бўлган асосий ҳолатда бўладилар.

Шундай қилиб, $T < T_0$ да температуранинг камайиши билан уйғонган ҳолатлардан зарралар асосий ҳолатга ўта бошлайдилар. *Бу* *ҳодисани Бозе – Эйнштейн конденсацияси дейилади.* (Бу ҳодиса буғнинг суюқликка айланишига ўхшайди. Аммо бу ташқи кўринишдагина ўхшашлик, холос) Юқорида келтирилган парадокс (Эйнштейн парадокси) ана шундай хал этилади.

$T < T_0$ бўлганда бозе-газнинг тўла энергияси E ни (8) дан

$$E = aV(kT)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{e^x - 1}, \tag{20}$$

ифода билан аниқланади. Бунда

$$\int_0^\infty \frac{x^{3/2}dx}{e^x - 1} = \Gamma(5/2)\xi(5/2) = 1{,}78 \tag{21}$$

Демак,

$$U \equiv E = aV(kT)^{5/2}\Gamma(5/2)\xi(5/2), \tag{22}$$

бунда

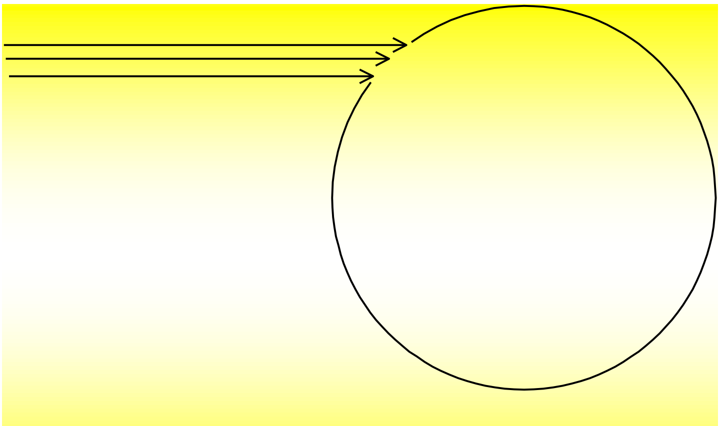
$$aV = 2\pi\xi(\frac{2m}{h^2})^{3/2}V \tag{23}$$

Температура $T < T_0$ бўлганда, (22) дан фойдаланиб, босим P, иссиқлик сиғим C_V ва энтропия S ни қуйидаги муносабатлардан топиш мумкин:

$$P = \frac{2}{3}U, C_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_{V,N}, \quad S = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N} \tag{24}$$

3-§. Мувозанатли нурланиш. Фотон газ

V ҳажмли идишнинг тирқишидан элекромагнит тўлқинлар кириб, T температурали идиш девори билан термодинамик мувозанатли ҳолатга келган бўлсин (2.3 расм). Бу нурланиш идишга кириб, қайтиб чиқмаганлиги учун қора жисм нурланиши деб юритилади. Бу мувозанатли нурланишнинг частота қийматлари бўйича тақсимланиши қонунини аниқлайлик.



2.3- ðàñì .

Идиш ичида мувозанат ҳолатдаги электромагнит – бу турғун тўлқинлардир. Турғун электромагнит тўлқинларни (модаларни) умумий тасаввурга кўра идиш ичида бир – бирига боғлиқ бўлмаган осцилляторлар (фотонлар)дан иборат деб қаралади. Шундай қилиб мувозанатли нурланишнинг частоталар бўйича тақсимланиши қонунини аниқлаш -бу (фотон-газда) фотонларнинг (осцилляторларнинг) энергиялар (частоталар) бўйича тақсимланиши топишдан иборат. $\omega, \omega + d\omega$ частота интервалига тўғри келган осцилляторлар сонини

$$Vg(\omega)d\omega \tag{25}$$

Билан белгилайлик. Бу ҳолда бирлик ҳажмга тўғри келган бундай осцилляторлар сони

$$g(\omega)d\omega \tag{26}$$

билан аниқланади.

Осцилляторнинг қабул қилиши мумикн бўлган энергиялари, квант механикага кўрсатиладики, $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2), n = 0,1,2,...$

Бу қийматларнинг ўртачаси эса

$$< \varepsilon >= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n f(\varepsilon_n) = \frac{\hbar\omega}{2} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} \qquad (27)$$

эканлигини аниқлаган эдик (қ. 9-§, VI боб 1-қисм).

4–§. Планк формуласи

$\omega, \omega + d\omega$ интервалга тўғри келган нурланиш энергияси $dU(\omega, T)$ (26) га (27) ифодалар асосида қуйидагича ёзилади.

$$dU(\omega, T) =< \varepsilon(\omega) > g(\omega) d\omega \qquad (28)$$

Иккинчи томондан, берилган температурада дифференциал $dU(\omega, T)$ ни ёзиш мумкин.

$$dU(\omega, T) = \left(\frac{\partial U(\omega, T)}{\partial \omega} \right) d\omega = \rho(\omega, T) d\omega \qquad (29)$$

бирлик частота интервалига тўғри келган нурланиш энергияси зичлиги $\rho(\omega, T)$ учун (28) ва (29) ни солиштирб,

$$\rho(\omega, T) =< \varepsilon(\omega) > g(\omega) \qquad (30)$$

ифодани оламиз.

Бирлик частота интервалига тўғри келган осцилляторлар (ҳолатлар) сони $g(\omega)$ ни аниқлайлик.

$\omega, \omega + d\omega$ интервалдаги ҳолатлар сонини (ёки шу интервалдаги модалар сонини) қуйидагича топамиз.

$dxdydzdp_x dp_y dp_z$ фазавий фазо элементида ҳолатлар сони

$$\frac{d\vec{r} d\vec{p}}{h^3} = \frac{dxdydzdp_x dp_y dp_z}{h^3} \qquad (31)$$

га тенг. V ҳажмдаги ҳолатлар сонини топиш учун (31) ни интеграллаб

$$\frac{V d\vec{p}}{h^3} = \frac{V dp_x dp_y dp_z}{h^3} \qquad (32)$$

ифодани оламиз.

Биз қараётган масалада йўналишлардан қатъий назар, фақат частоталар (энергия ёки импульс) қийматлари интервали муҳимлиги учун (32) да сферик координаталар системасига ўтиб, сўнг бурчаклар бўйича интеграллаш керак, яъни

$$\frac{Vd\bar{p}}{h^3} \to \frac{V}{h^3}\, p^2 dp \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta = \frac{4\pi\gamma}{h_3}\, p^2\, dp \qquad (33)$$

Ёруғлик назариясида $\bar{p} = \vec{k}h$; бунда

$$p = Kh = \frac{\hbar\omega}{c} \qquad (34)$$

(34) ни (33) га қўйиб

$$\frac{4\pi V h^3}{h^3}\,\frac{\omega^2}{c^3}\,d\omega = \frac{V\omega^2}{2\pi^2 c^3}\,d\omega, \quad (h = 2\pi\hbar) \qquad (35)$$

ифодани оламиз., Электромагнит тулкинлар кўндаланг тўлқин бўлгани учун икки қутбланиш (икки текисликда $\vec{E}$ вектор тебраниши) мумкин, шу сабабли (35) ни иккига кўпайтириб, изланаётган ҳолатлар (осциляторлар, моддалар) сонини топамиз (V=1$см^3$ деб олайлик).

$$g(\omega)d\omega = 2\cdot\frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3}\,d\omega \qquad (36)$$

бунда c - электромагнит тўлқин тезлиги.

Бирлик ҳажм, бирлик частота интервалига тўғри келган нурланиш энергияси (электромагнит энергияси) ифодаси (30) ни аниқлаймиз:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2}\,\frac{\hbar\omega}{2}\,cth\frac{\hbar\omega}{2kT} \qquad (37)$$

Эслатма: Агар осцилляторнинг асосий ҳолатини эътиборга олинмаса, унинг энергияси $\varepsilon_n = n\hbar\omega$, ҳудуди шундай ифода Планк томонидан қабул қилинган эди, статистик йиғинди.

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-x}}, \; x = \hbar\omega / kT; \; < n >= \frac{1}{e^x - 1}$$

ўртача энергия

$$< \varepsilon(\omega) >=< n\hbar\omega >= \frac{\hbar\omega}{e^{x} - 1} \qquad (38)$$

ва нурланиш энергияси зичлиги Планк гипотезасига асосан,

$$\rho_n(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2}\left(\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\right) \qquad (39)$$

ифодалар билан аниқланади.

(37) ифодани ўзгартириб ёзайлик

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}\right) \qquad (40)$$

(39) ва (40) дан кўринадики, (40) да қавс ичидаги биринчи ҳад асосий ҳолатнинг энергияси $\hbar\omega/2$ туфайли пайдо бўлган. (Вакуум флуктуация фони $\hbar\omega/2$).

Адабиётларда, одатда саноқ системасининг бошини асосий ҳолатга кўчирилади (ёки бошқача айтганда, аосий ҳолатни ҳисобга олинмайди) деб, нурланиш энергиясининг частота қийматлари бўйича тақсимот учун Планк формуласи (39) ни қабул қилинади.

Энг муҳим тақсимот функцияси

$$f(\varepsilon_n) = \frac{e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}} = \frac{e^{-x/2}e^{-nx}}{e^{-x/2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}} = \frac{e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} \qquad (41)$$

ифодасида асосий ҳолатнинг иштироки бўлмайди. Шу сабабли, нурланишнинг спектрал тақсимоти Планк формуласи (39) билан тавсифланади.

1. Планк формуласини қуйидагича ёзайлик

$$\rho_n(\omega, T) = \frac{(kT)^2}{\pi^2 c\hbar^2}\frac{x^3}{e^{x-1} - 1} = A\rho(x), \qquad (42)$$

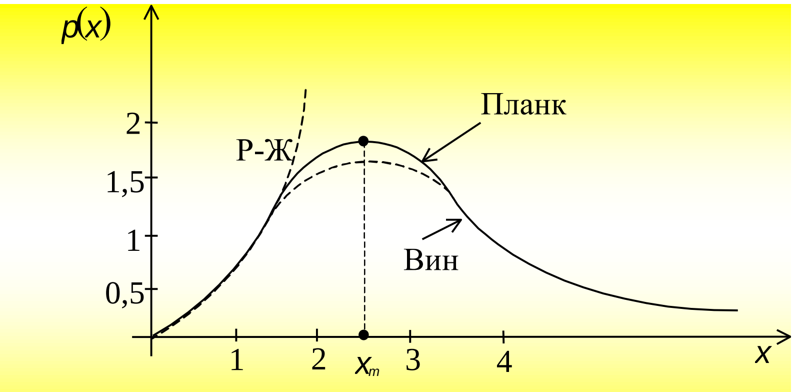
бунда

$$A=(kT)^3/(\pi\hbar)^2c^3,\ p(x)=x^3/(e^x-1)$$

(42) ни геометрик нуқтаи назардан таҳлил қилиш учун унинг графигини чизайлик (қ.2.4-расм).

2. 2.4-расмдан кўринадики, $x=\hbar\omega/kT$ нинг (яъни частотанинг) маълум қиймати x_m да $\rho(x)$ (яъни $\rho(\omega,T)$) максимумдан ўтади. Экстремум шарти

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x}/_{x=x_m}=\frac{3x^2}{e^x-1}-\frac{x^3e^x}{(e^x-1)^2}=0 \qquad (43)$$



2.4- расм.

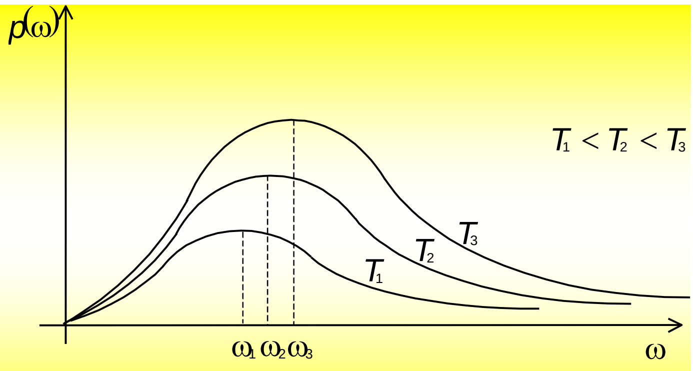
Бу (43) тенгламанинг тақрибий илдизи $x_m\approx 2{,}5$ дан ортиқроқ. Бунда

$$\omega_m=\frac{2{,}5}{\hbar}kT=aT \qquad (44)$$

эканлиги келиб чиқади; $\omega=2\pi c/\lambda$ ни эътиборга олиб, (44) дан

$$\lambda_m\cdot T=b(b=2\pi c/a) \qquad (45)$$

ифодани оламиз; a,b лар белгилашлардан кўринадики, ω,T ларга боғлиқ бўлмаган доимийлар. *(44) ёки (45) ни Виннинг силжиш қонуни дейилади.* Температура ортиши билан частотанинг ω_m қиймати ўнг тоионга (тўлқин узунлигининг λ_m қиймати эса чап томонга силжиб боради (2.5-расм).



2.5- расм.

3. Релей-Жинс қонуни. Осциллятор энергиясининг ўртача қиймати учун классик ифода $<\varepsilon>_{кл}= kT$ қиймат олиб, спектрал зичлик учун

$$\rho_{р-ж}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\cdot kT \qquad (46)$$

ифодани Релей ва Жинс аниқладилар.

Планк формуласи (39) да температура юқори бўлганда

$$\frac{\hbar\omega}{kT} << 1, (x << 1)$$

шарт бажарилса, e^x ни қаторга ёйиб, биринчи иккита ҳадлар билан чекланиб, оламиз

$$\frac{1}{e^x - 1} \approx \frac{1}{x} = \frac{kT}{\hbar\omega}$$

Демак, юқори температурада (классик ҳол) Планк формуласидан:

$$\rho_n(\omega, T) \approx \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega}{\hbar\omega}kT = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kT$$

Релей-Жинс қонуни (46) келиб чиқади.

Юқори температурада классик физика ўринли соҳада Релей-Жинс қонуни тажрибадан олинган натижага яқин келади (2.4 расм). Аммо Релей-Жинс қонуни катта частоталарда, паст температураларда тажрибадан кескин фарқ қилади.

4. Юқори частоталарда, паст температурада осцилляторнинг $<\varepsilon(\omega)>$ энергияси учун Больцман тақсимотидан фойдаланиб, Вин қуйидагини ёзди

$$<\varepsilon(\omega)>_B = \hbar\omega e^{-\hbar\omega/kT} \qquad (47)$$

(47) ни эътиборга олсак, нурланиш спектрал қонуни $\rho(\omega, T)$ учун

$$p_B(\omega, T) = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3}\hbar\omega e^{-\hbar\omega/kT} \qquad (48)$$

Виннинг қонунини оламиз. Юқори частоталарда Вин қонуни тажрибадан олинган натижаларга мос келиб, паст (кичик) частоталарда ундан фарқланади (2.4 расм).

$\hbar\omega >> kT$ бўлганда

$$\frac{1}{e^x - 1} \approx e^{-x}$$

деб олинса, Планк формуласидан Вин қонуни (48) келиб чиқади.

5. Планк формуласи асосида V ҳжмдаги нурланишнинг тўла энергияси $U(T)$ ни ҳисоблаш мумкин. Бунинг учун $dU(\omega, T) = p(\omega, T)d\omega$ ни частоталарнинг барча қийматлари бўйича интеграллаш керак.

$$U(T) = V\int dU(\omega, T) = \int_0^\infty \rho_n(\omega, T)d\omega = \frac{V\hbar}{\pi^3 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^x - 1} = V\frac{(kT)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = V\sigma T^4 \qquad (49)$$

$$\sigma = \frac{\kappa^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} J_3; \; J_3 = \xi(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{90}3! = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\sigma = \frac{\pi^2}{15}\frac{\kappa^4}{c^3\hbar^3} = 7{,}569\cdot 10^{-15} \text{эргсм}^{-3}\text{град}^{-4} \qquad (50)$$

(49) ифодани (формулани) Стефан – Больцман қонуни дейилади; σ ни Стефан – Больцман доимийси дейилади.

Изоҳ. Фотонлар – бу бозонлар. Бозонлар учун тақсимот қонуни

$$f(\varepsilon_i) =< n_i >= \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \tag{1}$$

Фотонлар учун $\mu = 0$ Фотонларнинг ўртача энергияси

$$< E_i >= \varepsilon_i < n_i >= \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1} \tag{2}$$

Фотонлар учун $\varepsilon_i = \hbar\omega$ эканлигини назарда тутсак, (2) асосида Планк формуласи (39) ни оламиз, яъни Бозе статистикасини фотонлар учун қўллаб $\mu = 0$ эканлигини назарда тутиб,

$$\rho_n(\omega, T) = g(\omega) \cdot \langle E \rangle$$

ифодадан Планк формуласини осонликбилан олинади.

Тарихий маълумот. Виннинг нурланиш қонуни немис олими В. Вин томонидан 1893 йилда кашф этилиб, 1896 йилда у қонун янада аниқлаштирилди. Виннинг силжиш қонуни $\lambda T = b$ шу Виннинг нурланиш қонунидан 1893 йилда келтириб чиқарилган.

Қора жисм нурланиши қонуни (46) инглиз олими Релей томонидан 1900 йилда энергиянинг тенг тақсимланиш ҳақидаги классик тасаввурлар асосида келтириб чиқарилган. Ингилиз олими Ж. Жинс 1905 йилларда классик статистика асосида шу нурланиш қонунини қайта олади.

1879 йилда австрали физик И. Стефан қора жисм нурланиши учун тажриба асосида нурланиш энергияси температуранинг тўртиничи даражасига пропорционлан эканлигини кашф этди. 1884 йилда австралик олим Л.Больцман назарий жиҳатдан бу қонунни термодинамика қонунларига таяниб асослади. Аммо нурланишнинг Планк назарияси яратилгандан кейингина Стефан-Больцман доимийсини ҳиосблаш имкони туғилди.

XIX асрнинг охирига бориб, классик физиканинг асосий учта бўлими: классик механика, классик электродинамика, термодинамика мукаммал ишланган эди. Аммо бу бўлимларнинг иссиқлик нурланиши муаммосини қарашда кучли ва кучсиз (заиф) тамонлари яққол кўрина болади. Худди шу даврда, 1900 йилда немис физиги М. Планк бу нурланиш муаммосини ҳал этиш учун ниҳоятда дадил фавқулодда ғоя айтади: нурланишда энергия дискрет порциялар-квантлар билан содир бўлади. Шу гипотеза муносабати билан ҳозирги замон микро физикасида муҳим роль ўйнайдиган Планк доимийси $\hbar = 6{,}63 \cdot 10^{-27}$ *эргсек* $(\hbar = h / 2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-27})$ *эргсек*) киритилди.

5- §. Қаттиқ жисм иссиқлик сиғимининг назарияси

1. Кристалл қаттиқ жисм. Фараз қилайлик, кристал қаттиқ жисмда атомлар регуляр жойлашган бўлсин (ячейкалар қаътий равишда такрорланиб жойлашган бўлсин) бундай жойлашишлар тўплами кристаллик панжарани ҳосил қилади. *Кристалл панжаранинг хар бир тугунида атом жойлашган. Бу идеал кристалл моделидир.*

Кристалнинг аниқ назарияси электронлар ва атомлар (ядролар)нинг ўзаро таъсирини эътиборга олинган тенгламани ечишга асосланган бўлиши зарур. Бундай аниқ тенглама асосида олинган энергия сатхларидан статистик йиғинди (интеграл) аниқланиши, сўнг ундан термодинамик катталиклар аниқланиши лозим. Аммо йўл амалда бажарилиши мумкин бўлмаган қийинчиликка олиб боради. Шу сабабли, масалани соддалаштирувчи қўйидаги икки асосий яқинлашувлар – адиабатик ва гармоник яқинлашувлар қабул қилинади.

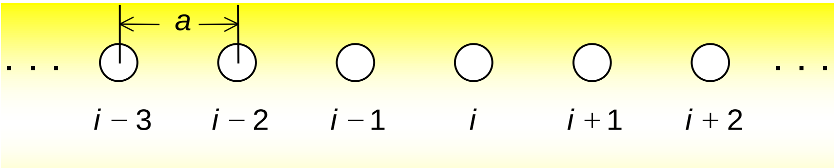
Маълумки, электроннинг массаси ядронинг массасига нисбатан жуда кичик. Шу сабабли ядро силжиганда электронлар тезда (ядро силжишига кетган вақтга нисбатан тезда) ядрога «мувофиқланиб» олади. Бошқача айтганда, ядро тебраниши даври электронларнинг релаксация вақтига нисбатан жуда катта бўлгани учун ядро ҳаракатини қараганда электронлар ҳаракатини алоҳида ажратиб қараш мумкин, яъни электронлар бир онда (жуда тез) ядрога мувофиқлашишга улгурганликлари сабабли электронларнинг ҳолати ядронинг берилган вақтдаги (ондаги) координаталари билан аниқланади. Мана шундай усул билан қараш-адиабатин яқинлашишдан иборат.

Адиабатик яқинлашишда кристалл атомларининг (ионларининг) тебраниши дейилганда, ядроларнинг тебранишлари тушунилади. Бундай қараш (тасаввур) кристалл учун фақат ядроларнинг координаталарига боғлиқ бўлган потенциал энергия киритилишига имкон беради.

Агар кристалл атомларининг тебраниш амплитудалари кристалл панжараси қадамига нисбатан катта бўлмаганда, кристалл потенциал энергиясини қаторга ёйиб, унинг квадратик ҳади билан чекланиш мумкин. Бу ҳолда кристаллнинг атомларини гармоник осцилляторлар тўпламидан иборат деб қараш мумкин бўлади. Бу усул-гармоник яқинлашишдир. Бу модель, айниқса кристаллнинг иссиқлик сиғимини қарашда қулайдир. Бошқа, баъзи масалаларни, жумладан, иссиқликдан кенгайишини қарашда бу моделни такомиллаштириш талаб этилади: баъзан эса бошқа модель билан тўлдириш талаб этилади.

2. Бир ўлчовли кристалл панжара. Гармоник яқинлашишни кўрайлик.

i атомнинг силжишини u_i билан белгилайлик. Кристалл механик мувозанатда бўлганда, атомлар орасидаги масофа а га тенг бўлсин (2.6 расм).



2.6- расм.

N та атомдан иборат бу бир ўлчовли кристаллнинг потенциал энергияси V ни қаторга ёйилик:

$$V(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}) = V_0 + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial u_i}\right)_0 u_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} G_{ij} u_i u_j + \cdots \qquad (51)$$

бунда V_0 кристаллнинг мувозанат ҳолатидаги минимал потенциал энергия; уни нолга тенг деб қабул қилинади; иккинчи ҳадда $(\partial V / \partial u_i)_0$ энергиядан олинган ҳосила мувозанатли ҳолатда потенциал минимум бўлгани учун $(\partial V / \partial u_i)_0$ нолга тенг;

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j}$$

мувозанатли ҳолатдаги (яъни $u_i = 0$ даги) потенциал V дан олинган иккинчи тартибли ҳосилалар; улар фақат i ва j атомлар орасидаги масофага боғлиқ мусбат катталиклардир.

Кристаллнинг гармоник моделига асосан, (51) қаторнинг $\frac{1}{2}\sum_{ij} G_{ij} u_i u_j$ ҳадлари билан чегараланади, яъни атом силжишлари кичик бўлганда қолган бошқа юқори тартибли ҳадлар жуда кичик эканлиги сабабли, уларнинг ҳисобга олинмайди. Демак,

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij} G_{ij} u_i u_j \qquad (52)$$

i атомнинг ҳаракат тенгламасини ёзайлик. Унга таъсир этаётган куч

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial u_i} = -\sum_j G_j u_j \tag{53}$$

Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан

$$-\frac{\partial V}{\partial u_i} = m\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

ёки буни эътиборга олиб, (53) ни

$$m = \frac{\partial u_i}{\partial t^2} + \sum_j G_{ij} u_j = 0 \tag{54}$$

кўринишда ёзамиз.

Умумий ҳолда u_e вақт t ва атомнинг координатаси $x_e = al$ нинг функциясидир. u_e ни қуйидагича алмаштирайлик:

$$u_l = \sum_k \xi_k(t) e^{ix} e^k \tag{55}$$

(55) ни (54) га қўямиз

$$m\sum_k \xi k(t) e^{ix} e^k + \sum_{jk} C_{ej}\xi_k(t) e^{ix} = 0$$

ёки

$$\sum_k \left[m\ddot{\xi}_k + \sum_j Cije^{i(xj-xe)k}\xi_k \right] = 0 \tag{56}$$

Куч доимийлар C_{ej} фақат атомлар орасидаги масофа $|l-j|$ га боғлиқ бўлиб, l ва j ларнинг алоҳида қийматларига боғлиқ эмас. Шу сабабли, (56) даги йиғинди шу $|l-j|$ бўйича олинади шуларга асосан

$$mw_k^2 = \sum Cije^{i(x_j - x_l)k} \tag{57}$$

белгилаш киритамиз ва буни назарда тутиб, (56) ни қайта ёзамиз

$$\sum_k (\ddot{\xi} + \omega_k^2 \xi_k) = 0 \tag{58}$$

ξ_k эркин ўзгарувчилар бўлгани сабабли (58) даги йиғинди нолга тенг бўлиши учун ҳар бир ҳад нолга тенг бўлиши шарт, яъни

$$\left(\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k\right) = 0 \qquad (59)$$

Шундай қилиб, (55) алмаштириш орқали кристалл панжараси атомлари ҳаракатини ифодаловчи динамик масала, осцилляторлар тўпламини қараш масаласига келтирилди (3 ўлчовли ҳолда ҳам масала шундай ҳал қилинади). *Бу табиий координаталар u_i ни нормал координаталар (тебранишлар, моддалар) ξ_k билан алмаштирилиши дейилади.* Бу жуда муҳим натижа бўлиб, эркин гармоник осцилляторнинг энергия сатҳларини аниқлашга имкон беради. Ундаги частота ω юқоридаги белгилаш (57) асосида топилади. Системанинг энергия сатҳлари эса қандай координаталар системасида аниқланишига боғлиқ эмас. Энергия сатҳлари аниқлангандан кейин, статистик йиғинди (интеграл) топилиб ва у орқали барча термодинамик параметрлар аниқланиши мумкин.

Иссиқлик сиғимни қараш учун ҳар бир атомни 3 ўлчовли осциллятордан иборат деб қараймиз. Бу ҳолда N та атомдан иборат кристаллни $3N$ та чизиқли гармоник осцилляторлар билан алмаштирилади.[1]

Ҳар бир осцилляторнинг ўртача энергияси $\langle\varepsilon(\omega)\rangle$ бўлса, бу моделга асосан N та атомдан иборат кристаллнинг ички энергияси

$$U = 3N < \varepsilon(\omega) > \qquad (60)$$

ифода билан аниқланади. Ҳажм V ўзгармас бўлганда қаттиқ жисм иссиқлик сиғими

[1] Табиий координаталардан нормал координаталарга утиб, шундай осцилляторлар туплами олиниши мумкинлигини юкорида курдик.

$$C \equiv C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{61}$$

ифода билан аниқланади. (60) ифодага асосан

$$C = 3N\frac{\partial\langle\varepsilon\rangle}{\partial T} \tag{62}$$

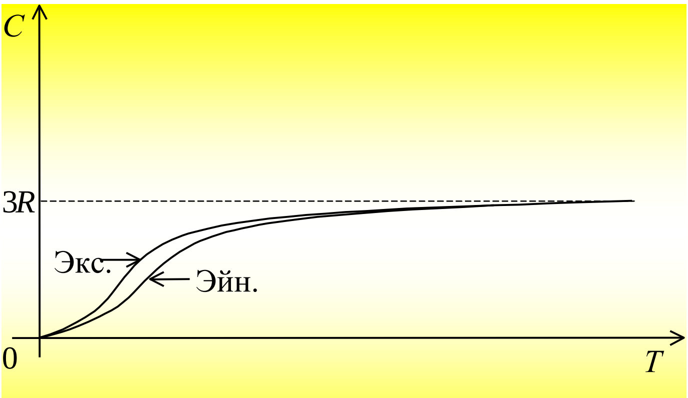
Классик ҳол. Агар температура етарли даражада юқори бўлса, осцилляторнинг ўртача энергияси $<\varepsilon>= kT$ эканлиги маълум. Бу ҳолда кристаллнинг иссиқлик сиғими

$$C = 3Nk \tag{63}$$

ёки 1 моль учун, $N = N_A;\ k = R/N_A$ эканлигидан

$$C = 3R \tag{64}$$

бўлади, бунда N_A Авогадро сони. *(64) ни Дюлонг-Пти қонуни дейилади.* (63) ёки (64) дан кўринадики, қаттиқ жисмнинг иссиқлик сиғими унинг хоссасига ҳам, температурасига ҳам боғлиқ эмас. Иссиқлик сиғим С нинг қаттиқ жисм ҳоссасига боғлиқ эмаслиги ниҳоятда ажабланарли! Ҳақиқатдан ҳам тажриба, юқори емпературaларда Дюлонг-Пти қонуни ўринли эканлигини тасдиқлайди. (2.7-расм). Аммо паст температурадаги иссиқлик сиғим Дюлонг – Пти қонунидан кескин фарқ қилади ва температура камайиши билан у ҳам камайиб борди (2.7-расм).



2.7-расм.

6-§ Иссиқлик сиғимнинг Эйнштейн назарияси

Иссиқлик сиғимнинг паст температураларда температурага боғлиқ эканлигини кўрсатиш учун Эънштейн осцилляторларни квант статистика асосида қаради.

Маълумки, квант механика асосида чизиқли гармоник осцилляторнинг энергияси $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ қийматлар қабул қилади. Унинг ўртача энергияси

$$< \varepsilon(\omega) >= \frac{\hbar\omega}{2} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{65}$$

ифода билан аниқланади.

(62) асосида иссиқлик сиғимининг топишда (65) дан фойдаланамиз.

Бунда:

$$\frac{\partial < \varepsilon >}{\partial T} = \frac{\partial < \varepsilon >}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} \cdot \frac{d\beta}{dT}; \quad x = \beta\hbar\omega; \quad \beta = \frac{1}{kT} \tag{66}$$

$$\frac{\partial < \varepsilon >}{\partial x} = \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}\right) = -Z^2\hbar\omega; \tag{67}$$

бунда $1/Z = e^{x/2} - e^{-x/2}$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = \hbar\omega, \ \frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{k}{(kT)^2} \tag{68}$$

(66) га (67) ва (68) ни қўйиб, битта осцилляторга тўғри келган иссиқлик сиғим учун

$$\frac{\partial < \varepsilon >}{\partial T} = k(xZ)^2 \tag{69}$$

ифодани топамиз.

(69) ни (62) га қўйиб, қаттиқ жисм иссиқлик сиғими учун

$$C = 3Nk(xZ)^2 \tag{70}$$

Эйнштейн формуласини оламиз. *Бунда* $x = \hbar\omega / kT = \frac{T_э}{T}$; $T_э = \hbar\omega / k$; $T_э$ *ни ҳарактеристик температура дейилади.*

Масала 2.1. Эйнштейн назариясидаги $(xZ)^2$ ни юқори температура $(T_э / T = x << 1)$ учун x^2 гача аниқлик билан ифодаси топинг.

Ечиш.

$$(xZ)^2 = \frac{x^2}{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2} = \frac{x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \tag{1}$$

Бунда

$$e^x = \sum{}_m \frac{x^n}{n!}; e^{-x} = \sum (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Булардан фойдаланиб, (1) нинг махражини ёзамиз:

$$e^x + e^{-x} - 2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - ... - 2 \approx$$

$$\approx 2\left[\frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{4!}\right] = x^2\left[1 + \frac{x^2}{12}\right] \tag{2}$$

Демак,

$$(xZ)^2 = \frac{x^2}{x^2\left(1 + \frac{x^2}{12} + \cdots\right)} \approx 1 - \frac{x^2}{12}; \; T >> T_E \tag{3}$$

а) классик ҳол $x << 1$, яъни юқори температурали ҳол $kT >> \hbar\omega$; $T >> T_э$. бу ҳолда Z ифодасидаги экспонентани даражалари бўйича қаторга ёйиб, биринчи иккита ҳад билан чегараланиш (чекланиш) етарли:

$$\frac{1}{Z} = e^{x/2} - e^{-x/2} \approx 1 + \frac{x}{2} - 1 + \frac{x}{2} \approx x$$

Демак, (70) ифодадан

$$C_k \approx 3Nk$$

Дюлонг – Пти қонуни келиб чиқади.

б) квант ҳол $x >> 1$. Бу ҳолда $kT << \hbar\omega$; $T << T_э$, яъни температура паст, дискретлик омили (факти) назарда тутилган ҳолда,

$$\frac{1}{Z} = e^{x/2} - e^{-x/2} \approx e^{x/2}$$

Бу ифодани (70) га қўйиб, паст температуралардаги кристаллнинг иссиқлик сиғими учун

$$C_{kB} \approx 3Nkx^2 e^{-x} \qquad (71)$$

ифодани оламиз. Бунда $T \to 0 (x \to \infty)$ бўлганда, $C(T)$ температурага боғлиқ бўлиб, у нолга интилади. (2.7-расмга қаранг). Эйнштейн формуласи (71) паст температуралардаги иссиқлик сиғимининг температурага боғлиқ эканлигини тавсифласа-да аммо миқдорий томонидан эксперемент билан солиштирганда тафовут (фарқ) борлиги аниқланди (2.7-расм). Шу сабабли Эйнштейн 1906 йилда яратган назарияни такомиллаштириш лозим бўлиб қолди.

7 - §. Иссиқлик сиғимнинг Дебай назарияси

Эйнштей қараган моделда қаттиқ жисмнинг ҳар бир атоми бир хил частота билан тебранади. Шу сабабли, $K(xZ)^2$ ни осуилляторлар сони $3N$ кўпайтириб иссиқлик сиғимнинг Эйнштейн формуласи аниқланган эди.

Агар ҳар бир атом (ёки осциллятор) ўзининг ҳусусий частотаси ω_i билан тебранса, у ҳолда (70) дан $k[x(\omega)Z(\omega)]^2$ ни $3N$ га кўпайтирш ўрнига $3N$ ҳадларни йиғиштириш зарур бўлади, яъни

$$C = \sum_{i=1}^{3N} C(\omega i) = k\sum_{i=1}^{3N} [x(\omega i)Z(\omega i)]^2 \qquad (72)$$

Бу ифодани ихчамлаб, амалда фойдаланиладиган содда кўринишга келтириш учун йиғиндини интеграл билан алмаштиралади.

Бунинг учун Дебай моделида кристаллни узлуксиз (яхлит) муҳит деб қараб, унда эластик тўлқинлар тарқаляпти дейилади.

Бу иборани бошқача тушунтириш мумкин: Табиий тебрангичлар (атомларнинг) табиий координаталар орқали ёзилган ҳаракат тенгламаларидан нормал координаталар орқали ёзилган тенгламаларга ўтилса, (маълум алмаштиришлар орқали) ҳар бир нормал координата тенгламаси чизиқли гармоник осциллятор ҳараат тенгламасидан иборат бўлади, яъни атомларнинг табиий координаталардан нормал координаталарга ўтилганда атомларнинг ҳаракат тенгламалари $3N$ та осцилляторларнинг тенгламаларидан иборат бўлиб қолади.

Осцилляторнинг энергияси

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1\,|\,2)$$

бўлиб, унинг ўртача қиймати $< \varepsilon >= \frac{\hbar\omega}{2} \cdot cth\frac{\hbar\omega}{2kT}$ ифодадан иборат. Бунда ω - эластик тўлқин – товуш тўлқинининг частотаси $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ энергиялар эса тўлқини квантлари – фононларнинг энергиялари (худди электромагнит тўлқинининг квантлари – фотонлар бўлгани каби).

Энди асосий масала ω, $\omega + d\omega$ интервалдаги ҳолатлар сони – осцилляторлар сони $g(\omega)d\omega$ ни аниқлашдан иборат. Берилган частота қийматига

$$C(\omega) = k[x(\omega)Z(\omega)]^2$$

иссиқлик сиғим мос келгани учун ω, $\omega + d\omega$ частота интервалига тўғри келган қаттиқ жисмнинг иссиқлик сиғими

$$C(\omega)g(\omega)d\omega = k(xZ)^2 g(\omega)d\omega \tag{73}$$

дан иборат. Агар $(0, \omega_D)$ итервалга тўғри иссиқлик сиғимни аниқламоқчи бўлсак, (73) ни шу интервалда интеграллаш лозим бўлади, яъни

$$C = \int_0^{\omega_D} C(\omega)g(\omega)d\omega = k\int_0^{\omega_D} (xZ)^2 g(\omega)d\omega \tag{74}$$

Энди $g(\omega)d\omega$ ни аниқлайлик. Кристалл қаттиқ жисмда кўндаланг ва бўйлама тўлқинлар тарқалади. Уларнинг ҳар бирига ω, $\omega + d\omega$ интервалга мос келган ҳолатлар сонлари (осцилляторлар сони) $\left(2 \cdot \frac{\omega^2}{2\pi^2 \nu_S^3} + \frac{\omega^2}{2\pi^2 \nu_l^3}\right)d\omega$ йиғиндидан иборатдир. (Бу ҳолатлар сонини ҳисоблаш Планк формуласини исбот қилишда ҳисоблангандай бўлади. Фақат бунда фононлар тезликлари ν_S ва ν_l лар олинган).

Бунда ν_S ва ν_l мос равишда кўндаланг ва бўйлама тўлқинлар тезликлари, биринчи ҳадда «2» коэффициент кўндаланг тўлқиннинг 2 та қутбланиши туфайли киритилди. Демак,

$$g(\omega)d\omega = \left(2 \cdot \frac{\omega^2}{2\pi^2 \nu_S^3} + \frac{\omega^2}{2\pi^2 \nu_l^3}\right)d\omega = \frac{3\omega^2}{2\pi^2 \nu^3}\, d\omega \tag{75}$$

Бунда

$$\frac{3}{\nu^3} = \frac{2}{\nu_S^3} + \frac{1}{\nu_l^3} \tag{76}$$

белгилаш киритилди. Умумий ҳолда тезликлар ν_S ва ν_l частота ω га боғлиқ: $\nu_S(\omega)$, $\nu_l(\omega)$ ва демак, ν^3 ҳам частотага боғиқ яъни дисперсия ҳодисаси мавжуд. Аммо бу дисперсия ҳодисаси эътиборга олинмаса, ν^3 ни интеграл ишораси остидан ташқарига чақириш мумкин. Бу ҳолда (74) ни

$$C = \frac{3k}{2\pi^2\nu^3}\int_0^{\omega_D}(xZ)^2\omega^2 d\omega \tag{77}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда интеграл юқори чегараси (Дебай частотаси ω_D) аниқланиши лозим. Бунинг учун $x = \frac{\hbar\omega}{kT} << 1$ бўлганда, яъни температура етарли даражада юқори бўлганда, иссиқлик сиғим C Дюлонг – Пти қонунига асосан $3Nk$ га тенг бўлади, яъни

$$C = k\int_0^{\omega_D}(xZ)^2 g(\omega)d\omega \approx 3Nk$$

Бу ҳолда $xZ \approx 1$ эканлигидан

$$\int_0^{\omega_D}(xZ)^2 g(\omega)d\omega \approx \int_0^{\omega_D} g(\omega)d\omega = 3N \tag{78}$$

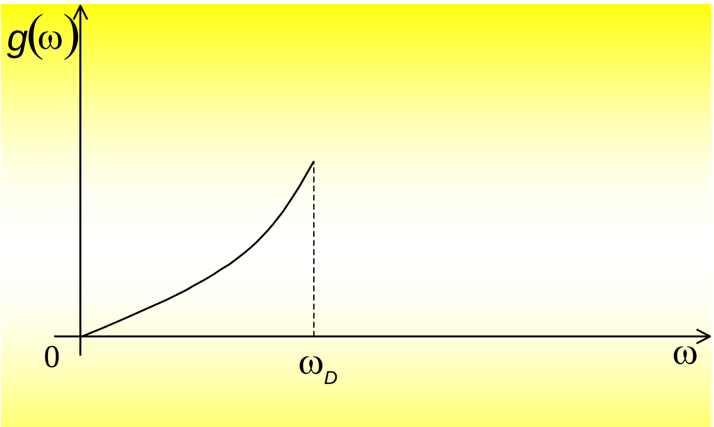
Демак, *ҳолатлар «йиғиндиси» осцилляторлар йиғиндисига тенг. (78) ни Дебай шарти дейилади.* $g(\omega)$ нинг (75) дан қийматини (78) га қўйиб оламиз

$$\frac{3}{2\pi^2\nu^3}\int_0^{\omega_D}\omega^2 d\omega = \frac{\omega_D^3}{2\pi^2\nu^3} = 3N$$

Бундан номаълум ω_D ни топамиз:

$$\omega_D^3 = 6\pi^2 N\nu^3 \tag{79}$$

Ҳолатлар зичлиги $g(\omega)$ нинг (75) ифодасини ω_D орқали қуйидагича ёзамиз (2.8 расм):



2.8- расм.

$$g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{9N\omega^2}{\omega_D^3} & \omega \le \omega_D \\ 0 & \omega > \omega_D \end{cases} \qquad (80)$$

$T_D = \dfrac{\hbar\omega_D}{k}$ *ни Дебай температураси дейилади.*

Бирлик ҳажмдаги ички энергия U нинг ифодасини ёзайлик:

$$U = \int_0^{\omega_D} \langle\varepsilon\rangle g(\omega) d\omega = \frac{9N}{\omega_D^3}\int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega}{e^x - 1}\omega^2 d\omega_D = \frac{9Nk^4T^4}{\omega_D^3\hbar^3}\int_0^{x_D}\frac{x^3dx}{e^x - 1} = \frac{9NkT}{x_D^3}\int_0^{x_D}\frac{x^3dx}{e^x - 1}$$

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^{\eta}\frac{x^3dx}{e^x - 1} \qquad (81)$$

бунда

$$x_D = \hbar\omega_D / kT = T_D / T \equiv \eta.$$

$D(\eta)$ *ни Дебай функцияси дейилади.* Демак, кристаллнинг ички энергияси учун

$$U = 3NkTD(\eta) \qquad (82)$$

ифодани оламиз. Бу (82) ифодадан крситаллнинг фонон модели асосидаги иссиқлик сиғим ифодасини оламиз:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3NkD(\eta) + 3nKt\,\frac{\partial D}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial T} \tag{83}$$

1. Юқори температурали ҳолни қарайлик. Бунда $T >> T_D\ (x << 1)$ шарт бажарилсин.

Бу ҳолда қуйидаги ёйишдан фойдаланамиз (қ. Масала 2.2)

$$\frac{x^3}{e^x - 1} = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{12} - \cdots \tag{84}$$

Бу ҳолда

$$\begin{aligned} D(\eta) &= \frac{3}{\eta}\int_0^\eta \left[x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{12}\right]dx = \frac{3}{\eta^3}\left[\frac{\eta^3}{3} - \frac{1}{8}\eta^4 + \frac{1}{60}\eta^5 - \ldots\right] = \\ &= 1 - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{20}\eta^2 - \cdots \end{aligned} \tag{85}$$

Демак, бу ҳолда

$$U = 3NkT\left[1 - \frac{3T_D}{8T} + \frac{1}{20}\left(\frac{T_D}{T}\right) - \cdots\right] \tag{86}$$

Бундан

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3Nk\left[1 - \frac{1}{20}\left(\frac{T_D}{T}\right)^2 + \cdots\right] \tag{87}$$

2. Паст температурали ҳолни қарайлик. Бунда $T_D >> T$ шарт бажарилсин. Бу $\eta \to \infty$ ҳолда

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^\eta \frac{3xdx}{e^x - 1} = \frac{3}{\eta^3}\xi(4)\Gamma(4) = \frac{3}{\eta^3}\frac{\pi^4}{90}\cdot 3! = \frac{\eta^4}{5\eta^3}$$

$$D(\infty) = \frac{\eta^4}{5\eta^3} \tag{88}$$

Демак,

$$U = 3NkTD(\infty) = 3NkT\frac{\pi^4}{5\eta^3} = \frac{3NkT^4\pi^4}{5T_D^3} \tag{89}$$

Бунда,

$$C=\frac{\partial U}{\partial N}=\frac{12\pi^4 Nk}{5T_D^3}T^3=\frac{12\pi^4 Nk}{5}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \qquad (90)$$

(90) ифода кристалл қаттиқ жисм иссиқлик сиғими учун (1912 йилда олинган) Дебай қонунидир.

Изоҳ. Иссиқлик сиғими ифодаси (77) дан $T \ll T_D$ бўлганда Дебай қонунини бевосита олиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам

$$C \approx \frac{3k}{2\pi^2 \nu^3}\int_0^{wD}(xZ)^2\omega^2 d\omega = 9Nk\left(\frac{T}{T_D}\right)^3\int_0^{x_D} Z^2x^4dx = 3Nk\frac{3}{\eta^3}\int_0^{\eta} Z^2x^4dx \qquad (91)$$

Бунда интеграл $x \gg 1$ бўлганда

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} Z^2x^4dx = \int_0^{\infty}\frac{x^4e^xdx}{(e^x-1)^2} = -\frac{x^4}{e^x-1}\Bigg|_0^{\infty} + 4\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1} = \\ &= 4\cdot\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1} = 4\xi(4)\Gamma(4) = \frac{4\pi^4}{15} \end{aligned} \qquad (92)$$

эканлигидан фойдаланиб, яна Дебай қонуни

$$C=\frac{12\pi^4 Nk}{5}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3$$

олинади.

Интеграл учун

$$\int_0^{\infty}\frac{x^Se^xdx}{(e^x-1)^2} = S!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = S!\,\xi(S) = 3!\,\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{15}$$

ифода олинади; бу ерда $\xi(S)$ - зета функциянинг қийматлари жадвалда берилади.

$$\xi\left(\frac{3}{2}\right)=2{,}612;\quad \xi(2)=\frac{\pi^2}{6};\quad \xi\left(\frac{5}{2}\right)=1{,}341;\quad \xi(3)=1{,}202;\quad \xi(4)=\frac{\pi^4}{90};$$

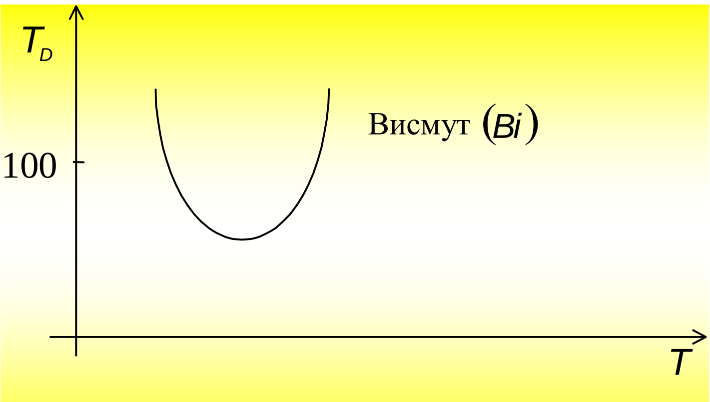
$$\xi(5)=1{,}037;\quad \xi(6)=\frac{\pi^6}{945}$$

Бир неча қаттиқ жисмларнинг Дебай температураси T_D ни қуйидаги жадвалда келтирамиз.

Қаттиқ жисмларнинг Дебай температураси. Жадвал.

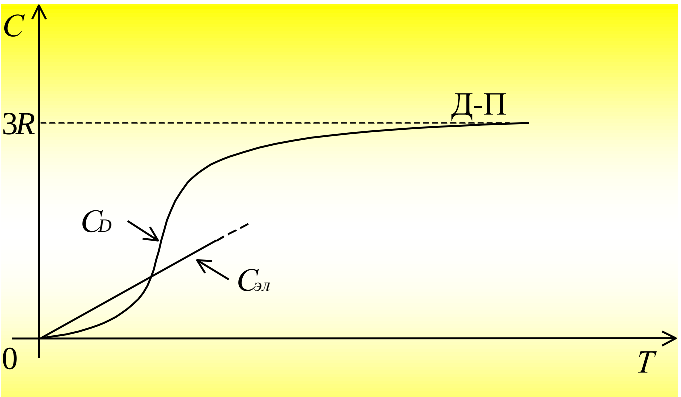
Кристалл	Температура $T_D^0 K$
Қўрғошин	88
Йод	106
Бензол	150
Калий	100
Натрий	172
Ош тузи	281
Мис	315
Темир	453
Бериллей	1000
Олмос	1860

Шундай қилиб, Дебай қонунига кўра $T \to 0$ бўлганда иссиқлик сиғим $C \sim T^3$ қонун бўйича нолга интилади. Паст температураларда экспериментда шундай қонуният кузатилади.



2.9-расм.

Аммо бир қатор ҳолларда, Дебай температураси T_D температурага боғлиқ бўлгани учун (2.9-расм), иссиқлик сиғимнинг температурага боғлиқлиги Дебай қонунидан четланади. Бунинг сабаби шуки, ўзининг реал кристалл панжаларига эга бўлган реал кристалл узлуксиз (яхлит) муҳит (континуум) билан алмаштирилиши ва унинг учун максимум частота ω_D қабул қилинишидир. Бундай алмаштириш нисбатан кичик частоталар (катта тўлқин узунликлар) учун яхши натижа беради, чунки бу ҳолда бундай тўлқин учун кристаллнинг атом тузилиши унчалик катта аҳамиятга эга эмас. Частота ортиши билан кристаллнинг структураси (атомлараро масофа) роль ўйнай бошлайди ва демак, иссиқлик сиғимининг температурага боғлиқлиги Дебай қонунидан четлана бошлайди. 1^0K атрофида тажриба натижаларининг Дебай қонунидан четланиши кутатилади; бу соҳада кристаллнинг электрон структураси (электронлар системаси иссиқлик сиғими) фонон структурасидан устунлик қилиши сабаблидир (2.10-расм).



2.10-расм.

Масала 2.2. Дебай фунукциясидаги

$$\frac{x^3}{e^x - 1} = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{12}$$

ёйилмани юқори температурада ўринли эканлигини исбот қилинг.

Ечиш. Ёрдамчи функция

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \tag{1}$$

киритиб, уни x=0 атрофида Тейлор қаторига ёяйлик:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \ldots \tag{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2} \tag{3}$$

$$f''(x) - \frac{e^x(1-x) - e^x}{(e^x - 1)^2} - \frac{2\left[e^{2x}(1-x) - e^x\right]}{(e^x - 1)^3} \tag{4}$$

$$e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \tag{5}$$

$$\frac{\lim}{x \to 0} f(x) = \frac{\lim}{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{\lim}{x \to 0} \frac{1}{e^x} = 1 \tag{6}$$

$$\frac{f'(x)}{x \to 0} = \frac{e^x(1-x) - 1}{(e^x - 1)^2} \to \frac{e^x(1-x) - e^x}{2(e^x - 1)^x} = \frac{-x}{2(e^x - 1)} \to \frac{-1}{2e^x} = -\frac{1}{2} \tag{7}$$

$$\frac{f''(x)}{x \to 0} = \frac{1}{(e^x - 1)^3}(-xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2xe^{2x} + 2e^x) =$$

$$\frac{1}{(e^x - 1)^3}(xe^{2x} + xe^x - 2e^{2x} + 2e^x) \to$$

$$\to \frac{e^{2x} + 2xe^{2x} + e^x + xe^X - 4^{2x}e + 2e^x}{3(e^x - 1)^2 e^x} \to$$

$$\to \frac{-3e^x + 2e^x + 2xe^x + 1}{6(e^x - 1)e^x} \to \frac{-1e^x + 2xe^x + 2e^x}{6e^x(e^x - 1) + 6e^{2x}} \to \frac{1}{6} \tag{8}$$

Демак, (6), (7) ва (8) ни (2) га қийиб топамиз.

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} \ldots \tag{9}$$

(9) ни x^2 га кўпайтириб, асосий матндаги ёйилма (84) ни оламиз, яъни

$$x^2 f(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12}$$

Масала 2.3. Дебай моделига асосан кристаллнинг ички энергияси U ва иссиқлик сиғими С қуйидаги ифодалар билан аниқланади:

$$U = 3NkTD(\eta), \tag{1}$$

$$U = 3NkD_C(\eta), \tag{2}$$

буларда

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^{\eta}\frac{x^3dx}{e^x-1} \tag{3}$$

$$Dc(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^{\eta}Z^2x^4dx = \frac{3}{\eta^3}\int_0^{\eta}\frac{x^4e^x\,dx}{(e^x-1)^2} \tag{5}$$

Кристаллнинг а) юқори температура $T >> T_D$ ва б) паст температура $T << T_D$ учун Дебай функциялари $D(\eta)$ва $Dc(\eta)$ ни аниқланг. Олинган натижаларни изоҳланг.

Ечиш. а) $T >> T_D$ ёки $x << 1$ ҳол. Бу ҳолда 2.2 масаладаги

$$\frac{x}{e^ч-1} \approx 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12} \tag{5}$$

ифодадан фойдаланиб, $D(\eta)$ ва $D_c(\eta)$ ни топамиз:

$$D(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^{\eta}\left(x^2-\frac{x^3}{x}+\frac{x^4}{12}\right)dx = 1-\frac{3}{8}\eta+\frac{1}{20}\eta^2 \tag{6}$$

$$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^{\eta}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\,dx = \frac{3}{\eta^3}\left[-\frac{x^4}{e^x-1}\Bigg|_0^{\eta} + 4\int_0^{\eta}\frac{x^3dx}{e^x-1}\right] =$$

$$= -\frac{3\eta}{e^{\eta}-1}+\frac{3}{\eta^3}\left(x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{12}\right)_{x=0}+4D(\eta) =$$

$$= -\frac{3\eta}{e^{\eta}-1}+4(1-\frac{3}{8}+\frac{1}{20}\eta^2) \approx -\frac{3\eta}{\eta}+4-\frac{3}{2}\eta+\frac{1}{5}\eta^2 =$$

$$= 1-\frac{3}{2}\eta+\frac{1}{5}\eta^2 \tag{7}$$

Демак, юқори температураларда

$$U = 3NkT\left(1 - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{20}\eta^2\right), \quad T >> T_D \tag{8}$$

$$C = 3Nk(1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{5}\eta^2), T >> T_D \tag{9}$$

Изоҳ. 1. Агар

$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^\eta x^2 E(x) да$ да $E(x) = \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2}{c^x + e^{-x} - 2}$ ни $e^x = \sum_n x^n / n!$

$$e^x = \sum_n (-1)^n x^n / n!$$

дан фойдаланиб, тақрибий ифодаси

$$E(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{12}} \approx 1 - \frac{x^2}{12} \tag{10}$$

олиниши мумкин. Бу ҳолда $D_c(\eta)_n$ нинг ифодаси

$$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^\eta x^2\left(1 - \frac{x^2}{12}\right)dx = 1 - \frac{1}{20}\eta^2 \tag{11}$$

бўлади. Бу ҳолда

$$C = 3Nk\left(1 - \frac{1}{20}\eta^2\right) \tag{12}$$

Ҳар хил тақрибийликлардан фойдаланилгани учун *C* нинг (9) ва (12) натижалари ҳар хил. Аммо (9)натижа аниқроқдир.

Изоҳ 2. Ички энергия *U* ва иссиқлик сиғим *C* нинг (8) (9) ва (12) ифодаларидан кўринадики, юқори температурада $\left(x << 1, \ T >> T_D\right)$ Дебай назарияси классик физика натижаларига, яъни осцилляторнинг ўртача энергияси *kT* ва иссиқлик сиғими 3*Nk* га (Дюлонг–Пти қонунига) олиб келади.

б) Паст температураларда $\left(T << T_D >> 1\right)$ $D(\eta)$ ва $D_c(\eta)$ ифодаларни аниқлайлик.

$$D_c(\eta) = \frac{3}{\eta^3}\int_0^{\eta}\frac{x^3}{e^x - 1}dx$$

даги интеграл ифодани ёзайлик

$$\int_0^{\eta}\frac{x^3dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x - 1} - \int_{\eta}^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x - 1} \tag{13}$$

(13) да

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \tag{14}$$

Паст температурада x>>1 бўлгани учун $e^x >> 1$ шу сабабли

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x - 1} = \int_{\eta}^{\infty}x^3e^{-x}dx = e^{-n}(\eta^3 + 3\eta^2 + 6\eta + 6) \approx e^{-\eta}\eta^3 \tag{15}$$

Демак,

$$D(\eta) \approx \frac{3}{\eta^3}\left[\frac{\pi^4}{15} - \eta^3 e^{-n}\right] = \frac{\pi^4}{5\eta^3} - 3e^{-n} >> 1, \quad T << T_D \tag{16}$$

$D_e(\eta)$ ни қарайлик:

$$\int_0^{\eta}\frac{x^3e^xdx}{(e^x - 1)^2} = \int_0^{\infty}\frac{x^4e^xdx}{(e^x - 1)^2} - \int_{\eta}^{\infty}\frac{x^4e^xdx}{(e^x - 1)^2} \tag{17}$$

Бунда

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3e^xdx}{(e^x - 1)^2} = -\frac{x^4}{e^x - 1}\Bigg|_0^{\infty} + 4\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x - 1} = 0 + 4\cdot\frac{\pi^4}{15} = \frac{4\pi^4}{15} \tag{18}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3e^xdx}{e^{2ч}} = \int_{\eta}^{\infty}x^4e^{-x}dx \approx \eta^4e^{-\eta} \tag{19}$$

Демак,

$$Dc(\eta) = \frac{4\pi^4}{5\pi^3} - 3\eta e^{-\eta}, \quad T << T_D \tag{20}$$

Паст температураларда ($T<<T_D$) Дебай моделига асосан кристаллнинг ички энергияси U ва иссиқлик сиғими C қуйидагича аниқланади:

$$U = 3NkT\left[\frac{\pi^4}{5}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 - 3e^{-\frac{TD}{T}}\right], \quad T << T_D \tag{21}$$

$$C = 3Nk\left[\frac{4\pi^4}{5}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 - 3\frac{T_D}{T}e^{-\frac{TD}{T}}\right], \quad T << T_D \tag{22}$$

Изоҳ 3. Агар ичики энергиянинг температурага боғлиқлигига кристалл панжаларининг фақат тебранишигина сабаб деб қаралса, ички энергия U ва демак иссиқлик сиғим ифодалари ўринли бўлади.

Кристаллда фазавий ўтишлар, «эркин электронлар» ва бошқа омилларни эътиборга олинса, бу омилларнинг юқоридаги ифодларга ҳиссаларини алоҳида қараш лозим бўлади.

Изоҳ 4. Иссиқлик сиғимни тажрибада ўлчаш ёрдамида ва

$$C_\nu = 3NkD_c(\eta)$$

формула асосида Дебай температураси T_D ни аниқлаш мумкин. Дебай температураси T_D ни кристаллдаги бўйлама ва кўндаланг товушларнинг тарқалиши тезликлари ν_l ва ν_s ни ўлчаш орқали

$$\omega_D^3 = 6\pi^2 N\bar{\nu}^3$$

формула асосида аниқлаш мумкин; бунда

$$T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}; \ \frac{3}{\nu^3} = \frac{2}{\nu_S^3} + \frac{1}{\nu_l^3}$$

Ҳар хил метод билан олинган Дебай температураларини бир-бири билан таққослаб, Дебай назарияси кристаллни қанчалик аниқ тавсифлаши ҳақида маълумот олиш мумкин. Қуйидаги жадвалда икки хил метод билан олинган Дебай температураларини келтирамиз.

Элемент	**T_D**	
	Товуш тезлиги	**Иссиқлик сиғими**
Al	**399**	**394**
Fe	**467**	**420**
Cu	**329**	**315**
Ag	**212**	**215**

Жадвалдан кўринадики, икки хил метод билан олинган Дебай температуралари орасидаги фарқ 5% ва бундан камдир.

Масалан 2.4. Фотонлар ва фононлар газлари учун химик потенциал μ нолга тенг эканлигини кўрсатинг.

Ечиш.

а) Идиш ичидаги фотонлар сони доимий эмас, яъни фотонлар тўла сони фиксацияланмаган (аниқ бир қийматни қабул қилмайди) $dN \neq 0$.

Бунинг сабаби: идиш ичидаги фотонлар идиш деворлари томонидан нурланиши ҳамда ютилиб туриши мумкин. Шу сабабли, мувозанатли нурланишнинг (фотонлар газининг) термодинамикасида μdN ифода (dN ўзгарувчи бўлгани учун иштирок этиши мумкин эмас, акс ҳолда термодинамик параметрлар ўзгарувчан бўлиб қолади. Бу эса мувозанатли ҳолат таърифига зиддир. μdN ифода иштирок этмаслиги учун $\mu = 0$ бўлишли талаб этилади (ёки бошқача айтганда, шундай хулоса келиб чиқади).

б) фотонлар каби фононлар тўла сони доимий эмас. Улар кристалл панжара томонидан нурланиб, ҳамда ютилиб туралди. Шу сабабли фононлар гази учун, система мувозанатли ҳолатда бўлганда $\mu = 0$ бўлишлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, фотонлар ва фононлар гази учун Бозе-Эйнштейн статистикаси

$$f(\varepsilon_i) = \langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_i) - 1} \tag{1}$$

ёки

$$f(\omega) = \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} \tag{2}$$

кўринишга эга бўлади; бунда $\varepsilon = \hbar\omega(n + 1/2), \beta = 1/kT$.

Масалан 2.5. Фотон газнинг ички энергияси *U*, босими *P* аниқлансин.

Ечиш. Идишдаги электромагнит тўлқинларни нормал тебранишлар суперпозицияси деб қараш мумкин. *i* ичи нормал тебранишнинг циклик частотаси ω_i ва квант сони n_i бўлсин. Нормал тебранишни эса квант осцилятор деб қаралиши мумкин. Бу ҳолда квант осцилляторнинг энергияси ε_i квант механикадан маълумки,

$$\varepsilon_i = \hbar\omega(n + 1/2), \tag{1}$$

ифода билан аниқланади. Квант идеал газ-фотон газнинг энергияси *E*

$$E(n_1, n_2, \ldots n_i \ldots) = \sum_i \hbar\omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \tag{2}$$

ифода билан аниқланади; бунда n_i энергияси $\hbar\omega_i$ га тенг бўлган фотонлар сони.

Ҳар 3 та нормал тебраниш фазодаги идеал квант тебрангич туфайли ҳосил бўлаётган деб қаралиши мумкин. Бундай тебрангичлар (идеал квант зарралар) сони N та бўлсин. Бу ҳолда бундай N та системанинг гамильтонианi квант механикада $3N$ та (классик механикада $6N$ та) ўзгарувчиларга боғлиқ. Демак,

$$\nu = 3N \tag{3}$$

Бундай системанинг ($3N$ та осцилляторлар системаси) ички энергияси U бизга маълум

$$U = V_{\sigma}T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} = 7{,}569 \cdot 10^{-15} \, эрг^{-3} град^{-4} \tag{4}$$

σ - Стефан – Больцман доимийси. Демак,

$$\theta = \frac{U}{\nu} = \frac{U}{3N} = \frac{u \cdot V}{3N} \tag{5}$$

Идеал газ учун

$$P = n\theta \tag{6}$$

ҳолат тенгламаси ўринли; $n = \dfrac{N}{V}$ Квант идеал зарраларнинг босими учун

$$P = \frac{NuV}{V3N} = \frac{u}{3} \tag{7}$$

ифодани оламиз; u электромагнит тўлқинларининг ички энергияси зичлиги.

Масала 2.6. Қаттиқ жисм N та ячейкалар ва ҳар бир ячейкада r та атом бўлсин. Элементар ячейка регуляр қайтарилса, бу идеал кристаллни ташкил этади. Ячейкадаги ҳар бир атомни эриш температурасидан узоқдаги температурада 3 та чизиқли гармоник осциллятор деб тасаввур этиш мумкин. Бу ҳолда кристаллни $3Nr$ та осцилляторлардан ва уларга мос 3*Nr* эркинлик даражаларидан иборат деб қараш мумкин.

Ҳар бир эркинлик даражасига (осцилляторга) $\vec{k}$ тўлқин векторли ва *s* қутбланишли тебраниш (мода) мос келади; $\vec{k}$ тўлқин вектор *N* қийматларни қабул қилиши, 3*r* та қийматларни *s* қабул қилиши мумкин.

1. Осцилляторнинг квант сони $n(\vec{k}, s)$ нинг ўртача қиймати <*n*> аниқлансин.

2. Идеал кристаллнинг ички энергияси *U* аниқлансин ва а) температура *T*=0 даги унинг қиймати таҳлил этилсин; б) $\vec{k}$ узлуксиз бўлгандаги ҳол учун *U* нинг қиймати аниқлансин.

Кўрсатма. *U* нинг ифодасидаги йиғиндини интеграл билан алмаштириш керак.

Ечиш. 1. Осциллятор квант сони *n* нинг ўртача қиймати, статистик физиканинг умумий методига асосан

$$< n >= \sum_{n=0}^{\infty} nf(\varepsilon_\pi), \tag{1}$$

бунда

$$f(\varepsilon_n) = \frac{1}{Z} e^{-\beta\varepsilon_n} \tag{2}$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta\varepsilon_\pi}, \beta = 1/kT \tag{3}$$

Осцилляторнинг энергияси ε_n, квант механикадан маълум

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2) \tag{4}$$

Демак,

$$< n >= \frac{1}{Z}\sum ne^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \tag{5}$$

бунда $x = \beta\hbar\omega = \hbar\omega / kT$.

$$Z_1 = \sum_n e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}} \tag{6}$$

(6) дан фойдаланиб, (5) ни ёзамиз:

$$< n > \frac{1\partial Z_L}{Z_1\partial\chi} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$$

Демак, ўртача квант сон

$$< n > \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{\hbar\omega / kT} - 1} \tag{7}$$

2. 3Nr та осцилляторларнинг умумий энергияси осциллятор энергияларининг йиғиндисидан иборат:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\vec{k}is} \varepsilon_n = \sum \hbar\omega(\vec{k}, s)\left[n(\vec{k}, s) + 1/2\right] = \\ &= \sum_{\vec{k}s} \frac{1}{2}\hbar\omega(\vec{k}, s) + \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega(\vec{k}, s) n(\vec{k}, s) = E_0 + E, \end{aligned} \tag{8}$$

бунда

$$E_0 = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k},s} \hbar\omega(\vec{k}, s) \tag{9}$$

$$E = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega n(\vec{k}, \bar{\bar{S}}) = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega < n > \tag{10}$$

ёки

$$\begin{aligned} E &= kT\sum_{\vec{k},s} \frac{x}{e^x - 1} = \frac{V}{(2\pi)^3} kT \sum_s \int \frac{x}{e^x - 1} dk_x dk_y dk_z = \\ &= \frac{VkT}{(2\pi)^3} \sum_s \int \frac{x}{e^x - 1} k^2 dk d\varphi \cos 0 d0 \end{aligned} \tag{11}$$

Бунда ω частота $\vec{k}$, $\vec{s}$ га, яъни $k, 0, \varphi, s$ ўзгарувчиларга боғлиқ; $V/(2\pi)^3$ катталик $\vec{k}$, фазодаги бирлик ҳажмдаги тўлқин сон.

Масала 2.7. Частота ω билан тўлқин вектори $\vec{k}$, орасидаги дисперсия муносабати

$$\omega = a(s,0,\varphi)k^t, \quad t > 0$$

бўлганда иссиқлик сиғим G_v аниқлансин.

Ечиш.

$$x = \beta\hbar\omega = \beta\hbar a k^t; \; k^t = \frac{x}{\beta\hbar a}; \; k^2 dk = \left(\frac{kT}{\hbar a}\right)^{3/t} x^{3/t-1}\left(\frac{1}{t}\right)dx$$

Дема,

$$E = \frac{kTV}{8\pi^3 t}\left(\frac{kT}{\hbar\alpha}\right)^{3/t}\sum_s \int \frac{d\Omega}{a^{3/t}} \int \frac{x^{3/t}dx}{e^x - 1}$$

Бундан

$$G_\nu = \frac{\partial E}{\partial T} = AT^{3/t} \tag{12}$$

қонуният келиб чиқади.

Изоҳ. Агар t=1 бўлса, (12) дан

$$G_\nu = AT^3$$

Дебай қонуни келиб чиқади.

III боб. Ферми – Дирак статистикасининг татбиқи

1-§. Кириш

Бизга маълумки, квант статистикасининг қўлланиш соҳасида

$$T \leq T^* = \alpha \frac{\hbar^2}{mk} n^{2/3} \qquad (1)$$

шарт бажарилади; системанинг квант хоссалари катта зичлик ва паст температураларда намоён бўлади.

Зарралар орасидаги ўртача масофа $r_0 \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ ва де Бройль тўлқин узунлигининг ўртачаси $\bar{\lambda} = h / \bar{p}$ва $\bar{p} \sim \sqrt{mkT}$ эканлигини назарда тутиб, (1) шартни бошқача тушунтириш ҳам мумкин. Зарраларнинг орасидаги ўртача масофа r де Бройль тўлқин узунлиги λ ёки ундан кичик бўлса, улар орасида одатдаги ўзаро таъсир кучидан ташқари квантовий корреляция мавжуд бўлади. Шу сабабли зарраларнинг ҳаракати махсус квант табиатга эга бўлади. Бу соҳада, албатта, квант статистикадан фойдаланиш зарур бўлади. Бошқача айтганда, температуранинг камайиши табиий равишда де Бройль тўлқин узунлигининг ортишига олиб борганлиги, шу сабабли зарраларда квант корреляция алмашув ўзаро таъсир намоён бўлиши на фақат алоҳида заррани квант механика қонуни асосида қарашга мажбур этади, балким зарралар системасини қарашни ҳам муҳим ўзгартиришга олиб келишини биз юқорида таъкидлаган эдик.

Бу соҳада муҳим рольни Паули принципи ўйнайди.

Маълумки, бу принципга кўра, бир ҳолатда биттадан ортиқ фермион бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли фермионлар системаси бозе-системадан муҳим фарқлидир. Бу фарқ системанинг айниш температурасидан паст бўлгандагина намоён бўлади. Бу ерда шуни яна таъкидлаш лозимки, айниш температураси $T^{*}\sim h^{2}$ бўлганлигидан, у (табиийки) квант тушунчадир ва Т$\leq T^{*}$ соҳада зарралар орасидаги ўртача масофа $r_0\sim\lambda$ эканлигидан Гейзенберг ноаниқлик принципи $r_0\vec{p}\sim h$ муҳим роль ўйнай бошлайди.

Табиатда (квант) айниган ферми системаларга металлардаги электронлар системаси, оқ митти юлдузлар, нейтрон юлдузлар мисол бўлади.

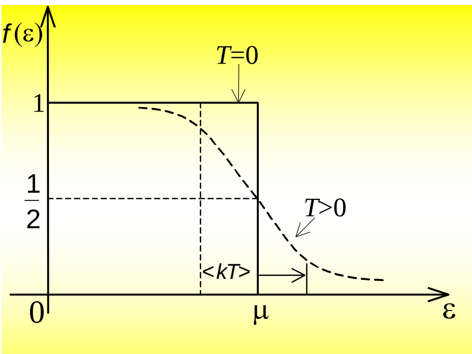
Яна шуни таъкидлаш лозимки, одатдаги газлар, суюқликларнинг айниш температураси шунчалик пастки, одатдаги шароитда улар классик статистик физика билан тўла тавсифлана берадилар.

Биз юқорида кўрдикки, Ферми тақсимоти қуйидагича:

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \qquad (2)$$

Бу функция $f(\varepsilon)$ температура $T\to 0(\beta=1/kT\to\infty)$ бўлганда «поғонали» функцияга айланади, яъни $\varepsilon<\mu$ бўлганда $f(\varepsilon)=1;\varepsilon\geq\mu$ бўлганда $f(\varepsilon)=0$ бўлади (қ. 3.1 расм).

Агар $T>0$ бўлса, «поғонали» функциянинг $\varepsilon=\mu$ даги қиймати атрофида kT соҳада Ферми тақсимот «емирилган» бўлади. У пунктр чизиқ билан 3.1. расмда кўрсатилган.



3.1-расм.

Бир зарравий ҳолатдаги энергия $\varepsilon_p \sim \frac{1}{V}$ бўлганлиги учун ҳажм V ортиши билан сатҳлар бир-бирига яқинлашиб, зичлашиб бораверади.

Ҳажм етарли даражада катта бўлганда, бир зарравий ҳолатларни узлуксиз деб қараб, ε, $\varepsilon \to d\varepsilon$ интервалдаги ҳолатлар сони учун $g(\varepsilon)d\varepsilon$ ифодани ёзишимиз мумкин; бунда g(ε) – ҳолатлар зичлиги. Бу узлуксиз ҳолда $g(\varepsilon)d\varepsilon$ ёрдамида система зарралари сони N ва энергияси E учун

$$N = \int f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon \tag{3}$$

$$E = \int \varepsilon f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon \tag{4}$$

ифодаларни ёзиш мумкин; бунда $f(\varepsilon)$ (2) ифода билан аниқланади.

1. Температура T=0K бўлаганда, $f(\varepsilon)=(1)$ ва энергия ε нинг қиймати $\mu = \mu_0$ гача ўзгаради. ε нинг энг кичик қиймати ε_0 (хусусий ҳолда $\varepsilon_0 = 0$) бўлса, (3) ва (4) ифодалар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$N = \int_{\varepsilon_0}^{\mu_0} g(\varepsilon)d\varepsilon \tag{5}$$

$$E = \int_{\varepsilon_0}^{\mu_0} \varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon, \tag{6}$$

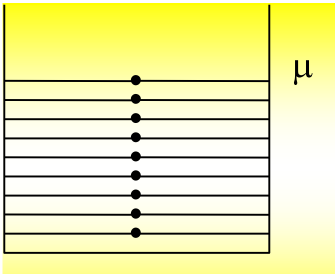
(5) ифодадан, агар ҳолатлар зичлиги g(ε) аниқланган бўлса, μ_0 ни, сўнг (6) дан тўла энергия E ни аниқлаш мумкин.

2. Агар T>$0K$ бўлса, μ ни ва энергия E ни аниқлаш учун (3) ва (4) дан фойдаланилади; бунда $f(\varepsilon) \neq 1$ ва у (2) билан аниқланади.

2-§. Қаттиқ жисмлардаги электронлар системаси

1. *Зоналар.* Аввал T=0K ($\beta \to \infty$) бўлган ҳолни қарайлик:

а) $\varepsilon < \mu$ бўлсин. Бу ҳолда (2) дан кўринадики $f(\varepsilon) = 1$ яъни $< ni >= 1$ Демак, $(0, \mu)$ интервалдаги энергия сатҳлари ҳаммаси биттадан фермионлар билан тўлган (банд) (3.2. расм).



3.2-расм

б) $\varepsilon > \mu$ бўлсин. Бу ҳолда $f(\varepsilon) = 0$ яъни, $< ni >= 0$ Демак, T=0K бўлганда $\varepsilon = \mu$ сатҳдан юқоридаги энергия сатҳлари бўш, унда фермионлар (электронлар) бўлмайди.

Ферми тақсимот поғонали графикдан иборат бўлади (3.1 расм).

2. Температура нолдан фарқли бўлсин, яъни *T>0K*. Бу ҳолда $\varepsilon = \mu$ бўлганда тақсимот функция $f = (\mu) = 1/2$ қийматни қабул қилади. (3.1 расм). Бу ҳолда $f(\varepsilon)$ силлиқ эгри чизиқдан иборат бўлади. Бошқача айтганда, $\varepsilon = \mu$ Ферми сатҳига яқин электронлар *T>0K* бўлганда юқоридаги бўш сатҳларга ўтади («буғланади»). *T=0K да тўлган сатҳларни валентли зона, ундан юқоридаги сатҳларни ўтказувчанлик зонаси дейилади.* Демак, *T*>0*K* да валентли зонадан ўтказувчанлик зонасига (маталларда) элетронлар ўтади.

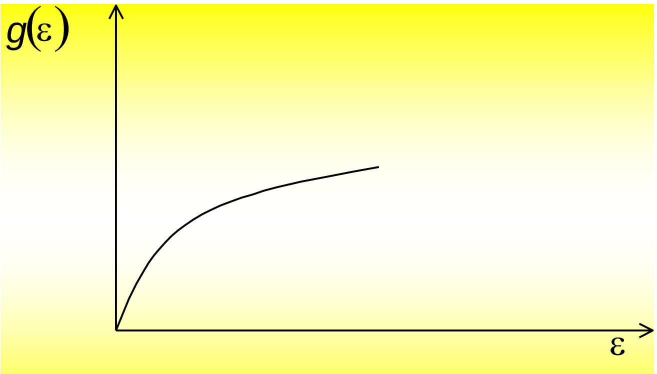
Бир зарравий ҳолатлар энергияси системанинг ҳажми *V* га (ёки L^3 га) тескари пропорционал, яъни E_i~1/*V* бўлгани учун система ҳажми ортиб борса (катталашса), энергия сатҳлари қуйиқлашиб (бир-бирига яқинлашиб) боради. Бу ҳолда $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ интервалдаги ҳолатлар сони $g(\varepsilon)d\varepsilon$ даги $g(\varepsilon)$ ни узлуксиз ўзгарувчан деб ҳисоблаш мумкин. Бир зарравий ҳолатлар учун

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3} \tag{7}$$

эканлиги бизга маълум (қ.10 – §, I боб), бунда $g(\varepsilon)$ – бир зарравий ҳолатлар зичлиги. Агар зарралар эркин ҳаракатланаётир деб ҳисобланса, $\varepsilon = p^2 / 2m$ ифодадан фойдаланиб

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = aV\varepsilon^{1/2}d\varepsilon, a = 2\pi(2m/h^2)^{3/2} \tag{8}$$

ифодани оламиз (3.3 расм)



3.3-расм

Бу ҳолда

$$N = \int f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon = aV\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \tag{9}$$

$$E = \int f(\varepsilon)g(\varepsilon)d\varepsilon = aV\int_{\varepsilon_0}^{\infty}\frac{\varepsilon^{3/2}d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \tag{10}$$

3-§. Абсолют ноль температурали ферми – газ

Эркин зарралар ферми – системасини қараш учун (9) ва (10) нинг *N/aV* ва *E/aV* ифодаларидаги

$$I_n = \int_{\varepsilon_0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \tag{11}$$

интегрални аниқлаш зарур. Бу интеграл T=0K да, бўлгани учун, қуйидаги

$$I_n = \int_0^{\mu_0} \varepsilon^n d\varepsilon$$

содда кўринишга келади. Аввал шу содда ҳолни кўрайлик. T=0K бўлсин. T=0K да ферми-газнинг термодинамик параметрларини аниқлайлик. ($\varepsilon_0 = 0$ бўлсин).

$$N = aV\int_0^{\mu} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2}{3} aV\mu_0^{3/2}; \mu_0 = \left(\frac{3N}{2aV}\right)^{2/3} \tag{12}$$

$$U_0 \equiv E = aV\int_0^{\mu} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{2}{5}\mu_0^{5/2} aV \tag{13}$$

(12) ва (13) дан

$$\frac{U_0}{N} = \frac{3}{5}\mu_0 \tag{14}$$

Бундан энергия зичлиги $u_0 = \dfrac{U_0}{V}$

$$u_0 = \frac{3}{5} \cdot \frac{N}{V}\mu_0 \tag{15}$$

ифода билан аниқланади.

Идеал газ ифодаси $P = \dfrac{2u}{3}$ дан фойдаланиб, *тўла айниган ферми – газ* босими P_0 ни аниқлаймиз

$$P_0 = \frac{2N}{5V}\mu_0 \tag{16}$$

Демак, босим P_0 зичлик $n=N/V$ га қуйидагича боғлиқ:

$$P \sim (N/V)^{5/3} = n^{5/3}$$

Температурага эса боғлиқ эмас! ($T=0^0K$ да).

Идеал классик газ учун $P=nkT$ эканлигини эслатамиз.

Шундай қилиб, T=0 да идеал ферми – газнинг босими нолдан фарқли бўлиб, электронлар учун баҳоланганда $P \sim (10^4 - 10^5)$ атом, атрофида бўлади.

Металлардаги электрон системанинг айниш температураси

$$T^* = \mu_0 / k = \varepsilon_F / k \sim 10^4 K$$

Демак, металлардаги электрон системани айниган газ деб, квант статистика асосида қараш зарур. 10^4K да жисм қаттиқ агрегат ҳолида қолмайди. Тўла айниган ферми-системанинг бошқа термодинамик параметрларни P_0, U_0, μ_0 асосида аниқлаш мумкин.

4-§. Паст температурали ферми – газ термодинамикаси

Паст температурадаги ферми-газнинг ички энергияси U ва зарраларнинг сони N ни аниқлайлик. Бунинг учун (11) даги I_n нинг тақрибий ифодаси

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^n d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \approx \frac{\mu^{n+1}}{n+1}[1+\frac{n(n+1)}{6}(\frac{\pi kT}{\mu})^2] \qquad (17)$$

дан фойдаланамиз, бунда $(\pi kT/\mu_0)^2$ гача аниқлик билан топилади.

$$I_{\frac{1}{2}} = \frac{N}{aV} = \frac{2}{3}\mu^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2\right] \qquad (18)$$

Агар T=0K бўлса, яна аввалги натижани оламиз

$$\mu = \mu_0 = (\frac{3}{2}\cdot\frac{N}{aV})^{2/3} \qquad (19)$$

(18) ва (19) дан

$$\mu_0^{3/2} = \mu^{3/2}[1+\frac{1}{8}(\frac{\pi kT}{\mu_0})^2] \qquad (20)$$

Кичик ҳадда μ ни μ_0 билан алмаштирилди. (20) дан

$$\mu_0^{3/2} = \mu^{3/2}[1-\frac{1}{8}(\frac{\pi kT}{\mu_0})^2] \tag{21}$$

$$\mu = \mu_0[1-\frac{1}{8}(\frac{\pi kT}{\mu_0})^2]^{\frac{2}{3}} \approx \mu_0\left[1-\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\frac{1}{12}\right] \tag{22}$$

$I_{3/2}$ ни ёзайлик:

$$I_{3/2} = \frac{U}{aV} = \frac{2}{5}\mu^{5/2}\left[1+\frac{5}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right] \tag{23}$$

(18) ва (23) ифодалардан ушбу нисбатни оламиз:

$$\frac{U}{N} = \frac{I_{\frac{3}{2}}}{I_{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}\mu\frac{1+\frac{5}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2}{1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2}$$

Бундан

$$U = \frac{3}{5}\mu N\frac{1+\frac{5}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2}{1+\frac{1}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2}$$

Ифодани оламиз. (21) дан фойдаланиб, қуйидаги тақрибий ифодани оламиз:

$$U = \frac{3}{5}N\mu_0\left[1-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}\frac{1+\frac{5}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2}{1+\frac{1}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2} \approx$$

$$\approx \frac{3}{5}N\mu_0\left[1-\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right]\left[1+\frac{5}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right]\left[1-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right] \approx \tag{24}$$

$$\approx \frac{3}{5}N\mu_0\left[1-\frac{1}{12}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right]\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right] \approx \frac{3}{5}N\mu_0\left[1+\frac{5}{12}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right] = b+\frac{a}{2}T^2$$

Бундан электрон газнинг иссиқлик сиғими $C_Э$ ни аниқлаймиз:

$$C_э = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)v = \frac{\pi^2 Nk}{2}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)$$

Ёки

$$C_э = aT \tag{25}$$

бунд

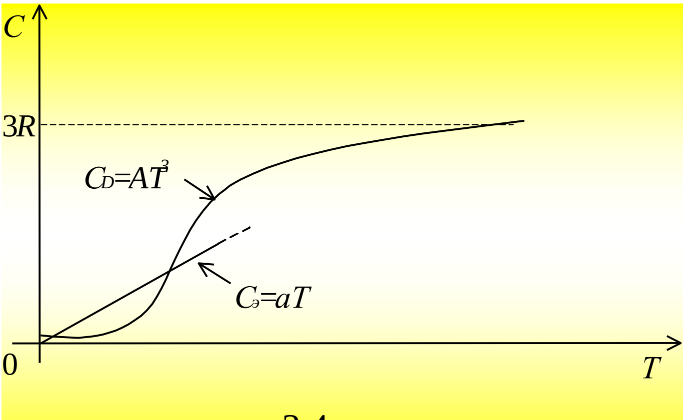
$$a = \frac{\pi^2 Nk^2}{2\mu_0}$$

температурага боғлиқ бўлмаган доимий катталик.

Электрон иссиқлик сиғим $C_Э$ жуда паст температурада чизиқли қонун $C_Э=T$ га бўйсунади. Бу эса тажрибадан олинган натижага мос келади. Жуда пси температурада кристалл қаттиқ жисмнинг тўла иссиқлик сиғими

$$C=aT+AT^3$$

ифода билан аниқланади; бунда $A = 12\pi^4 kN/5T^3$. Бу температурада электрон иссиқлик сиғими $C_Э$ фонон иссиқлик сиғимдан устунлик қилади (3.4 расм).



3.4 - расм.

Паст температурада электрон газнинг босими ва энтропиясини аниқлайлик.

$$P = \frac{2u}{3} = \frac{2N}{5V}\mu_0\left[1 + \frac{5}{12}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^2\right] \tag{26}$$

Бизга маълум

$$U_0 = \frac{3}{5} N\mu_0;\; P_0 = \frac{2}{3} N\mu_0$$

Булардан фойдаланиб, босим учун (паст температурада)

$$P = P_0 \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 \right] \qquad (27)$$

ифодани оламиз; бунда босим *P* температуранинг квадратига пропорционал.

Солиштирма энтропияни аниқлаймиз: энтропия *S* ни

$$S = \int_0^T (C_v \,/\, T) dT$$

ифодадан аниқлаш мумкин.

$$S = \frac{\pi^2 Nk}{2} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right) \qquad (28)$$

Эркин энергия *F* ни *F=U-ST* ифода орқали аниқлаймиз:

$$F = \frac{3}{5} N\mu_0 \left[1 - \frac{5}{12} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 \right]$$

Шундай қилиб, асосий темодинамик параметрларни абсолют ноль температурадаги Ферми сатҳи энергияси μ_0 орқали ифодаладик. Қолган термодинамик параметрларни эса шу аниқланган асосий термодинамик параметрлар орқали ифодалаш мумкин. Жумладан

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$$

Ёки идеал газ формуласи $PV = \dfrac{2}{3} U$ даги яна (26)

$$P = \frac{2N\mu_0}{5V} \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi kT}{\mu_0} \right)^2 \right]$$

ифода олинади.

Охирида квант механика ва квант статистика яратилган қадар иссиқлик сиғимга тегишли классик статистикадаги зиддиятга ва унинг квант статистикада ҳал этилишига қисқача тўхталайлик.

Биринчидан: металларда электр ўтказувчанлик, иссиқлик ўтказувчанликни эркин электронлар моделидан фойдаланиб, (массани эффектив масса билан алмаштириб) тушунтириш мумкин. Классик статистикадаги бу фикрга (моделга) асосан металларнинг иссиқлик сиғими изоляторларникидан тахминан 2 марта ортиқ бўлиши керак. Чунки ҳар бир заррага (электронга) классик статистик физикага асоса, $3kT/2$ энергия тўғри келади. Маълумки, диэлектриларда (изоляторларда) эркин элетронлар йўқ деб қарлади. Аммо тажриба кўрсатадики, металлар ва изоляторларнинг иссиқлик сиғими юқори температурада тахминан бир хил ва улар Дюлонг-Пти қонунига бўйсунади. Бу зиддият квант статистикасида осонликча ҳал этилади.

Кўпгина металларда Ферми сатҳи энергияси $\mu_0 2эВ$ билан $10эВ$ орасида бўлади. Бу ҳолда агар температура T=300K бўлса,

$$C_v = \frac{\pi^2 Nk}{2}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)$$

ифодадаги (kT/μ_0) учун

$$\frac{kT}{\mu} \approx \frac{300k}{2\cdot 10^4} = \frac{3k}{200} = 0{,}015k$$

$$\frac{kT}{\mu} \approx \frac{300k}{10\cdot 10^4} = 0{,}003k$$

қийматлар олинади $\pi/2 \approx 5$ бўлганда, бу қийматлардан электрон иссиқлик сиғими умумий иссиқлик сиғимига 0,075 ва 0,015 ҳисса ёки

1,5% -7,5% ҳисса қўшиши келиб чиқади. Амалда электронлар кристалл иссиқлик сиғига 2%-8% ҳисса қўшадилар.

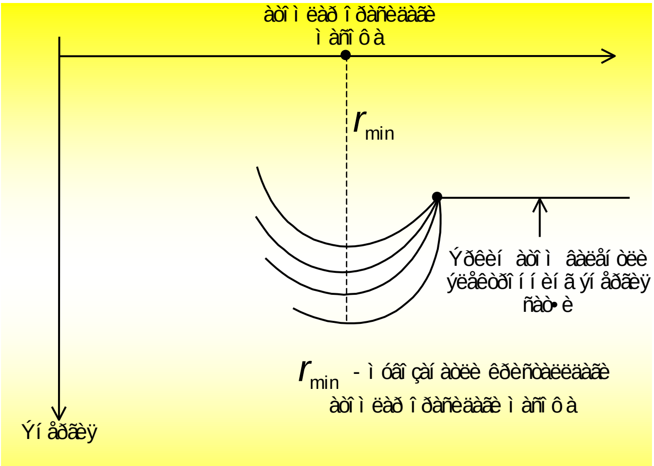
5-§. Кристаллардаги энергетик зоналар

1. Кириш. Қаттиқ жисмлардаги электронларнинг ҳолатлари эркин атомлардаги электронлар ҳолатларига кўп жиҳатдан ўхшайди, чунки кристаллдаги қўшни атомлар электронларининг ўзаро таъсири атом тузилишини, структурасини тўла бузиб юбора олмайди. Аммо шу билан бирга бу электронларнинг ўзаро таъсири туфайли эркин атомлардаги энергия сатҳлари шунчалик кучли таъсир оладики, ғалаёнликка учрайдики, натижада кристалларда бир қатор унинг ўзига хос янги ҳодиса ва эффектлар пайдо бўлади. Бу янги ҳодисалардан энг муҳими – эркин атомлардаги валент электронларнинг энергия сатҳларининг деярли узлуксиз сатҳларга – энергетик зоналарга ёйилиб кетишидир. Бу энергетик зоналар эса қаттиқ жисмнинг электр, магнит ва оптик хоссаларининг содир бўлишига сабабчи бўладилар.

2. Энергетик зоналар. Энергия зоналарининг пайдо бўлишини қуйидагича тушунтириш мумкин. Фараз қилайлик, N та эркин атомлар мавжуд бўлсин. Ҳар бир атомнинг бирор энергия сатҳи, масалан, i - сатҳи g каррали айниш даражасига эга бўлсин. Аммо атомлар бир-бири билан ўзаро таъсирда бўлмагани учун N та зарралардан иборат бўлган бу системада i - энергетик сатҳ N_g каррали айниш даражасига эга бўлади. Энди атомлар бир-бирига яқинлашиб, красталл панжара ҳосил қилсин. Бу ҳолда атомларнинг ўзаро таъсирлари туфайли эркин атомнинг N_g каррали ҳолатлари ўзгаради. Бошқача айтганда, ўзаро таъсир бўлмаган ҳолдаги N_g эквивалент (симметрик) ҳолатлар, ўзаро таъсир туфайли бузилади ва улар бир-бирига жуда яқин бўлгани учун энергетик сатҳлар дастаси деярли узлуксиз энергия зонасини ҳосил қилади. Бу ўзаро таъсир туфайли, биринчидан, энергия сатҳларнинг пастга силжиши юз беради, чунки атомлар орасида боғланиш ҳосил бўлади (молекуладаги атомлар боғланиши каби);

икинчидан, бу ўзаро таъсирга, табиийки, атомдаги ядродан узоқдаги валентли электронлар дуч келадилар (таъсирга чалинадилар), чунки улар қўшни атомларга энг яқин жойлашган бўладилар;

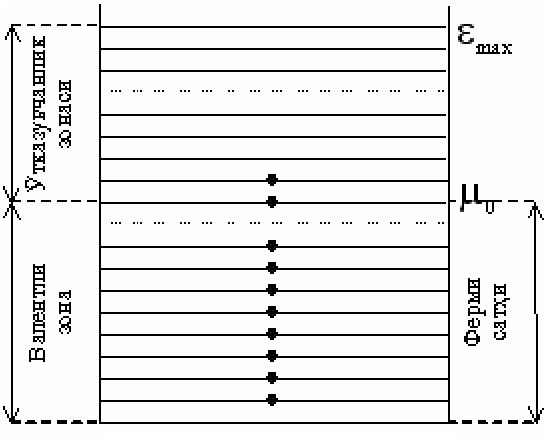
учинчидан, атомлар орасидаги мувозанат ҳолатига тўғри келган масофа энергиянинг минимум қийматига мос келиши лозим. Янада атомларнинг яқинлашувида улар орасидаги итариш кучи туфайли энергия ортиб боради (3.5-расм).



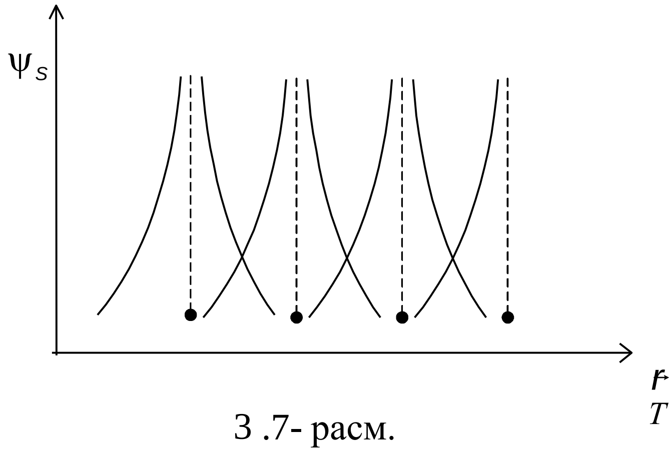
3.5-ðàñì.

тўртинчидан, атомлар эркин бўлгандаги энергия сатҳлари N_g улар яқинлашиб ўзаро таъсирда бўлганда деформацияланиб, ўзгарсаларда, уларнинг сони N_g ўзгармайди. Бошқача айтганда, *s* – зонада ҳар бир атомга тўғри келувчи 2 та электрон, *p* - зонада ҳар бир атомга тўгри келувчи 6 та электрон бўла олиши мумкин, яъни *S* - зонада 2*N* та, *P* – зонада 6*N* та бир-бирига жуда яқин жойлашган энергетик сатҳлар (ўринлар) мавжуд бўлади, яъни зоналарнинг юқори чегараси мавжуд бўлади. Масалан, *S* ҳолатда биттадан электрон бўлсин – атомлардаги валентли электронлар *N* та, *S* зонадаги ҳолатлар (энергетик сатҳлар) сони 2*N* та. *Демак, масалан, T=0K да шу S зонанинг ярмиси Паули принципига асосан, электронлар билан тўлган (уни* ***валентли зона*** *дейилади), қолган ярмиси бўш (уни* ***ўтказувчанлик зонаси*** *дейилади) зонадан иборатдир (3.6-расм).* Агар *S* ҳолатда 2 та электрон бўлса (масалан, калий), *S* – зона электронлар билан тўлган бўлади. Аммо *S* – зона *P* – зона бир-бирини ўзаро ёпган бўлса, улар ҳам металлар ҳосил қилади. Баъзи қаттиқ жисмларда (ярим ўтказгич ва диэлектрикларда) валентли зона билан ўтказувчанлик зонаси орасида маън этилган (таъқиқланган) Δ энергия кенгликка эга бўлган зона мавжуд бўлади (бунга кейинроқ тўхталамиз).

Агар қаттиқ жисм температураси *T*>0 бўлса, юқорида айтганимиздай, валентли зонанинг Ферми сатҳи атрофидаги (яқинидаги) электронлар ўтказувчанлик зонасига иссиқлик флуктуациялар туфайли ўтадилар. Бу электронлар, энди ҳар бир атомга тегишли бўлмасдан кристаллдаги ҳамма (барча) атомларга тегишли деб қаралиши мумкин. Бу фикрни шундай тушунтириш мумкин: эркин атомлардаги валентли электронларнинг тўлқин функциялари, атомлар яқинлашиб, кристалл ҳосил қилганда, бир-бирини қисман ёпиб кетишади. Шу сабабли, бир атомга тегишли электрон, иккинчисига маълум эҳтимол билан ўтиши мумкин. Шундай қилиб, электрон бутун кристалл бўйича миграция қилиб юриши мумкин.



3.6-расм.



3 .7- расм.

3.7-расмда *S* ҳолат функцияларини бир – бири билан қисман умумийлашиши, ёпиши кўрсатилган. Ўтказувчанлик зонасидаги бундай электрон атомларга озми – кўпми боғлиқ бўлганлиги учун унга ташқи электр майдон таъсир этса, унинг ҳаракати эркин электронлар ҳаракатидан фарқланади. Аммо уни эффектив масса m^* билан эркин ҳаракатланаётган зарядли зарра деб қаралиши мумкин, яъни $e\vec{E} = m^*\vec{a}$. *Ўтказувчанлик зонасидаги бу m^* массали зарра эркин ҳаракатланаётган электрондан фарқли бўлганлиги сабабли (уни, заррани) квазиэлектрон дейилади.* Оддий ҳолларда квазизарранинг (фонон, полярон ва шу кабиларнинг) массасини топиш учун дисперсия қонуни $E(p)$ берилган бўлса,

$$\frac{1}{m^*} = \frac{\partial^2 E(p)}{\partial P^2}$$

ифода орқали топилади; бунда ўтказувчанлик зонасидаги электроннинг *E* энергияси, $\vec{P}$ квазимпульси. Дисперсия қонуни анизотропия характерга эга бўлса, эффектив масса тензор характерга эга бўлади.

Кристалл қаттиқ жисмдаги ўтказувчанлик зонасида ҳаракатланаётган электрон учун эффектив масса m^* аниқланган бўлса, у ҳолда

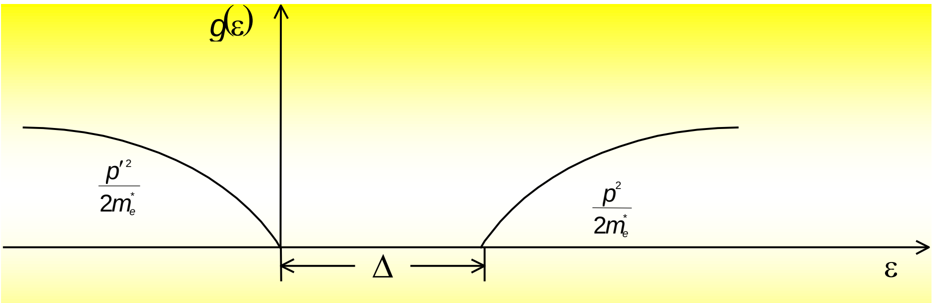
$$E(p)=\frac{p^2}{2m^*}$$

ўринли бўлади, бу ҳолда ҳолатлар зичлиги

$$g(\varepsilon)=a\varepsilon^{1/2},\ a=2\pi\left(\frac{2m*}{h^2}\right)^{3/2}$$

ифода билан аниқланади.

Умумий ҳолда ўтказувчанлик зонасидаги электрон ва валентли зонадаги тешик (ковак) энергиялари импульслар билан мураккаб боғанишда бўлади. Аммо амалда ўтказувчанлик зонаси тубига яқинидаги электронлар ва валентлик зона юқорисидаги тешиклар (коваклар) билан иш кўрилади. Бундай электронларни эффектив m^*_e массали квазиэлектронлар ва эффектив m^*_p массали $|e|$ - зарядли квази позитронлар деб қаралиши мумкин. Бу ҳолда ҳолат зичлиги функцияси эркин электронлардаги каби параболадан иборат бўлади (қ. 3.8 расм).



3 .8- расм.

Бу ҳолда дисперсия қонуни

$$\varepsilon(\vec{p})=\Delta+\frac{\vec{p}^2}{2m_e^*}\quad \text{(электронлар учун),}$$

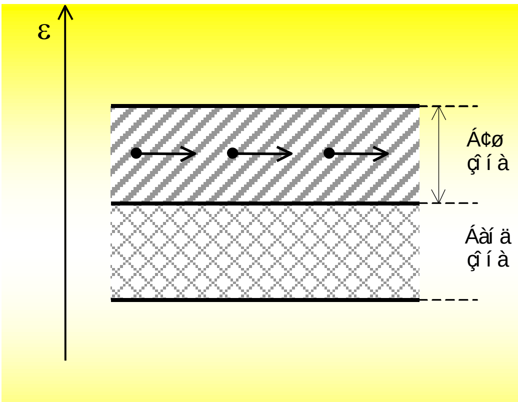
$$\varepsilon^{1}(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_p^{*}} \quad \text{(коваклар учун),}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда ташқи электр майдон таъсири туфайли валентли зона «шипи» даги электронлардан қисман ўтказувчанлик зонасига ўтиши мумкинлигини ҳам назарда тутмоқ керак.

6-§. Ҳолатлар зичлиги. Қаттиқ жисмлар турлари

Зоналар тассавурларига асосан қаттиқ жисмларни турларга бўлиш жуда қулай.

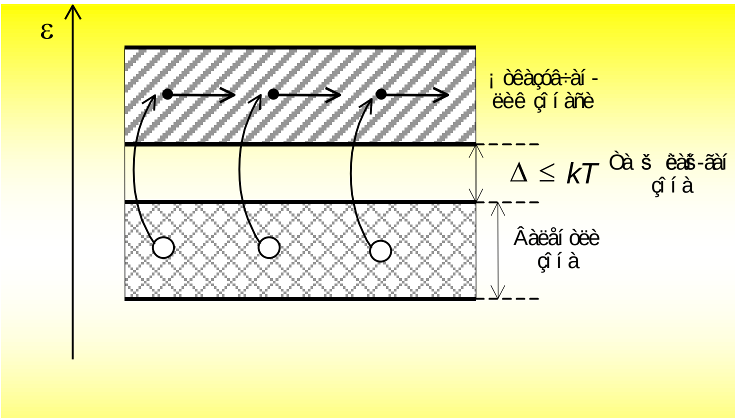
Агар зонанинг бир қисми тўлган бўлиб, қолган қисми бўш бўлса, ёки тўлган зона билан юқори зона маълум даражада бир-бирини ёпса, бундай қаттиқ жисмлар металлардан иборатдир (3.9-расм).



3 .9- расм. Металл.

Агар тўлган зонадан кейин энергия тирқиши Δ *бўлса, яъни манъ (таъқиқланган) этилган зона бўлса, бундай қаттиқ жисмларни диэлектрик (изолятор) ёки ярим ўтказгичлар дейилади. Агар энергия тирқши* kT *дан етарли даражада катта бўлса, яъни* $\Delta > kT$ *шарт бажарилса, валентли зонадан ўтказувчанлик зонасига электронлар амалда ўтмайди ва демак электр ток ҳосил қилувчи электронлар* *бўлмагани учун бундай қаттиқ жисмларни изоляторлар (диэлектриклар) дейилади.*

Агар таъқиқланган зона кенглиги Δ унча катта бўлмай, kT га тенг ёки ундан кичик бўлса, яъни $\Delta \leq kT$ бўлса T температурада валентли зонадан ўтказувчанлик зонасига флуктуациялар туфайли талайгина электронлар ўтиши мумкин. *Электр майдон қўйилса (киритилса), бу серҳаракат «чаққон» электронлар электр токи ҳосил қилади. Бундай қаттиқ жисмларни ярим ўтказгичлар дейилади* (3.10-расм).



3 .10- расм. Яримўтказгич.

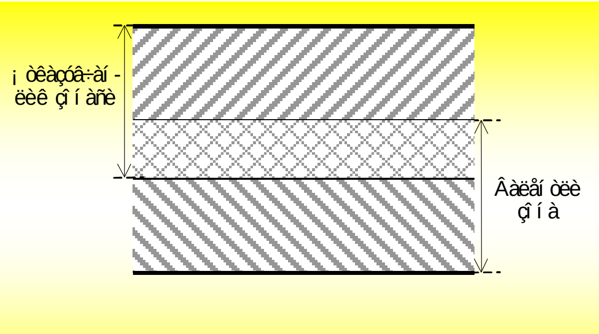
Энергетик сатҳлар ва валентли электронлар сонларига қараб, қаттиқ жисмни қайси турга тегишли эканлигини айтиш мумкин. Масалан,

1. Бир валентли электронга эга қаттиқ жисмлар металлардир (ишқорий металлар: *Na,K,b,Cu,Ag,Au*). Булардаги валентли зонанинг ярмиси тўлган бўлади.

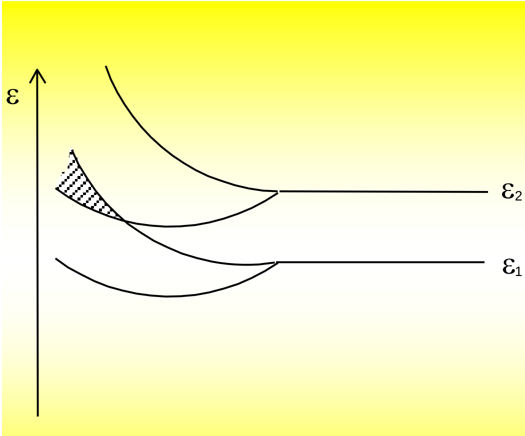
2. Ҳар бир ячейкага тоқ сондаги электронлар тўғри келган қаттиқ жисмлар ҳам металлардир. Масалан, *Al,Ga,In,TL* нинг ҳар бир атомига 3 та валентли электрон тўғри келади. Булар бир зонани ва кейинги зонани қисман тўлдирадилар.

3. Ҳар бир атомга жуфт электронлар тўғри келган қаттиқ жисмларнинг ҳаммаси ҳам диэлектрик (изолятор) бўлавермайди.

Масалан, қуйи зона билан юқори зоналар бир-бирини қисман ёпиши мумкин (ва 3.12-расмлар); бундай қаттиқ жисмлар ҳам металлардан иборат бўлади.



3.11- расм.

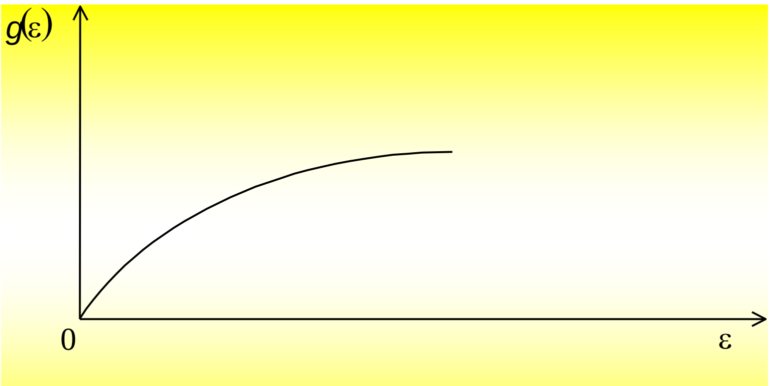


3.12- расм.

3.11 ва 3.12-расмларда сатҳларнинг бир-бири билан қисман ёпилиши, умумийлашуви кўрсатилган.

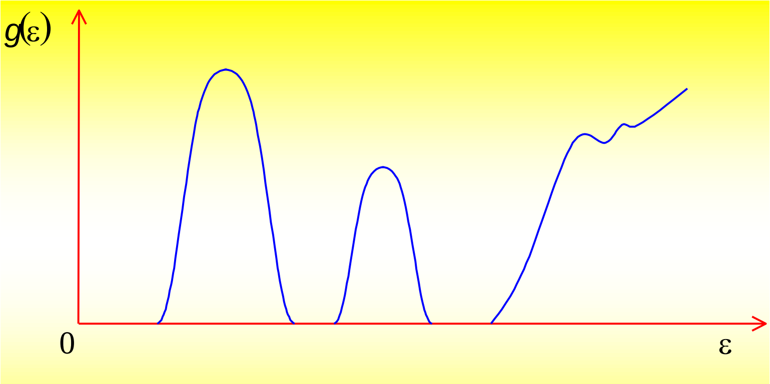
Юқорида эркин зарра моделида $\varepsilon(p)=\dfrac{p^2}{2m}$ ёки $\varepsilon(p)=\dfrac{p^2}{2m^*}$ кўринишдан фойдаланиб, ҳолатлар зичлиги (сони) учун

$$g(\varepsilon) = aV\varepsilon^{\frac{1}{3}}, a = 2\pi\left(\frac{2m^*}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$



3 .13- расм.

ва унинг графигига кўрстилган эди (қ. 3.13 расмда). Умумий ҳолда, кристалл қаттиқ жисмдаги электронлар даврий майдонда мураккаб ҳаракат қиладилар. Шу сабабли, унинг ҳолатлар зичлиги $g(\varepsilon) = aV\varepsilon^{1/2}$ га нисбатан мураккаб функция билан тавсифланади. Натижада ҳолатлар зичлиги $g(\varepsilon)$ бир неча қисманларга бўлиниб кетади. Кристаллдаги электронлар энергияси спектрининг зоналар таркиби (структураси) схематик равишда 3.14-расмда кўрсатилган. Албатта, ҳар бир конкрет кристалл ўзининг зоналар стурктурасига эга бўлади.



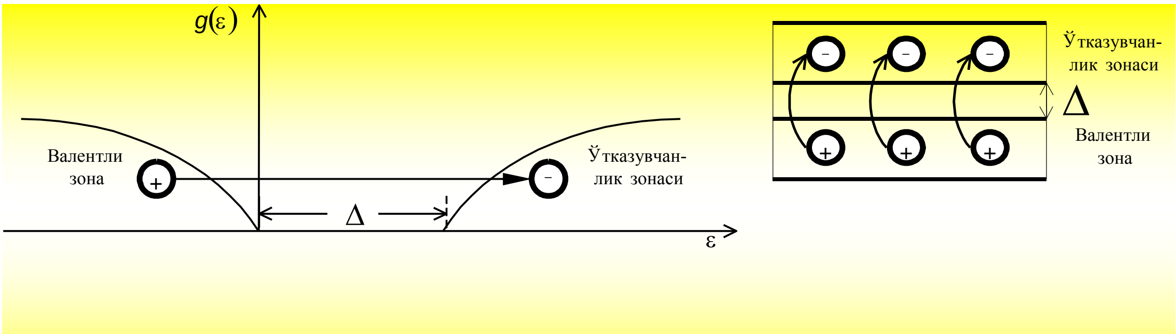
3 .14- расм.

Шундай қилиб, яккаланган (эркин) атомдаги энергия сатҳлари дискрет характерга эга. Кристалл ҳосил бўлишда атомлар бир-бирига яқин келишиб, уларнинг энергетик сатҳлари ўзаро таъсир натижасида маълум силжишларга эга бўлади. Шу билан бирга валентли электрон эса ўзининг атомига тааллуқли бўлишидан ташқари у маълум даражада эркин деб ҳам ҳисобланади. Бунинг натижасида кристаллда энергия зоналари ҳосил бўлади.

Металлардаги энергетик кенглик $\Delta=0$ ва яримўтказгичлар ва диэлектрикларда $\Delta \neq 0$ бўлишлиги билан танишдик. *Шундай типдаги қаттиқ жисмлар борки, уларда* $\Delta=0$ *бўлсада ўтказувчанлик зонасидаги электронлар, металлардагига нисбатан бир неча* *тартибга кам бўлиб, яримўтказгичлар типига кирадилар. Бундай қаттиқ жисмни тирқишсиз ярим ўтказгичлар дейилади. Шундай қаттиқ жисмлар ҳам борки, уларнинг ўтказувчанлик зонасининг туби валентлик зонаси юқорисидан пастда бўладилар. Бундан қаттиқ жисмларда, ҳатто $T=0^0K$ да ҳам ўтказувчанлик зонасида электронлар бўлади. Бундай қаттиқ жисмларни полуметаллар дейилади.*

7-§. Ярим ўтказгичлар. Хусусий ўтказувчанлик

Диэлектрик ёки ярим ўтказгичларда валентли зона билан ўтказувчанлик зонаси орасида энергия кенглиги Δ, яъни таъқиқланган зона мавжуд бўлади. $T=0K$ да бундай қаттиқ жисмларнинг ҳаммаси, равшанки, диэлектрик (изолятор) бўлади. Аммо температура нолдан фарқли бўлганда $kT>\Delta$ шарт бажарилса, валентли зонадан ўтказувчанлик зонасига ўтган электронлар валентли зонадаги тешиклар (коваклар) электр ўтказувчанликни келтириб чиқаради. Натижада $T=0K$ даги диэлектрик бундай температурада ярим ўтказгичга айланади, ўтади. Электр ўтказувчанлик пайдо бўладиган температура, албатта таъқиқланган зона кенглиги Δ га бевосита боғлиқдир (3.15-расм).



3.15- расм.

Соф (тоза) ярим ўтказгичда электронлар ва тешиклар (коваклар) туфайли ҳосил бўлган ўтказувчанликни ярим ўтказгичнинг хусусий ўтказувчанлик дейилади.

Ярим ўтказгичнинг ўтказувчанлиги ўтказувчанлик зонасидаги электронлар зичлиги n_e ва валентлик зонасидаги тешиклар (коваклар) зичлиги n_p га, боғлиқ. Эффектив масса методидан фойдаланиб (қ. 5-§).

Ферми – Дирак статистикаси асосида n_e ва n_p ни аниқлайлик. Энергия валентли зона юқорисидан бошлаб ҳисобланади.

Электронларнинг тўла сони N

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1} + \sum_j \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_j-\mu)}+1} \quad (29)$$

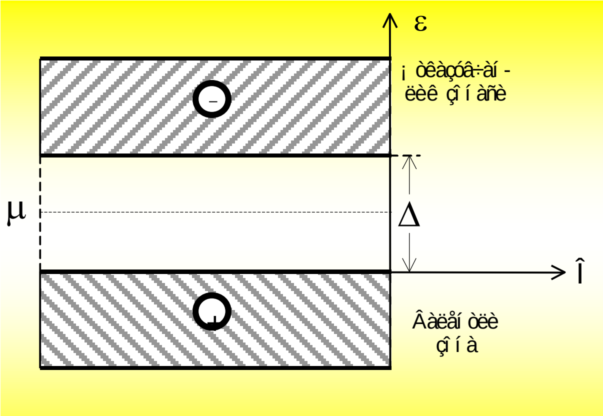
ифода билан аниқланади; бунда ε_i ва ε_i ўтказувчанлик ва валентли зоналаридаги энергия сатҳлари. Валентли зонадаги электронлар билан тўла сатҳлари сони $\sum_i I_i$ электронлар сони N га тенг. Бу тенгликдан фойдаланиб, (29) ифодани қайта ёзамиз:

$$\sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1} = \sum_j \left[1_j - \frac{1}{\left(e^{\beta(\varepsilon_j-\mu)}+1\right)}\right] = \sum_j \frac{1}{\left[e^{\beta(\varepsilon_j-\mu)}+1\right]} \quad (30)$$

Бу тенгликлар чап томондаги ифода ўтказувчанлик зонасида электронлар сонини кўсатади. Хусусий ўтказувчанликда улар тешиклар (коваклар) сонига тенг;

$$n_e = n_p \quad (31)$$

яъни ўнг томондаги ифода коваклар сонини ифодалайди. Қуйидаги тақрибий ифодалардан фойдаланайлик (3.16 расм).



3.16- расм.

$$\varepsilon_i = \Delta + \frac{p^2}{2m_e^*}, \varepsilon_j = -\frac{p^2}{2m_p^*} \tag{32}$$

m^*_e ва m^*_p электрон ва ковакнинг эффектив массалари. Зарралар сонлари n_e ва n_p учун (32) дан фойдаланиб,

$$n_e = 2\frac{1}{h^3}\int \frac{d\vec{p}}{e^{\beta\left(\frac{\Delta+p^2}{2m_e^*-\mu}-\mu\right)}+1} \tag{33}$$

$$n_p = 2\frac{1}{h^3}\int \frac{d\vec{p}}{e^{\beta\left(\frac{\Delta+p^2}{2m_p^*-\mu}-\mu\right)}+1} \tag{34}$$

ифодани ёзишимиз мумкин. “2” спин туфайли киритилди. T=0K да n_e=n_p=0 бўлади. T>0K да, фараз қилайлик $\Delta - \mu >> kT$, $\mu >> kN$, бўлсин. Бу ҳолда электронлар ва ковакларни айнимаган деб қараш мумкин. Бу ҳолда (33) ва (34) дан зичликлар n_e ва n_p учун

$$n_e \approx \frac{2}{h^3}\int e^{-\beta\left(\Delta+\frac{p^2}{2m_e^*}-\mu\right)} d\vec{p} = 2\left(\frac{2\pi m_e^* kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-(\Delta-\mu)\beta} \tag{35}$$

$$n_p \approx \frac{2}{h^3}\int e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m_p^*}+\mu\right)} d\vec{p} = 2\left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\mu\beta} \tag{36}$$

ифодаларни оламиз. Демак, n_e=n_p эканлигини назарда тутиб, оламиз:

$$n_e = n_p = 2\left[\frac{2\pi\left(m_e^* m_p^*\right)^{\frac{1}{2}} kT}{h^2}\right]^{\frac{3}{2}} e^{-\beta\frac{\Delta}{2}} \tag{37}$$

(37) дан кўринадики, ўтказувчанлик зонасидаги электронлар ва валентли зонадаги коваклар концентрациялари n_e ва n_p энергия тирқиши кенглиги Δ га ҳамда температурага экспоненциал боғлиқдир; тирқиш кичик бўлса ва температура юқори бўлса, концентрациялар кўп бўлади; шундай қилиб, ярим ўтказгичларда температуранинг ошиши билан концентрациялар ортиб боради ва демак электр ўтказувчанлик ортиб боради. Табиийки, температура ортиши билан панжарадаги иссиқлик тебраниши ортиши билан қаршилик ортади. Аммо бу эффект яримўтказгичларда концентрациялар ортишига нисбатан кичикдир. Металларда концентрациялар температура ортиши билан ўзгармайди, электр қаршилик эса тебранишлар туфайли ортиб боради.

Хусусий ўтказувчанли ярим ўтказгичнинг химик потенциали μ ни (36) нинг (35) га нисбатини олиб, осонликча аниқлаш мумкин:

$$e^{\beta\mu} = (m*_p \ / \ m*_e)^{3/4} e^{\beta\Delta/2} \qquad (38)$$

(38) ифодани логарифмлаб, оламиз

$$\beta\mu = \beta\frac{\Delta}{2} + \frac{3}{4}\ln\frac{m_p^*}{m_e^*} \qquad (39)$$

ёки

$$\mu = \frac{\Delta}{2} + \frac{3}{4}kTIn\frac{m*_p}{m*_e}$$

Изоҳ, $m^*_e \approx m^*_p$ бўлганда Ферми сатҳи μ таъқиқланган зонанинг ўртасига яқинида бўлади. (қ 3.16 расм).

Мисол. Δ =0,7эВ да $\Delta/k \approx 0,81 \cdot 10^4 K$ бўлади. Бунда $\Delta/k >> T$ ва $\Delta - \mu >> kT$, $\mu > kT$ шартлар бажарилади; одатдаги температураларда

$T=300^0K$ ва $m_e=m_p=m$ бўлганда $n_e=n_p=4{,}83\cdot 10^{15}\cdot 300^{3/2}\, e^{-0{,}41\cdot 10^{4}/300} \approx 1{,}6\cdot 10^{13}\, см^{-3}$ қийматни оламиз.

Таъқиқланган зона кенглигига мисоллар: олмос 6:7*эВ*; кремний 1,11*эВ*, германий 0,72*эВ*, кулранг қалай 0,1 *эВ*.

Булар $T=0K$ да диэлектриклар.

Олмос хона температурасида ҳам диэлектрик (изолятор)дир.

Хона температурасида кремний ва германийда валентли зонадан ўтказувчанлик зонасига сезилари сондаги электронлар ўтган бўлади.

8-§. Аралашмали ярим ўтказгичлар

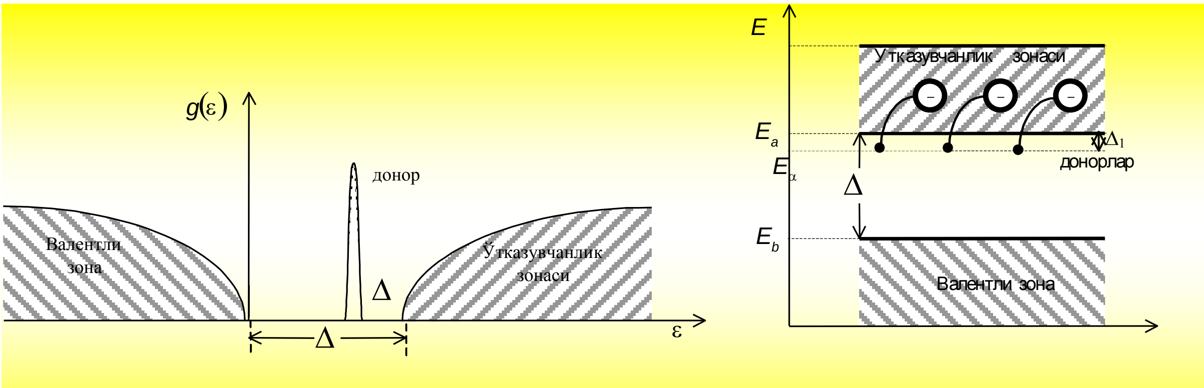
Биз юқорида хусусий ўтказувчанликка эга тоза (соф) яримўтказгичларни кўрдик. Аммо амалдаги яримўтказгичлар одатда маълум аралашмага эга бўладилар. Ҳақиқатдан ҳам амалда фойдаланиладиган кўпчилик яримўтказгичларга аралашма киритилган бўлади.

Тоза кристалларда валентли зона билан ўтказувчанлик зонаси орасида таъқиқланган зона кенглиги Δ берилган температурада анчагина кенг бўлсада, яъни $\Delta > kT$ шарт бажарилса-да, бироз аралашма киритилиши туфайли уларда ўтказувчанлик хоссаси пайдо бўлади. Бундай бўлишига сабаб, шу таъқиқланганзонада локал (дискрет) энергетик сатҳларнинг пайдо бўлишидир.

Ярим ўтказгичларнинг электр ўтказувчанлиги аралашмага жуда кучли боғлиқ бўлгани сабабли, аралашманинг ярим ўтказгичдаги энергия сатҳлари тақсимотига таъсирини қараш зарурдир.

Аралашма туфайли ҳосил бўладиган ўтказувчанликнинг икки тури мавжуд.

n - типдаги ярим ўтказувчанлик. Бу хилдаги аралашмали ўтказгичларда температура $T=0K$ да таъқиқланган зонада ҳосил бўлган энергия сатҳлари электронлар билан тўла бўлади. Лоқал сатҳлар билан ўтказувчанлик зонали орасидаги энергия тирқиши (кенглиги) Δ_1 берилган $T>0$ температурада $\Delta_1<kT$ шартга бўйсунади. *Бу ҳолда, температура нолдан фарқли бўлганда, ҳосил бўлган локал сатҳлардан электронлар, иссиқлик флуктуацияси kT сабабли, ўтказувчанлик зонасига ўтадилар ва электронлар билан боғлиқ ўтказувчанликни ҳосил этадилар. Ҳосил бўлган бундай локал сатҳларни* ***донорлар*** *дейилади (3.17 расм).*



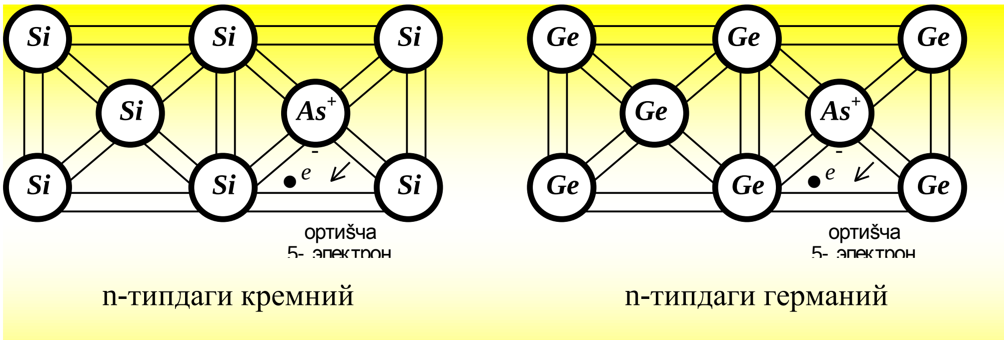
3 .17-расм.

Мисол. Тўрт валентли атомли кристаллдаги (масалан, $_{32}Ge$ германийда) битта атомни беш валентли атом (масалан, T_3P фосфор ёки $_{33}As$ магимуш) билан алмаштирилсин. 5 та валентли электронлардан 4 таси химик боғланишда (ковелентли боғланишда) иштирок этади. $T=0$ да 5 нчи электрон аралашма мусбат ион яқинида ушланиб туради (3.18-

расм). Буни кристалл ичида жойлашган водород атомига ўхшатиш мумкин. Унинг ионизациясини водород атомининг ионизациясини ҳисоблаган каби ҳисоблаш мумкин, яъни (*эВ* да)

$$E_u = \frac{13{,}6}{\chi^2} \qquad (1)$$

χ - диэлектрик коэффициент яримўтказгичлар учун 3.9 (кремний), 16, 1 (германий) атрофида бўлади. Булардан ионизация энергияси E_u учун 0,05*эВ* дан 0,10*эВ* гача қийматлар оламиз. Демак, аралашма атомининг ионизацияси бўлишида бешинчи электрон ўтказувчанлик зонасига ўтади. Бошқача айтганда, аралашма атом билан боғлиқ энергия сатҳи E_d ўтказувчанлик зонаси туби E_d дан (0,05: 0,10) *эВ* қуйида жойлашган бўлади (3.17-расм).

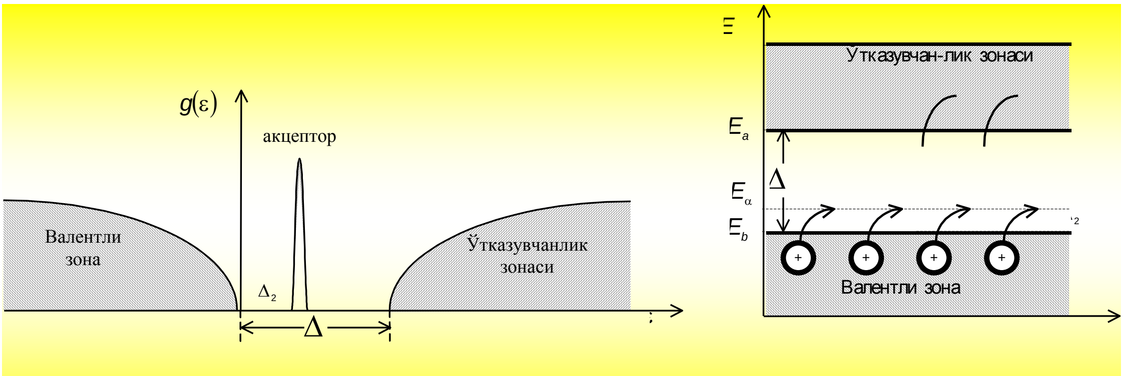


3.18-расм.

Шуни таъкидлаш лозимки, бу энергия фарқи E_a-E_d=Δ_1=(0,05$\div$0,10) эВ комната температурасидаги иссиқлик флуктуацияси *kT* дан кичик бўлгани учун, E_d даги электронларнинг аксарияти ўтказувчанлик зонасига ўтади. Шундай қилиб локал сатҳлар-донорлар ярим ўтказгичнинг ўтказувчанинг зонасини электронлар билан таъминлайди.

Бундай кристаллни n-типидаги аралашмали яримўтказувчанлик яримўтказгич дейилади.

p - типдаги яримўтказгич. Бу типдаги аралашмали яримўтказгичда таъқиқланган зонада ҳосил бўлган локал энергия сатҳлари валентли зонага яқин бўлиб, улар орасидаги энергия тирқиши $\Delta_2 < kT$ шартига бўйсунади, улар бўш бўлади. Температура нолдан юқори бўлса, валентли зонадан бу локал энергия сатҳларига электронлар ўтади ва валентли зонада тешиклар (коваклар) ҳосил бўлиб, электр майдони киритиш билан электронларнинг ҳаракати туфайли коваклар мусбат заряд ташувчи зарралар каби ҳаракатга келадилар ва электр ток ҳосил қиладилар. *Ҳосил бўлган бундай локал сатҳларни акцепторлар дейилади* (3.19-расм).



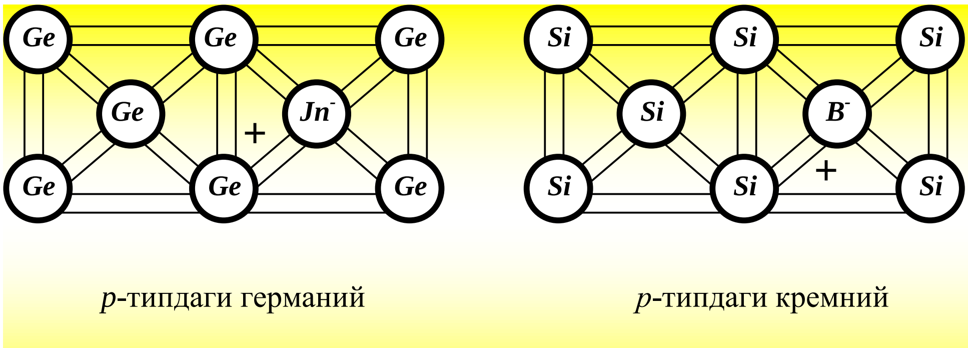
3.19-расм.

Бундай хилдаги аралашмали яримўтказгични p-типдаги яримўтказгич дейилади.

p-типдаги яримўтказгичга мисоллар: $_{32}Ge$ да $_{13}Al$ (алюмин) ёки $_{5}B$ (бор) ёки $_{49}In$ (индий) 3 валентли элементлар аралашмаси туфайли *p*-типдаги яримўтказгич ҳосил бўлади.

Агар германий кристаллга индий атомини (ёки $_{5}B$, $_{13}Al$ атомлари) киритилса, у ҳолда кристалл структураси бузилмаган ҳолда кристаллдаги атомлар боғланишида тўла тўйиниш бўлмай қолади, индий атоми германийдаги валентли зонадан электронни ўзига қабул қилиб олиши мумкин. Электронларни валентли зонадан ушлаб олувчи атомлар локал сатҳларни-акцепторларни ҳосил қилади. Валентли зонада эса коваклар (тешиклар) ҳосил бўлади. Натижада бундай аралашма киритилиши туфайли коваклар билан боғлиқ р-типдаги яримўтказгич ҳосил этилади (3.20-расм).

5 валентли аралашма атом ўртнига 3 валентли аралашма атом (масалан, *In*) киритилса, химик ковалент боғланиш бўлиши учун аралашма атом тўртинчи электронни валентли зонадан (масалан, германий атомидан) олади (3.20-расм). Бунда валентли зонада эркин ковак (тешик) ҳосил бўлади (3.19-расм). Бундай ионизация бўлиши учун ҳам (0,05-0,1) *эВ* энергия зарур бўлади. Демак, бунда аралашма атом электроннинг энергияси сатҳи валентли зона шипидан юқорида бўлади. Иссиқлик флуктуациялари *kT* сабабли электронлар E_A сатҳларга–акцептарларга ўтадилар. Шундай қилиб, *p* - типдаги аралашмали ўтказувчанликли яримўтказгич ҳосил қилинади.



3.20-расм.

9-§. Аралашмалар концентрациялари билан Ферми сатҳи орасидаги боғланиш

Металлардаги Ферми сатҳини топишга нисбатан яриўтказгичларда Ферми сатҳини аниқлаш анича мураккаб. Чунки ҳар бир зонадаги электронлар сони ҳар хил энергия сатҳлари ҳамда донор ва акценторлар аралашмалар концентрацияларига боғлиқ.

Кристаллнинг электрнейраллигига асосан, донорли яримўтказгичнинг ўтказувчанлик зонасидаги электронлар сони n_e ионлашган донор атомлар сони n_d га валентли зонадаги коваклар сони n_p қўшилганига тенг, яъни

$$n_e = n_d + n_p \tag{40}$$

Температура жуда катта бўлмаган ҳолда, яъни $\Delta >> kT$ шарт бажарилганда кристаллнинг электрнейтраллигига асосан аралашмали ўтказувчанликка эга бўлган донорли яримўтказгичлар учун

$$n_e \approx n_d \tag{41}$$

акцепторли яримўтказгичлар учун

$$n_p \approx n_A \tag{42}$$

тенгликлар ўринлидир. Буларда валентли зонадан ўтказувчанлик зонасидагиэлектронлар ўтишини ва шу сабабли коваклар пайдо бўлишини ҳисобга олинмади. Бу (41) ва (42) тенгликлардан фойдаланиб, аралашмали яримўтказгичларнинг химик потенциалини аниқлаш мумкин.

Биз n_e ва n_p учун (35) ва (36) ифодаларга эгамиз. Буларда энергия валентли зона юқори чегарасидан ҳисобланган. Агар энергияни ўтказувчанлик зонасининг тубидан (тагидан) ҳисобланса, таъқиқланган зона кенглиги Δ ни айириш лозим бўлади. Буни назарда тутиб, (35) ва (36) ифодаларни қайта ёзамиз.

$$n_e = 2\left(\frac{2\pi kTm_e^*}{h^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu} = a_e e^{\beta\mu} \tag{43}$$

$$n_p = 2\left(\frac{2\pi kTm_p^*}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\beta(\mu+\Delta)} = a_p e^{-\beta(\mu+\Delta)} \tag{44}$$

Донор сатҳлардаги коваклар сони n_d ва акцептор сатҳлардаги электронлар сони n_a ни аниқлаш керак. Буларни топиш учун Больцман тақсимот функциясидан фойдаланамиз. ε_T энергетик сатҳда n_m электронларнинг бўлиш эҳтимоли W_m ни

$$W_T = cg_T e^{-\beta(e_T-\mu)n_T} \tag{45}$$

ифода билан аниқлаймиз; g_T - сатҳнинг карраси. Нормаллаш шарти

$$\sum_T W_T = 1$$

дан c ни топамиз:

$$c = \frac{1}{\sum_T g_T e^{-\beta(\varepsilon_T-\mu)n_T}} \tag{46}$$

Электронларнинг ўртача сони

$$\overline{n}_e = \sum{}_T W_T n_T$$

учун

$$\overline{n}_e = \frac{\sum_T n_T g_T \exp[-\beta(\varepsilon_T-\mu)]n_T}{\sum_T g_T \exp[-\beta(\varepsilon_T-\mu)]n_T} \tag{47}$$

ифода ўринли.

Электронлар учун, Паули принципига асосан, n_T=0,1. Шу сабабли

$$\overline{n}_e = \frac{1}{\frac{g_0}{g_1} e^{\beta(\varepsilon_T-\mu)} + 1} \tag{48}$$

Бўш (озод) донор сатҳларнинг карраси бирга тенг, яъни g_0=1; электрон билан банд донор сатҳнинг карраси 2 га тенг (электрон спиннинг 2 йўналиши сабабли), яъни g_1=2. Демак, ε_d сатҳда ўтган электронлар концентрацияси учун

$$\frac{n_{ed}}{N_d} \equiv \overline{n}_e = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\beta(\varepsilon_d-\mu)}+1} \tag{49}$$

N_d – донорли атомлар (концентрацияси) сони электронлари ўтказувчанлик зонасига ўтган донорлар сони n_d; концентрация $n_d|N_d$ эса (49) дан аниқланади:

$$\frac{n_d}{N_d} = 1-\frac{n_{ed}}{N_d} = 1-\frac{1}{\frac{1}{2}e^{\beta(\varepsilon_d-\mu)}+1} = \frac{1}{2e^{-\beta(\varepsilon_d-\mu)}+1} \tag{50}$$

(43) ва (50) ни назарда тутиб, (41) тенгликни ёзамиз

$$a_e e^{\beta\mu} = \frac{N_d}{2e^{-\beta(\varepsilon_d-\mu)}+1} \tag{51}$$

Бундан

$$e^{\beta\mu} = \frac{1}{4}e^{-\beta|\varepsilon_d|}\left[-1+\sqrt{1+\frac{8N_d}{a_e}e^{\beta|\varepsilon_d|}}\right] \tag{52}$$

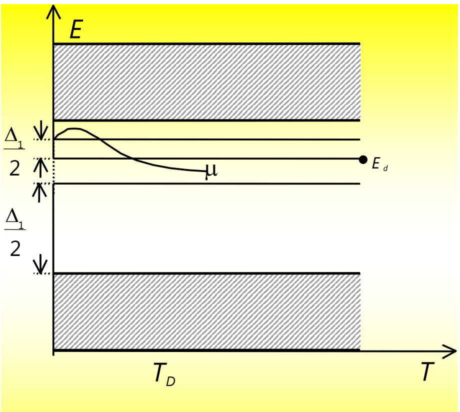
Бунда $\varepsilon_d = |-\varepsilon_d|$ (донор сатҳ ўтказувчанлик зонаси тубидан пастда). $T \to 0$ да ($\beta \to \omega$ да) (52) дан

$$e^{\beta\mu} \approx \frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{8N_d}{a_e}}e^{-\beta|\varepsilon_d|/2} \tag{53}$$

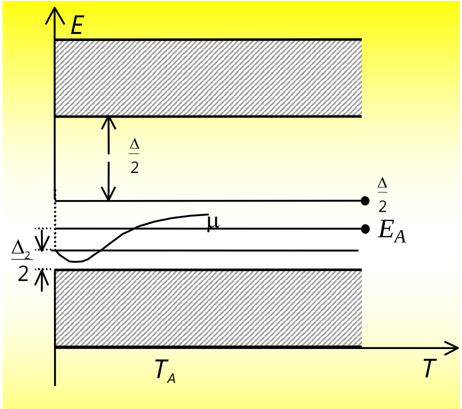
бундан

$$\mu = -\frac{1}{2}|\varepsilon_d| + kTln\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{8N_d}{a_e}} \approx -\frac{1}{2}|\varepsilon_d| \tag{54}$$

Демак, $T \to 0$ да донорлик аралашмали яримўтказгичнинг химик потенциал μ донор сатҳи билан ўтказувчанлик зонаси туби ўртасига яқин бўлади (қ. 3.21-расм).



3.21- расм.



3.22- расм.

Аниқроқ ҳисоблаш кўрсатадики, температура ортиши билан донорли яримўтказгичнинг химик потенциали ўзгаради (қ. 3.21-расм).

Аввал μ бироз ортиб, сўнг таъқиқланган зона ўртасидаги саҳгача камайиб боради.

Акцепторли яримўтказгич учун юқоридаги каби ҳисоблаш қилиб кўрсатиш мумкин: унинг химик потенциали $T \to 0$ да

$$\mu \approx -\Delta + \frac{|\varepsilon_A|}{2} \qquad (55)$$

бўлади.

Демак $T \to 0$ да $(\beta \to \omega)$ p - типдаги яримўтказгичнинг химик потенциали валентли зона юқориси (шифти) билан акцептор сатҳ ўртасида бўлади. Аниқ ҳисоблаш ўрсатадики, температура ортиши билан акцкпторли ярим ўтказгичнинг химик потенциали μ(Т) ўзгаради ва юқори температурада таъқиқланган зона ўртасидаги сатҳга яқинлашади (қ. 3.22-расм).

Тарихий маълумот. Металларнинг классик электрон назарияси асосини немис олими П.Друде (1863-1906) ва Голландияли олим Х.А.Лореанц (1853-1928) яратганлар. Бу назария бўйича металлардаги электронлар икки хилдан (типдан): боғланган ва эркин электронлардан иборат деб қаралади.бу назарияда киритилган эркин электронлар тасаввури металларнинг электр ўтказувчанлик ва иссиқлик ўтказувчанлигини яхши тушунтириб бера олди. Бундай эркин электронлар, клласик статистик физиканинг эркинлик даражалари бўйича энергиянинг тенг тақсимлаши қонунига асосан, қаттиқ жисмнинг иссиқлик сиғимига $3n_e k/2$ ҳисса қўшишлари керак эди (бунда n_e эркин электронлар сони). Аммо бу эса қаттиқ жисмлар иссиқлик сиғимининг Дюлонг-Пти қонунига зиддир. Бу зиддиятни Ферми-Дирак статистикаси асосида немис олими. А. Зоммерфельд (1868-1951) батараф этди.

Масала 3.1. Электронларнинг тўла сони *N* га тенг. Электронлар ҳолатлари зичлиги

$$g(\varepsilon) = const \quad \varepsilon \geq 0$$

$$g(\varepsilon) = 0 \quad \varepsilon < 0$$

бўлсин. а) 0 К да Ферми энергияси μ_0 ни аниқланг б) системанинг классик ҳолга ўтиш шарти (айнимаганлик шарти) аниқлансин.

Ечиш. Зарралар сони N умумий ҳолда аниқланади: а)

$$N = \int f(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{g d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \tag{1}$$

T=0 K да $f(\varepsilon) = 1$, Масаланинг шартига асосан g=const бўлгани учун

$$N = \int_0^{\mu_0} g d\varepsilon = g \mu_0$$

бундан

$$\mu_0 = N / g \tag{2}$$

б) Классик ҳолга ўтиш шарти

$$e^{-\beta\mu} >> 1 \tag{3}$$

Бу шарт бажарилганда, (1) асосида оламиз:

$$\frac{N}{g} = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} d\varepsilon = \frac{e^{\beta\mu}}{\beta} \qquad (4)$$

(3) ва (4)

$$\frac{N\beta}{g} << 1, \frac{N}{kTg} << 1$$

(5) шарт бажарилса, система айнимаган бўлади. (5) ни

$$kTg >> N$$

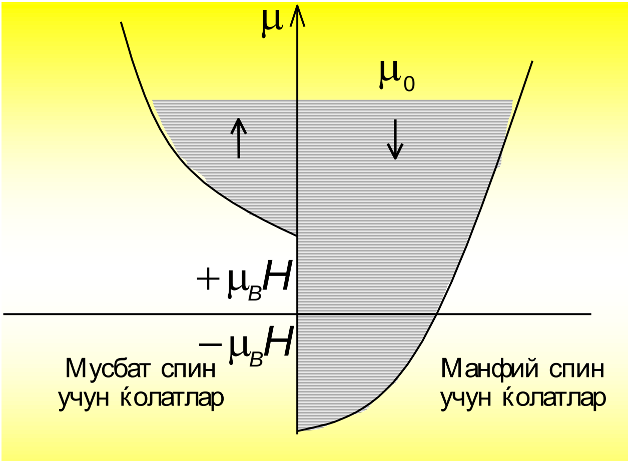
кўринишда ёзайлик; Бу тенгсизликнинг маъноси: kT интервалдаги ҳолатлар сони зарралар сони N дан жуда катта.

Масала 3.2. Магнит майдондаги элетроннинг энергияси майдон йўналишига спиннинг параллель ёки антипаралелигига қараб $\pm\mu_B H$ га тенг T=0K даги эркин электронларнинг парамагнит қабул қилувчанлигини ҳисобланг.

Ечиш. Электрон энергияси

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B H \qquad (1)$$

0K да электронлар Ферми сатҳигача энергия сатҳларини банд қиладилар. Бу эса мусбат спинли (майдон йўналишига параллел спинли) электронларнинг кинетик энергияси $\frac{p^2}{2m}$ нол қийматдан $\mu_0 - \mu_B H$ гача ўзгариши, манфий спинли электроннинг кинетик энергияси нолдан $\mu_0 + \mu_B H$ гача ўзгаришини кўрсатади (3.23 расм). Мусбат ва манфий спинли электронлар сони мос равишда аниқланади:



3.23-расм.

$$N_+=\frac{4\pi V}{3h^3}P_+^3 \qquad \left(\frac{1}{2m}P_+^2=\mu_0-\mu_BH\right)$$

$$N_-=\frac{4\pi V}{3h^3}P_-^3 \qquad \left(\frac{1}{2m}P_-^2=\mu_0+\mu_BH\right)$$

Электронларнинг тўла магнит моменти M

$$M=-\mu_B\left(N_+-N_-\right)=\frac{4\pi V}{3h^2}\mu_B\left(P_-^3-P_+^3\right)=\mu_B\frac{4\pi V}{3h^3}\left\{\left[2m(\mu_0+\mu_BH)\right]^{\frac{3}{2}}-\left[2m(\mu_0-\mu_BH)\right]^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$\mu_0>>\mu_BH$ бўлган ҳол учун

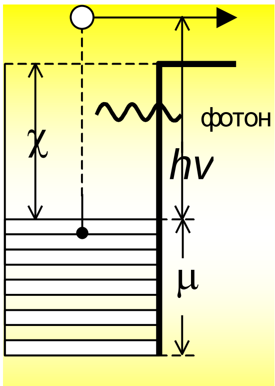
$$M=3H\mu_B^2\cdot\frac{4\pi V(2m\mu_0)^{\frac{3}{2}}}{3h^3\mu_0}+\ldots\approx\frac{3\mu_B^2N}{2\mu_0}H \qquad (2)$$

Бирлик ҳажмда магнитланиш $M=\chi H$ $\quad N=2\cdot 4\pi\left(\frac{2m}{\mu_0}\right)^{\frac{3}{2}}\Big/3h^2$ дан

фойдаланилади. $M=\chi H$ билан (2) ни солиштириб, оламиз:

$$\lambda=\frac{(3/2)\pi\mu^2{}_B}{\mu_0}=\frac{3/2\cdot n\mu^2{}_B}{kT_0},\ \mu_0\approx kT_0$$

Масала 3.3. фотоэффект ҳодисасида ҳосил бўлган фототок Іни аниқланг. Фотоэффект ҳодисасининг қизил чегараси $h\nu_0=\chi$, Тушаётган ёруғликнинг чстотаси $\nu>\nu_0$. Металлда ўтказувчанлик зонасидаги электронларни m_e^* массали электронлардан иборат идеал ферми – газ деб ҳисоблансин (қ. 3.24-расм).



3.24-расм.

Кўрсатма. Электрон фотонни ютганда унинг фақат металлга перпендикуляр бўлган ипульси проекцияси ўзгаради деб ҳисоблансин.

Ечиш. Масланинг шартига кўра, агар

$$h\nu + \frac{p_Z^2}{2m^*} > \chi + \mu$$

шарт бажарилса, металлдан электрон hν энергияли фотонни ютгандан кейин чиқа олади, μ - Ферми сатҳи Бундан

$$p_z > \sqrt{2m*(\chi + \mu - h\nu)} = p_0 \qquad (1)$$

Мателлнинг бирлик сиртига, бирлик вақтда (1) шартга бўйсунган, p_z импульсли тушаётган электронлар сони, яъни электронлар оқими S қуйидаги

$$S = \frac{2}{h^3}\int_{P_0}^{\infty}\frac{p_Z}{m*}dp_Z\int\int_{-\infty}^{\infty}dp_x dp_y e^{\beta[P_x^2+P_y^2+P_Z^2)/2m*^{-\mu}]}$$

ифода билан аниқланади. Қутб координаталар системасига ўтайлик:

$$\beta\frac{p_x^2+p_y^2}{2m*} = \beta u^2/2m^* \quad dp_x dp_y = ud\varphi du$$

$$S = \frac{4\pi}{h^3}\int_{p_0}^{\infty}\frac{p_Z}{m^*}dp_Z\int_0^{\infty}udy\left\{e^{\beta[(u^2+p_Z^2)/2m^*-\mu]}+1\right\}^{-1} =$$

$$= \frac{2\pi}{h^3}\int_{p_0}^{\infty}\frac{p_Z}{m^*}dp_Z\int_0^{\infty}du^2\left\{e^{\beta[(u^2+p_Z^2)/2m^*-\mu]}+1\right\}^{-1}$$

ўзгарувчини ўзгартирайлик: $\dfrac{\beta u^2}{2m^*} \to u$

$$S = \frac{4\pi kTm^*}{h^3}\int_{p_0}^{\infty} dp_Z\,\frac{p_Z}{m^*}\int_0^{\infty} du\left\{\exp\left[u+\beta\left(\frac{p_Z^2}{2m^*}-\mu\right)\right]+1\right\}^{-1} =$$

$$= \frac{4\pi kTm^*}{h^3}\int_{p_D}^{\infty} dp_Z\,\frac{p_Z}{m^*}\left\{-\ln\left[1+\exp\left(-u-\frac{\dfrac{p_Z^2}{2m^*}-\mu}{kT}\right)\right]\right\}_{u=0}^{u=\infty} =$$

$$= \frac{4\pi kTm^*}{h^3}\int_{p_D}^{\infty} dp_Z\,\frac{p_Z}{m^*}\ln\left\{1+\exp\frac{\mu-\dfrac{p_Z^2}{2m^*}}{kT}\right\}$$

Ўзгарувчини қуйидагича ўзгартирайлик:

$$y = [p_Z^2/2m^* - \mu - \lambda + h\nu]/kT$$

$$S = \frac{4\pi m^*(kT)^2}{h^3}\int_{0_0}^{\infty} dyIn\left\{1+\exp\left[\frac{h(\nu-\nu_0)}{kT}-y\right]\right\} = AT^2\varphi(\delta) \qquad (2)$$

Ҳар бир электроннинг металлдан чиқш эҳтимолини α билан белгилайлик. Бу ҳолда (2) ни электрон заряди *e* га α га кўпайтириб, ҳосил бўлаётган фототок *I* ни аниқлаймиз:

$$I = -eaS = -eaT^2\varphi(\delta) \qquad (3)$$

$$\delta = h(v - v_0)/kT \qquad (4)$$

Олинган натижа экспериментга яхши мос келади.

IV боб. Ўта юқори температурали ва зичликли модда ҳолатлари.

1-§. Кириш

Фараз қилайлик, зичлик жуда катта бўлмаган ҳолда, модда температураси ортиб борсин. Агар модда қаттиқ агрегат ҳолатда бўлса, у суюқ ҳолатга, ундан кейин эса газсимон ҳолатга ўтади. Температура бир неча минг градусга кўтарилганда термик диссоциация содир бўлади, яъни молекулаларнинг атомлари орасидаги химик боғлар (улар 10^{-1}*эВ* тартибда) узилади, молекулалар атомларга ажралади; Бу ҳолатдаги газлар атомлардан ташкил топадилар. Агар температура янада ортиб $10^4 K$ дан ортса, атом ядролари билан электронлар орасидаги боғланишлар (улар бир неча электрон – вольт тартибида; 1*эВ*=$10^4 K$) узилиб, атомларда ионлашиш ҳодисаси юз бера бошлайди; температура $10^7 K$ да модда тўла ионлашган бўлиб, у ионлар (ядролар) ва электронлардан иборат плазма ҳолатида бўлади.

Температуранинг яна ортиши билан ядровий реакциялар бошланади ва $10^9 K$ да ядролар парчалана бошлайди; (ядрода боғланиш энергияси млн *эВ* тартибда бўлади); температура $10^{11} K$ бўлганда модда протон ва электронлардан иборат бўлади; нейтрон

$$n \to p + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

Реакция аосида протон ва электронга айланади ва антинейтрино ҳосил бўлади. Температура $10^{13} K$ дан (энергия E=10*эВ* дан) юқори бўлганда нуклонларнинг туғилиши ва уларнинг бошқа элементар зарраларга айланиши ушбу

$$e^{+} + e^{-} \leftrightarrow p + \tilde{p}$$

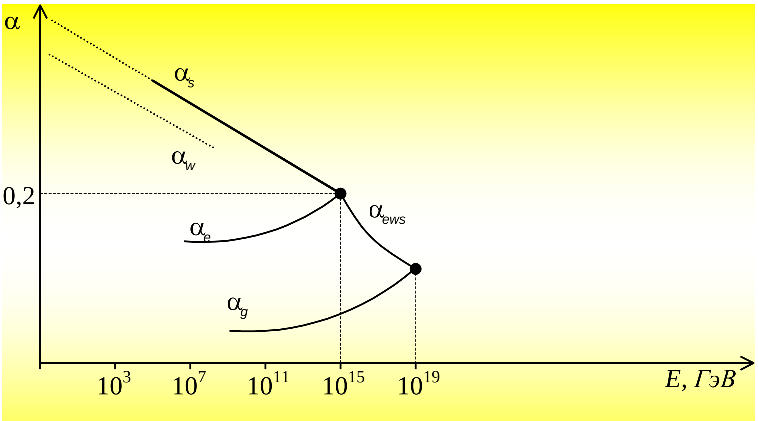
$$e^{+} + e^{-} \leftrightarrow \text{адронлар.}$$

схемалар бўйича содир бўлиши мумкин. Температура орта бориб, $10^{15}K$ (яъни энергия $E=10^2$ *ГэВ*) га етганда элементлар зарраларнинг бир-бирига айланиши кучаяди. Шу билан бу ҳолда зарралар орасидаги электромагнит ўзаро таъсир ва заиф (кучсиз) ўзаро таъсир бирлашиб, бир умумий ўзаро таъсирни (уни элза ўзаро таъсир деб атадик) содир қиладилар.

Температуранинг $T=10^{28}K$ (Энергиянинг $E=10^{15}$ *ГэВ*) қийматларида адронлар (барионлар ва мезонлар) ўз таркиблари-кваркларига ажралиб кетадилар, бунда кварклар ва лептонлар орасида ўзаро ўтишлар ва айланишларда (масалан, $uu \leftrightarrow X \leftrightarrow e^{+}\tilde{d}\,, ud \leftrightarrow Y \leftrightarrow \tilde{\nu}_e \tilde{d}$ ўзаро айланишларда), барион заряди сақланишининг бузилишини назарий жиҳатдан кўрсатиш мумкин. (бу ерда u, d-кварклар). Буюк бирлашув назариясига кўра, бу ҳолатда элза ва кучли ўзаро таъсирлар, бир умумий ўзаро таъсирни содир этадилар. Уни биз элзакуч ўзаро таъсир деб атадик.

Ниҳоят, чегаравий ўта юқори температура $T\approx10^{32}K$ да (энергия $E\approx10^{19}$ *ГэВ* бўлганда) ҳозирги замон тасаввурларига кўра, зарралар орасида элзакуч ва гравитация ўзаро таъсирларни бирлигини содир қилувчи –ягона ўзаро таъсир мавжуд бўлади. Бу ҳолатда материя бир онгина, яъни $t\sim10^{-44}$ секундгина “яшайди”.

Энергиянинг юқори қийматларида (юқори температураларда) электромагнит ўзаро таъсирни тавсифловчи константалар α_c кучли ва заиф (кучсиз) ўзаро таъсирларни характерловчи константалар α_s ва α_w ҳамда гравитация доимийси α_g умуман айтганда, ўзгарадилар. Улар схематик равишда 4.1–расмда кўрсатилган.



4.1-расм.

Энди биз зичлик ортгандаги модда ҳолатлари билан танишайлик. Моддалар ўзларининг химик таркибларига кўра, нормал шароитда жуда хилма-хил бўлсаларда, моддалар хоссаларининг бу хилма-хиллиги босим ортиши билан камайиб, «силлиқланиб» боради.

Бунинг сабаби шуки, босим орта бориб, 10^8 атм. Тартибида бўлганда химик хоссаларнинг ҳар хиллигига сабабчи бўлган атомларнинг юқори қобиғидаги электронлар, ўз атомларидан ажралиб чиқадилар; ички қобиқдагилари эса, аксинча зичлаша борадилар.

Босим ортиб 10^{12}атм тартибда бўлганда, электронларнинг ядро билан ўзаро таъсири муҳим роль ўйнайди. Бу ҳолда моддани, асосан, айниган электрон-газ деб ҳисоблаш мумкин.

Босим 10^{18}атм (зичлик $\rho \approx 10^6$ *г/см*^{3}) бўлганда, айниган газ релятивистик характерга эга бўлади, яъни электроннинг тезлиги ёруғлик тезлигига яқин бўлади.

Босимнинг яна ортиши (зичликнинг катталашиши) туфайли электронлар билан ядролардаги протонлар орасида

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

ядро реакциялари бошланади ва босим ортиб 10^{24}атм (зичлик $\rho \approx 10^{11}$*г/см*^{3}) тартибга етганда нейтронлашиш жараёни туфайли модда ҳолатида нейтронлар устунлик қилади ва босим яна ортиб 10^{25}атм, зичлик $\rho \approx 10^{12}$ *г/см*^{3} қийматга эришганда, ядролар беқарор бўлиб, парчаланиб кетади ва бунда модда асосан нейтронлардан иборат Ферми-газ ҳолатга ўтади. Босим 10^{27}атм бўлганда бу Ферми-системанинг зичлиги ядро зичлиги $\rho \approx 10^{14}$ *г/см*^{3} га тенг бўлади.

Ҳозирги зомон тасаввурига кўра, зичликнинг янада ортиши туфайли нейтронлар ҳам парчаланиб, кварклардан иборат модда ҳолати содир бўла бошлайди. Бунда зичлик 10^{15}*г/см*^{3}–10^{26}*г/см*^{3} ва ундан юқори тартибларда бўлади. Модданинг юқоридаги ҳолатлари юлдузлар, митти юлдузлар, нейтрон ва кварк юлдузларда намоён бўладилар. Модданинг бу ҳолатлари Оламнинг пайдо бўлган пайтда ва унинг эволюцияси жараёнидаги эраларда ҳамда юлдузлар ва уларнинг эволюциясида намоён бўладилар.

Бизга маълумки, атом ядроси протон ва нейтронлардан улар эса ўз навбатида кварклардан иборатдир. Шунингдек енгил зарралар-лептонлар ёки нуқтавий зарралар деб аталувчи электронлар, мюонлар, таонлар ва нейтринолар ҳам фермионлардир. *Олам пайдо бўлиб, **«Катта портлаш»** дан кейин у кварк ва лептонлардан иборат даврни бошдан кечиради.* Олам эволюциясининг кейинги даврларида ҳамда юлдузлар ўз эволюцияларида юқори температурали ва босимли ҳолатларда бўлганлар. Энди,Олам,юлдузлар ва уларнинг эволюциялари билан қисқача танишайлик.

2-§. Оламнинг аввалги эралари

*Ҳозирги замон тасаввурларига кўра, Олам физик вакуумдан **квант флуктуация** натижасида* $5{,}2 \cdot 10^{-45}$*секунд давомидан пайдо* *бўлган. Сўнг, Планк эрасида, Оламнинг ёши* $1{,}3\cdot10^{-43}$ *секунд бўлганда «Катта портлаш» юз берган.*[1]

Бунда Оламнинг физик параметрлари $T\approx10^{32}K$ ва $\rho\approx10^{94}$ *г/см* қийматларни қабул қилади. *Кейин Оламнинг* ***кварк-лептон эраси*** *10^{-43}–10^{-36} секунд давом этиб, бу даврда унинг параметрлари: температураси $T=10^{28}K$, зичлиги* $\rho\approx10^{80}$ *г/см^3, энергияси* $E\approx10^{15}$ *ГэВ тартибда бўлган.* Оламнинг ёши 10^{-4} секунд бўлганда, эркин кварклар даври тугаб, улар адрон «қопи»га (*уни конфайнмент ҳодисаси – асирга тушиш дейилади*) тушганлар ва барионлар ва мезонларни ҳосил қилганлар. Бунда Олам параметрлари $T\approx10^{12}K$, $\rho\approx1{,}5\cdot10^{15}$ *г/см*^{3}, $E\approx300$ *мэВ* дан иборат бўлган.

Олам пайдо бўлгандан кейин, 200 секундларча вақт давомида, унинг жўшқин даври тугаб, температура 1 млрдга тушади. Бу даврда, 200 секунд ёшли Оламда водород ва гелий атомларининг ядролари мос равишда тахминан 70 ва 30 фоизларни ташкил этади. *Сўнг, Оламнинг протон, гелий ядролари электронлар ҳамда нейтрино ва фотонлардан иборат* ***плазма даври*** *бошланган давр 300 минг йилча давом этган.* Бу даврнинг охирида Олам температураси $T\approx4000K$ ($E\approx0{,}4$*эВ*), зичлиги эса $\rho=3{,}5\cdot10^{-18}$ *г/см*^{3} атрофида бўлиб, водород ва гелий ядролари билан электронлар рекомбинацияси учун шароит вужудга келади.

Оламнинг бу температурали ҳолатида нейтрал водород ва гелий атомлари пайдо бўла бошлайди. Бу давр тахминан 700 минг йилча давом этади. Космология учун муҳим бўлган бу даврда модда ва

---

[1] Авторнинг Гоясига асосан, вакуумдан икки зарра – планкеон ва анти планкеон пайдо булади. Сунг улар Планк эрасида аннигиляцияланади, яъни «Катта портлаш» содир этади.

нурланиш бир-биридан ажралади. *Мазкур* ***плазма рекомбинацияси*** *эрасининг охирида, Олам 1 млн ёшга киради.* Шу билан оламнинг "тинч" даври бошланади ва у 1 млрд йилча давом этади. Олам эволюциясидаги эралар қуйидаги 1-жадвалда келтирилган.

Олам эволюцияси.

1-жадвал.

Олам эралари	*Вақт*	*Олам ҳолати*
Олам пайдо бўлиши (туғилиши)	Туғилиш жараёни давомлилиги $\chi = 5{,}2 \cdot 10^{-45}$ *сек* (вақт кванти хронон)	Физики вакуумда квант флуктуация туфайли Олам туғилиши жараёни. Космология сингулярлиги; локалон $l_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-34}$ *см*.
Планк эраси	$t_p = 8\pi\chi \approx 1{,}3 \cdot 10^{-43}$ *сек*	Катта портлаш. Планкеон-антипланкеон жуфти аннигиляцияси.
Кварк-лептон эраси	$(1{,}3 \cdot 10^{-43} - 10^{-36})$ *сек*	Кварклар ва лептонлар бир-бирига айланаоладилар. Барион зарядининг сақланиши қонуни бузилади.
Кварклар,лептонлар плазмаси эраси	$(10^{-36} - 10^{-4})$ *сек*	Кварклардан барионлар ва мезонлар ҳосил бўлаборади. Эранинг охирида эркин кварклар тугайди.
Лептонлар эраси	$(10^{-4} - 10^{-1})$ *сек*	Нуклонлар, лептонлар, фотонлар.
Енгил ядролар синтези; радиация эраси	$(1 - 200)$ *сек*	H^2, H^3, He^3, He^4
Юқори температурали плазма	200*сек* 300000*йил*	Ионлашган водород $(\approx 70\%)$, гелий $(\approx 30\%)$, электронлар ва фотонлар.
Плазма рекомбинацияси	$3 \cdot 10^5 - 10^6$ *йил*	Плазманинг нейтрал атомлардан тузилган муҳитга айланиши.
Атамар Олам	$10^6 - 10^9$ *йил*	Оламнинг фотонлар учун шаффоф бўлиши.
Юлдузлар, галактикалар	$10^9 - 2 \cdot 10^{10}$ *йил*	Юлдузлар ва галактикаларнинг пайдо бўлиши. Юлдузларда нуклонлар

олами		синтези. Ўтаянги, митти, нейтрон ва кварк юлдузлар, қора ўралар, қуёш системасининг пайдо бўлиши.

3-§. Юлдузларда элементлар синтези

4. 1-жадвалдан кўринадиган, Олам ёши 1 млрд йил бўлганда, унинг «тинч» даври тугаб, катта масштабдаги космик қурилишлар даври бошланади. Бу даврда асосан қурилиш материали-водород ва гелийдан бирламчи юлдузлар пайдо бўла бошлайди. И.Кантнинг (1724-1804) гиепотезасига кўра, Оламни тўлдирган хаос ҳолатидаги материядан тортилиш ва итариш кучлари туфайли Оламнинг катта масштабдаги объектлари пайдо бўлган). Гравитация тортилиш кучи натижасида модда сиқилади, у қизийди ва термоядро реакцияларининг боришига имкон туғилади. Бу ерда шуни таъкидлаш жоизки, Оламни ташкил этган модда массасининг 99 фоизини барионлар (водород ва гелий), 1 фоизга яқинини фотонлар, электронлар эса жуда кам қисмини ташкил этади. Бошқача айтганда, галактикалараро тортилиш кучини, юлдузлар ҳолати ва уларнинг эволюциясини асосан барионлар (фермионлар) аниқлайди. Демак, юлдузлар таркибини тушуниш учун, жумладан элементларнинг пайдо бўлишини билиш учун, ядро моддаси таркибини билиш лозим бўлади.

Ядро протон ва нейтронлардан иборат; протон ва нейтрон-нуклоннинг икки ҳолатдаги кўринишларидир. Бу ҳолда ядронинг ҳолати унинг нуклонлари билан аниқланади. Аммо температура ва зичлик орта бориб, $T \geq 10^{12} K$ ва $\rho \geq 1{,}5 \cdot 10^{15}$ г/см^3 қийматларга эришганда нуклонлар (протон, нейтрон) кваркларга ажралади: кварк-глюон плазма ҳосил бўлади; кварклар ўзларининг адрон «қоплари»дан «озод» бўладилар. Бу ҳолда ядрони кўп кваркли система деб қараб, уни тадқиқ этиш лозим бўлади.

Паст температурада ($T = 0K, p_0$ да) ядро моддаси «суюқлик» фазасида бўлса, температура ортган сари у газсимон фазага (нуклонлар алҳида-алоҳида ҳолда) ўтади. Температура ортиши билан барионлар ва оғир барионлар пайдо бўлиши мумкин. Температуранинг янада ортиши билан барионлар парчаланиб, кварклар кварк-глюон (глюон-кварклар орасидаги кучли ўзаро таъсир майдоннинг квантлари) ҳолатига ўтади.

Ҳар бир кварк нуклон (ёки мезон) таркибида кварк-антикварк ҳамда глюон булутларга ўралган бўлади, яъни «шуба»га эга бўлади.

Ҳозирги вақтда 3 та авлодга тегишли $u,d;s,c;b,t$ кварклар бизга маълум. Улар Оламнинг пайдо бўлган биринчи онларида уни ташкил этган дастлабки зарралардир.

Оламнинг ёши 10^{-10}*сек* бўлганда, адрон даври бошланишида биринчи авлод $u,d;$ кварклардан протон ва нейтрон (нуклонлар) пайдо бўла бошлайди. Олам ёши 10^{-4} бўлганда эркин *u,d* кварклар адронларга «конденсацияланиб» бўлади. Бу ерда шуни айтиш жоизки, 2-ва 3-авлод кварклар Олам қурилишда иштирок этмайдилар. Олам эволюциясида нуклонлар пайдо бўлиши даври 10^{-10}-10^{-4} секунд жуда муҳим даврлардан ҳисобланади. Сўнг, 1*сек*–200*сек* вақт давомида Оламдаги ҳосил бўлган протон-нейтронлардан иборат плазмада ядро реакциялари (нуклеосинтез) давом этиб, космик структурани –галактика ва юлдузларнинг таркибини ҳосил қилувчи H^1,H^2,He^3,He^4,Li^{-6},Li^{-7} лардан иборат газ ҳосил бўлади: бу ҳосил бўлгангаз, асосан, водород ядроси (протон) ва гелий ядроси He^4, дан иборат; қопган ядролар жуда оз қисмни ташкил этади; масалан, H^2-10^{-3}-10^{-4} ва He^3-10^{-5}-10^{-6} температуранинг тушиши, плазманинг зичлиги камайиши туфайли ҳамда нейтроннинг емирилиши сабабли бу бирламчи нуклеосинтез тезда, Оламнинг ёши 200 *сек* бўлганда тугайди.

Протон (=70%), гелий ядроси (=30%), фотон, электрон, нейтрино ва бошқалардан иборат юқори температурали ***плазма даври*** *узоқ вақт, 300 минг йўл давом этади. Сўнг, 700 минг йил* ***рекомбинация даврида*** *нейтрал енгил атомлар ҳосил бўлади.* Шунда Олам ёши 1 млн йил бўлади. Шундан сўнг, бирламчи юлдузлар пайдо бўлабошлайди ва бу жараён 1 млрд йилча давом этади; бирламчи юлдузлар пайдо бўлиши ҳозирда ҳам содир бўлмоқда. Бу бирламчи юлдузлардаги гермоядро реакциялари туфайли бошқа Элементларнинг, жумладан оғир элементларнинг ядролари ҳосил бўлган. Бу жараёнлар Олам ёши 1 млрд йилга еткандан кейин бошланган.

Ҳозирги вақтда етарли даражада маълумки, массаси *M* Қуёш массаси M_0 дан катта ёки унга тенг, яъни $M \geq M_0$ массали бирламчи юлдузларда 4 этапдан иборат термоядро синтези кечади.

1. Қуёш массасига тенг ёки ундан кичик массали юлдузларда, асосан, протон-протон цикли

$$H' + H' \to H^2 + e^+ + \nu_e; \quad H^1 + H^2 \to H_e^3 + \gamma; \quad H_e^3 + H_e^3 \to H_e^4 + 2H'$$

орқали водород ёниб, гелийга айланади. Юлдузлардаги бу цикл $T=10^7 K$ да бошланиб, жуда узоқ вақт давом этади. (Қуёшда ҳам шундай термоядро реакциялари давом этяпти. Қуёш бирламчи юлдуз эмаслигини эслатамиз).

2. Водород, асосан, ёниб бўлгандан кейин, юлдуз ядроси сиқила бошлайди. *Унинг температураси $T=10^8K$ бўлганда.*

$$3He^4 \to C^{12} + \gamma$$

*ядро реакцияси (**Солпитер реакцияси**) бўйича гелий ёнбошлайди.* Юлдузнинг ташқи қобиғи эса кенгая боради: бу қизил гигант юлдуздир. Бундай юлдузнинг массаси $M>M_0$ бўлади. Соппитер реакциясини қуйидагича тушуниш мумкин: дастлаб

$$H_e^4 + H_e^4 \to B_e^\gamma + \gamma$$

ядро реакция юз беради. Бунда B_e^γ нинг яшаш вақти ниҳоятда кичик, 10^{-15} секунд тартибда. Шу вақтда учинчи ядро He^4 у билан тўқнашиб

$$B_e^\gamma + H_e^4 \to C^{12} + \gamma$$

реакция содир бўлиши мумкин.

Умуман $3H_e^4 \to C^{12}$ реакцияда 7,7*мэВ* энергия ажралади. Назарий ҳисоблаш кўрсатадики, маълум шароитда ($T \approx 10^\gamma K$, $\rho \approx 10^2$ *г/см*^{3}) бу реакция эфоректив равишда бориб, углерод C^{12} нинг Оламдаги тарқалганлигини таъминлаш учун C^{12} да 7,7*мэВ* Энергияли сатҳ мавжуд бўлиши зарур. Ҳаракатланарлиси шундаки, худди шундай резонане сатҳ C^{12} да ҳақиқатдан ҳам мавжуд экан; бунинг натижасида реакция катта эҳтимол билан бориши таъминланган. Худди шу ҳолатдагина ядро C^{12} нинг учта H_e^4 га емирилиши секинлашади, яъни Эҳтимоли кичик бўлади ва $C^{12}+H_e^4$ ва $C^{12}+H^1$ реакциялар боришига имкон туғилиб, юлдузларда темоядро реакциялар занжири давом этишига йўл очилади.

Демак, барча оғир ядроларнинг ҳосил бўлишига (яратилишига) олиб берадиган биттагина йўл – бу C^{12} нинг 7,7*мэВ* энергияли сатҳидир.

Жаннатга кирадиган (ўтадиган) биттагина кўприк бўлгани каби, органик ва ноорганик дунёга ўтадиган ва бинобарин Оламда ҳаётнинг пайдо бўлишини (унинг яратилишини) таъминлайдиган йўлга ўтадиган кўприк – бу C^{12} нинг шу 7,7*мэВ* энергияли сатҳидир.

Ҳисоблашларга асосан, юлдузлардаги ***протон-протон циклида*** *водороднинг ёниши учун бир неча ўн млрд йил талаб этилса, гелийнинг ёниши учун эса атиги тахминан ўн млн йил вақт талаб этилади.*

3. Юлдуздаги температура $T \approx 10^9 K$ бўлганда C^{12} ва 0^{16} ядролар ёнабошлайди, бунинг натижасида неон Ne^{20}, натрий Na^{23}, магний Mg^{24}, кремний Si^{28} ва бошқа ядролар пайдо бўлади. Бу реакциялар бир неча минг йилча давом этди.

4. бирламчи юлдузларда температура $T \approx 3 \cdot 10^9 K$ ва бундан ортиқ бўлганда *Si* ядроси ёна бошлайди ва натижада ядро реакциялари туфайли, энг катта боғланиш энергиясига эга бўлган Ni^{54} ва Fe^{56} гача ядролар пайдо бўлади. Шу билан юлдузлардаги термоядро реакцияларида оғир ядроларнинг пайдо бўлиши тугайди. Кейинги оғир элементлар пайдо бўлиши учун *s*-процесс (slow - секин) содир бўлиши зарур; яъни нейтронни ядро ушлаши, сўнг β - емирилишига дучор бўлиши керак. Нейтронлар оқими (дастаси) эса массаси $M>2M_0$ бўлган массив юлдузлардаги

$$C^{12}+C^{12} \to Mg^{23}+n; O^{16}+O^{16} \to S^{31}+n$$

ядро реакциялари туфайли юз беради. Натижада *s*-процесс бориши учун имкон туғилади.

s-прцессда Z ядро томонидан нейтронларнинг икки кетма-кет ушланиши учун кетган вақт, ҳосил бўлган Z ядронинг β - емирилиши вақтидан катта бўлади, яъни ядро нейтронни ушлагандан (забт этгандан) кейин β - емирилишга улгуради ва натижада Z+1 ядро ҳосил бўлади. s -процессининг содир бўлиши учун бир секунда 10^{15}-10^{16}та нейтронлар оқими керак. Бу ҳолда табиатда учрайдиган оғир элементларнинг олиниши учун бир неча минг йил зарур бўлади.

s-процессда Bi^{209} гача бўлган оғир ядролар олинишда мумкин. Лекин ундан оғирроқ ядролар олиниши мумкин эмас, чунки, уларнинг яшаш вақти давомида β - емирилиши билан бирга ядродан протон ажралиб чиқиш реакцияси содир бўлади, бундай ядролар навбатдаги иккинчи нейтронни забт этгунга қадар парчаланиб кетади. Демак, Bi^{209} дан оғир ядроларнинг табиатда учрашини тушунтириш учун бошқа процесслар зарурлиги тақоза этилади.

Ядро томонидан кўп нейтронларни кетма-кет ушлаб олиниш вақти, ҳосил бўлган ядро яшаш вақтидан кичик бўлган процессларни ч-процесси (rapid-тез) дейилади. 3i^{209} дан оғир ядролар олиниши учун z-процесс иштироки зарур бўлади. Бу r-процесс эса секундига 10^{27}-10^{40} та нейтронлар оқими бўлишини тақоза этади. Нейтронларнинг бундай катта оқими ўтаянги юлдузлар портлашида, галактика ядроси портлашида ҳосил бўлиши мумкин. Бу оқимлар (яъни r-процесслар) 0,1 секунддан бир неча ўн секундгача бўлган қисқа муддатда содир бўлади.

Шундай қилиб, s-процесс бир неча минг йил, r-процесс бир неча дақиқа давом этади ва натижада ҳар хил оғир ядролар ҳосил бўлади. Кейин эса, миллиард йиллар давом этадиган юлдузлардаги нуклеосинтез Оламда ҳар хил химик элементларнинг пайдо бўлишига, шунингдек ҳамма органик ва ноорганик моддаларнинг, жумладан ҳаётнинг пайдо бўлишига олиб келади.

4-§. Юлдуз ҳолатлари

Модданинг юқори температурали юқори босими (катта зичликли) ҳолатлари юлдузларда намоён бўлади. Юлдузларнинг типик вакили Қуёшдир. Қуёш асосан водород ва гелийдан иборат плазмадир. Бундай юлдузни шар шаклидаги водороддан иборат плазма деб, унга идеал газ ҳолат тенгламасининг қўллаб, унинг марказидаги босим ва температурани баҳолаш мумкин.

Юлдузлар учун кузатиладиган катталиклар унинг массаси *M* ва радиуси *R* эканлигини назарда тутиб, босим учун ўлчамлик нуқтаи назардан

$$[P] = [G]^x [M]^y [R]^z$$

тенглик ўринли бўлганидан, қуйидаги

$$P \sim \frac{GM^2}{R^4} \qquad (1)$$

муносабатни осонликча олинади. (1) асосида Қуёш марказидаги босимни баҳолаш мумкин $(M_\Theta = 2\cdot 10^{30}\,кг,\ R_\Theta \approx 7\cdot 110^{8}\,м)$:

$$P_\Theta \sim 1{,}1\cdot 10^{15}\,Па = 10^{10}\,атм \qquad (2)$$

Гравитация кучи туфайли сиқилиш натижасида юлдуз марказида ҳосил бўлган босим *P*(1), стационлар юлдузлар учун иссиқлик туфайли хаотик ҳаракат натижасида ҳосил бўлган газнинг босими P_m га тенг бўлади

$$P = P_T \qquad (3)$$

P_T ни аниқлаш учун идеал газ ҳолат тенгламаси

$$P_T V = \frac{m}{\mu} RT \qquad (4)$$

(R – газ доимийси, μ - моляр масса) ифодасидан фойдаланиб, сўнг (1) ва (3) асосида Қуёш марказидаги температурани баҳолаш учун

$$T_0 \sim G\frac{M_0\mu}{R_0^4 R} \qquad (5)$$

ифодани оламиз. Бундан $T_0 \approx 2\cdot 10^7 K$ қийматини олинади. Қуёш сиртидаги температура T ни аниқлаш учун Вининг силжиш қонуни

$$\lambda_{max}T = 0{,}29\, см\ град$$

ифодасидан фойдаланилади. Бунда спектрнинг максимуми сариқ–яшил спектр қисмига тўғри келади, яъни $\lambda_{max}T = 5\cdot 10^{-5} см$. Бу ҳолда Қуёш сирти учун T=5800 қийматини олинади. Қуёшнинг (шунга ўхшаш юлдузларнинг) марказидаги $2\cdot 10^7 K$ ва сиртидаги $6\cdot 10^3 K$ температуралар фарқи туфайли унда иссиқлик ўтказувчанлик, к онвекция ва нурланиш процесслари орқали интенсив равишда иссиқлик алмашинуви содир бўлади.

Нурланувчи сирт (қатлам)нинг температурасини билганимиз ҳолда унинг интенсивлигини Стефан-Больцман қонуни $u = \sigma T^4$ асосида аниқлаш мумкин . Юлдуз нурланишининг умумий қуввати U ни юлдуз сирти $4\pi R^2$ га кўпайтириш орқали аниқланади:

$$U = 4\pi R^2 \sigma T^4 \qquad (6)$$

U ни юлдузнинг ёритилганлиги дейилади. Куёшнинг ёритувчанлиги

$$U_\theta = 4\pi R_0^2 \sigma T_0^4 = 4\cdot 3{,}14(7\cdot 10^8)^2 \cdot 5{,}7\cdot 10^{-8}(5{,}8\cdot 10^3)^4 BT = 3{,}86\cdot 10^{26} BT = 3{,}86\cdot 10^{33} эр/сек$$

Шундай қилиб юқоридаги айтганлардан кўринадики , ёрутувчанлик U билан спектр максимуми (ранг) орасида (Вин қонунига биноан) ўзаро боғланиш мавжуд. Шунингдек кўрсатиш мумкин, юлдуз массаси M

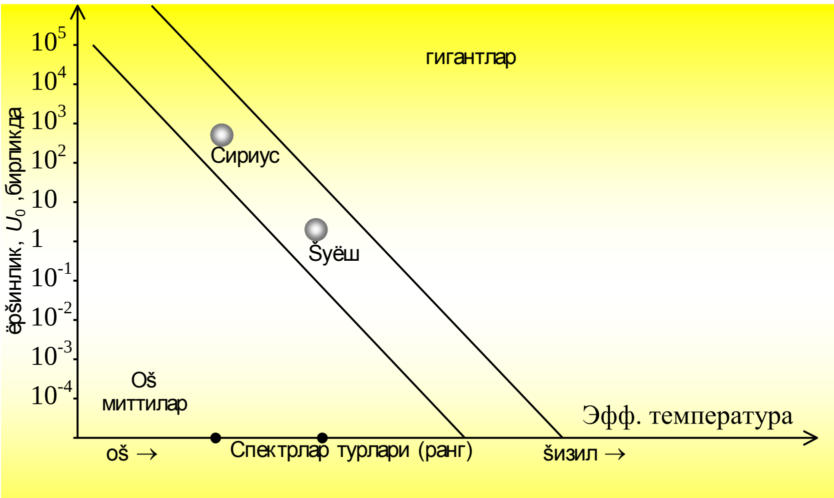
билан унинг ёритувчанлиги *U* орасида машҳур қуйидаги масса – ёритувчанлик муносабати мавжуд

$$U_0 \sim M_0^3 \qquad (7)$$

Бу муносабат жуда кўп юлдузлар учун ўринли эканлиги аниқланган. Спектр – ёрқинлик диаграммасини Герцшпруг Рессед диаграммаси ҳам дейилади (қ.4.2-расм. Герцшпрунг–Рессел диаграммаси).

Астрономик кузатишлар юлдузларнинг равшанлиги (ёруғлик даражаси) уларнинг рангига прпорционал эканлигини кўрсатдилар. Пропорцоналлик коэффиценти ҳамма юлдузлар учун тахминан бир хил. *Бу пропорционалликни графикка туширилса, улар Герцшпрунг–Рессел диаграммасига тушади, яъни кўпчилик юлдузлар эгри чизиқли бир йўлакка жойлашадилар; уни бош кетма-кетлик дейилади. Аммо бу йўлакка (полосага) тушмайдиган юлдузлар ҳам бор. Булар, ёрқинликлари ўз қизил рангига мос келмайдиган, жуда равшан қизил юлдузлар; буларни қизил гигант юлдузлар дейилади.* Шунингдек, ўзининг рангига мос келмаган хира “оқ митти” кичик юлдузлар мавжуд. Бу оқ митти юлдузлар – айниган ферми – газлардир.

Юлдузларнинг ёритувчанликлари билан спектр синфлари орасида боғланиш бўлганлиги сабабли, улар йўлакда маълум кетма-кетлик билан жойлашадилар (4.2-расм).



4.2-расм.

Юлдузларнинг жуда кўплари бош кетма-кетлик деб аталувчи полосада (йўлакда) бўладилар. Гигант юлдузлар (қизил гигант, ўта гигант) ўнг томонда юқорида: митти оқ юлдузлар эса чап томонда пастда жойлашганлар.

Масала 4.1. Қуёшнинг гравитация майдонининг потенциял энергиясини ҳисобланг ва фақат шу энергия Қуёш нурланиши учун манба бўлганда эди, у неча йилга етган бўлар эди? Олинган натижани шарҳланг.

Ечиш. Қуёшнинг (юлдузнинг) потенциал энергияси

$$V_n = G\frac{M_0^2}{R_0} \tag{1}$$

Демак,

$$V_n = \frac{6{,}7\cdot 10^{-11}(2\cdot 10^{30})^2}{7\cdot 10^8}\,Ж \sim 4\cdot 10^{41}\,Ж \tag{2}$$

Бизга маълум, Қуёшнинг ёритувчанлиги

$$U_0 \approx 3{,}86\cdot 10^{26}\,ВТ \tag{3}$$

(2) ни (3) га бўлиб, V_n қанча вақтга етишини баҳолаймиз:

$$\frac{V_n}{U_0} \approx \frac{4\cdot 10^{41}\,ж}{3{,}86\cdot 10^{26}\,ВТ} \approx 10^{15}\,сек \approx 3\cdot 10^{7}\,йил \tag{4}$$

$(1 йил \approx 3 \cdot 10^7 йил секунд)$

Изоҳ. Қуёш 5 млрд йилча нур сочиб турибди. Шу сабабли нурланиш энергияси учун гравитация сиқилиш туфайли ажраладиган энергия Қуёш нурланиши энергияси манбаи бўла олмайди.

Масала 4.2. Қуёшда термоядро реакцияси туфайли протонлар гелий ядросига айланади. Қуёшдаги 70 фоиз водороднинг ҳаммаси гелийга айланганда ажралиб чиқадиган энергияни аниқланг. Берилган: $1 маб = 1{,}66 \cdot 10^{-27} кг$, протон массаси $m_p = 1{,}00813 маб$, гелий ядроси массаси $m_{He} = 4{,}00389 маб$.

Ечиш. 4 та протондан битта гелий ядроси ҳосил бўлади:

$$4m_p \rightarrow {}_2H_e^4 + 2e^+ + 2v_e$$

Бунда масса дефекти

$$\Delta m = 4m_p - m_{He^4}\left(4{,}03252 - 4{,}00389\right) маб = 0{,}02863 маб$$

Демак, умумий массанинг

$$\frac{\Delta m}{4m_p} = \frac{0{,}02863}{4{,}03252} \approx 0{,}007$$

қисми энергияга айланади. Демак, Қуёшнинг ядро энергияси зоҳираси (запаси)

$$\Delta E \approx M_0 \frac{7}{10} \cdot 0{,}007c^2 = 2 \cdot 10^{30} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}007(3 \cdot 10^8)^2 Ж = 8{,}78 \cdot 10^{43} ж$$

Бу қиймат $8{,}78 \cdot 10^{43} Ж$ ни Қуёш ёритувчанлиги U_0 га бўлиб, энергия зоҳираси қанча вақтга етишини топамиз.

$$\frac{M_0 0{,}7 \cdot 007c^2}{U_0} \approx 2{,}31 \cdot 10^{17} сее = \frac{2{,}31 \cdot 10^{17}}{3 \cdot 10^7} = 7{,}7 \cdot 10^9 йил = 77 млд йил$$

Изоҳ 1. Қуёш массасининг ярми қолгунга қадар (яъни 35 фоиз водород қолгунча) стационар ҳолатда нур сочиб туради, деб фараз этилса, 7,7 млрд йилни 2 га бўлиб, Қуёшнинг шундай ҳолатда яна 4 млрд йилга барқарор туришинин аниқлаймиз.

Қуёш шу вақтгача 4,5-5 млрд йил «умр» кўрди, деб ҳисобланади.

Изоҳ 2.70% протонлар сони учун

$$0{,}7\cdot\frac{M_0}{m_p}=0{,}7\cdot\frac{2\cdot10^{30}кг}{2\cdot10^{27}кг}=0{,}7\cdot10^{57}=7\cdot10^{56}$$

қийматни оламиз.

Хисоблаш кўрсатадики, протон билан протон туннел эффекти туфайли бир-бирига «тўқнашиб» ядро реакцияси хосил қилиши учун 10^{10}йил тартибда вақт керак. 4 та протондан бир гелий ядроси ҳосил бўлиши учун бунга нисбатан 4 мартагача кўпроқ вақт керак. 4 та протондан 1 гелий ядроси ҳосил бўлишини 1 цикл десак, қуёшда 1 секунддаги циклларни сонини қўйидагича топамиз:

$$\text{Цикллар сони}=\frac{7\cdot10^{56}}{4\cdot10^{10}\cdot3\cdot10^{7}}\approx\frac{7}{12^{7}}10^{39}\approx\frac{цикллар\,сони}{сек}\approx6\cdot10^{38}$$

Цикллар/сек.

Хар бир циклда 26,7 МэВ энергия ажралиб чиқишини билсак, Қуёшда 1 секунда ажралаётган энергия ΔE ни топамиз

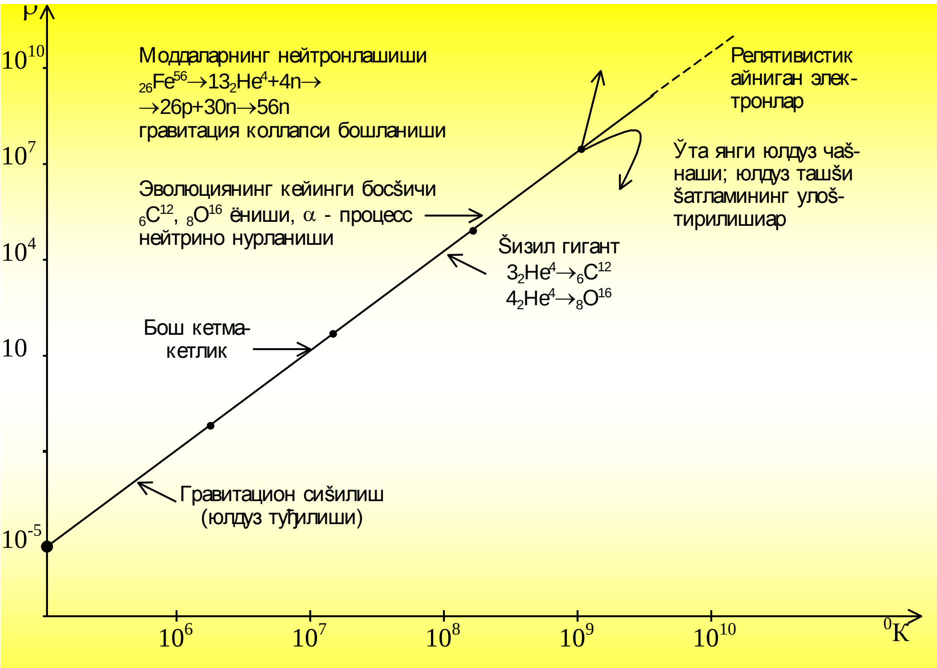
$$\Delta E\approx26{,}7Мээ\cdot6\cdot10^{38}=160{,}2\cdot10^{38}МэВ=160{,}2\cdot10^{38}\cdot1{,}6\cdot10^{-12}ВТ=2{,}56\cdot10^{27}Вт$$

Қуёшнинг кузатилишидан олинган ёритувчанлик $4\cdot10^{26}Вт$ бу $\Delta\mathrm{E}$ энергиянинг 15 фоизига ташкил этади.

Юлдузлар эволюциясининг охири оқ митти юлдузлар (ферми-газ) нейтрон ва кварк юлдузлар (ферми-суюқлик) ҳамда қора ўралар билан тугаллади. 20 миллиард (млрд) йилдан бўён Олам кенгайиши давомида унинг горизонти (чегараси) $\sim2\cdot10^{28}cm$ га ўзоқлашди; масса зичлиги

$\rho t^2 \approx 3\cdot10^6 \textit{гр}\,\textit{сек}^2/\textit{см}^3$ дан $\rho \approx 10^{-30}\textit{г}/\textit{см}^3$ гача камайди (кузатишлар $10^{-31}\textit{г}/\textit{см}^3$ қийматни кўрсатади).

Қуйидаги 4.3-расмда $M=10M_0$ массали юлдуз ҳолатини вақт бўйича ўзгариши давомида, унинг марказидаги температура T_M ва зичлик $\rho_м$ орасида ўзаро боғланиш сифат жиҳатидан кўрсатилган (қ. «Физик космоса» китоби, 227-бет).



4.3-расм.

Бош кетма-кетликдаги $M=15M_\Theta$ $M=5M_\Theta$ ва $M=M_\Theta$ массали юлдузларнинг яшаш вақти мос равишда 10 мин йил, 70 млн йил ва 10 млрд йил атрофида.

Хулоса қилиб айтганда, ҳар бир юлдузнинг тарихи-бу гравитация кучи ва газ босими орасидаги миллион ва миллион йиллар давом этган «кураши» дан иборат бўлиб, ниҳоят гравитация кучининг ғолиб келиши билан тугалланадиган драмадан иборат.

5-§.Ўта янги юлдузлар

Юлдуз марказидаги термоядро ёқилғи тугаб ундаги энергияни нейтрино нурланиши ташқарига олиб чиққандан кейин, марказ температураси пасая боради. Натижада юлдуздаги динамик мувозат бузилиб, гравитация тортиши кучи туфайли юлдуз сиқила бошлайди (коллапсланади). Тортишиш кучи айниган электрон газ босимини енгиш учун марказий ядро массаси *M* Чандресекар чегараси бўлиши зарур. Бу мувозанат бузилгани сабабли, юлдузнинг темир қобиғи жуда тез, секунднинг маълум қисмида қисилади ва шу сабабли гравитация тортишиш куча ҳисобига температура кўтарилиб, бу қобиғдаги темир "ёнбошлайди" (4.4-расм). Темир қобиқ ёниши икки процесс туфайли тезлашади:

$$\gamma + Fe^{56} \rightarrow 13He^{4} + 4n$$

$$_{Z}X^{A} + e^{-} \rightarrow _{Z+1}Y^{A} + \nu_{e}$$

Бу ҳар икки процесс ҳам электрон –газ босимининг камайишига олиб боргани учун коллапс янада тезлашади.

Ҳисоблаш кўрсатадики, гравитацион коллапс тугаши олдида кобиғларнинг марказига йиқилиши, унинг ҳаракати тезлиги марказгача бўлган масофага пропорционал бўлиб, катта масофада моддаларнинг марказга томон ҳаракати тезлиги товуш тезлигидан катта бўлади (4.4-расмда СН 1987 А юлдузнинг коллапс олдидан схематик тузилиши кўрсатилган).

Массаси жуда катта бўлган юлдузларда коллапс давом этиб, улар қора ўраларга айланиши мумкин. Ҳисоблашлар маълум шароитда (зичлиги атом ядросининг зичлиги атрофида, температура $10^{10}K$ тартибда) (1,4 –2,7) M_0 массали юлдузларда гравитация коллапси (сиқилиш) тўхтаб, қора ўраган айланмас нейтрон юлдузларга айланишни кўрсатади.

Шунингдек, ҳисоблашлардан маълум бўлишича, юлдузнинг гравитацион коллапси тахминан 200 мс (0,2 секунд) давом этади, бу давр охирида юлдуз қобиғларидаги массаларнинг юлдуз марказига томон ҳаракати тўхтайди ва 0,4 мс вақт давомида жуда кучли зарб тўлқини ҳосил бўлади.

Бошланғич тезлиги $5 \cdot 10^9$ *км/сек* га яқин бўлган бу зарб тўлқин натижасида юлдуз портлайди-ўта янги юлдуз пайдо бўлади, бунда юлдузнинг ташқи қобиқлари ўта зичлашади, температура юқори кўтарилади. Бунинг натижасида кенгаювчи қобиғларда бир қатор ядро реакциялари, жумладан $_{83}Bi^{209}$ висмутдан оғир нуклидлар синтези ҳам бўлади. Бундай ўта оқими кучли нурланиш билан кечади. Бунда юлдузларнинг ташқи қобиқлар (0,3 M_0 тартибдаги массали) жуда катта тезлик (тахминан 15000*км/сек*) билан юлдузлараро фазога тарқалиб кетади. Ўта янги юлдуз портлаши бир неча ҳафта давом этади. Қўшни, катта Магеллан булути деб номланувчи, Галактикада чақнаган (1987й) ўта юлдуз 1987 А тадқиқ қилиш кўрсатдики, портлаш натижасида тахминан 0,1M_0 миқдорда радиоактив $_{28}Ni^{56}$ синтез бўлган ва ундан β^{+}_{-}-емирилиш туфайли $_{27}Co^{56}$ ва бундан $_{26}Fe^{56}$ элементлар ҳосил бўлган.

Ўта янги юлдузлар – табиатнинг буюк ҳодиссаси бўлибгина қолмай, улар юлдузлар эволюциясида, ва демак Олам эволюциясида маълум бурилиш, босқич ролини ўйнайдиган жуда муҳим жараён ҳамдир. Ҳақиқатдан ҳам ўта янги юлдуз портлаганда, юлдузлар эволюциясида янги босқичдаги давр бошланишига уникал, наёб имконият яратилади (туғилади). Бу янги даврда табиатдаги барча химик элементлар: стабил (турғун) ва ностабил изотоплар, жумладан сийрак, кам тарқалган элементлар пайдо бўлишига имкон туғилади; юлдузлараро, галактикалараро муҳитдаги химик элементлар таркиби кескин ўзгаради: маълум температураларда портлаш натижасида ҳосил бўлган элементлардан молекулалар ва улардан мураккаб молекулалар занжири ҳамда жонли табиатнинг янада мураккаб қурилиш «ғишт» чалари пайдо бўлиши учун дастлабки шарт-шароитлар вужудга келади.

Ўта янги юлдузлар портлаганда, унинг ёритувчан кескин ортади, сўнгра нисбатан секин у сўниб боради. Бунда ёруғлик энергияси ўзининг қувватига кўра юз миллиардлаб юлдузларига эга бўлган галактика нурланиши қувватига тенглашади; портлаш туфайли 10^{53} эрг миқдор тартибда энергия ажралади. Солиштириш учун айтиш мумкинки, бир неча 10 млрд йил давомида ҳам Қуёш фазога бунча энергияни тарқата олмайди.

1987 йилнинг 23 февралига ўтар кечаси канадалик астроном Я.Шелтон томонидан қушни галактика Катта Магеллан Булутида ўта янги юлдуз портлашини кузатиш астрономияда ҳақиқий сенсация бўлди. Бу гравитацион коллапсни ўрганиш, оғир элементлар синтези ҳамда бунда кучли нейтрино нурланиши мавжуд эканлигини кўрсатди.

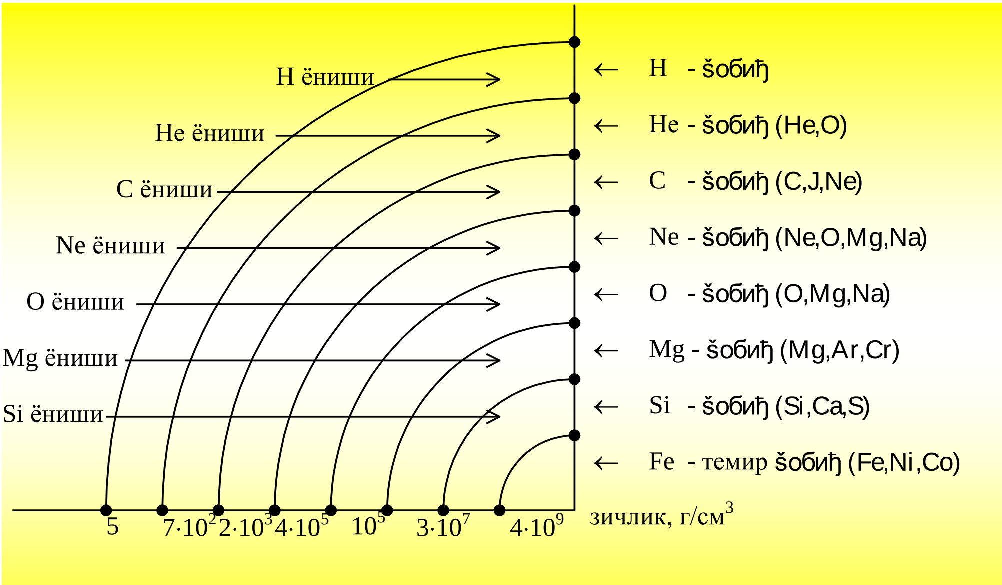
Бу ўта янги юлдуз 1987 А ни компьютерда моделлаштирилиш кўрсатдики, портлаган юлдуз 11 млн йил олдин пайдо бўлган ва унинг массаси $18M_0$ атрофида бўлган.

Америкалик физиклар С.Вусли ва Т. Уивер ҳисоблаши бўйича олинган юлдузлар қобиғларининг ёниш динамикаси қуйидаги 4.2-жадвалда берилган.

Термоядро реакцияси	Температура К	Ёниш (реакция) вақти

$H \rightarrow He$	$4 \cdot 10^6$	10^7йил
$He \rightarrow C, 0$	$1{,}9 \cdot 10^6$	10^6 йил
$C \rightarrow Ne, Mg, Na$	$7 \cdot 10^8$	$1{,}2.10^4$ йил
$Ne \rightarrow Si$	$1{,}6 \cdot 10^9$	12 йил
$0 \rightarrow S$	$2{,}1 \cdot 10^9$	4 йил
$Si, S \rightarrow Ni, Fe$	$3.4 \cdot 10^9$	1 ҳафта

Қуйидаги расмда 1987 А ўта янги юлдузнинг портлаш олдидаги тузилиши схематик кўрсатилган



4.4-расм.

Бевосита коллапс бўлиши олдида $18M_0$ массали *СН* 1987 А юлдузнинг тузилиши схематик курсатилган. Юлдузнинг ташқи қобиғининг радиуси 2.10^7*км* га, кремний қобиғи радиуси 1000*км* га яқин. Коллапс туфайли пайдо бўладиган кучли зарб тулкини қобиғларни ядродан зарб билан учиб кетишига олиб келади ва шу билан бир вақтда уларда қўшимча термоядро реакциялари содир бўлиб, оғир ядролар синтезига сабаб бўлади.

6-§. Оқ митти юлдузлар

1. Астрофизика галактикадаги типик юлдузларнинг таркибини, уларнинг эволюциясини ўрганади. Қуёш ҳам шу юлдузлар сафига киради.

Одатдаги юлдузларнинг, жумладан, Қуёшнинг марказий қисмида термоядро реакциялар жараёнлари бориб, бунда юқори температура туфайли катта газ босими P_T ва нурланиш босими $P_н$ юлдуз моддаларини кенгайтиришга ҳаракат қилади. Аамо юлдуз моддаларининг ўзаро гравитация кучлари туфайли ҳосил бўлган босим $P_{гр}$ юлдузлар моддасининг кенгайишига имкон бермайди. Шундай қилиб, юлдузларда динамик мувозанат ҳолати содир бўлади.

Бундай ҳолатлардага юлдузларни характерлайдиган (тавсифлайдиган) параметрлар, масалан нурланиш, босим, зичлик ва бошқалар, ўзаро бир-бири мувофиқлашган бўлади. Шуларга қараб юлдузларнинг параметрларини маълум аниқлик билан ҳисоблаш мумкин. Масалан, Қуёш марказида масса зичлиги $\rho \approx 160 г/см^3$ температура $T \approx 1{,}6 \cdot 10^7$ *град*. Қуёш радиуси $R_\Theta \approx 6{,}96 \cdot 10^{10}$ *см* Ер шари радиусидан 109 марта катта; Қуёш массаси $M_\Theta \approx 1{,}99 \cdot 10^{33}$ гр Ер массасидан 333000 марта катта; Эркин тушиши тезланиши $g = GM_\Theta / R^2{}_\Theta \approx 2{,}74 \cdot 10^4$ *см/сек*^{2}; нурланиш қуввати $3{,}86.10^{33}$*эрг/сек*.

Вақт ўтиши билан юлдузлардаги ядро ёқилғи зоҳираси (запаси) водород камая боради. Масалан, Қуёш ҳар секунда нурланиши туфайли ўзининг 4,5 млн тоннага яқин массасини йўқотади. Умуман ядро ёқилғи камая бориши туфайли (бу миллиард йиллар давом этадиган жараён) температура камайиши ва думак газ босими, нурланиш босими камайиши сабабли мувозанатли ҳолат бузила боради ва гравитацион сиқилиш кучая боради.

Юлдузнинг ташқи қобиғида эса ҳали протон-протон циклли термоядро реакциялари давом этиши туфайли юлдуз кенгая бориб Қуёш системаси тартибидаги ўлчамга тенглашади. Ердаги ҳарорат 700-1000*K* тартибда бўлади, яъни юлдуз қизил гигантга айланади. *Қизил гигантнинг совиши натижасида ташқи қобиғи фазога сочилиб кетади; унинг гелийдан иборат қолган зич ядроси оқ митти юлдуз дейилади.* Бу $10^5 K$ температурали оқ митти юлдузлар (Қуёш ҳам шу типдаги юлдуз) иссиқлик зоҳираси ва гравитацион сиқилиш ҳисобига нурланадилар ва натижада 10^8 йиллар давомида совуб борадилар. Юлдузлар бошидан кечадиган бу эволюцион жараёнда, ўз массаларининг кичик ёки катталигига қараб, оқ митти (карлик) юлдузга (ферми-газ) ёки нейтрон юлдузга (ферми-суюқлик) ёки кварк юлдузга (ферми-газ) ёки қора ўрага айланадилар.

Шундай қилиб, юлдузларнинг бу эволюцион этапидаги ҳолатини ўрганиш учун уларни характерлайдиган параметрлар (масалан, босим, температура ва бошқалар) ни аниқлаш учун квант статистикага, жумладан, ферми статистикасига асосланиш зарур бўлади.

Агар юлдуз массаси $M \approx 1{,}4 M_{\Theta}$ га тенг ва бундан кичик бўлса, гравитацион сиқилиш туфайли у оқ митти юлдузга айланиди. Бу жараёнда модда (электронлар) ферми-газ ҳоссасини олаборади. Бундай оқ митти юлдузларда зичлик тахминан $1{,}5 \cdot 10^6 \, г / см^3$ (Ван Маанен юлдузида) бўлганда газ (ферми-газ) босими билан гравитация сиқилиши натижасидаги босим тенглашиб, оқ миттида динамик мувозанатли ҳолат содир бўлади, унинг ўлчами Ер радиуси $\left(R\sim10^{4}\,км\right)$ билан солиштирарли даражада кичик бўлади.

Динамик мувозанат бузилгандан кейин, баъзан гравитация сиқилиши жуда тез содир бўлиши мумкин. Бунда иссиқлик ажралиб чиқиши, мувозанатли ҳолатдагига нисбатан кечикиши натижасида кучли зарб тўлқин хосил бўлиб, у юлдузнинг маълум қисмини (базан катта қисмини) фазога ўлоқтириб тарқатиб юборади. Бу ҳолда жуда юқори температурадаги сиқлилган газда термоядро реакциялари туфайли жуда катта нурланиш (чақнаш) содир бўлади ва ўта янги юлдуз пайдо бўлади.

Оқ митти юлдузларни ўрганиш шуни кўрсатдики, унинг хира рангли эканлиги юлдузлардаги энергиянинг асосий манбаи бўлган водороднинг ёниб тамом бўлгани ва демак, уларнинг таркиби асосан гелийдан иборат бўлганлигидандир. Ундаги хира равшанлик асосан иссиқлик энергия зоҳираси ҳисобидан нурланиши сабабли ҳамда бу юлдузларнинг секин аста сиқлиши туфайли гравитация энергиясининг ажралиб чиқшидандир. Ҳозирги замон тасаввурига биноан, бу оқ митти юлдузлар юлдузлар эволюциясининг охирги этапини бошидан кечираётган бўлади.

Оқ миттилардан бизга энг яқини Сириуснинг йўлдоши ҳисобланади. У Қуёш системасидан 8 ёруғлик йили масофада. Бу хира юлдузни қуролланмаган кўз кўра олмайди. Бундай оқ миттиларнинг ички температураси $T\approx10^{7}K$ атрофида. Бундай температурада гелий тўла ионлашган бўлади. Бошқача айтганда, бундай юлдузлар гелий ядролари ва электронлардан иборат. Бундай модель асосан оқ миттиларнинг параметрларини аниқлаш мумкин. Ҳисоблаш кўрсатадики, оқ митти юлдузнинг массаси *М* Қуёш M_Θ атрофида бўлиб, унинг юқори чегараси (Чандрасекар чегараси 1931 й аниқланган) $M_e = 1{,}4M_\Theta$ га тенг. Бинобарин оқ миттиларнинг масалари 1,4 M_Θ дан катта бўлмайди. Демак, M_Θ массали яқин массали юлдузлар жумладан бизнинг Куёшимиз ҳам «умри»нинг охирида оқ митти юлдузга айланади.

Агар юлдуз массаси жуда катта бўлиб, гравитацион сиқилиш давом этиб, ядро моддаси зичлиги 10^{14}г/см^3 гача борса, у ҳолда нейтронланиш ҳодисаси юз беради ванатижада ўта янги юлдуз ўрнида асосан нейтронлардан иборат нейтрон юлдуз ҳосил бўлади. Бунда зичлик оқ митти юлдуз зичлигидан бир неча миллион марта катта бўлади. Оқ митти бир неча минг километр радиусга эга бўлса, нейтрон юлдуз атига бир неча километрли радиусга эга бўлади.

Бу ерда шуни таъкидлаш лозимки, юлдуздаги протон ва электрон нейтронни ҳосил қилиши учун қўшимча энергия-гравитация сиқиш кучи ҳисобидан олинади. Натижада протон ва электрон нейтронга айланади ва юлдуз асосан нейтронлардан иборат бўлиб қолади.

Умуман оқ миттиларда ферми-газ (электронлар) босими градиенти гравитацион сиқилиш кучи билан мувозанатда бўлади. Нейтрон юлдузларда эса айниган газ нейтронлар босими градиенти билан гравитация сиқлиш кучи мувозанатда бўлади.

Оқ миттиларнинг радиуси Қуёш радиусига нисбатан юз мартача кичик. Демак, $\rho \sim 1/R^3$ бўлганидан оқ миттилардаги масса зичлиги Қуёшдаги зичликдан $\left(\rho \approx 1{,}41 гр/см^3\right)$ миллион марта катта. *Бундай зичликда оқ митти юлдузлардаги босимни айниган электронлар* *босими ташкил этади. Шу сабабли ҳам оқ митти юлдузларни айниган юлдузлар ҳам деб аталади.*

Шундай қилиб, маълум массадан ортиқ бўлмаган массали нормал юлдузлар, уларда термоядро ёқлғиси амалда қолмагандан кейин гравитацион сиқилиш натижасида ҳамда ташқи қобиғидан қутилгандан кейин оқ митти юлдузларга айланади. Бунда аввал температура юқори бўлиб у $2 \cdot 10^5 K$ атрофида бўлади, сўг оқ митти совиб боради. Уларнинг нурланишидаги энергия манбаи асосан ионларнинг иссиқлик энергиясидир. Ҳисоблашга кўра, галактикадаги юлдузларнинг 3-10 фоизи оқ митти юлдузлар ташкил этади.

Энди сиқлишга қарши фермионларнинг кўрсатаётган босимини кўрайлик. Паули принципига кўра, ҳар бир квант ҳолатда биттадан ортиқ фермион бўла олмайди. Бирлик ҳажмдаги *p,p+dp* импульс интервалидаги квант ҳолатлар сони $(2s+1)4\pi\rho^2 dp/h^3$ ифода билан аниқланади. Фермионлар учун спин $s=1/2$ бўлгани учун $(2s+1)$ =2.

Жуда паст температурада (T=0K) ҳар бир квант ҳолатда биттадан фермион бўлади. Демак, бирлик ҳажмдаги зарралар сони n ни топиш учун квант ҳолатлар сонини топиг керак. Бунинг учун, маълумки, юқоридаги ифодани (0, p_F) интервалда интеграллаш лозим; бунда p_F Ферми сатҳидаги фермион импуьси:

$$n = \int_0^{p_{F_F}} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \tag{8}$$

Бундан импульс p_F ни аниқлаймиз

$$p_F = (3/8\pi)^{1/3} h n^{1/3} \tag{9}$$

Ферми сатҳидаги зарра энергияси ε_F норелятивистик ҳолда

$$\varepsilon_F = p_F^2 / 2m = (1/2m)(3/8\pi)^{2/3} h^2 n^{2/3} \tag{10}$$

релятиввистик ҳолда эса

$$\varepsilon_F = cp_F = hc(3/8\pi)^{1/3} n^{1/3} \tag{11}$$

ифодалар билан аниқланади. Айниш температураси $T^* = \varepsilon_F / k$ муносабатдан топилади; босим P (электронлар учун)

$$P = \frac{2u}{3} = \frac{2n\varepsilon_F}{3} \tag{12}$$

ифода орқали топилади. (12) дан норелятивистик ҳол учун

$$P_e = 2{,}3 \cdot 10^{27} n^{5/3} дн / см^2 \tag{13}$$

релятивистик ҳолат учун

$$P_e = 2{,}7 \cdot 10^{-17} n^{4/3} дн / см^2 \tag{14}$$

натижани оламиз.

Бу ерда шуни таъкидлаш жоизки, зичлик ортиши билан электронларнинг тезлиги ортиб, ёруғлик тезлигига яқинлаша боради. Бу ҳолда (14) га асосан босим $P \sim \rho^{4/3}$ қонун асосида ортиб, оқ миттиларда динамик мувозанатни таъминлашга имкон яратилади.

$$P_H = \frac{2u}{3} = \frac{2}{3} n\varepsilon_F = \frac{2n}{3} hc(3/8\pi)^{1/3} n^{1/3} \tag{15}$$

иккинчи томондан гравитацион сиқлиш туфайли ҳосил бўлган юлдуздаги босим

$$Pгг = aGM^2 / R^4 \tag{16}$$

ифода билан аниқланади $(a \approx 1)$ Агар $P_{гр} > P_H$ бўлса, юлдуз сиқилиши давом этади. Стационар юлдузлар учун $P_{гр} \approx P_H$ шарт бажарилади. (15) ва (16) ни ўзаро тенглаштириб

$$\frac{2hc}{3G}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} n^{4/3} = \frac{M^2}{R^2} \tag{17}$$

тенгликни оламиз. Бундан $n=M/mV$ ва $V\sim R^3$ ни назарда тутиб, оқ митти юлдузнинг массаси учун Чандресекар чегараси

$$M \approx \frac{m_p^3}{m_N^2} \approx 1{,}4M_\Theta \tag{18}$$

қийматни оламиз: m_N – нуклон (протон) массаси, m_p-планкеон массаси. (18) ифодадан Қуёш массаси учун

$$M_\Theta = \frac{5m_p^3}{7m_N^2} \tag{19}$$

ифода ўринли эканлиги кўринади.

Агар сиқилиш кучи катта бўлиб, юлдузда турғунлик (мувозанатли ҳолат) бузилса, яъни $P_{гр}>P_N$,бажарилса, сиқилиш давом этади, нейтронлашиш ҳодисаси юз беради, умуман юлдуз коллапсланиб, нейтрон юлдуз пайдо бўлади.

7-§ Нейтрон юлдуз

Юлдузлар массаларига қараб, ҳар хил эволюцион жараёнларни бошдан кечарадилар. Термоядро ёқилғи зоҳираси тугагандан кейин, массаси Қуёш массаси тартибидаги юлдузлар портлаш натижасида (ёки тинч йўл билан) оқ митти юлдузларга айланадилар, массив юлдузлар портлаш натижасида (ёки тинч йўл билан) нейтрон (ёки кварк) юлдузларга айланади; булардан ҳам катта массали юлдузлар портласа, улар қора ўраларга айланиши мумкин. Юлдузларнинг тинч йўл билан коллапсланиши жараёни секундларда, хатто сеунднинг улуши давомида содир бўлиши мумкин ва бунда нейтрон юлдузнинг массаси $1{,}4M_\Theta$ дан ортиқ бўлади. Нейтрон юлдуз ўта янги юлдузнинг портлаш йўли билан пайлдо бўлса, унинг массаси $M<1{,}4M_{\Theta}$ бўлиши мумкин.

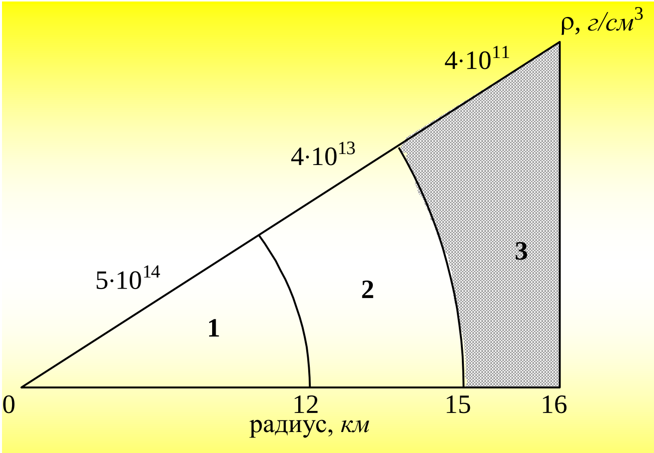
Шуни таъкидлаймизки, оқ митти юлдузлар ва нейтрон юлдузлар массаларининг юқори чегаралари-Чандресекар чегаралари мавжуд. Магнитсиз айланишга эга бўлмаган (совуқ) юлдузларнинг массалари M ва уларнинг марказий қисмидаги зичликлари p_m орасидаги боғланиш 4.4-расмда келтирилган.

Ўта катта зичликка $\rho \approx (2\cdot 10^{15} - 10^{16})\,/\,см^3$ *эга* нейтрон юлюузнинг максимал массаси учун Чандресекар чегараси $M_{\max} \approx (1{,}4 - 2{,}7)M$ қийматни олинади. Одатда максимум учун $M_{\max} \approx 2M_{\Theta}$, минимум учун $M_{\max} \approx 0{,}1M_{\Theta}$ қийматларни, зичлик учун эса $\rho \approx 2\cdot 10^{14}\,гр/\,см^3$ қийматни қабул қилинган. Умумий нисбийлик назарияси эффектни ҳисобга олинмаганда, нейтрон юлдуз учун Чандресекар чегараси $M_{\max} \approx 5{,}73M_{\Theta}$ дан иборат.

$M \approx 1{,}3M_{\Theta}$ массали нейтрон юлдузнинг асосий параметрлари қуйидаги жадвалда берилган.

Радиус	$R \approx 18 - 10\,км$
Гравитацион радиус	$r_p \approx 4\,км$
Марказий зичлик	$\rho_M \approx 3\cdot 10^{14} - 2\cdot 10^{15}\,г/\,см^3$
Айланишнинг минемал даври	$r_{\min} \approx (8-3)\cdot 10^{-4}\,сее$
Массанинг гравитацион эффекти	$\Delta M \approx 0{,}1 - 0{,}4$ $\Delta M \cdot c^2 = (1{,}8 - 2{,}5)\cdot 10^{53}\,эрг$

4.5-расмда: нейтрон юлдузнинг схематик кесими кўрсатлган. Унда 1. Айниган нейтронлардан иборат суюқ ядро: бунда кам сондаги айниган протонлар ва электронлар мавжуд. 2. Нейтронлар билан бойиган атом ядролари; бунда айниган кам сондаги эркин нейтронлар ва электронлар мавжуд; 3. Fe^{56} ядролар кристалл панжарасидан иборат ташқи қатлам: бунда айниган электронлар мавжуд.



4.5- расм.

Шундай қилиб, массив юлдузларда термоядро ёқилғи зоҳираси тамом бўлгандан кейин, гравитация таъсирида ҳосил бўладиган оғирлик кучи ва унга қаршилик босим орасида динамик мувозанат бузилади ва юлдуз гравитация кучи таъсири остида сиқила бошлайди. Бу мувозанат бузилиши натижасида сиқилиш жараёни-гравитация коллапс 1 секунд, хатто секунднинг қисми давомида юз бериб, масса зичлиги ядро моддаси зичлиги, $2{,}8 \cdot 10^{14}\, г/см^3$ гача ортада. Бу вақт давомида бир томондан нейтронлашиш жараёни борса, иккинчи томондан кучли зарб тўлқин ҳосил бўлиб, бунинг натижасида юлдуздаги кобиқ (талайгина юлдуз массаси) фазога тарқалиб (сочилиб) кетади. Бу ҳолда зарб тўлқин туфайли қобиқлар температурасининг кўтарилиши ва шу сабабли термоядро реациялари содир бўлиб, кучли нурланиши юз беради. Бу жараёнларда ўта янги юлдуз пайдо бўлиб, кучли чақнаш содир бўлади.

Гравитацион коллапс-сиқилиш жараёнида модда зичлиги ортиб боради; электрон газ, айниган ферми-газ электроннинг энергияси шу қадар ортадики, унинг энергияси энергетик бареъерни ўтиб протон томонидан ушлашиб нейтронга айланади, яъни қуйидаги реакция содир бўлди:

$$e^- + p \rightarrow n + \upsilon_e$$

Бошқача айтганда, β-процесс тескари бўлган поцесс боради ва бунда нейтрион нурланиши ҳосил бўлади. Юлдузлар эволюциясидаги бу стадияни нейтронлашиш дейилади.

Ана шу нейтронлашиш ҳодисаси туфайли ўта янги юлдуз ўрнида, унинг марказий ядросини ташкил этган жуда катта зичлиги ($\rho \geq 10^{14} г/см^3$) нейтрон юлдуз пайдо бўлади. Гравитация таъсирида жуда кучли сиқилиш натижасида айланувчи юлдуз нейтрон юлдузга айланганда унинг радиуси жуда кичик ($r_{Ню} \approx 10$км) бўлади. Шу сабабли, харакат миқдори моменти (ва магнит моменти) сақланиши қонунига асосан, нейтрон юлдузнинг айланиши тезлиги ва магнит моменти жуда ортиб кетади. Айланиш даври 1 секунд ва ундан ҳам кичик бўлиши мумкин. Масалан, нормал юлдузлар учун $R \sim 10^{11} см$ бўлгани ҳолда, нейтрон юлдузларда $R \sim 10^6 см$ бўлгани учун ҳаракат миқдори моменти $M \sim R^2 \varphi см$ сақланганда айланиш даври 10^{10} марта камаяди. Агар юлдуз сиқилишида магнит оқими ҳам сақланади деб ҳисобланса, унинг магнит оқими 10^{12}-10^{13} мартага ортади. Масалан, 1054 йилдаги ўта янги юлдуз портлашидан қолган қисқичбақасимон туманликнинг марказида жойлашган *NP* 0531 – пульсарнинг айланиши даври 0,033 секундга тенг. Вақт ўтиши билан пульсарнинг айланиши даври ортиб боради. Нурланиш ҳисобига нейтрон юлдузлар бир неча минг йиллар давомида совиб боради. Радиопульсарларнинг нурланиш қуввати бир неча ўн $MBt/см^2$, Қуёшнинг нурланиш қуввати $7000 B_m/см^2$. Статистик баҳолаш кўрсатадики, галактикада ўртача ҳар 10 йилда битта нейтрон юлдуз пайдо бўлади. Бу ҳолда галактикада миллиард нейтрон юлдузлар-пульсарлар бўлиши лозим эди. Аммо астрономик кузатишларга кўра, ҳозирча 400 га яқин пульсарлар қайд (кашф) этилган.

Биринчи марта нейтрон юлдузни-радионурланиш манбаи-пульсарни инглиз олими Э.Хьюиш ўзининг ходимлари билан 1967 йилда кузатган. Рентген нурланишли пульсар 1971 йилда кузатилган. Гамма чақнаш ҳам нейтрон юлдуз эволюциясидаги бир давр (стадия) бўлиши мумкин.

1. Гравитация туфайли ҳосил бўлган босим P_{gr}, нурланиш босими $P_н$ дан катта бўлганда, юлдузда сиқилиш давом этади. Юқорида айтилгандек зичлик $\rho \approx 10^{10}\ г/см^3$ бўлганда нейтронлашиш ҳодисаси электронларнинг ядрога "босиб туширилиши" натижасида $e^- + p \to n + \nu_\ell$ реакция асосида электрон ва протон нейтронга айланиши жараёни кечади. Нейтронларнинг кўпайиши туфайли ҳамда нейтринонинг энергияси олиб чиқилиши туфайли ядро энергияси боғланиши сусая боради, юлдуз маркази янада (совиши туфайли) тезроқ сиқила боради. Натижада юлдуз маркази томон сиқилиш тезлаша боради ва ядролар емирилиб, оқибатда нейтронлардан иборат модда ҳолати содир бўлади. Бу катта «атом ядроси» нинг зичлиги ρ ~10^{14}г/см^3 атрофида, яъни ядро материяси зичлиги тартибида бўлади. Бошқача айтганда, бу нейтронлар айниган фермисистемани ташкил этади. Унинг босими норелятивистик ҳолда

$$P \sim \frac{\hbar^2}{m_n}\left(\frac{N_n}{V}\right)^{5/3} \sim \frac{\hbar^2}{m_n}\left(\frac{\rho}{m_n}\right)^{5/3} \approx 10^4\rho^{5/3}(Си\ \ да) \qquad (20)$$

Ҳосил бўлган нейтрон юлдузнинг стационар бўлиши учун бу босим гравитацион сиқилиш туфайли юзага келган босим

$$P_{gr} \approx GM_n^2 / R_n^4 \tag{21}$$

билан тенг бўлиши лозим:

$$10^4 \rho^{5/3} \approx GM_n^2 / R_n^4 \tag{22}$$

Зичлик учун $\rho \approx M_n / R_n^3$ ифодадан фойдаланиб, нейтрон юлдуз радиусини (22) асосида баҳолаймиз:

$$10^4 M_n^{5/3} \approx GM_n^2 R_n^5 / R_n^4 \quad R_n \approx \frac{10^4\, км}{GM_n^{1/3}} \tag{23}$$

Агар юлдуз массаси $M_n \approx M_\Theta$ бўлса, (23) асосида $R_n \approx 10 км$ қиймат олинади.

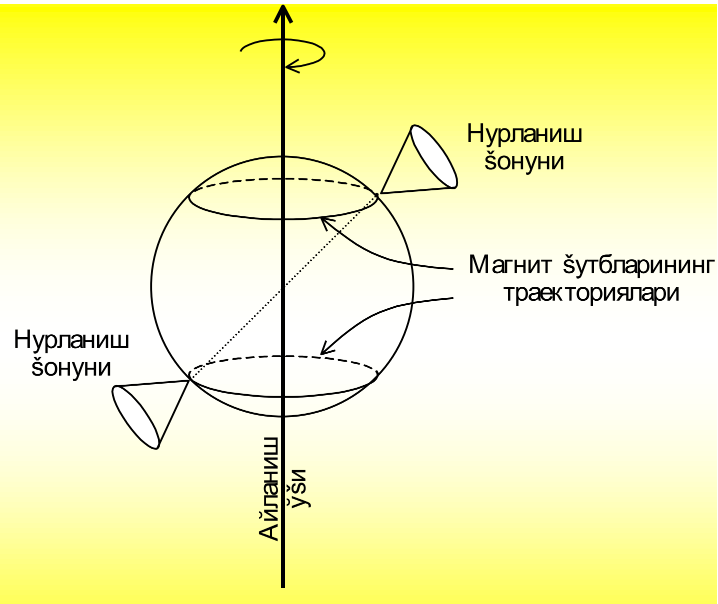
Юлдузлар ўз гравитация майдонида сиқилишида унинг импульси моменти сақланади:

$$M\omega R^2 = const$$

Демак,

$$M\omega R^2 = M_n \omega_n R_n^2 \tag{24}$$

бундан Қуёш учун $M_\Theta \approx 2 \cdot 10^{30} кг$, $\omega_\Theta \approx 3 \cdot 10^{-6}$ *рад/сек*, $R_\Theta \approx 7 \cdot 10^8 м$ эканлигини назарда тутиб, Қуёш типидаги юлдузлар, нейтрон юлдузларга айланганда, айланиш частотаси ортиши қуйидагича бўлади:



4.6-расм.

$$\omega_n = \omega_\Theta \left(\frac{R_\Theta}{R}\right)^2, \quad \omega_n \approx 10^4 \, рад/сек \qquad (25)$$

айланиш даври эса t_n~0,001*сек* атрофида. Шунингдек нейтрон юлдуз ҳосил бўлишида магнит майдоннинг оқими ҳам сақланади, яъни $HR^2 = const$ ёки бундан

$$H_n = H\left(\frac{R}{R_n}\right)^2 \qquad (26)$$

Одатда нейтрон юлдузларнинг магнит моментлари $\vec{P}_m$ айланиш частотаси йўналиши билан бир хил бўлмагани сабабли, магнит моментлар фазода нейтрон юлдузнинг айланишида коник сирт ҳосил қилади (чизади) 4.6-расм. Нейтрон юлдузларда умумий электр заряд бўлмагани ва сферик-симметрик бўлганидан ундан магнитодиполь нурланиши содир бўлади. Бу нурланиш *J*, ўлчамлар нуқтаи назардан қараганда, магнит моменти P_m га, айланиш частотаси ω га ва доимий *c* га қуйидагича боғланишда бўлади:

$$I = \frac{a}{c^3} P_m^2 \omega^4 \ldots. \qquad (27)$$

(*a*~бир тартибидаги ўлчамсиз доимийлик, аниғи *a=2/3*). Агар $P_m \sim H_n R_n^3$ ни эътиборга олсак,

$$J \approx \frac{a}{c^3} H_n^2 R_n^6 \omega_n^4$$

ифодани оламиз; нейтрон юлдуз учун

$$H_N \approx 10^{10} Э, \quad R_n \approx 10^6 см, \quad \omega \approx 10^4 / сек$$

қийматларни қуйиб, магнит-диполь нурланиши қуввати *J* учун ушбу тақрибий қийматни топамиз:

$$J \sim 10^{40} эрг/сек = 10^{33} В \qquad (28)$$

Бу бир неча ўн миллион қуёшлар нурланишига тенг!

Нейтрон юлдузнинг нурланиши магнит моменти вектори $\vec{P}_m$ *бўйича йўналган бўлади. Шу сабабли, нейтрон юлдуз ердаги кузатувчи томонидан "айланувчи маяк-машъал" каби бўлади, яъни ундан келаётган нурланишнинг алоҳида импульслари кузатилади. Шу сабабли нейтрон юлдузларни пульсарлар дейилади.*

Масала 4.3. Нейтрон юлдузнинг айланма ҳаракати энергияси $E = \frac{I\omega^2}{2}$ ни баҳоланг ва олинган натижани изоҳланг.

Ечиш. $I = MR^2, E \sim M_n \omega_n^2 R_n^2 \sim 10^{30} \cdot (10^4)^2 \cdot (10^4)^2 \sim 10^{46} Ж$

Изоҳ. Бу қийматни (28) га бўлиб, айланма ҳаракат энергияси қанча вақтга етишини баҳолаймиз:

$$\frac{E}{J} \approx \frac{10^{46}}{10^{33}} \approx 10^{13} сек \sim 10^6 йил$$

Демак, пульсарнинг нурланиш даври тақрибан миллион йил атрофида бўлади.

Масала 4.4. Қуёш типидаги пульсарнинг зичлигини баҳоланг.

Ечиш. $\rho_n \approx \frac{M_n}{V_n} \approx \frac{3M_n}{4\pi R_n^3}$; $M_n \approx M_\oplus \approx 2\cdot 10^{30}$ *кг*, $R_n \approx 10^4$ *м.* Буларни назарда тутиб, оламиз $\rho_n \approx 5\cdot 10^{17}$ *кг/м*^{3} $= 5\cdot 10^{14}$ *г/см*^{3}. Бу ядро материяси (моддаси) зичлигидир.

Масала 4.5. Нейтрон юлдузлар квант статистика объекти эканлигини исботланг.

Ечиш. Бизга маълумки, зарралар орасидаги ўртача масофа $\left(\frac{N}{V}\right)^{-\frac{1}{3}}$ де Бройль тўлқин узунлиги λ_D тартибида бўлса, бундай ситемани квант статистикаси асосида қаралиши лозим. Баҳолайлик (нейтрон массаси $m_n \sim 10^{-24}$ *гр*): $\left(\frac{N}{V}\right) \sim \frac{\rho}{m_n} \approx \left(\frac{10^{14}}{10^{-24}}\right)$ *нейтронлар/см*^{3}=10^{38}*нейтронлар/см*^{3}.

Демак, бундан $\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{10}{10^{39}}\right)^{\frac{1}{3}}$ *см* $\approx 2\cdot 10^{-13}$ *см*. Энди λ_D ни баҳолайлик: Релятивистик ҳолда $p_n = m_n c$ бўлгани учун

$$\lambda_D = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_n c} \sim \frac{6\cdot 10^{-27}}{10^{-24}\cdot 3\cdot 10^{10}}\ \text{см} \approx 2\cdot 10^{-13}\ \text{см}$$

Демак,нейтрон юлдузлар ҳолатлари, аниқ тавсифланиши учун квант статистика асосида қаралиши лозим, чунки улар учун $\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \lambda_D$ шарт бажарилади.

Изоҳ. Нейтронлар ярим спинли бўлгани учун нейтрон юлдуз-пульсар ферми-системадир. Пульсарларда спинлари қарама-қарши йўналган нейтрон жуфтлари-бозонлар пайдо бўлиши ҳам мумкин. Бу ҳолда нейтрон юлдузда ўта оқувчан бозе-суюқлик мавжуд бўлиши мумкин.

Шунингдек, нейтрон юлдуздаги протонлар ва электронлар аралашмаси мавжуд. Протонлар спинлари қарама-қарши йўналган жуфтлар-бозе зарралар ҳосил қилиб, унда ўта ўтказувчанлик ҳолатини ҳосил қилиш мумкин.

Нейтрон юлдузнинг гравитация майдонини қарайлик. Бир жинсли гравитация майдонидаги жисм ҳаракати $v = gt, h = \frac{gt^2}{2}$ билан ёки бундан $v^2 = 2gh \; (h - баландлик)$ ифодалар билан характерланади. Иккинчи томондан $F = mg$ да $g -$ тезланиш, шу билан бирга бирлик массага тўғри келувчи майдон кучланганлиги (Кулон майдонидаги $\vec{F} = q\vec{E}$ кабидай; бунда $\vec{E} = -grad\varphi$, $\varphi -$ потенциал). Агар гравитация майдони учун потенциал φ тушунчасини киритсак, аёнки, уни

$$g = \frac{|\varphi|}{h}$$

кўринишда олинади, ёки

$$v^2 \approx 2\left(\frac{\varphi}{h}\right) \cdot h \approx 2|\varphi|$$

Бу ифодани c^2 га бўлиб, ёзамиз:

$$\frac{v^2}{c^2} = 2\frac{|\varphi|}{c^2}$$

бизга маълумки, $\frac{v^2}{c^2} << 1$ бўлганда Ньютон назарияси ўринлидир. Бунда гравитация майдони учун

$$|\varphi| << c^2$$

шарт бажарилади ва уни заиф (кучсиз) деб ҳисобланади.

Масала 4.6. Гравитация майдони учун $\frac{|\varphi|}{c^2}$ни а) Ер учун, б) Қуёш сирти учун, в) Митти юлдуз сирти учун, г) Нейтрон юлдуз учун баҳоланг.

а) жавоб $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 10^{-10}$

б) жавоб $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 10^{-6}$

в) жавоб $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 10^{-3}$

г) жавоб $\frac{|\varphi|}{c^2} \sim 0{,}3$

Кўрсатма: $\frac{2|\varphi|}{c^2} = 2\left(\frac{G}{c^2}\right)\frac{M}{R}$ формуладан фойдаланинг.

Нейтрон юлдуз учун $|\varphi| \sim c^2$эканлигидан унинг гравитация майдони кучлидир ва унинг сиртидаги зарралар тезлиги v, ёруғлик тезлиги c га яқин бўлади. Олинган $|\varphi| \sim c^2$ га кўра, пульсарларнинг гравитация хоссаларини, кучли майдон бўлгани учун, Эйнштейннинг умумий нисбийлик назарияси асосида қараш лозим бўлади. Бу назарияга кўра, нейтрон юлдуз атрофи яқинида фазо хоссаси Риман геометрияси асосида тавсифланади, у фазонинг ўзи эгриликка эга бўлади; соатларнинг юриши, вақтнинг ўтиши кучли гравитация майдони туфайли сезиларли даражада секинлашади.

Нейтрон юлдузларнинг туғилишида кучли нейтринолар оқими ҳосил бўлади. Шу сабабли, нейтрино астрофизика фанининг ривожланиши тадқиқотчилар қўлига, юлдузларни ўрганиш учун кучли қурол берган бўлар эди.

Тарихий маълумот. 1932 йилда нейтрон кашф этилиши биланоқ (Копенгагенга Кембриждан нейтрон кашф этилгани ҳақида хабар келган куни, кечқурун Н.Бор, Л.Розенфельд (белгиялик физик) ва Л.Ландау муҳокама қилиш чоғида) Ландау нейтрон юлдуз ҳақидаги ғоя билдиради. Икки йилдан кейин В.Бааде ва Ф.Цвикки бу ғояни ривожлантирдилар. Улар юқори температурали, зичликли ва кичик ўлчамдаги бундай космик объектлар ўта янги юлдузлар портлашидан ҳосил бўлиб, массив юлдузлар эволюциясининг охирги стадияси эканлигини айтадилар.

Аммо, 1967 йилда пульсар кашф этилгандан кейин ва нейтрон юлдузлар нурланиши назарияси ривожлантирилгандан кейингина бундай объектлар ҳамма томонидан тан олинган физик реаллик бўлиб қолди. Англиядаги Кембриж университетининг Мюллард радиоастрономия обсерваториясида проф. Энтони Хьюиш бошчилигида 3,7 м радиотўлқинни қабул қилувчи антенналި, юқори сезгирли радиотелескопда осмонни 1967 йил июндан бошлаб мунтазам кузата бошладилар. Кузатиш бошлангандан 1 ой ўтгандан кейин аспирантка Жокелин Белл осмондан даврий равишда келаётган (пайдо бўлаётган) радиоимпульсларни сезиб қолди. Бу биринчи марта космосдан келаётган радионурланишнинг манбаини кузатилиши эди. Октябрда Хьюиш илгари номаълум бўлган янги ҳодиса кузатилаётганига ишонч ҳосил қилди. Ноябрда Хьюиш ва унинг ходимлари биринчи марта осмондаги манбадан мунтазам равишда келаётган импульсларни аниқладилар. Бу регуляр сигналлар қаердан келаётганини аниқлаш лозим эди. Хатто уларни Ердан ташқаридаги цивилизация (“кичкина яшил одамлар”) юбораётган бўлса керак деган тахминлар ҳам йўқ эмас эди. Бу муаммони ҳал қилиш учун яна икки ой қаттиқ тадқиқот ишлари олиб боришди ва ниҳоят 1968 йил февралда "Нейчер" журналида бу кашфиёт ҳақидаги мақола эълон қилинди (Hewich A, Bell S.J ва бошқалар. Nature, London., 217,709,1968. Русс. таржима «сб "Пульсары"» нашриёт. Мир . М.1971, бет 27). Бу мақолада сигнал манбаи нейтрон юлдуз бўлиши мумкинлигини айтилган эди. Ўша 1968 йилда Ф.Пачини ва Т.Голд пульсарлар айланувчи нейтрон юлдузлар эканлигини назарий жиҳатдан асосладилар. Кейинги пайтда бундай радио, рентген, гамма нурланишларнинг манбалари бўлган пульсарлар кўплаб кузатилди;ҳозирги вақтда улар 400 тага яқин.

Умуман, проф. Э.Хьюиш ва аспирант Ж.Белл томонидан 1967 йилда пульсарларнинг кашф этилиши, реликт нурланишнинг кашф этилиши билан бир қаторда, астрофизиканинг буюк ютуқларидандир.

8-§. Кварк юлдузлар. Қора ўралар

Зичлик жуда катта $\rho \geq 10\rho_0$ бўлганда ($\rho \geq 10\rho_0$) бўлганда (ρ_0 ядро зичлиги) нейтронлар бир-бирига жуда яқинлашиб, бир-бирини қисман ёпиб юборади. Бу ҳолда кварклар бир нейтрондан иккинчисига ўтиши мумкин бўлиб қолади. Шундай қилиб, ультракатта зичликда кварклар газ ёки суюқликдаги каби эркин ҳаракатланиши мумкин бўлади.

80 - чи йилларда нейтрон юлдузлар ҳолатини таҳлил қилиб, нейтрон юлдузлар зичлигидан ортиқ зичликларда эркин кварклар пайдо бўлиши мумкинлиги тахмин қилинади. Бошқача айтганда, жуда юқори зичликларда кварклардан иборат юлдузлар бўлиши мумкинлигини айтилди. 1989 йил январь ойида Берклидаги Лоуренс номли лабораторияда ўта янги 1987 *A* юлдуз тадқиқ қилиниб, унинг

марказида пульсар мавжудлиги кашф этилди. Бу пульсарни қизиқлиги шундаки, у секундига 2000 марта айланади; у бу пайтгача кашф этилган пульсарларнинг энг тез айланадиганидан ҳам 3 марта тез айланади. Бундай тез айланиш сабабини тадқиқ қилиб, Н.гленденин ўта янги 1987 *А* нинг марказидаги пульсар-кварк юлдуз деган фикрга келди. Анализ кўрсатдики, кварк юлдуз бўлиши учун зичлик $12\rho_0$ дан ортиқ бўлиши зарур.

Гленденин моделига қараганда ўта янги 1987 А дан қолган ядро-пульсар u, d ва s кварклардан ташкил топтан. Унингча, нейтрон юлдуздагя босим маълум критик қийматдан катта бўлса, нейтрон юлдуз спонтон равишда (фазовий ўтишга ўхшаш) кварк юлдузга айланада.

Кварк юлдузларнинг яна бир хусусияти шундан иборатки, уларда бошқа юлдузлар, жумладан нейтрон юлдузлардагидай гравитация тортишиш кучи асосий ролни ўйнамай, балки бунда кучли ўзаро таъсир муҳим роль ўйнайди. Гравитация майдони қўшимча ёрдамчи ролни ўйнайди.

Хозирги замон тасаввурларига кўра, нейтрон юлдуз кварк юлдузга спонтон ўтишда нейтрон юлдузнинг ўлчами кескин камаяди ва бунинг натижасида зичлиги ортиши туфайли, унинг айланиш тезлиги, моментининг сақланиш қонунига асосан, ортади. Шу туфайли кварк юлдузлар-пульсарларнинг айланиш тезлиги нейтрон юлдузлар-пульсарларнинг айланиш тезлигидан катта бўлади.

Кварк юлдузлар ҳақидаги бундай тасаввурларга асосан, баъзи пульсарлар кварк юлдузлардан иборат дейилишига олиб келди. Жумладан, биздан 40 минг ёруғлик йили масофадаги рентген нурлари манбаи бўлган

Оққуш Х-3 ни кварк юлдуз деб тахмин қилинмоқда. Ўта янги 1987 А юлдуз ўрнидаги пульсар биздан 180 минг ёруғлик йили узоқликда.

Жуда катта массали юдузларда термоядро ёқилғи зоҳираси тугаб унда динамик мувозанат бузилганда гравитацион коллапс натижасида сиқилиш шундай давом этадики, зичлик хатто ядро зичлигига тенг бўлгандан сўнг ҳам сиқилиш давом этаверади ва ниҳоят юлдуз “қора ўра”га айланади. Сиқилиш давом этиб гравитация майдони ниҳоятда кучайганда классик физикадаги Ньютоннинг бутун Олам тортишиш қонуни ўрнига Эййштейннинг умумий нисбийлик назариясининг формуласи

$$F = \frac{GMm}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (29)$$

ўринли бўлади. *Бунда*

$$r_g = \frac{2G}{c^2}M \qquad (30)$$

гравитация радиуси, М масса маркази атрофидаги r_g радиусли сферани Шварцшильд сфераси дейилади. (29) формуладан кўринадики, икки масса m ва *М* орасидаги r гравитация радиуси r_g га яқинлашганда, улар орасидаги куч *F* жуда катталашади, $r = r_g$ бўлганда чексиз катта бўлади. Бошқача айтганда, r_g ёки ундан кичик радиусли ҳажмдаги *М* массали юлдуз - қора ўра $r \leq r_g$ масофадаги барча жисмларни, жумладан фотонларни ҳам ўзига тортиб олади. Ундан ёруғлик ҳам чиқа олмайди!

(30) ифодага асосан, гравитацион радиус r_g Қуёш учун $\rho \approx 2{,}96$*км*, Ер учун $r_g \approx 0{,}886$*см* қийматларга эга, Қуёш массасига тенг бўлган қора

ўра массасининг зичлиги $\rho \approx 2 \cdot 10^{16} г/см^3$. Бу ядро моддаси зичлигидан икки тартибга ортиқдир $\left(\rho \approx 2 \cdot 10^{14} г/см^3\right)$. Бундай катта зичликдаги қора ўра (юлдуз) фазо хоссасига (унинг эгрилигининг ҳосил бўлишига) таъсир этибгина қолмай, у ўзининг атрофидаги жараёнлар тезлигига, вақтнинг ўтишига ҳам таъсир этади.

Қора ўра атрофида r узоқликдаги сфера устида икки воқеа содир бўлган бўлсин, Уларнинг орасидаги вақт (хсусий вақт) шу сирт устидаги кузатувчи нуқтаи назаридан $\Delta\tau$ га тенг бўлсин. Сиртдан етарли даражада узоқдаги кузатувчи нуқтаи назаридан бу икки воқеанинг орасидаги вақт Δt бўлса, у ҳолда умумий нисбийлик назариясига асосан,

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \tag{31}$$

муносабат ўринли. Бу муносабатдан кўринадики, агар r етарли даражада катта бўлса, яъни $\frac{r_g}{r} << 1$ бўлса, бу ҳодда икки кузатувчилар вақтлари Δt ва $\Delta\tau$ бир-бирига деярли тенг бўлади. Агар сирт радиуси r гравитация радиуси r_g га яқинлашса, Δt катталаша боради ва ниҳоят $r = r_g$ бўлганда $\Delta t \to \infty$ булади.

$\Delta\tau$ вақт электромагнит тўлқин даври $T_0 = \lambda_0 / c$ бўлиши мумкин. Бу ҳолда узоқдаги кузатувчи нуқтаи назаридан бу тўлқин даври *T* бўлади. У ҳолда тўлқин узунлиг λ қуйидагича, аниқланади:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \tag{32}$$

(31) ва (32) муносабатлардан нуринадаки, катта массали юлдуз атрофида (яқинида) вақтнинг секинлашиши, қизил силжиш эффекти (тўлқин узунлигининг катталашиши) эътиборга олиниши лозим бўлади. *Агар* $r_0 = r_g$ *бўлса, ёки* r *радиусли сирт Шварцшильд сфераси ичида бўлса, узоқдаги кузатувчига сигнал (электромагнит тўлқин) бормайди (*$\Delta t \to \infty; \lambda \to \infty$*), қора ўра томонидан ушланиб қолинади. Шу сабабли Шварцшильд сферасини воқеалар горизонти дейилади.*

V боб. Зичлик матрицаси (оператори)

1-§. Кириш

Таъриф. Қаралаётган системанинг ҳолатлари $\psi_{\alpha'}, \psi_{\alpha''}, \ldots$ ва уларга Эрмит қўшалоқ ҳолатлар $\psi^*_{\alpha'}, \psi^*_{\alpha''}$, бўлсин. Булар ўзаро ортогонал ва нормалдирлар:

$$\left(\psi^*_{\alpha'}, \psi_{\alpha''}\right) = \delta_{\alpha'\alpha''} \tag{1}$$

Агар системани α ҳолатда бўлиш эҳтимоли w_α бўлса, у ҳолда бу системанинг статистик хоссалари қуйидаги зичлик матрицаси (оператори) билан аниқланади:

$$\rho = \sum w_\alpha \psi^*_\alpha, \psi_{\alpha''} = \left(\sum |\alpha > w_\alpha < \alpha|\right) \tag{2}$$

Бунда w_α учун нормалаш шарти

$$\sum w_\alpha = 1 \tag{3}$$

Гильберт фазосида ихтиёрий ортонормалли базис векторлар $\varphi_n Ln > (n = 1,2\ldots)$ берилган бўлсин. Бу базисда зичлик матрицаси

$$< n|p|n >= \sum_\alpha < n|\alpha > w_\alpha < \alpha|n > \tag{4}$$

кўринишга эга бўлади. Бунда диагонал элементларининг йиғиндиси (ёки матрица (оператор) шпури бирга нормаланган бўлади:

$$< n|p|n >= S_{p\rho} = 1 \tag{5}$$

2-§. Динамик катталикнинг ўртачаси

Берилган оператор (матрица) нинг статистик ансамбли асосида динамик катталикнинг ўртача қиймати қуйидагича аниқланади:

$$\overline{A} = \sum_\alpha w_\alpha \langle\alpha|A|\alpha\rangle = S_p \rho A \tag{6}$$

$S_p \rho A$ -икки матрица ρ ва A нинг кўпайтмасидан иборат бўлган матриқанинг диагонал элементларининг йиғиндисидир. Эслатамиз: Матриқанинг диагонал элемантлари йиғиндиси (яъни матрица шпури) инвариант катталикдир; у координаталар системаларига боғлиқ эмас.

Каноник тақсимотни ифодаловчи зичлик матрицасининг кўриниши қуйидагичадир:

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta \hat{H}} \equiv Z^{-1} \sum_{E^{i}} e^{-\beta E^{i}} \varphi E^{i} \varphi E^{i} \equiv Z^{-1} \sum_{E^{i}} e^{-\beta E^{i}} \left| E^{i} \right\rangle\left\langle E^{i} \right| \qquad (7)$$

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

$\varphi_{E^{i}} = \left| E^{i} \right\rangle$ -гамильтониан $\hat{H}$ нинг хусусий вектори (функцияси), яъни

$$\hat{H} \varphi_{E^{i}} = E^{i} \varphi_{E^{i}} \quad \left(\hat{H} \left| E^{i} \right\rangle = E^{i} \left| E^{i} \right\rangle \right) \qquad (8)$$

$$Z = S_p e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{E^{i}} e^{-\beta E^{i}} \qquad (9)$$

Каноник тақсимот асосида динамик катталик A нинг ўртача қиймати қуйидагича кўринишда аниқланади.

$$\bar{A} = \frac{S_p \hat{A} e^{-\beta \hat{H}}}{S_p e^{-\beta \hat{H}}} \qquad (10)$$

3-§. Осциллятор координатаси ва импульсининг эҳтимоллари тақсимотлари

Қаттиқ жисм атомлари ёки молекула атомлари кичик тебранаётган бўлсин. Бу ҳолда осциляторнинг энергияси

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(P_{\alpha}^{2} + \omega_{\alpha}^{2} q_{\alpha}^{2} \right) \qquad (11)$$

ифода билан аниқланади; P_α ва q_a умумлашган импульс ва умумлашган (нормая) координаталар; $\omega_\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$ нормал тебраниш частотаси. Квант механикада ҳам осцилляторнинг энергияси

$$E = \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha\left(n_\alpha + \frac{1}{2}\right) \qquad (12)$$

алоҳида осцилляторлар энергиялари йиғиндисидан иборат б¢лади. Осциллятор координатаси қийматлари эҳтимоллари тақсимотига қарайлик. Классик статистикада бу тақсимот

$$dW(q) = Ae^{-\frac{E_q}{kT}}dq = Ae^{-\frac{\omega^2 q^2}{2kT}}dq \qquad (13)$$

дан иборат.

Квант механикада шу масалани ҳал этайлик. Ҳар бир осцилляторнинг энергияси

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (14)$$

ифода балан аниқланади.

q,q + dq интервалда осциллятор координатаси қиймати б¢лиши эҳтимоли, умумий таърифга асосан,

$$dw(q) = \rho(q)dq = dq\sum_n w_{nn}\psi_n^2 \qquad (15)$$

$$w_{nn} = ae^{-E_n\beta}\ , \quad \beta = \frac{1}{kT} \qquad (16)$$

(15) ва (16) дан к¢ринадики

$$\rho(q) = a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n^2(q) \qquad (17)$$

(17) дан ҳосила оламиз.

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = 2a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n\frac{d\psi_n}{dq} \qquad (18)$$

$-i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial q} = \hat{p}\,\psi_n$ эканлигини ва $n \to n \pm 1$ ¢тишлар реализацияси б¢лишлигини эътиборга олиб, (18) ни ёзамиз (импульс матрицаси элементлари учун $n \to n \pm 1$ ¢тишларгина мавжуд)

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = 2a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n\left[\frac{i}{\hbar}\hat{p}\,\psi_n\right] = \frac{i2a}{\hbar}\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n\left[p_{n-1n}\psi_{n-1} + p_{n+1n}\psi_{n-1}\right]$$

$p_{n-1}, n = -i\omega q_{n-1,n}$; $p_{n+1,n} = i\omega q_{n+1,n}$ ни эътиборга олиб давом эттирамиз:

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = \frac{2a\omega}{\hbar}\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\left[q_{n-1n}\psi_n\psi_{n-1} - q_{n+1}\psi_n\psi_{n+1}\right]$$

$n-1 \to n$ алмаштирамиз.

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = \frac{2a\omega}{\hbar}\sum_n \left[e^{-\beta\varepsilon_{n+1}}q_{nn+1}\psi_n\psi_{n+1} - q_{n+1n}\psi_n\psi_{n+1}e^{-\beta\varepsilon_n}\right] =$$

$$\frac{2a\omega}{\hbar}\left[e^{-\beta\hbar\omega} - 1\right]\sum_n \left(e^{-\beta\varepsilon_n}q_{nn+1}\psi_n\psi_{n+1}\right)$$

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = -\frac{2a\omega}{\hbar}\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega}\right)\sum_n \left[e^{-\beta\varepsilon_n}q_{nn+1}\psi_n\psi_{n+1}\right] \qquad (19)$$

Энди $\hat{q}\rho$ ни аниқлайлик

$$\hat{q}\rho = \hat{q}a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n^2 = a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\hat{q}(\psi_n\psi_n) = a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\left[\psi_n q_{n-1n}\psi_{n-1} + \psi_n q_{n+1n}\psi_{n+1}\right] =$$

$$= \left|n-1 \to n\,\text{алмаштирамиз}\right| = a\left[\sum_n^n e^{-\beta\varepsilon_n - \beta\hbar\omega}q_{nn+1}\psi_n\psi_{n+1} + \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}q_{n+1n}\psi_n\psi_{n+1}\right] = \qquad (20)$$

$$= a\left(1 + e^{-\beta\varepsilon_n}\right)\sum_{n=0}^{\infty} q_{nn+1}\psi_n\psi_{n+1}e^{-\beta\varepsilon_n}$$

(19) ва (20) дан оламиз:

$$\frac{d\rho(q)}{dq} = q\rho\,\frac{-2\omega}{\hbar}\cdot\frac{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}{1 + e^{-\beta\hbar\omega}} = -\frac{2\omega}{\hbar}q\rho\,\frac{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} + e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}} = -\frac{2\omega}{\hbar}q\rho\,th\,\frac{\beta\hbar\omega}{2} \qquad (21)$$

(21) дан

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2\omega}{\hbar} th \frac{\beta\hbar\omega}{2} q \cdot dq$$

ёки

$$\ln \rho(q) = -q^2 \frac{\omega}{\hbar} th \frac{\beta\hbar\omega}{2} + \ln C$$

$$\rho(q) = Ce^{-\frac{\omega}{\hbar} q^2 th \frac{\beta\hbar\omega}{2}}$$

Шундай қилиб, изланаётган тақсимот $\rho(q)$ ни оламиз:

$$\rho(q) = C \exp\left[- q^2 \frac{\omega}{\hbar} th \frac{\hbar\omega}{2kT} \right]$$

$$\int dw_q = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q) dq = 1 \qquad (22)$$

шартдан фойдаланиб, доимий сон С ни топамиз:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\hbar}{2\omega} cth \frac{\beta\hbar\omega}{2}}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} th \frac{\hbar\omega}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Шундай қилиб, охирги натижани (F.Bloch, 1932) оламиз:

$$dw_q = \rho(q) d(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} th \frac{\hbar\omega}{2kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[- q^2 \frac{\omega}{\hbar} th \frac{\hbar\omega}{2kT} \right] dq \qquad (23)$$

Квант механидада координата қийматлари эхтимоллари тақсимоти

$$e^{-\beta\varepsilon_n} \text{ ёки } e^{-\frac{\beta\omega^2 q^2}{2}}$$

к¢ринишда б¢либ, бунда β классик физикадаги $\frac{1}{kT}$ дан фарқлидир:

$\beta = \frac{2}{\hbar\omega} th \frac{\hbar\omega}{2kT}$. β чегаравий ҳолда, температура юқори б¢лганда $\frac{1}{kT}$ га ¢тади.

Изох 1. Блох натижаси (23) ни мазкур китобдаги метод билан осонгина олиш мумкин, Ҳақиқатан, (11) ни назарда тутиб ёзамиз:

$$f(E)=\frac{1}{Z}e^{-\beta E}=f(q)f(p) \tag{24}$$

бунда

$$f(q)=Ae^{-\frac{\beta\omega^2 q^2}{2}} \tag{25}$$

$$f(p)=Be^{-\frac{\beta p^2}{2}} \tag{26}$$

Осциллятор учун $\nu=1, \beta=\frac{\nu}{U}=\frac{1}{<\varepsilon>}$:

$$\frac{1}{\beta}=<\varepsilon>=\frac{\hbar\omega}{2}cth\frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{27}$$

(27) ни (25) га қ¢йиб, тақсимот фукнцияси $f(q)$ ни Блох тақсимоти (23) билан бир ҳил эканлигини к¢рамиз.

Изоҳ 2. (27) ни (26) га қ¢йиб, умумлашган импульс қийматлари эҳтимоллари тақсимотини оламиз:

$$f(p)=\rho(p)=Be^{-\frac{p^2}{\hbar\omega}th\frac{\hbar\omega}{2kT}} \tag{28}$$

(25) ва (26) (ёки (28) тақсимот функцияларидаги *A* ва *B* ни нормалаш шартлари

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(q)d(q)=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(p)d(p)=1$$

асосида топилади:

$$A^{-1}=\left(\frac{2\pi}{\beta\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}};A=\left(\frac{\beta\omega^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$B^{-1}=\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}};B=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Масала 5.1. Гармоник осцилляторнинг зичлик матрицаси q тасаввурда аниқлансин.

Ечиш. Мувозанат ҳолатдаги осцилляторлар ансамбли учун зичлик матрицаси, таъриф буйича,

$$\rho(q,q^{'})=a\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q^{'})\psi_n(q) \tag{1}$$

ифода билан аниқланади. ¡згарувчиларни қуйидагича алмаштирайлик:

$$q=r+s_1,q^{'}=r-s \tag{2}$$

Ҳосила $\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_T$ ни топайлик:

$$q-q^{'}=2s \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_T=\frac{\partial\rho\partial q}{\partial q\partial s}+\frac{\partial\rho\partial q^{'}}{\partial q^{'}\partial s}=2\left(\frac{\partial\rho}{\partial q}-\frac{\partial\rho}{\partial q^{'}}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\partial\rho(q,q^{'})}{\partial q^{'}}=a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q^{'})\frac{\partial\psi_n(q)}{\partial q} \tag{5}$$

$$\frac{\partial\rho(q,q^{'})}{\partial q^{'}}=a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q)\frac{\partial\psi_n(q^{'})}{\partial q^{'}} \tag{6}$$

бунда $i\hbar\frac{\partial\psi_n}{\partial q}=p\psi_n$; $p=-i\frac{\partial}{\partial q}$ импульс оператори. Осциллятор учун матрица элементлари нолдан фарқли б¢лади: $n\to n\pm1$ ¢тишлар учун (танлаш қоидаси). Буларни эътиборга олиб ёзамиз

$$\frac{d\psi_n(q)}{dq} = \frac{i}{\hbar}\hat{p}\,\psi_n = \frac{i}{\hbar}\left[p_{n-1n}\psi_{n-1} + p_{n+1n}\psi_{n+1}\right] =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left[-i\omega q_{n-1n}\psi_{n-1}(q) + i\omega q_{n+1n}\psi_{n+1}(q)\right] = \qquad (7)$$

$$= \frac{\omega}{\hbar}\left[q_{n-1n}\psi_{n-1}(q) - q_{n+1n}\psi_{n+1}(q)\right]$$

Худди шунингдек тенгликни ёзамиз:

$$\frac{d\psi_n(q^{'})}{dq^{'}} = \frac{\omega}{\hbar}\left[q^{'}_{n-1n}\psi_{n-1}(q) - q^{'}_{n+1n}\psi_{n+1}(q^{'})\right] \qquad (8)$$

(5) ни (7) ни назарда тутиб қайта ёзамиз:

$$\frac{d\rho}{dq} = \frac{a\omega}{\hbar}\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q^{'})\left[q_{n-1n}\psi_n(q) - q_{n+1n}\psi_{n+1}(q)\right] = \left|n-1 \to n\right| =$$

$$\left(n-1 \to n \quad \text{алмаштирамиз}\right) \qquad (9)$$

$$= \frac{a\omega}{\hbar}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n-\beta\hbar\omega}\psi_{n+1n}(q^{'})\psi_n(q)q_{nn+1} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q^{'})\psi_{n+1}(q)q_{n+1n}\right\}$$

Шунингдек ёзамиз:

$$\frac{d\rho}{dq^{'}} = \frac{a\omega}{\hbar}\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q)\left[q_{n-1n}\psi_{n-1}(q^{'}) - q_{n+1n}\psi_{n+1}(q^{'})\right] =$$

$$= \frac{a\omega}{\hbar}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q)\psi_{n-1}(q^{'})q_{n-1n} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q)\psi_{n+1}(q^{'})q_{n+1n}\right\} = \left|n-1 \to n \;\; \text{алмаштирамиз}\right| =$$

$$= \frac{a\omega}{\hbar}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n-\beta\hbar\omega}\psi_{n+1n}(q)\psi_n(q^{'})q_{nn+1} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q)\psi_{n+1}(q^{'})q_{n+1n}\right\}$$

(10)

(9) ва (10) ни назарда тутиб, (4) ни ёзамиз:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_r = 2\left[\frac{\partial\rho}{\partial q} - \frac{\partial\rho}{\partial q^{'}}\right] =$$

$$= \frac{2a\omega}{\hbar}\left\{\left(e^{-\beta\hbar\omega}+1\right)\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_{n+1}(q^{'})\psi_n(q)q_{nn+1} - \left(e^{-\beta\hbar\omega}+1\right)\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q^{'})\psi_{n+1}(q)q_{nn+1}\right\} = \qquad (11)$$

$$= \frac{2a\omega}{\hbar}\left(1+e^{-\beta\hbar\omega}\right)\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\left[\psi_{n+1}(q^{'})\psi_n(q) - \psi_n(q^{'})\psi_{n+1}(q)\right]q_{n+1n}$$

Энди $s\rho$ ни аниқлайлик. $q = r + s, q' = r - s$ дан $q + q' = 2r; q - q' = 2s;$

$s = \frac{(q - q')}{2}$. Демак $\frac{q\rho}{2}$ ва $-\frac{q'\rho}{2}$ ларни аниқлаш керак.

$$
\begin{aligned}
q\rho &= a\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q')q\psi_n(q) = \\
&= a\left\{\sum_n^n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q')\psi_{n-1}(q)q_{n-1n} + \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q')\psi_{n+1}(q)q_{n+1n}\right\} = \\
&= a\left[\sum_n^n e^{-\beta\varepsilon_n-\beta\hbar\omega}\psi_n(q)\psi_{n+}(q')q_{nn+} + \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q')\psi_{n+1}(q)q_{nn+1}\right]
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
q'\rho = a\left[\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n-\beta\hbar\omega}\psi_n(q')\psi_{n+1}(q)q_{nn+1} + \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_n(q)\psi_{n+1}(q')q_{n+1n}\right]\ldots \tag{13}
$$

(12) ва (13) дан фойдаланиб оламиз:

$$
\begin{aligned}
s\rho &= \frac{1}{2}(q - q')\rho = \frac{q}{2}\left\{(1 - e^{-\beta\hbar\omega})\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\psi_{n+1}(q)\psi_n(q')q_{n+1n} + (e^{-\beta\hbar\omega} - 1)\sum_n \psi_{n+1}(q')\psi_n(q)q_{n+1n}\right\} = \\
&= \frac{a}{2}(-1 + e^{-\beta\hbar\omega})\sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}\left[-\psi_{n+1}(q)\psi_n(q') + \psi_{n+1}(q')\psi_n(q)\right]q_{n+1n}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Демак,(11) ва (14) дан аниқлаймиз:

$$
\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_\gamma = -\frac{2a\omega}{\hbar}\cdot\frac{2(1 + e^{-\beta\hbar\omega})}{a(1 - e^{-\beta\hbar\omega})}\cdot\rho s = -\frac{4\omega}{\hbar}\rho s\, cth\frac{\beta\hbar\omega}{2}
$$

ёки бундан

$$
\rho(r, s) = A(r)e^{-s^2\frac{2\omega}{\hbar}cth\frac{\beta\hbar\omega}{2}}, \beta = \frac{1}{kT} \tag{15}
$$

Аввалги ўзгарувчилар q, q' га ўтайлик:

$$
r = \frac{q + q'}{2}, s = \frac{(q - q')}{2}
$$

Демак,

$$
\rho(q, q') = A(r)e^{\frac{(q-q')^2\omega}{2\hbar}cth\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \tag{16}
$$

$q+q^{'}=r, q=q^{'}$ б¢лганда аввалги масаланинг натижаси олиниши зарур, яъни

$$\rho(q)=A(q)\cdot 1=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}th\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-q^2\frac{\omega}{\hbar}th\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$$

ёки $q=q^{'}$ да $r^2=4q^2$ ни эътиборга олиб ёзамиз

$$\rho_1(q,q^{'})=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}th\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\left[\frac{(q+q^{'})^2}{4\hbar}\right]\omega th\frac{\hbar\omega}{2kT}\right\} \quad (17)$$

(17) ни (16) га қўйиб, охирги натижани оламиз

$$\rho(q,q^{'})=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}th\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\omega(q+q^{'})^2}{4\hbar}th\frac{\hbar\omega}{2kT}-\frac{\omega(q-q^{'})^2}{4\hbar}cth\frac{\hbar\omega}{2kT}\right\} \quad (18)$$

Изоҳ 1. Матрица $\rho(q,q^{'})$ нинг диагонал элементлари $\rho(q,q)$ (18) дан $q=q^{'}$ бўлганда олинади. Бу диагонал элементлар эса аввалги масаланинг натижасидир.

Изоҳ 2. Бу диагонал элементларнинг классик ҳолдаги ифодаси $kT>>\hbar\omega$ шарт бажарилганда (18) дан олинади:

$$\rho(q)=Ae^{-q^2\frac{\omega}{\hbar}\cdot\frac{\hbar\omega}{2kT}}=Ae^{-\frac{\omega^2q^2}{2kT}} \quad (19)$$

Нормал координата q дан табиий координатага ўтайлик: $\omega^2q^2=\frac{k}{m}mx^2=kx^2$. Бу ҳолда

$$\rho(x)=Ae^{-\frac{kx^2}{2kT}} \quad (20)$$

Потенциал энергия $\frac{kx^2}{2}$ бўлгандаги маълум Гиббс (ёки Больцман) тақсимоти ифодаси келиб чиқади.

Изоҳ 3. $\hbar\omega>>kT$ бўлганда зичлик матрицаси диагонал элементини аниқлайлик:

$$\rho(q) = Ae^{-\frac{\omega q^2}{\hbar}\cdot 1} = |\psi_0(q)|^2; \psi_0 = A^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega q^2}{2\hbar}} \tag{21}$$

$\psi_0(q)$ – осцилляторнинг асосий ҳолати тўлқин функцияси (q-тасаввурлар).

Масала 5.2. Осциллятор учун зичлик матрицани ρ – тасаввурда аниқланг.

Жавоб:

$$\rho(p, p') = \left(\frac{1}{\omega\pi\hbar} th \frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(p+p')^2}{4\hbar\omega} th \frac{\hbar\omega}{2kT} - \frac{(p-p')^2}{4\hbar\omega} cth \frac{\hbar\omega}{2kT}\right\} \tag{22}$$

Кўрсатма. Аввалги масалани ечилган усул қўлланади.

Изоҳ 1. Зичлик матрица $\rho(p, p')$ ни диагонал элементлари ифодаси $p = p'$ да олинади:

$$\rho(p) = A\exp\left(-\frac{p^2}{\omega\hbar} th \frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \tag{23}$$

Асосий матндаги умумий ифодадан бу (23) ифодани қуйдагича олинади:

$$\rho(p) = Ae^{-\frac{\beta p^2}{2}}; \beta = \frac{1}{<\varepsilon>} = \frac{2}{\hbar\omega} th \frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{24}$$

β нинг бу қийматини назарда тутиб, (24) ифода (23) тақсимот билан бир хил эканлигига қаноат ҳосил қилинади. А нормаллаш шартидан аниқланади.

Изоҳ 2. классик ҳолда ($kT >> \hbar\omega$ шарт бажарилганда) (24) ёки (23) дан

$$\rho(p) = Ae^{-\frac{p^2}{2kT}} \tag{25}$$

Максвелл тақсимоти функцияси чиқади.

Изоҳ 3. $\hbar\omega >> kT$ ҳолда (24) дан

$$\rho(p) = Ae^{-\frac{p^2}{\hbar\omega}} = |\psi_0(p)|^2 \tag{26}$$

тақсимотни оламиз. Бунда $\psi_0(p) = A^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{p^2}{2\hbar\omega}}$ осцилляторнинг асосий ҳолати тўлқин функциясидир.

Изоҳ 4. $\rho(p)$ ёки $\rho(q)$ ни $\rho(q) = |\psi(q)|^2$ деб тасаввур этилса, умумий ҳолда $\psi(q)$ функция қандай тенгламанинг ечими бўлади?

[$\psi_0(q)$ ва $\psi_0(p)$ – Шредингер тенгламасининг ечими]

Изоҳ 5. Гармоник осцилляторнинг зичлик матрицаси

$$\rho = Z^{-1}\exp\left(-\beta\hat{H}\right), \hat{H} = p^2|2m + m\omega^2q^2|2$$

q-тасаввурдаги матрица элементлари

$$\rho(q,q') = \frac{1}{Z} < q\left|e^{-\beta\hat{H}}\right|q' >= \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n}\psi_n(q')\psi_n(q) \tag{9}$$

ифода билан аниқланади. Бунда $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ҳусусий қийматларга мос келган тўлқин функциялар

$$\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{H_n(\xi)}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{\xi^2}{2}} \qquad \left(\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q\right)$$

$H_n(\xi)$ Эрмит полиноми

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2} = \frac{e^{\xi^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-2i\omega)^n e^{U^2+2i\xi U}dU$$

$\psi_n(\xi)$ нинг ифодасидан фойдаланиб, зичлик матрицаси элементлари $\rho(q,q')$ учун (18) ифодани олиш мумкин. Аммо бу усул етарли даражада мураккаб бўлгани учун бу ерда уни қайтармасдан бу усул ҳам яна аввалги натижага олиб келишини қайд этиш билан чегараланамиз.

VI боб. Флуктуация назарияси

1-§. Кириш

Статистик физиканинг асосий вазифаси - термодинамик қонунлар ва муносабатларни асослаш, уларни исбот қилиш хамда термодинамик функцияларни молекуляр - кинетик назария асосида хисоблашдан иборат. Бунда физик катталикларнинг ўртача қиймати ҳисобланилади. Катталикларнинг хақиқий қийматларининг ўртача қийматдан четланишини (оғишини) ҳам мувозанатли статистик физика тадқиқ қилади, ўрганади.

Физик катталиклар хақиқий қийматларининг уларнинг ўртача қийматидан тасодифий четланишига флуктуация ҳодисаси дейилади. Моддаларнинг микроскопик хоссаларига флуктуация таъсир қилади. Демак, бу хоссаларни чуқур тушуниш учун флуктуациянинг таъсирини ҳисобга олиш зарур. Шу сабабли, флуктуация ҳодисасини ўрганиш тадқиқ қилиш флуктуация назариясининг аҳамияти шундан хам иборатки, у мувозанатли ҳолат назарияси билан номувозанатли холат назарияси ўртасида кўприкни ташкил этади. *Система мувозанатли холатдан четланиши стационар бўлиши мумкин. Бу номувозанатли жараёнларни ўрганиш усули кинетика дейилади.* Флуктуация назарияси кинетик назария усулларини ўрганишга қўйилган қадамдир.

Ихтиёрий миқдор x флуктуациясининг миқдорий ўлчами сифатида $\overline{(x-\bar{x})^n}$ катталик қабул қилинади. Аксарият масалаларни ечишда n=2 бўлган ҳолда фойдаланиш етарли бўлади. *Бу ҳолда* $\overline{(x-\bar{x})^2}$

ни х катталигининг ўртача квадратик флуктуацияси ёки дисперсияси дейилади.

2-§. Флуктуациянинг термодинамик назарияси

Фараз қилайлик,система $X(x_1, x_2,\ldots)$ параметрга нисбатан аниқланган бўлиб, бунинг ўртача қиймати қуйидагича бўлсин:

$$\overline{X}(\overline{x}_1, \overline{x}_2,\ldots)$$

Биз X нинг ҳақиқий қийматларининг ўртача қиймат $\overline{X}$ дан четланиши қонуниятини, яъни X нинг қийматлари эҳтимоллари тақсимотини аниқлашимиз лозим.

Флуктуацияни аниқлаш учун (ўлчамсиз) энтропиянинг умумий таърифи

$$S = -< \ln f(E) > \qquad (1)$$

ифодадан фойдаланилади; бунда каноник тақсимотни қуйдагича аниқлаймиз:

$$f(E) = Z^{-1}e^{-\beta E}, \beta = \frac{\nu}{U} \qquad (2)$$

бунда Z-статистик интеграл (йиғинди), U-ички энергия, 2ν – системанинг гамильтонианини аниқловчи параметрлар сони; юқори температурада, энергиянинг эркинлик даражалари бўйича тенг тақсимланиши қонуни ўринли бўлганда (2) тақсимот Гиббснинг каноник тақсимотига ўтади. Бундан каноник ансамбль энтропиясини топамиз:

$$S = \nu + \ln Z \qquad (3)$$

Система ёки унинг бирор қисмини характерлайдиган физик катталик $X(x_1, x_2,\ldots)$ нинг ўзгариши билан системанинг ҳолати ўзгаради.

Фараз қилайлик, энтропия теигламаси (3) фақат мувозанат ҳолатдаги система учун ўринли бўлмасдан X нинг барча қийматларида ҳам ўринли бўлсин:

$$S(X) = \nu(X) + \ln Z(X) \tag{4}$$

Флуктуация ҳодисасида эркинлик даражалари сони доимий деб, (3) ва (4) ифодалардан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{Z(X)}{Z(\overline{X})} = \exp\left[S(X) - S(\overline{X})\right] \tag{5}$$

Бунда $S(X) - S(\overline{X}) = \Delta S(X) \leq 0$ ва демак нисбат $\frac{Z(X)}{Z(\overline{X})}$ (0,1) интервалда ўзгаради ва системанинг мувозанатли ҳолатдан четланиши эҳтимоли $W(X, \overline{X})$ ни аниқлайди, яъни

$$W(X, \overline{X}) = A\exp[\Delta S(X)] \tag{6}$$

бунда A-нормаллаш шартидан аниқланади.

$$W(X, \overline{X}) = \frac{Z(X)}{Z(\overline{X})}; \Delta S(X) = S(X) - S(\overline{X})$$

(6) ифодани Эйнштейн формуласи дейилади.

Қуйидаги бир ўзгарувчан $X(x_1) = x$ бўлган ҳолни қараб чиқайлик. Параметр x нинг ўртача қиймати $\overline{x}$ дан четланиши кичик бўлсин. Бу ҳолда S(x) ни қаторга қуйидагича ёйлик:

$$S(x) = S(\overline{x}) + \frac{\partial S}{\partial X}\Big|_{x=\overline{x}_0}(x - \overline{x}) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial \overline{X}^2}\Big|_{x=\overline{x}}(x - \overline{x})^2 + \ldots \tag{7}$$

$x = \overline{x}$ бўлганда энтропия $S(x)$ максимум қийматга эга бўлади. Шунинг учун

$$\frac{\partial S}{\partial X}\Big|_{x=\overline{x}} = 0, \frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\Big|_{x=\overline{x}} < 0 \tag{8}$$

(8) га асосан

$$S(x) - S(\bar{x}) = \Delta S(x) = -\frac{\beta}{2}(x - \bar{x})^2 \tag{9}$$

бунда

$$\beta = \left|\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}\right| > 0$$

(9) ни назарда тутиб, (6) формулани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$W(x) = A\exp\left[-\left(\frac{\beta}{2}\right)(x - \bar{x})^2\right] \tag{10}$$

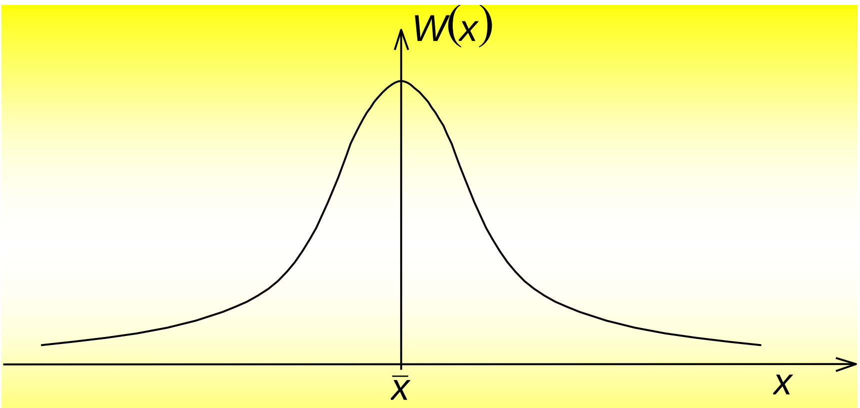
(10) даги A қуйидаги нормаллаш шарти

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1 \tag{11}$$

дан топилади. (10) ни (11) га қўйиб, $A = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ эканини топамиз (6.1-масалага қаранг). Шундай қилиб x катталикнинг флуктуацияси қийматлари учун қуйидаги тақсимот функциясини оламиз:

$$W(x) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(\frac{\beta}{2}\right)(x - \bar{x})^2\right] \tag{12}$$

Бу тақсимотни Гаусс тақсимоти (ёки нормал тақсимот) дейилади. Бу тақсимот симметрикдир ва $x = \bar{x}$ да максимумга эга (6.1 расм).



6.1- расм.

Квадратик флуктуация ўртачаси $\overline{\left(x-\overline{x}\right)^2}$ ни (12) асосида аниқлаймиз (6.1 6.2-масалаларга қаранг):

$$\overline{\left(x-\overline{x}\right)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\overline{x}\right)^2 W(x)dx = \frac{1}{\beta} \tag{13}$$

Демак,

$$W(x) = \left[2\pi\overline{\left(x-\overline{x}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\left(x-\overline{x}\right)^2}{2\overline{\left(x-\overline{x}\right)^2}}\right] \tag{14}$$

Юқорида бир параметрнинг флуктуациясини қарадик. Худди шунингдек, кўп параметрлар флуктуацияларини кўришимиз мумкин. Бу ҳолда система энтропияси шу параметрлар $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нинг функцияси бўлади:

$$S(x) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Бу ҳолда параметрларнинг ўртача қийматларидан четланиши эҳтимоли $W(X)$ ни қуйидагича ёзамиз:

$$W(X)dx_1dx_2\ldots dx_n = A\exp[\Delta S(X)]dx_1dx_2\ldots dx_n \tag{15}$$

бунда

$$X = X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$S(X)$ ни $\left(x_i-\overline{x_i}\right)$ даражалар бўйича қаторга ёямиз, $\left(x_i-\overline{x_i}\right)$ ни кичик деб, иккинчи тартибли хадларни ҳисобга олиш билан чегараланамиз, яъни

$$S(X) = S\left(\overline{X}\right) + \sum_i^n \frac{\partial S}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=\overline{x}}\left(x_i-\overline{x_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\bigg|_{x_i=\overline{x},\, x_j=\overline{x}}\left(x_i-\overline{x_i}\right)\left(x_j-\overline{x_j}\right) + \ldots$$

ёки (8) га асосан

$$S(X) = S\left(\overline{X}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}^n \beta_{i,j}\left(x_i-\overline{x_i}\right)\left(x_j-\overline{x_j}\right) \tag{16}$$

(16) ни (15) га қўйиб, аниқлашимиз лозим бўлган флуктуация эҳтимоллари тақсимотини топамиз.

$$W(X) = A\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}\beta_{i,j}\left(x_i - \overline{x_i}\right)\left(x_j - \overline{x_j}\right)\right] \qquad (17)$$

Бунда A нормаллаш шарти

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty} W(X)dx_1dx_2\ldots dx_n = 1 \qquad (18)$$

дан топилади:

$$A = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sqrt{\beta}$$

β - матрица $\beta_{i,j}$ нинг детерминанти (6.1, 6.2 - масалаларга қаранг).

Масалалар.

6.1. (10) ифодадаги A ни аниқланг.

Ечиш. Қулайлик учун $\overline{x} = 0$ деб, (10) ни (11) га қўями

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\beta x^2\right]dx = 1$$

ёки

$$A\left(\frac{2}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} I = 1$$

бундаги I Пауссон интегралини топамиз:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy$$

Бунинг учун I^2 ни ёзиб, сўнг қутб координата системасига ўтиб, интеграллаш амалини бажарамиз, яъни

$$I^2 = \int_{?}^{?}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{+\infty} re^{-r^2}dr = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi$$

Демак, $I = \sqrt{\pi}$. Шундай қилиб, $A\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$

6.2. (17) ифодадаги А ни аниқланг.

Ечиш. (18) интеграл ифодани ҳисоблаш учун x_i устида шундай чизиқли алмаштириш

$$x_i = \sum_k a_{ik} x_k^{\frac{1}{k}} \qquad (1)$$

ни бажарайликки, квадратик форма $\sum_{i,j} \beta_{i,j} x_i x_j$ натижада $\sum_i x_i^2$ га айлансин, яъни

$$\sum_{i,j} \beta_{i,j} x_i x_j = \sum_i x_i^2 = \sum_{i,j} x_i x_j \delta_{i,j} \qquad (2)$$

(1) ни (2) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i,j} \beta_{i,j} a_{im} a_{jn} = \delta_{m,n} \qquad (3)$$

Бунда чап томондаги матрица детерминантлари $\beta = |\beta_{ij}|, a = |a_{im}|$ ўнг томондаги матрица детерминанти эса $|\delta_{mn}| = 1$. Шунинг учун

$$\beta a^2 = 1 \qquad (4)$$

тенгликка эга бўламиз.

(18) интегрални чизиқли алмаштиргандан кейин, якобиан доимий ва а га тенг эканлигини назарда тутиб, қуйидагини ёзамиз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} aW(X')dx_1' dx_2' \dots dx_n' = Aa \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_i x_i^2\right] dx_1' dx_2' \dots dx_n' =$$

$$= Aa\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right]^n = Aa(2\pi)^{\frac{n}{2}} = 1$$

ёки (4) ни эътиборга олиб, аниқланиши лозим бўлган А ни қуйидагича эканлигини топамиз:

$$A = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sqrt{\beta}$$

6.3. Система қисмининг ҳолатини ифодалайдиган параметр x бўлсин. Энтропия ифодаси (3) асосида X нинг флуктуациялари тақсимотини

$$W(X, X_0) = Ce^{-\Delta A_{\min}\frac{(X, X_0)}{\theta}} \tag{1}$$

кўринишга эга эканлигини кўрсатинг. Бунда $\Delta A_{\min}$ –система қисмининг мувозанатли ҳолат X_0 дан $X = X_0 + \Delta X$ ҳолатга ўтишда бажарилиши зарур бўлган минимал иш.

Ечиш. Тўла система ҳолати ўзгарганда бажариладиган иш термодинамика қонунларига асосан

$$dA \geq dU - \theta dS$$

ёки квазиэластик (қайтувчан) жараёнлар учун

$$dA_{\min} = dU - \theta dS \tag{2}$$

бўлади. Бунда U ва S системанинг ички энергияси ва энтропияси. Тўла система яккаланган, яъни dU=0 бўлсин. Система қисми етарли даражада кичик бўлса, система параметри θ нинг ўзгаришини ҳисобга олмаслик мумкин. Бу ҳолда снстеманинг X_0 ҳолатдан $X = X_0 + \Delta X$ ҳолатга ўтиши учун (2) асосида қуйидагини ёзамиз:

$$\Delta A_{\min} = -\theta[S(X) - S(X_0)] \tag{3}$$

(3) ни (6.6) га қўйиб, исбот қилиниши лозим бўлган (1) га эга буламиз.

Термодинамик параметрларнинг ўртача қийматларидан четланиши, яъни флуктуацияси тегишли (мос) иш бажарилиши билан содир бўлади.

3-§. Термодинамик параметрлар флуктуацияси

Термодинамик параметр X нинг ΔX га ўзгариши туфайли системанинг ички энергияси U_t энтропияси S ва ҳажми V нинг ўзгаришлари $\Delta U, \Delta S$ ва ΔV бўлсин. Ўзгармас температура ва босимдаги системада флуктуация сабабли ташқи кучлар бажарган иш термодинамика асосида қуйидагича аниқланади:

$$dA \geq dU + pdV - TdS$$

(бунда $\theta dS = kTdS = TdS_0$: қулайлик учун индекс ноль ёзилмайди). Бундан млнималь иш учун

$$dA_{\min} = dU + pdV - TdS \tag{19}$$

ифодага эга бўламиз. Бу ифодада T ва P мувозанатдаги қийматлар. U ни ΔS ва ΔV даражалари бўйича қаторга ёямиз:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial U}{\partial V}dV + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial V^2}(\Delta V)^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\Delta S \Delta V\right] + \ldots \tag{20}$$

Маълумки, бу ифодада ҳосилалар учун уларнинг мувозанатдаги қийматлари олинади.

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}, -P = \frac{\partial U}{\partial V} \tag{21}$$

ларни назарда тутиб, Т ва Р параметрларнинг ўзгаришини ёзамиз:

$$\Delta T = \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}\Delta S + \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}\Delta V \tag{22}$$

$$-\Delta P = \Delta\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\Delta V + \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\Delta S \tag{23}$$

(22) ни ΔS га, (23) ни эса ΔV га қуйидагича кўпайтирамиз:

$$\Delta S \Delta T = \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}\Delta V \Delta S \tag{24}$$

$$-\Delta P \Delta V = \frac{\partial^2 U}{\partial V^2}(\Delta V)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}\Delta S \Delta V \tag{25}$$

(21), (24) ва (25) ларни назарда тутиб, (20) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\Delta U = T\Delta S - p\Delta V + \frac{1}{2}\left(\Delta T\Delta S - \Delta P\Delta V\right) \qquad (26)$$

X нинг чекли ўзгариши $X + \Delta X$ учун (19) ни

$$\Delta A_{\min} = \Delta U - T\Delta S + P\Delta V$$

кўринишда ёзиб, бу ифодага (26) дан ΔU ни олиб келиб қўйсак, қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$\Delta A_{\min} = \frac{1}{2}\left(\Delta T\Delta S - \Delta P\Delta V\right) \qquad (27)$$

$\Delta A_{\min}$ нинг бу ифодасини

$$W(X, \Delta X) = C\exp\left[-\frac{\Delta A_{\min}}{kT}\right]$$

га қуйиб, термодинамик параметрлар флуктуациялари учун қуйидагини оламиз:

$$W(X, \Delta X) = C\exp\left[\frac{1}{2kT}\left(\Delta P\Delta V - \Delta T\Delta S\right)\right] \qquad (28)$$

Бу ерда $\theta = kT$ деб қабул қилинди,

Масалалар.

6.4. $(\Delta V)^2, (\Delta T)^2$ ва $\overline{\Delta V\Delta T}$ ўртача квадратик флуктуациялар аниқлансин.

Ечиш. Эркин ўзгарувчилар V ва T бўлсин. У ҳолда

$$\Delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \Delta V \qquad (1)$$

$$\Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \Delta V \qquad (2)$$

Термодинамикадан маълумки,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T}; \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \tag{3}$$

(3) ни эътиборга олиб,(2) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta S = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \Delta V + \frac{C_V}{T}\Delta T \tag{4}$$

(1) ва (4) ларни (4.28) га қуйиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$W(\Delta V, \Delta T) = C\exp\left[\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}{2kT}(\Delta V)^2 - \frac{C_V}{2kT^2}(\Delta T)^2\right] \tag{5}$$

$\Delta V\Delta T$ га мутаносиб бўлган ҳадлар (5) ифодада иштирок этмаётир, демак, ҳажм V ва температура T флуктуациялари бир-бирига боғлиқ эмас, яъни $\overline{\Delta V\Delta T} = 0.$

(5) дан кўринадики ҳажм ва температура квадратик флуктуациялари учун куйидагиларга эгамиз:

$$\overline{(\Delta V)^2} = -kT\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = kT\chi_T V \tag{6}$$

$$\overline{(\Delta T)^2} = \frac{kT^2}{C_V} \tag{7}$$

бунда $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ – изотермик сиқилувчанлик. Термодинамик тенгсизликлардан $C_V > 0$ ва $\chi_T > 0$ флуктуацияларнинг $\overline{(\Delta T)^2}$ ва $\overline{(\Delta V)^2}$ мусбат эканлиги маълум.

6.5. $\overline{(\Delta P)^2}, \overline{(\Delta S)^2}$ ва $\overline{\Delta P\Delta S}$ флуктуацияларни аниқланг.

Ечиш. Эркин ўзгарувчилар *P* ва *S* бўлсин.

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \Delta S \tag{1}$$

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \Delta S \tag{2}$$

Термодинамикадан маълумки,

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = C_P; \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \tag{3}$$

(3) ни эътиборга олиб, (1) ва (2) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \Delta S \tag{4}$$

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \Delta P + \frac{T}{C_P} \Delta S \tag{5}$$

(2) ва (5) ни (28) га қуйиб,

$$W(\Delta P, \Delta S) = C \exp\left[\frac{1}{2kT}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S (\Delta P)^2 - \frac{1}{2kC_P}(\Delta S)^2\right] \tag{6}$$

эканлигини аниқлаймиз.

(6) дан босим ва энтропия флуктуадиялари бир-бирига боғлиқ эмаслиги, яъни $\overline{\Delta S \Delta P} = 0$ эканлиги кўринади. Энтропия ва босим квадратик флуктуациялари учун (6) дан қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\overline{(\Delta S)^2} = kC_P \tag{7}$$

$$\overline{(\Delta P)^2} = -kT\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{kT}{V\lambda_S} \tag{8}$$

бунда $\lambda_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S -$адиабатик сиқилувчанлик.

6.6. Ички энергия квадратик флуктуацияси $\overline{(\Delta U)^2}$ ни аниқланг.

Эркин ўзгарувчилар қилиб, *V* ва *T* ни олинг.

Ечиш.

$$\Delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Delta V \qquad (9)$$

Буни квадратга кўпайтириб, сўнг ўртачалаймиз.

$$\overline{(\Delta U)^2} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V^2 \overline{(\Delta T)^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T^2 \overline{(\Delta V)^2} \qquad (10)$$

$\overline{(\Delta T)^2}$ ва $\overline{(\Delta V)^2}$ ларнинг ўрнига уларнинг қийматларини қуйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\overline{(\Delta U)^2} = C_V kT^2 - kT\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T^2 = kT\left[TC_V + V\lambda_T\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T^2\right]$$

4-§. Зарралар сони флуктуацияси

Системанинг бир қисми ҳажмининг флуктуацияси учун (6.4 - масалага қаранг).

$$\overline{(\Delta V)^2} = -kT\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \qquad (29)$$

тенглик ўринлидир. Агар система қисми *N* та зарралардан иборат бўлса, (29) ни N^2 га бўлсак, солиштирма ҳажм флуктуацияси учун қуйидаги тенглик ҳосил бўлади:

$$\overline{\left(\frac{\Delta V}{N}\right)^2} = -\frac{kT}{N^2}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \qquad (30)$$

Бу флуктуация система ҳажми ёки зарралар сони ўзгармас деб қаралаётганига боғлиқ эмас. Шунинг учун, (30) асосида маълум ҳажмдаги зарралар сони флуктуациясини аниқлашимиз мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам,

$$\Delta\left(\frac{V}{N}\right) = V\Delta\left(\frac{1}{N}\right) = -\frac{V}{N^2}\Delta N \tag{31}$$

Буни квадратга кўтариб, сўнг ўртачалаб қуйидагини топамиз:

$$\frac{V^2}{N^4}\overline{(\Delta N)^2} = \overline{\left(\Delta\frac{V}{N}\right)^2}$$

ёки (30) ни эътиборга олиб қуйидаги зарралар флуктуацияси ифодасини ёзамиз:

$$\overline{(\Delta N)^2} = -\frac{kTN^2}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \tag{32}$$

Критик ҳолатда $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ сиқилувчанлик чексизликка интилади. Шунинг учун (31) дан кўринадики, зарралар сони флуктуацияси чексизликка интилади. Шу сабабли, критик ҳолатдаги жараёнлар махсус қаралиши лознм.

Масалалар.

6.7. Зарралар сони флуктуацияси қуйидаги

$$\overline{(\Delta N)^2} = kT\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} \tag{1}$$

кўринишга эга бўлишини исбот қилинг.

Ечиш. Хосила $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ ни ўзгармас N да ёзамиз, яъни

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial}{\partial P}NV\right)_{T,N} = -\frac{V^2}{N}\left(\frac{\partial}{\partial P}\cdot\frac{N}{V}\right)_{T,N}$$

Бу ерда ўзгарувчан параметр деб, *V* ни эмас, *N* ни олиш мумкин ((36) формула муносабати билан айтилган изоҳни қаранг). У ҳолда

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} = -\frac{V}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{T,V} \tag{2}$$

термодинамик потенциал

$$d\Phi = d(N\mu) = -SdT + VdP + \mu dN$$

ёки

$$Nd\mu = -SdT + VdP$$

дан қуйидагини оламиз

$$\frac{N}{V} = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V} \qquad (3)$$

(3) ни эътиборга олиб (2) ни қуйидагича ўзгартириб ёзамиз:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} = -\frac{V^2}{N^2}\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)Tv = -\frac{V^2}{N^2}\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V} \qquad (4)$$

Энди (4) ни (32) га қўйиб, зарралар сони флуктуацияси (1) ни ҳосил қиламиз.

6.8. Классик идеал зарралар учун $\overline{(\Delta N)^2}$ ни аниқланг.

Ечиш. Бизга маълумки,

$$\overline{(\Delta N)^2} = -\frac{kTN^2}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)T \qquad (1)$$

Идеал газ тенгламаси $PV = NkT$ ва умумий математик муносабат $\rho\chi_T\mu = 1$ га асосан (1) дан классик зарралар флуктуацияси учун

$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{N}{\mu} \qquad (2)$$

ифодага эга бўламиз; бунда $\mu -$ корреляцион параметр. Идеал газ учун $\mu = 1$ эканлигидан изланаётган флуктуация ифодаси

$$\overline{(\Delta N)^2} = N \qquad (3)$$

келиб чиқади.

5-§. Квант идеал зарралар сони флуктуацияси

Идеал квант зарралар системасининг мувозанат ҳолати учун Ферми-Дирак тақсимот функцияси

$$\bar{n}_i \equiv f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon_i - \mu)}{kT}} + 1} \tag{32}$$

Бозе - Эйнштейн тақсимот функцияси

$$\bar{n}_i \equiv f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{(\varepsilon_i - \mu)}{kT}} - 1} \tag{33}$$

ўринли; бунда $\bar{n}_i - \varepsilon_i$ энергияли i квант ҳолатдаги зарраларнинг ўртача сони.

Системадаги квант зарралар сони n_i нинг флуктуациясини қуйидаги

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = kT\left(\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial \mu}\right)T \tag{34}$$

формула (6.7-масала (1) формулага қаранг) асосида аниқлаймиз.

(32) ва (33) лардан $\left(\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial \mu}\right)_T$ ни топиб, сўнг (34) га қўйиб, Ферми-газ учун

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = \bar{n}_i(1 - \bar{n}_i) \tag{35}$$

Бозе-газ учун

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = \bar{n}_i(1 + \bar{n}_i) \tag{36}$$

ифодаларни оламиз.

Классик идеал газ учун Больцман тақсимотидан фойдалансак, (34) формула асосида

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = \bar{n}_i \tag{37}$$

эканлигини топамиз (6.8 масаланинг (3) формуласига қаранг). Классик идеал газ учун олинган (37) натижа (35) ва (36) формуладан $\bar{n}_i << 1$ бўлган чегаравий ҳолда келиб чиқади.

Масала. 6.9. Эритмадаги концентрация флуктуациясини аниқланг. Кўрсатма: (34) формуладан фойдаланинг.

Ечиш. (34) формулани ёзамиз:

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = kT\left(\frac{\partial \bar{n}_i}{\partial \mu_i}\right)T \qquad (1)$$

бунда n_i ва μ_i эритмадаги $i-$ хилдаги модда зарраларининг сони ва химиявий потенциали.

(1) ни зарраларнинг умумий сони N^2 га бўлиб, концентрация $C_i = \frac{\bar{n}_i}{N}$ нинг флуктуацияси учун қуйидаги формулани оламиз:

$$\overline{(\Delta C_i)^2} = \frac{kTN}{N}\left(\frac{\partial C_i}{\partial \mu_i}\right) = \frac{kT}{N^2\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \bar{n}_i}\right)T} \qquad (2)$$

6-§. Флуктуациялар муносабатлари

Фараз қилайлик, система (ёки унинг қисми) ундаги флуктуация жараёнлари туфайли ўзининг мувозанатли ҳолатидан номувозанатли ҳолатига ўтган бўлсин. Система ҳолатининг бу ўзгаришини “флуктуацияловчи куч” *F* (умумий ҳолда ташқи куч) таъсирида содир бўлаяпти деб тасаввур этиш мумкин. Бу куч *F* таъсири туфайли унга мос умумлашган координатанинг ўзгаришини ўртача қийматидан четланишини x билан белгилайлик. Бу ҳолда бажарилган иш F_x га тенг бўлади. Номувозанатли ҳолатдаги системанинг гамильтониани, аёнки $H = H_0 - F_x$ бўлади; бунда H_0 мувозанатли ҳолатдаги системанинг гамильтониани. Локал мувозанат ҳақидаги фаразга асосланиб, каноник тақсимот функциясини

$$f(H) = \frac{1}{Z}\exp[-\beta(H_0 - F_x)] \quad (38)$$

кўринишда ёзамиз.

Бу ерда махсус шуни таъкдлаймизки, идеал система қаралаётганда (классик ёки квант ҳол бўлишидан қатъий назар) динамик параметр *x* битта заррага тегишли бўлиши мумкин.

Системадаги x нинг ўртача қиймати умумий усул билан қуйидагича топилади:

$$\bar{x} = \frac{\int x(p,q)\exp[-\beta(H_0 - F_x)]dpdq}{\int \exp[-\beta(H_0 - F_x)]dpdq} \quad (39)$$

бунда *p* ва *q*-зарраларнинг умумлашган импульслари ва координаталари, $\beta = \frac{\nu}{U}$.

(39) дан қуйидаги ҳосилани оламиз:

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial F}\right)_\beta = \frac{\beta\int x^2\exp[-\beta(H_0 - F_x)]dpdq}{\int \exp[-\beta(H_0 - F_x)]dpdq} - \beta\left\{\frac{\int x\exp[-\beta(H_0 - F_x)]dpdq}{\int \exp[-\beta(H_0 - F_x)]dpdq}\right\}^2 = \beta\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right) =$$
$$= \beta\overline{(\Delta x)^2}$$

Шундай қилиб, *x* параметрнинг флуктуацияси учун

$$\overline{(\Delta x)^2} = \theta\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial F}\right)_\theta, \theta = \frac{1}{\beta} \quad (40)$$

ифодага эга бўламиз.

Худди шунингдек, флуктуацияловчи кучларнинг флуктуацияси $\overline{(\Delta F)^2}$ учун

$$\overline{(\Delta F)^2} = \theta\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\right)_\theta \quad (41)$$

ифодани оламиз. (40) ва (41) қўшалоқ параметрларнинг (жумладан статистик катталикларнинг) флуктуацияларини анақлаш методларидир.

(40) ва (41) ларни бир-бирига кўпайтириб ва $\left(\frac{\partial x}{\partial F}\frac{\partial \overline{F}}{\partial x}\right)_{\theta}=1$ деб ҳисоблаб

$$\left[\overline{(\Delta F)^2}\,\overline{(\Delta x)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\theta \tag{42}$$

муносабатни оламиз. (42) ни биринчи флуктуация муносабати деб атаймиз.

Флуктуация учун $F=\omega P$ эканлигини назарда тутиб (буни кейин асослаймиз) (42) ни

$$\left[\overline{(\Delta x)^2}\,\overline{(\Delta P_x)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\theta}{\omega} \tag{43}$$

кўринишда ёзамиз. (43) ни иккинчи флуктуация муносабати деб атаймиз.

7-§. Параметрларнинг корреляцияси

Флуктуациялар симметрик бўлгани учун, яъни уларнинг ҳақиқий қийматлари ўртача қийматдан икки томонга бир хил четланганликлари учун флуктуацияларнинг ўртачаси $\overline{\Delta x}$ ҳар доим нолга тенг бўлади, яъни

$$\overline{\Delta x}=\overline{(x-\overline{x})}=\overline{x}-\overline{x}=0$$

Система параметрлари x ва y нинг флуктуациялари кўпайтмасининг ўртачаси $\overline{\Delta x\Delta y}$ ни кўрайлик.

$$\overline{\Delta x\Delta y}=\overline{(x-\overline{x})(y-\overline{y})}=\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y} \tag{44}$$

x параметрнинг қийматлари y параметрнинг қийматларига боғлиқ бўлмаса, яъни уларнинг қийматлари эҳтимоллари бир-бирига боғлиқ бўлмаса, x ва y ни алоҳида-алоҳида ўртачалаш мумкин. Бу ҳолда

$\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$ ва демак $\overline{\Delta x \Delta y} = 0$ бўлади. Агар x ва y параметрлар қийматларининг бир-бирига таъсири бўлса, яъни уларнинг эҳтимоллари бир-бирига боғлиқ бўлса, табиийки, x ва y ларни алоҳида-алоҳида ўртачалаб бўлмайди ва демак $\bar{x}\bar{y} \neq \overline{xy}$ бўлади. Бу ҳолда $\overline{\Delta x \Delta y} \neq 0$ бўлади ва параметрлар x ва y орасида корреляция мавжуд бўлади, Корреляциянинг ўлчови сифатида

$$\overline{\Delta x \Delta y} = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \tag{45}$$

ифодани қабул қилинади. Агар $x = y$ бўлса, (45) флуктуацияни ифодалайди.

Умумлашган F_1 ва F_2 кучларга мос, ситемани характерловчи параметрлар x_1 ва x_2 бўлсин. Температура T бўлган термостат билан система контактда турибди деб x_1 ва x_2 параметрларнинг корреляцияси $\overline{\Delta x_1 \Delta x_2}$ ни аниқлайлик.

Системага F_1 ва F_2 кучлар таъсир этаётган бўлса, унинг гамильтониани H

$$H = H_0 - F_1 x_1 - F_2 x_2$$

кўринишга эга булади.

Бунда x_1 ва x_2 умумлашган координаталар q ва умумлашган импульслар p нинг функцияларидир.

Бир ўзгарувчи параметр бўлганда $\left(\overline{\Delta x^2}\right)$ ни аншқлаганимиз каби, каноник тақсимот

$$f(H) = Z^{-1} \exp\left[H_0 - F_1 x_1 - F_2 x_2\right]$$

асосида қуйидагиларни ҳам осонликча аниқлашимиз мумкин:

$$\overline{\Delta x_1 \Delta x_2} = \theta \left(\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial F_2} \right)_\theta , \tag{46}$$

$$\overline{\Delta x_1 \Delta x_2} = \theta \left(\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial F_1} \right)_\theta, \tag{47}$$

(46) ва (47) нинг чап томонлари тенглигидан

$$\left(\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial F_2} \right)_\theta = \left(\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial F_1} \right)_\theta \tag{48}$$

эканлиги келиб чиқади. Бу (48) муносабат x_1 нинг ўзгариши x_2 га таъсири қандай бўлса, x_2 нинг ўзгариши x_1 га шундайлигини кўрсатади (Онзагер принципи: F_1 нинг x_2 га таъсири F_2 нинг x_1 га таъсирига тенг).

Масалалар.

6.10. (40) асосида система ҳажми V нинг ўртача квадратик флуктуациясини аниқланг.

Ечиш. Ҳажмга мос умумлашган куч - манфий ишорали босимдир. Бинобарин, аниқланиши лозим бўлган флуктуация учун (40) асосида x ни V билан ва F ни $(-P)$ билан алмаштириб,

$$\overline{(\Delta V)^2} = -\theta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \theta V \chi_T \tag{1}$$

ифодага эга бўламиз; бунда $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ -изотермик сиқилувчанлик.

6.11. Ўзгармас ҳажмли система T температурали термостат билан контактда бўлсин ва зарралар манбаи билан зарралар алмашиб туриши мумкин бўлсин. Бу ҳодда система ҳолати катта каноник тақсимот

$$f_r = \frac{\exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]}{\sum \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]} \tag{1}$$

билан ифодаланади. Бунда μ -зарранинг химиявий потенциали, n_r ва E_r эса r -ҳолатдаги зарралар сони ва энергиясидир.

Маълумки, макроскопик система учун ўрта қийматлар $\bar{n}$ ва $\bar{E}$ ни одатда термодинамик мувозанатдаги қийматлар билан алмаштирилади, микроскопик системаларга доир масала қаралганда эса n ва E параметрлар $\bar{n}$ ва $\bar{E}$ билан алмаштирилади. Шуларни назарда тутиб, зарралар сони ва энергия флуктуациялари $\overline{(\Delta n)^2}$ ва $\overline{(\Delta E)^2}$ ни ҳамда $\overline{\Delta E \Delta n}$ корреляцияларни аниқланг.

а) $\overline{(\Delta n)^2}$ ни аниқланг.

Ечиш. (39) билан бу масаладаги (1) ни солиштирсак, кўрамизки, зарралар сонига мос умумлашган куч - бу химиявий потенциалдир. Шунинг учун, (40) га асосан, зарралар сони флуктуациясини ёзамиз:

$$\overline{(\Delta n)^2} = \theta \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)_\theta \tag{2}$$

б) $\overline{\Delta E \Delta n}$ ни аниқланг.

Ечиш. E учун ёзилган

$$\vec{E} = \frac{\sum_r E_r \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]}{\sum_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]} \tag{3}$$

ифодадан μ бўйича ҳосила оламиз (ҳосиладаги $\bar{E}$ ни E билан алмаштирамиз):

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_\theta = \beta \frac{\sum_r n_r E_r \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)]}{\sum_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]} -$$

$$-\beta \frac{\sum_r E_r \exp[-\beta(E_r - \mu n_r)] \sum_s n_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]}{\left\{\sum_s \exp[-\beta(E_s - \mu n_s)]\right\}^2} = \beta\left(\overline{En} - \bar{E}\bar{n}\right) =$$

$$= \beta\left(\overline{(E - \bar{E})(n - \bar{n})}\right) = \beta \overline{\Delta E \Delta n}$$

Бундан:

$$\overline{\Delta E \Delta n} = \theta \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} \right)_\theta \tag{4}$$

Изоҳ. Агар (4) ифодада E ни n билан алмаштирилса, бизга маълум зарралар сони $\overline{(\Delta n)^2}$ флуктуацияси олинади.

в) $\overline{(\Delta E)^2}$ ни аниқланг.

Ечиш. Бу масалани ечиш учун (3) ифодани β бўйича дифференциаллаймиз:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \beta}\right)_\mu = -\frac{\sum_r E_r(E_r-\mu n_r)\exp[-\beta(E_r-\mu n_r)]}{\sum_s \exp[-\beta(E_s-\mu n_s)]}+$$

$$+\frac{\sum_r E_r\exp[-\beta(E_r-\mu n_r)]\sum_s(E_s-\mu n_s)\exp[-\beta(E_s-\mu n_s)]}{\left\{\sum_s \exp[-\beta(E_s-\mu n_s)]\right\}^2}=$$

$$=-\overline{E(E-\mu n)}+\overline{E}\,\overline{(E-\mu n)}=-\left|\left(\overline{E^2}-\overline{E}^2\right)-\left(\overline{En}-\overline{E}\overline{n}\right)\right|=$$

$$=-\left|\overline{(\Delta E)^2}-\mu\overline{\Delta E\Delta n}\right|$$

(4) ва (5) ифодадан қуйидагини оламиз:

$$\overline{(\Delta E)^2}=\theta\left[\theta\left(\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_\mu+\mu\left(\frac{\partial E}{\partial \mu}\right)_\theta\right],\quad \theta=\frac{1}{\beta} \tag{6}$$

Изоҳ. Берк система учун $\overline{(\Delta E)^2}=\theta^2\dfrac{\partial\overline{E}}{\partial\theta}$. "Осцилляторлар тўплами" моделига асосан $\overline{E}=\theta$. Демак, $\overline{(\Delta E)^2}=\theta^2$; Классик ҳолда $\theta=kT$ бу ҳолда тақсимот функция каноник тақсимотдан иборат бўлади. Квант ҳолда $\theta=\dfrac{\hbar\omega}{2}cth\dfrac{\hbar\omega}{2kT}$ ва бу ҳолда тақсимот функция $f(E)=|\psi|^2$, бунда ψ-осцилляторнинг тўлқин функциясидир.

8-§. Идеал газ зарралари тақсимоти

Фараз қилайлик, берилган ихтиёрий V ҳажмда ихтиёрий N сондаги зарралар бўлсин. Шу зарралар сони эҳтимоллари тақсимотини топайлик. Идеал газнинг умумий ҳажми V_0 зарраларининг умумий сони N_0 бўлсин.

Агар бир жинсли газ мувозанат ҳолатда бўлса, бирор ихтиёрий зарранинг V хажмда бўлиш эҳтимоли $\left(\frac{V}{V_0}\right)$ га тент бўлади. Бир вақтда N та зарранинг V да бўлиш эҳтимоли эса $\left(\frac{V}{V_0}\right)^N$ га тенг. Худди шунингдек, бирор ихтиёрий зарранинг V ҳажмда бўлмаслик эҳтимоли $\frac{V_0 - V}{V_0}$ га тент, $N_0 - N$ зарраларнинг V ҳажмда бўлмаслик эҳтимоли эса $\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^{N_0 - N}$ га тенг бўлади. Шунннг учун V ҳажмда ихтиёрий N та зарраларнинг бўлшп эҳтимоли $W(N)$ қуйидагича аниқланади:

$$W(N) \sim \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^{N_0 - N} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{N_0 - N}$$

Система бир жинсли бўлганда $\frac{V}{V_0} = \frac{\overline{N}}{N_0}$ бўлади, чунки $\overline{n}V = \overline{N}$, $\overline{n}V_0 = N_0$. Буларни эъгиборга олиб, қуйидагини ёзамиз:

$$W(N) \sim \left(\frac{\overline{N}}{N_0}\right)^N \left(1 - \frac{\overline{N}}{N_0}\right)^{N_0 - N}$$

N_0, V_0 ва V лар учун $N_0 \to \infty$, $V_0 \to \infty$ ва $V < \infty$ қабул қилиб, $W(N)$ учун қуйидагини оламиз:

$$W(N) = const \overline{N}^N e^{\overline{N}} \tag{49}$$

Нормаллаш шарти

$$\sum_{N=0}^{\infty} W(N) = 1$$

дан

$$const = \frac{1}{N!}$$

ни топамиз. Шундай қилиб,

$$W(N) = \frac{\bar{N}^N e^{-\bar{N}}}{N!} \qquad (50)$$

Бу $W(N)$ идеал зарралар тақсимоти учун олинган <u>Пуассон тақсимотидир.</u>

Маълум N учун, лекнн узлуксиз ўзгарувчи параметр $\bar{N}$ учун тақсимоти (50) ни ёзиш мумкин:

$$dW(\bar{N}) = w(\bar{N})d\bar{N} = C_N \bar{N}^N e^{-\bar{N}} d\bar{N}$$

ёки

$$dW(x) = w(x)dx = C_N x^N e^{-x} dx \qquad (51)$$

Нормалаш шартидан

$$C_N \int_0^{\infty} x^N e^{-x} dx = C_N \Gamma(N+1) = 1$$

C_N ни топамиз,

$$C_N = \frac{1}{\Gamma(N+1)}, \qquad (52)$$

бунда $\Gamma(N+1)$ гамма-функция. N бутун сон бўлганда $\Gamma(N+1) = N!$ бўлади; демак,

$$dW(\bar{N}) = \frac{1}{\Gamma(N+1)} \bar{N}^N e^{-\bar{N}} d\bar{N},$$

бунда $w(\bar{N}) = \frac{1}{\Gamma(N+1)} \bar{N}^N e^{-\bar{N}}$ - гамма-тақсимотдир.

Масалалар.

6.12. $\overline{N^2}$ ни аниқланг.

Ечиш.

$$\overline{N^2} = \sum_{N=0}^{\infty} N^2 W(N) = e^{-N} \sum_{N=2}^{\infty} \frac{N^N}{(N-2)!} + e^{-N} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{N^N}{(N-1)!} = N^2 + N \qquad (1)$$

Шундай қилиб, идеал газ зарралари сони квадратик флуктуацияси учун қуйидагини оламиз:

$$\overline{(\Delta N)^2} = \overline{N} \qquad (2)$$

6.13. Мувозанатли берк система энергияси қийматлари тақсимотини
аниқланг ва

$$f_{\beta\nu}(E)dE = \frac{\beta\nu}{\Gamma(\nu)} E^{\nu-1} e^{-\beta\nu} dE \qquad (1)$$

эканлигини исбот қилинг. Бунда ν-эркинлик даражалари сони, $\Gamma(\nu)$-гамма-функция, $\beta^{-1} \equiv \theta$ эркинлик даражаснга тўғри келган ўртача энергия.

Ечиш. n ва ν эркинлик даражаларига эга бўлган системаларнинг энергиялари E_n, E_ν қийматлари текис тақсимланган ва $n > \nu$, $\nu < \infty$ бўлсин.

Маълум бир эркинлик даражасига мос келувчи энергия қийматининг $(0, E)$ интервалда бўлиш эҳтимоли, эҳтимоллар тақсимотининг тенг тақсимланиш ҳақидаги фаразимизга асосан, интервал узунлиги E га пропорционал бўлади, маълум ν та эркинлик даражаларига мос келувчи энергия қийматининг $(0, E)$ интервалда бўлиш эҳтимоли $P(E_\nu)$ эса эҳтимоллар кўпайтмаси E^ν га пропорционал, яъни

$$P(E_\nu) \sim E_\nu^\nu \qquad (2)$$

Агар E узлуксиз ўзгарса, маълум эркинлик даражаларига мос энергия қийматларининг E_ν, $E_\nu + dE_\nu$ интервалда бўлиш эҳтимоли $dP(E_\nu)$ учун (2) ифодага асосан, қуйидагини ёзамиз:

$$dP(E) \sim E^{\nu-1} dE$$

(бунда ва бундан кейин индекс ν ни тушириб қолдирамиз).

Худди юқоридагидек, маълум эркинлик даражасига мос келган энергия қийматининг $(0, E)$ да бўлмаслик эҳтимоли $(E_n - E)$ га пропорционал, маълум $n-\nu$ та эркинлик даражаларига мос келган энергия қиймати $(0, E)$ га бўлмаслик эҳтимоли эса $(E_n - E)^{n-\nu}$ га пропорционалдир.

Ихтиёрий ν та эркинлик даражали система эяергиясининг E, $E + dE$ интервалда бўлиш эҳтимоллиги $dW(E)$ юқоридаги эҳтимоллар кўпайтмасадан иборат, яъни

$$dW(E) \sim (E)^{\nu-1} (E_n - E)^{n-\nu} dE \qquad (3)$$

Энди ҳисоблаймиз:

$$n \to \infty, \ \lim\left(\frac{E_n}{n}\right) = \theta \qquad (4)$$

Бу фаразимиз, маълум маънода Гиббс ансамблига эквивалент, θ эса бир эркинлик даражасига тўғри келган ўртача энергия, яъни ν эркинлик даражасига эга бўлган системанинг ички энергияси $U = \nu\theta$ бўлади. (4) ни назарда тутиб, (3) ифодани ўзгартириб ёзамиз:

$$dW(E) \sim \lim_{n\to\infty} E_n^{n-\nu} E^{\nu-1} \left(1 - \frac{E}{E_n}\right)^n \left(1 - \frac{E}{E_n}\right)^{-\nu} dE = n^{n-\nu} \theta^{n-\nu} E^{\nu-1} e^{-\frac{E}{\theta}} dE$$

ёки

$$dW(E)=Cn^{n-\nu}\theta^{n-\nu}E^{\nu-1}e^{-\frac{E}{\theta}}dE, \qquad (5)$$

бунда

$$\left(1-\frac{E}{E_n}\right)^n=\left(1-\frac{E/\theta}{n}\right)^n=-e^{-\frac{E}{\theta}},\quad n\to\infty$$

$$\left(1-\frac{E/\theta}{n}\right)^{-\nu}\to 1,\quad \nu<\infty$$

экани ҳисобга олинди.

Нормалаш шартидан C ни топамиз:

$$\int_0^1 dW(E)=Cn^{n-\nu}\theta^{n-\nu}\int_0^\infty E^{\nu-1}e^{-\frac{E}{\theta}}dE=1$$

Бунда

$$\int_0^\infty E^{\nu-n}-e^{-\frac{E}{\theta}}dE=\theta^\nu\int_0^\infty x^{\nu-1}e^{-x}dE=\theta^\nu\Gamma(\nu)$$

ни билган ҳолда C ни аниқлаймиз:

$$C=1/n^{n-\nu}\theta^n\Gamma(\nu)$$

Шундай қилиб, (5) эҳтимоллик учун:

$$dW(E)=f_{\beta\nu}(E)dE=\frac{1}{\theta^\nu\Gamma(\nu)}E^{\nu-1}e^{-\frac{E}{\theta}}dE \qquad (6)$$

Бундан исбот қилиниши лозим бўлган эҳтимоллик зичлиги (1) ни, $\theta\equiv\frac{1}{\beta}$ эканлигини назарда тутиб, оламиз.

6.14. Аввалги 6.13-масаланинг (6) ифодасидан қуйидагa Пуассон тақсимотини олинг:

$$W(\nu)=\frac{\overline{\nu}^\nu \overline{e}^{\overline{\nu}}}{\Gamma(\nu+1)} \qquad (1)$$

Ечиш. Бу масалада энергия θ маълум, лекин эркинлик даражалари сони ν ўзгаради:

$$\nu = 0,1,2,\ldots$$

Бу ҳолда эркинлик даражалари сонининг бир бирликка ўзгариши, энергия E нинг θ га ўзгаришига олиб келади, яъни

$$\Delta E = \theta;\ \beta \Delta E = 1 \tag{2}$$

(2) ни эътиборга олиб, гамма-тақсимот ифодасини

$$dW(E) = \frac{1}{\theta^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)} E^{\nu} e^{-\frac{E}{\theta}} dE$$

қуйидагича ёзамиз:

$$W_{\beta E}(\nu) = \frac{(\beta E)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\beta E}(\beta dE) = \frac{(\beta E)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} e^{-\beta E} \tag{3}$$

$\overline{\nu}$ ни аниқлаймиз:

$$\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu W_{\beta E}(\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \beta E (\beta E)^{\nu-1}}{\nu \Gamma(\nu)} e^{-\beta E} = \beta E \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\beta E)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-\beta E} = \beta E$$

Демак, $\overline{\nu} = \beta E$. Бу ерда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} W(\nu) = 1$$

экани назарда тутилди. Шундай қилиб, (3) ифода Пуассон тақсимоти (1) билан бир хил.

6.15. Қуйидаги эҳтимоллик ифодаси

$$dW(E) = \frac{1}{\theta^{\nu}\Gamma(\nu)} E^{\nu-1} e^{-\frac{E}{\theta}} dE \tag{1}$$

дан (6.13-масаладаги (6) формулага қаранг) берк система (яъни ν берилган маълум сон) учун тақсимот функцкясини аниқланг.

Ечиш. ν ўлчовли фазодаги радиуслари E ва $E + dE$ бўлган гиперсфералар орасидаги элементар ҳажм $d\Gamma_E$ маълумки, $E^{\nu-1}dE$ га пропорционал, яъни

$$d\Gamma_E \sim E^{\nu-1}dE$$

Гипершарнинг ҳажми Γ_E эса

$$\Gamma_E = AE^{\nu} \qquad (2)$$

бўлади ёки бундан

$$d\Gamma_E = \nu AE^{\nu-1}dE, \qquad (3)$$

бунда A-ҳар бир конкрет ҳол учун алоҳида аниқланади.

Умуман, $d\Gamma_E$ бўйича интеграллаш ўрнига элементар гиперкублар (катакчалар, "ҳолатлар") ҳажмлари $d\Gamma = d\Gamma(p,q)$, бўйича ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда

$$d\Gamma_E = gd\Gamma(p,q), \qquad (4)$$

бунда $d\Gamma$ гаперкуб ҳажми, E энергияли ҳолатлар сони g га тенг деб олинди. (3) ва (4) ларни назарга олиб, (1) ифодани қайта ёзамиз:

$$dW(E) = \frac{ge^{-\frac{E}{\theta}}}{\theta^{\nu}A\Gamma(\nu+1)}d\Gamma = \frac{gh^s}{\theta^{\nu}A\Gamma(\nu+1)}e^{-\frac{E}{\theta}}dn$$

ёки

$$dW(E) = f(E)dn, \qquad (5)$$

бунда

$$f(E) = Z^{-1}e^{-\frac{E}{\theta}}, \qquad (6)$$

$$Z^{-1} = \frac{gh^s}{\theta^{\nu}A\Gamma(\nu+1)} \qquad (7)$$

$dn = \dfrac{d\Gamma}{h^s}$ ўлчамсиз сон, h-Планк доимийси.

(6) ифода аниқланиши зарур бўлган тақсимот функциясидир; Z-шу системанинг статистик интеграли (йиғиндиси).

Изоҳ: Пуассон тақсимоти, гамма-фунуция ҳамда берк система учун тақсимот функцияси

$$f(E) = Z^{-1} e^{-\frac{E}{\theta}} \tag{8}$$

орасида шундай боғланиш борки, улар маълум шартлар бажарилганда бир-бирларига ўтишлари мумкин.

9-§. Чизиқли гармоник осциллятор координатаси ва импульси қийматлари флуктуацияларининг тақсимоти

Система ҳолатини характерловчи ҳар қандай физик катталикнинг флуктуациялари тақсимоти шу система ҳолатлари тақсимоти функцияси орқали аниқланади, яъни ҳолатлар тақсимоти функцияси (эҳтимоллар зичлиги) флуктуация назарияси учун асос бўлади.

Берк система $(\nu = const)$ учун

$$f(E) = Z^{-1} e^{-\beta E} \qquad \theta \equiv \beta^{-1} = \frac{U}{\nu} \tag{53}$$

Осциллятор учун

$$E = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}, \quad k_1 = m\omega^2 \tag{54}$$

$$\langle E \rangle = U = \frac{\hbar\omega}{2} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{55}$$

ифодалар маълум.

Осцилляторлар ансамбли учун (53) ни қўлаймиз. (54) ва (55) ларни (53) га қўямиз:

$$f(E) = f(x, p_x) = C_1 \exp\left[-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}\right] C_2 \exp\left[-\frac{p_x^2}{2(\Delta p_x)^2}\right]$$

ёки бундан

$$f(E) = C_1 \exp\left[-\frac{x^2}{2\overline{(\Delta x)^2}}\right] \tag{56}$$

$$f(P_x) = C_2 \exp\left[-\frac{p_x^2}{2\overline{(\Delta p_x)^2}}\right] \tag{57}$$

бунда

$$\overline{(\Delta x)^2} \equiv \overline{(\Delta x(\omega))^2} = \frac{\hbar}{2m\omega} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} = \frac{\langle E\rangle}{m\omega^2} \tag{58}$$

$$\overline{(\Delta p_x)^2} \equiv \overline{(\Delta p_x(\omega))^2} = \frac{m\hbar\omega}{2} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} = m\langle E\rangle \tag{59}$$

C_1 ва C_2 ларни нормалаш шартлари учун ёзилган

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(p_x)p_x = 1$$

ифодалардан аниқлаймиз:

$$C_1^{-1} = \left[\frac{\pi\hbar}{m\omega} cth \frac{\hbar\omega}{2kT}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2\pi\langle E\rangle}{m\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$C_2^{-1} = \left[\pi m\hbar\omega cth \frac{\hbar\omega}{2kT}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\pi m\langle E\rangle\right]^{\frac{1}{2}} \tag{60}$$

(56) ва (57) ифодалар x ва p_x флуктуациялари тақсимоти функцияларидир. Бу тақсимот функциялар Гаусс тақсимотидир. Бу ерда эслатамиз: x^2 бу $\bar{x} = 0$ даги $(x - \bar{x})^2$, яъни

$x^2 = (x - \bar{x})^2, \ \bar{x} = 0$

Энди (56) ва (57) функцияларнинг хусусий (чегаравий) ҳолларини кўрайлик.

1. Классик ҳол: $\beta\hbar\omega << 1, \ \beta = \dfrac{1}{kT}$

Бу ҳолда

$$cth\frac{\beta\hbar\omega}{2}\approx\frac{2kT}{\hbar\omega},\ \langle E\rangle\approx kT \qquad (62)$$

2. Квант ҳол: $\beta\hbar\omega >> 1$

Бу ходда

$$cth\frac{\beta\hbar\omega}{2}\approx 1,\ \langle E\rangle\approx\frac{\hbar\omega}{2} \qquad (61)$$

(57) ва (59) ларга асосан идеал зарралар импульси қийматлари тақсимоти учун

$$f(p_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi m\langle E\rangle}}\exp\left[-\frac{p_x^2}{2m\langle E\rangle}\right] \qquad (63)$$

Бундан классик ҳол учун Максвелл тақсимотини оламиз:

$$f_{kl}(p_x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi mkT}}\exp\left[-\frac{p_x^2}{2mkT}\right] \qquad (64)$$

Квант ҳол учун (62) ни ҳисобга олиб, (63) дан

$$f_{kl}(p_x)=\frac{1}{\sqrt{\pi m\hbar\omega}}\exp\left[-\frac{p_x^2}{m\hbar\omega}\right] \qquad (65)$$

ни топамиз. Биламизки, $f_{kl}(p_x)=|\psi(p_x)|^2$ бунда $\psi(p_x)$ - осциллятор асосий ҳолатининг тўлқин функциясидир.

Координата қийматлари тақсимот функцияси (56) классик ҳолда

$$f_{kl}(x)=\left(\frac{m\omega^2}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{m\omega^2x^2}{2kT}\right] \qquad (66)$$

Больцман тақсимоти функциясидан иборат бўлади, квант ҳолда эса,

$$f_{kb}(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{m\omega^2x^2}{\hbar}\right] \qquad (67)$$

бўлади. Биламизки, $f_{kb}(x)=|\psi(x)|^2$ бунда $\psi(x)$ - осциллятор асосий ҳолатининг тўлқин функциядир.

Масала. 6.16. Нормаль координата ва нормаль импульс қийматлари тақсимоти функциялари аниқлансин.

Ечиш. Осциллятор энергиясини қуйидагича ёзамиз:

$$E == \frac{p_x}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2} = \frac{1}{2}\left(p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q_\alpha^2\right)$$

Бунда нормаль координата q_α ва нормаль импульс p_α қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$q_\alpha = m^{\frac{1}{2}} x,\ p_\alpha = \frac{p_x}{m^{\frac{1}{2}}}$$

қуйидаги $f(q_\alpha)dq_\alpha = f(x)dx,$ $f(p_\alpha)dp_\alpha = f(p_x)dp_x,$ тенгликлардан изланаётган тақсимот функциялари (эҳтимоллик зичликлари) қуйидагича аниқланади:

$$f(q_\alpha) = -m^{\frac{1}{2}} f(x),\ f(p_\alpha) = m^{\frac{1}{2}} f(p_x)$$

10-§. Электромагнит майдон флуктуациясининг спектраль зичлиги ва Планк формуласи

Маълумки, электромагнит майдон энсргияси зичлиги

$$\xi(\omega) = \frac{1}{4\pi} E^2(\omega) \tag{68}$$

бўлади.

Тақсимот функцияси

$$f(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\xi^2(\omega)}{\langle\varepsilon\rangle}} \tag{69}$$

ни мувозанатли нурланиш учун тадбиқ этамиз.

(68) ни (69) га қўйиб,

$$f(\xi) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{E^2(\omega)}{2\cdot 2\pi\langle\varepsilon\rangle}\right] \tag{70}$$

ни топамиз.

Бундан электромагнит майдон флуктуациясининг спектрал зичлигини топамиз:

$$\left\langle E^2(\omega)\right\rangle = 2\pi\left\langle \xi(\omega)\right\rangle \tag{71}$$

Бир осциллятор учун, флуктуацион-диссипацион теорема (ФДТ) га (13-§ га қаранг) асосан, флуктуация спектрал зичлиги қуйидагича аниқланади:

$$\left\langle \varepsilon(\omega)\right\rangle \cdot \alpha''(\omega), \tag{72}$$

бунда $\left\langle \varepsilon(\omega)\right\rangle$ осциллятор энергиясининг ўртача қиймати

$$\left\langle \varepsilon(\omega)\right\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} cth\frac{\beta\hbar\omega}{2}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \tag{73}$$

$\alpha''(\omega)$ қабул қилувчанлик коэффициентининг мавҳум қисми.

Бирлик частота интервалидаги ҳолатлар (осциллятор) сони $g(\omega)$ қуйидагича бўлади:

$$g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 C^3} \tag{74}$$

Демак, флуктуация $\left\langle E^2(\omega)\right\rangle$ учун (72) ва (74) ларга асосан,

$$\left\langle E^2(\omega)\right\rangle = \alpha''(\omega) g(\omega)\left\langle \varepsilon(\omega)\right\rangle \tag{75}$$

ёки

$$\left\langle E^2(\omega)\right\rangle = \alpha''(\omega)\rho(\omega) \tag{76}$$

муносабатга эга бўламиз. Бунда $\rho(\omega) = g(\omega)\langle\varepsilon\rangle$ - нурланиш энергияси спектрал зичлигининг ифодаси.

Вакуум учун синдириш кўрсаткичи $n = 1$ ва $\alpha'' = 1$. Бу ҳолда (71) ва (76) дан

$$\left\langle E^2(\omega)\right\rangle = \rho(\omega) = 2\pi\left\langle \xi(\omega)\right\rangle \tag{77}$$

тенгламалар ўринли; бунда нурланшп энергияси зичлиги $\rho(\omega)$ элекгромагнит майдон флуктуацияси спектрал зичлигига тенг. Бу эса $\rho(\omega)$ ни ёки Планк формуласининг янги (бошқача) интерпретациясидир.

Электромагнит майдон энергияси зичлигининг ўртача қиймати $\left\langle \frac{E^2(\omega)}{4\pi} \right\rangle$ нурланиш энергияси зичлиги $\rho(\omega)$ нинг 2π га бўлинганига тенг.

11-§. Флуктуация ва ноаниқлик муносабати

Осциллятор координатаси ва импульси қийматларининг флуктуациялари бизга маълум:

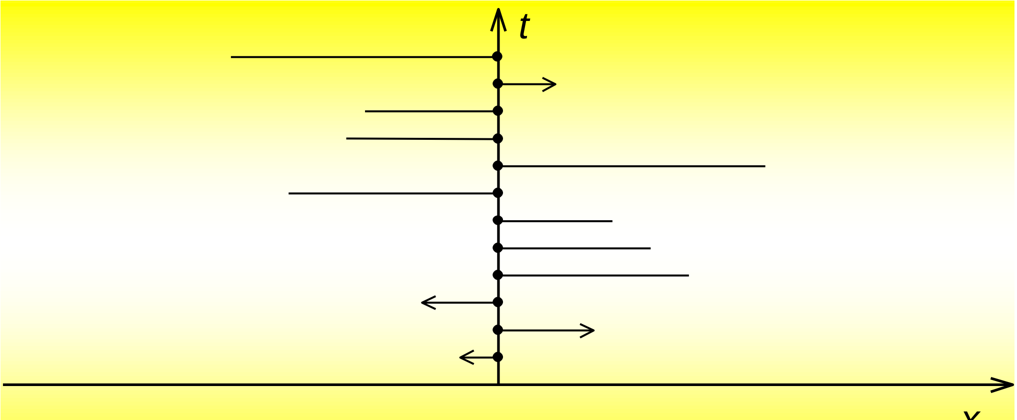
$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{\hbar}{2m\omega} cth \frac{\beta\hbar\omega}{2} \tag{78}$$

$$\overline{(\Delta p_x)^2} = \frac{m\hbar\omega}{2} cth \frac{\beta\hbar\omega}{2} \tag{79}$$

Бу икки $\overline{(\Delta x)^2}$ ва $\overline{(\Delta p_x)^2}$ ифодадан флуктуациялар кўпайтмаси учун қуйидага қийматни оламиз:

$$\left[\overline{\Delta x)^2}\,\overline{\Delta p_x)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{2} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{80}$$

(80) ифоданинг флуктуациялар учун универсал характерга эга эканлигини кўрсатайлик.



6.2- расм.

Флуктуациялар ўртача қийматга нисбатан симметрик бўлгани учун (6.2-расм) бу флуктуацияларни мос равишда бир-бирига “уласик” ("тиксак"), бу "уланган" осцилляторлар тўпламини ҳосил қилади; “ярим осцилляторлар” нинг статистик ансамбли - флуктуациялар тўпламидан иборат. Шундай қилиб, флуктуацияларни қараш осцилляторлар ансамблини қарашга олиб келади. Флуктуацияларни бундай усул билан қарашни “осцилляторлар тўплами” модели деб аташимиз мумкин. Демак,

$$\frac{p_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2} = E(\omega), \quad k_1 = m\omega^2$$

ифодада x ва p_x флуктуацияланувчи умумлашган координата, умулашган импульсдир. Умумий ҳолда уларнинг флуктуациялари (78) ва (79) ифодалар билан, уларнинг кўпайтмаси эса (80) ифода билан аниқланади. Демак, биринчи ва икнинчи флуктуация муносабатлар (42) ва (43) даги θ - бу осцилляторнинг ўртача энергиси

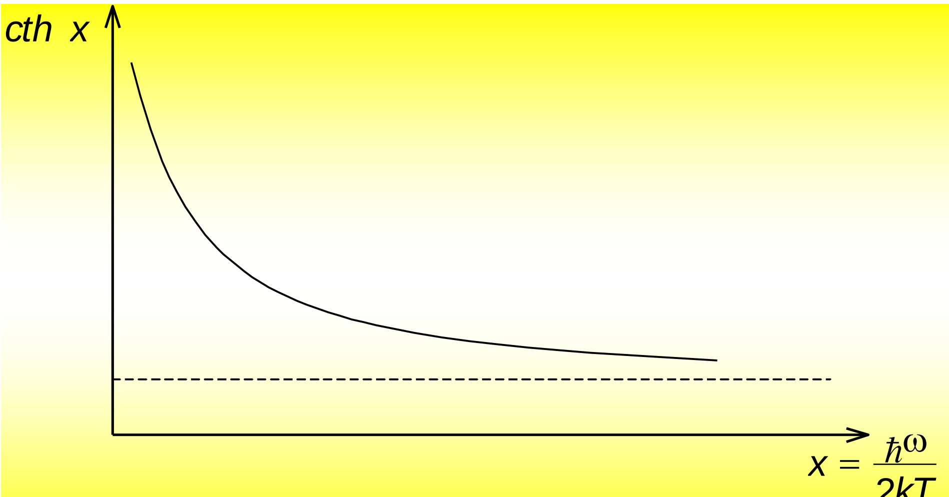
$$\theta \equiv \langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} cth \frac{\hbar\omega}{2kT}$$

дан иборатдир. Шундай қилиб, иккинчи флуктуация муносабати (80) универсал характерга эга бўлиб, классик ва квант ҳолларда, яъни ихтиёрий температурада ўринлидир.

Температура $(0,\infty)$ интервалда ўзгарганда $cth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$ $(1,\infty)$ интервалда ўзгаришини эътиборга олиб (6.3-расм), (80) ни

$$\left[\overline{(\Delta x)^2}\,\overline{(\Delta p_x)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{81}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин.



6.3- расм.

Бу (81) Гейзенберг ноаниқлик муносабатидир.

(80) дан кўринадики, флуктуация муносабати температурага боғлиқ қисм $cth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$ ва температурага боғлиқ бўлмаган қисм (*буни вакуум ҳолат учун ўринли бўлган қисми дейилади*) $\frac{\hbar}{2}$ кўпайтмаларидан иборат.

Классик ҳол $\beta\hbar\omega << 1$ бўлганда (80) дан

$$\left[\overline{(\Delta x)^2}\,\overline{(\Delta p_x)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{kT}{\omega} \tag{82}$$

тенгликни, квант ҳол $\beta\hbar\omega >>$ б¢лганда, яъни физик вакуум учун ($T = 0$ б¢лганда)

$$\left[\overline{(\Delta x)^2}\,\overline{(\Delta x)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{2} \qquad (83)$$

муносабатни оламиз.

12-§. Корреляция параметри ва фазовий корреляция орасидаги боғланиш

Бир жинсли изотроп системада (суюқлик ёки газда) молекулалар тенг эҳтимоллик билан жойлашади. Лекин зарралар бир-бири билан ўзаро таъсирда бўлганлиги сабабли, улар орасида корреляция мавжуддир. Масалан, агар икки заррани бир вақтда қарасак, бирининг жойлашишига иккинчисининг жойлашиши таъсир этади, яъни улар орасида корреляция мавжуд.

V_A макроскопик ҳажмдаги зарралар сони N_A бўлсин; $m(\vec{r})$ функцияни қуйидагича аниқлайлик:

$$m(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & агар\ \vec{r}\ \ хажм\ V_A\ ичида\ булса, \\ 0, & агар\ \vec{r}\ \ хажм\ V_A\ ташкарисида\ булса. \end{cases}$$

Функция $m(\vec{r})$ ёрдамида N_A ни

$$N_A = \sum_{i=1}^{N} m(\vec{r}_i)$$

кўринишда ёзиш мумкин; N - система зарраларининг сони; N та зарраларнинг тақсимот функциясини (эҳтимоллар зичлиги) $F_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ билан белгилайлик. Бу ҳолда ўртача қиймат $\langle N_A \rangle$ ни аниқлаймиз:

$$\langle N_A \rangle = \sum_{i}^{N} \int \underset{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)}{\cdots} \int m(\vec{r}_i) F_N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \ldots d\vec{r}_N =$$

$$= N \int \cdots \int m(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 \cdot F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) d\vec{r}_2 d\vec{r}_3, \ldots d\vec{r}_N =$$

$$= \int m(\vec{r})F_1(\vec{r}_1)d\vec{r} = nV_A \qquad (84)$$

Бу ерда бир жинсли система (газ ёки суюқлик) учун бирзарравий тақсимот функцияси қуйидагича аниқланади:

$$F(\vec{r}) = N\int \cdots \int F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)d\vec{r}_2 d\vec{r}_3, \ldots d\vec{r}_N \qquad (85)$$

$N \to \infty$ б¢лганда $F_1(\vec{r}) = n$ каби аниқланади, n - зарралар зичлиги. Демак, булардан

$$\langle N_A \rangle = nV_A \qquad (86)$$

ни ёзиш мумкин.

$\langle N_A^2 \rangle$ ни аниқлайлик:

$$\langle N_A^2 \rangle = \left\langle \sum_i \sum_j m(\vec{r}_i)m(\vec{r}_j) \right\rangle = \left\langle \left[\sum_i m(\vec{r}_i) + \sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} m(\vec{r}_i)m(\vec{r}_j) \right] \right\rangle \qquad (87)$$

Бунда $m(\vec{r}_i)m(\vec{r}_j) = m(\vec{r})$ эканлиги ҳисобга олинади. Маълумки,

$$\left\langle \sum_i m(\vec{r}_i) \right\rangle = nV_A . \qquad (88)$$

(87) даги ҳадни ёзамиз:

$$\sum_{i \neq j} \sum_{i \neq j} \int \cdots \int \mathrm{m}(\vec{r}_i)\mathrm{m}(\vec{r}_j)\mathrm{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \ldots d\vec{r}_N =$$

$$= N(N-1)\int \cdots \int m(\vec{r}_1)m(\vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \cdot F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \ldots d\vec{r}_N =$$

$$= \int\int m(\vec{r}_1)m(\vec{r}_2)F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = n^2 \int\int g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 . \qquad (89)$$

Бунда икки зарравий тақсимот функцияси қуйидагича аниқланади:

$$F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = N(N-1)\int \cdots \int F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \ldots d\vec{r}_N = n^2 g(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \qquad (90)$$

Корреляцион функция $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ биринчи зарра $d\vec{r}_1$ ҳажм элементда б¢лганда, иккинчи зарранинг $d\vec{r}_2$ ҳажм элементида б¢лиш эҳтимолини к¢рсатади (ёки аксинча, иккинчи зарра $d\vec{r}_2$ да б¢лганда биринчи зарранинг $d\vec{r}_1$ да б¢лиш эҳтимолини аниқлайди).

Энди (87), (88) ва (89) ларни ҳисобга олиб зарралар сони флуктуациясини аниқлаймиз:

$$\frac{\langle N_A^2\rangle - \langle N_A\rangle^2}{\langle N_A\rangle} = \frac{\langle(\Delta N_A)^2\rangle}{\langle N_A\rangle} = \frac{nV_A}{\langle N_A\rangle} + \frac{n^2}{\langle N_A\rangle}\iint g(\vec{r}_1,\vec{r}_2)d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 - \langle N_A\rangle =$$

$$= 1 + \frac{n}{V_A}\iint [g(\vec{r}_1,\vec{r}_2) - 1]d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

ёки

$$\frac{\langle(\Delta N_A)^2\rangle}{\langle N_A\rangle} = 1 + \frac{n}{V_A}\iint [g(\vec{r}_1,\vec{r}_2) - 1]d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 . \qquad (91)$$

Суюқлик ва газсимон (изотроп) системалар учун корреляцион функция $g(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ икки зарра орасидаги масофа $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ гагина боғлиқ бўлади. Шунинг учун $\vec{r}_1$ ва $\vec{r}_2$ бўйича интегрални $\vec{r}_1$ ва $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ўзгарувчилар бўйича интеграллаш билан алмаштириб Якобианнинг бирга тенг эканлигини ҳисобга олсак, (91) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\langle(\Delta N_A)^2\rangle}{\langle N_A\rangle} = 1 + n\int [g(\vec{r}) - 1]d\vec{r} . \qquad (92)$$

Баъзан корреляцион функция қуйидагича аниқланади: $c(\vec{r}) = g(\vec{r}) - 1$

Энди зарралар сони флуктуацияси $\langle(\Delta N)^2\rangle$ билан ҳажм флуктуацияси $\langle(\Delta V)^2\rangle$ орасидаги муносабатини аниқлайлик. Бунинг учун аввал N ни доимий деб ҳисоблаб ёзамиз: $\Delta V = N\Delta\left(\frac{V}{N}\right)$; сўнг бунда V ни домий деб, N ни ўзгарувчи деб ҳисоблаб

$$\Delta V = NV\Delta\left(\frac{1}{N}\right) = -\frac{1}{N}\Delta N$$

тенгликни ёзамиз. Бу тенгликни квадратга кўтариб, сўнг ўртачалаб, изланаётган

$$\left\langle (\Delta N_A)^2 \right\rangle = n^2 \left\langle (\Delta V)^2 \right\rangle \tag{93}$$

муносабатни оламиз.

Умумий методимиз асосида ҳажм флуктуацияси

$$\left\langle (\Delta V)^2 \right\rangle = -\theta\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \qquad \theta = \frac{U}{V}$$

ифода билан аниқланади. Иккинчи томондан

$$n_c\mu\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0, \quad n_c = \frac{c - c_P}{c - c_V}, \quad \mu = \frac{\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ҳолат тенгламаси бизга маълум (I қисм IV бобга қаранг). Бу тенглама

$$-\frac{dV}{dP} = \frac{V}{P\mu n_c}$$

кўринишга ёки изотермик процесс учун $(c \to \infty, n_c = 1)$

$$-\left(\frac{dV}{dP}\right)_T = \frac{V}{P\mu} \tag{94}$$

кўринишга келади. Изотермик сиқилувчанлик $\chi_T = -\left(\frac{dV}{dP}\right)_T$ киритсак, охирги тенгликдан қуйидаги содда, лекин муҳим

$$P\mu\chi_T = 1 \tag{95}$$

муносабатни оламиз.

(95) ни назарда тутиб, ҳажм флуктуацияси учун

$$\left\langle (\Delta V)^2 \right\rangle = \frac{\theta V}{P\mu} \tag{96}$$

ифодани оламиз. Зарралар флуктуацияси учун, (96) ни назарда тутиб,

$$\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle = N \frac{n\theta}{P} \frac{1}{\mu} \tag{97}$$

ифодани оламиз.

Идеал газ учун $\theta = kT$ ва $\mu = 1$ эканлигидан (97) ифодадан маълум $\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle = N$ тенглик келиб чиқади. Умумий ҳолда, $P = n\theta$ эканлигини назарда тутсак, реал газ зарраларининг сони флуктуацияси идеал ҳолдаги фарқланишини кўрамиз:

$$\frac{\left\langle (\Delta N)^2 \right\rangle}{N} = \frac{1}{\mu}. \tag{98}$$

(92) ва (98) ларнинг ўнг томонларини тенглаштириб, *корреляция параметри* μ билан *корреляцион функцияси* $g(\vec{r})$ орасидаги боғланишни ифодаловчи янги умумий тенгламани оламиз:

$$\mu^{-1} = 1 + n\int [g(\vec{r}) - 1] d\vec{r}\,. \tag{99}$$

Бу тенгламани (95) дан фойдаланиб

$$P\chi_T = 1 + n\int [g(\vec{r}) - 1] d\vec{r} \tag{100}$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенгламада, агар босим P учун идеал газ ҳолдаги ифода $P_0 = nkT$ қабул қилинса, тенглама (100) тақрибий

$$nkT\chi_T = 1 + n\int [g(\vec{r}) - 1] d\vec{r} \tag{101}$$

кўринишни олади. (101) тенглама Орнштейн–Цернике тенгламасидир. Демак, бизнинг умумий ва аниқ тенгламамиз (99) ёки (100) дан тақрибий ҳолда Орнштейн–Цернике тенгламаси (101) келиб чиқади.

Изотроп система учун корреляцион функция масофага боғлиқ бўлиб, йўналишга боғлиқ эмас, яъни $g(\vec{r}) = g(r)$.

Изоҳ.

1. Идеал газ учун $\mu = 1$, демак, $g(r) = 1$ бўлади, яъни кутилганидек, зарралар орасида корреляция йўқ.
2. Аниқ муносабат (95) даги кўпайтма $P\chi_T$ нинг бирдан фарқлилиги корреляция параметри μ ни ва у орқали корреляцион функцияси $g(r)$ ни аниқлашга имкон беради.
3. α ва β термик коэффициентлардан $\mu = \dfrac{\beta}{\alpha}$ ни ва демак, корреляцияни аниқлаш мумкин.
4. Реал изотерма ва реал адиабатанинг тақрибий тенгламалари $PV^{\mu} = const$ ва $PV^{\mu\gamma} = const$ асосида μ ва демак, $g(r)$ ҳақида маълумот олиш мумкин.

13-§. Флуктуацияларнинг вақт бўйича коррешшияси

Мувозанатли систеианннг бирор параметри *x* ни кўрайлик. Бу параметр вақт ўтиши билан ўзиншг ўртача қиймати атрофида флуктуацияланади. Қулайлик учун ўртача қиймат $\langle x \rangle$ ни нолга тенг дейлик: унда ўртача қиймат билан *x* нинг ҳақиқий қиймати орасидаги фарқ $x(t)$ дан иборат бўлади.

Ҳар хил вақтлардаги $x(t)$ нинг қийматлари орасида маълум корреляция бўлади, яъни $x(t)$ нинг маълум (бирор) вақт t даги қиймати бошқа вақт $t + \tau$ да қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари эҳтимолларига таъсир кўрсатади. Бунда вақт корреляцион функция ёки автокорреляция $\varphi(\tau)$ катталик $x(t)x(t+\tau)$ нинг ўртача қиймати билан аниқланади, яъни $\varphi(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$. Бу ерда t ва $t+\tau$ вақтларда x

катталикнинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари бўйича ўртачаланади. Бундай статистик ўртачаланиш вақт бўйича ўртачалашга эквивалентдир, яъни

$$\varphi(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \qquad (102)$$

$x(t)$ параметрни Фурье интеграли кўринишида ифодалайлик:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x_\omega e^{-i\omega t}d\omega. \qquad (103)$$

Фурье - компонента x_ω қуйидагича аниқланади:

$$x_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i\omega t}dt. \qquad (104)$$

Фурье интеграл (104) ни корреляцион функция $\varphi(t'-t) = \langle x(t)x(t')\rangle$ га қўйиб,

$$\varphi(t'-t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_\omega x_{\omega'} e^{-i(\omega t+\omega' t')}d\omega d\omega' \qquad (105)$$

ифодани ҳосил қиламиз. (105) да ўнг томондаги интеграл фақат $t'-t$ нинг функцияси бўлиши учун, интеграл ишораси остидаги ифодада дельта функция бўлиши шарт. Шунинг учун, таъриф бўйича, қабул қиламиз:

$$x_\omega x_{\omega'} = 2\pi x_\omega^2\delta(\omega+\omega') \qquad (106)$$

(106) ни (105) га қўйиб,

$$\varphi(t'-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{x_\omega^2}e^{-i(\omega t+\omega' t')}\delta(\omega+\omega')d\omega d\omega' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{x_\omega^2}e^{-i\omega(t'-t)}d\omega$$

ёки

$$\varphi(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{x_{\omega}^{2}}e^{-i\omega(\tau)}d\omega \qquad (107)$$

муносабатни оламиз. Бунда $\varphi(\tau)=\varphi(t'-t)$ нинг $\delta(\omega+\omega')$ дельта-функциянинг хоссасига асосан, фақат, $\omega=-\omega'$ дагина нолдан фарқли бўлиши ҳисобга олинди.

Хусусий ҳол $\tau=0$ да (107) дан

$$\varphi(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{x_{\omega}^{2}}d\omega \qquad (108)$$

Иккинчи томондан, $\varphi(0)=\langle x(t)x(t)\rangle=\langle x^2(t)\rangle$ параметрнинг квадратик флуктуациясининг ўртачасидир. Шундай қилиб,

$$\overline{x^2}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{x_{\omega}^{2}}d\omega \qquad (109)$$

Дискрет ҳол учун бу ифода қуйидагича ёзилади:

$$\overline{x^2}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{x_{\omega}^{2}}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{x_{n}^{2}}dn \qquad (110)$$

(107) ва (109) лардан кўринадики, $\overline{x_{\omega}^{2}}$ - параметрнинг квадратик флуктуацияси ўртачасининг спектрал зичлиги, иккинчи томондан $\overline{x_{\omega}^{2}}$ - корреляцион функциянинг Фурье компонентасидир, яъни

$$\overline{x_{\omega}^{2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)e^{i\omega T}d\tau \qquad (111)$$

(107) ва (111) муносабатлар Винер-Хинчин теоремасидир. Бу теорема корреляцион функция $\varphi(\tau)$ билан $x(t)$ квадратик флуктуацияси ўртачаси орасидаги боғланишни ифодалайди.

14-§. Флуктацион - днссипацион теорема

Системага таъсир этаётган умумлашган куч $f(t)$ бўлсин. Бу куч сабабли система мувозанат (энг катта эҳтимолли) ҳолатдан четланади (оғади), яъни системанинг реакцияси (жавоби) юз беради. Бунда система физик катталигининг оғишини $x(t)$ билан белгилайлик.

Системанинг жавоби (реакцияси) $x(t)$ билан умумлашган куч орасидаги боғланиш қуйидагича аниқланади:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\tau) f(t-\tau) d\tau, \tag{112}$$

бунда $\alpha(\tau)$ - системанинг хоссасига боғлиқ бўлган вақт функцияси ва $\tau \leq 0$ бўлганда $\alpha(\tau) = 0$ бўлади, чунки x нинг t пайтдаги қиймати $x(t)$ шу пайтгача бўлган вақтгагина боғлиқ б¢лиши мумкан. Бошқача айтганда, $x(t)$ га $f(t')$ кучнинг $t' > t$ даги қийматлари таъсир кўрсатиши мумкин эмас (сабабият принципига асосан).

$x(t)$ ва $f(t)$ ларни Фурье қаторига ёйиб, (112) га қўйсак,

$$x_\omega = \alpha(\omega) f_\omega \tag{113}$$

ни ҳосил қиламиз, бунда

$$\alpha(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{114}$$

бўлиб, $\tau < 0$ бўлганида $\alpha(\tau) = 0$ шарт бажарилади. $\alpha(\omega)$ - берилган куч таъсирида системанинг умумлашган қабул қилулувчанлиги бўлиб, умумий ҳолда уни комплекс кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) \tag{115}$$

(114) дан кўринадики,

$$\alpha(-\omega) = \alpha^*(\omega); \quad \alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega); \quad \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega),$$

яъни $\alpha'(\omega)$ - частотанинг жуфт, $\alpha''(\omega)$ тоқ функцияларидир, Системага таъсир қилувчи кучлар, масалан, тасодифий кучлар туфайли система томонидан ютиладиган энергия умумлашган қабул қилувчанликнинг мавҳум қисми, яъни $\alpha''(\omega) = Jm\alpha(\omega)$ билан боғланган, шунинг учун тасодифий кучларга система реакциясида содир бўлувчи энергия дисуцияси қаралганда $\alpha(\omega)$ нинг мавҳум ққисми $Jm\alpha(\omega)$ иштарок этади.

Системанинг мувозанатли ҳолатдаги флуктуациалари спектрал зичлиги $\overline{x_\omega^2}$ билан унинг номувозанатли хоссаси-умумлашган қабул қилувчанлик $\alpha(\omega)$ орасидаги боғланиш Х.Каллен ва Т.Вельтон номлари билан аталувчи теорема - флуктуатцион -диссипацион теорема (ФДТ] орқали қуйидагича аниқланади:

$$\overline{x_{\omega_+}^2} = \hbar\alpha''(\omega) cth \hbar\omega / 2kT, \tag{116}$$

бунда $\overline{x_{\omega_+}^2} = \overline{2x_\omega^2}$ спектрал зичлик $\overline{x_\omega^2}$ (109) формула билан аниқланади:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_\omega^2} d\omega. \tag{117}$$

Биз қуйида ФДТ нинг оддий исботини баён қиламиз. Осциллятор ансамбли учун

$$\overline{x_n^2} = \frac{\hbar}{2m\omega} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} = k_1^{-1}(\omega)\langle\varepsilon(\omega)\rangle \tag{118}$$

экани (58) дан маълум эди, бунда $k_1(\omega) = m\omega^2$. (118) ни қуйидагича ёзамиз ((110) га қаранг).

$$\overline{x_n^2} = \overline{x_\omega^2} = k_1^{-1}(\omega)\langle\varepsilon(\omega)\rangle, \tag{119}$$

бунда $\overline{x_\omega^2}$ ва $\overline{x_n^2(\omega)}$ физик катталик $x(t)$ нинг ўртачаси квадратик флуктуациясининг спектрал зичликларидир, яъни

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_n^2(\omega)} dn \tag{120}$$

(117) ва (120) ларни мос равишда қуйидагича ёзамиз:

$$2\pi\overline{x^2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_\omega^2}(\omega)d\omega = \int_0^\infty 2\overline{x_\omega^2}d\omega = \int_0^\infty \overline{x_{\omega_+}^2}d\omega,$$

$$2\pi\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x_n^2}(\omega)dn = \int_0^\infty 2\overline{x_n^2(\omega)}dn = \int_0^\infty \overline{x_{n_+}^2(\omega)}dn.$$

Булардан частотанянг мусбат қийматлари учун ёзилган спептрал зичликлар $\overline{x_{\omega_+}^2}$ ва $\overline{x_{n_+}^2(\omega)}$ учун

$$\overline{x_{\omega_+}^2} = 2\overline{x_\omega^2}; \quad \overline{x_{n_+}^2(\omega)} = 2\overline{x_n^2(\omega)} \tag{121}$$

ни оламиз. Худди шунингдек, $x(t)$ учун

$$\overline{x_+^2(t)} = 2\overline{x^2}(t) \tag{122}$$

(117) ва (120) лардан, (121) ларни назарда тутиб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$\overline{x_n^2}(\omega) = \omega\overline{x_\omega^2} = \omega\overline{x_{\omega+}^2/2} \tag{123}$$

Демак,

$$\overline{x_n^2}(\omega) = \omega\overline{x_\omega^2} = k_1^{-1}(\omega)\langle\varepsilon(\omega)\rangle \tag{124}$$

ёки частотанинг мусбат қийматлари учун

$$\overline{x_{n+}^2}(\omega) = \omega\overline{x_{\omega+}^2} = 2k_1^{-1}(\omega)\langle\varepsilon(\omega)\rangle \tag{125}$$

тенглик бажарилади. Бундан

$$\langle\varepsilon(\omega)\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}cth\frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{125}$$

эканлигини эътиборга олсак,

$$\overline{x_{\omega+}^2} = \hbar k_1^{-1}(\omega)cth\frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{126}$$

ни ҳосил қиламиз. (116) ва (126) формулаларни бир-бири билан соллиштиришдан к₵ринадики, ФДТ даги $\alpha''(\omega)$ ролини $k_1^{-1}(\omega)$ ўйнаяпти, яъни

$$\alpha''(\omega)k_1(\omega)=1 \qquad (127)$$

муҳим муносабат ўринли эканлиги келиб чиқади.

(124) ва (127) ларни назарда тутиб, $x(t)$ нинг флуктуациялари учун қуйидагиларни оламиз:

$$\overline{x^2}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}\alpha''\langle\varepsilon(\omega)\rangle=\frac{\hbar}{2\pi}\int_0^\infty d\omega\alpha''(\omega)cth\frac{\hbar\omega}{2kT}$$

$$\overline{x_+^2}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}\alpha''\langle\varepsilon(\omega)\rangle=\frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty d\omega\alpha''(\omega)cth\frac{\hbar\omega}{2kT}$$

Агар флуктуация ҳодисасида кичик частотанинг кичик иптервали муҳим роль уйнаса, (яъни $\omega\approx\Delta\omega$) охирги тенгликдан қуйидаги тақрибий ифодани оламиз:

$$\overline{x_+^2}(t)\approx\frac{2}{\pi}\alpha''(\omega)\langle\varepsilon(\omega)\rangle=\frac{\hbar\omega}{\pi}\alpha''(\omega)cth\frac{\hbar\omega}{2kT} \qquad (128)$$

Бу ифода Найквист формуласи дейилади.

Классик ҳолда Найавист формуласи

$$\overline{x_+^2}(t)\approx\frac{2}{\pi}\alpha''kT \qquad (129)$$

Шундай қилиб, флуктуацаянинг спектраль зичллиги $\overline{x_\omega^2}$ ёки $\overline{x_n^2}$ система хоссасига боғлиқ бўлган умумлашган қабул қилувчанлик $\alpha(\omega)$ га (ёки $k_1(\omega)$ га) боғлиқ.

Шуни таъкидлаш лозимки, термодинамик флуктуация бўлган ҳолда спектрал зичлик $\overline{x_\omega^2}$ нинг частотага ошкор боғлиқлигини аниқлаш мумкин. *Агар 1) флуктуация юз берган системачанинг ўзи мувозанатда бўлиб, лекин системанинг қолган қисмларига нисбатан (оғишган) четланган бўлса, 2) бу оғиш термодинамик физик параметр $x(t)$ қийматининг берилиши билан аниқланиши мумкин бўлса, бундай флуктуацияларни термодинамик флуктуациялар* *дейилади.* Бунда биринчи шарт системачанинг флутктуация вақти τ физик катталик $x(t)$ нинг ўзгариши учун характерли бўлган вақтдан етарли даражада кичик бўлганда бажарилади, иккинчи шартдан эса $\frac{dx(t)}{dt}$ нинг фақат $x(t)$ га боғлиқлиги келиб чиқади, яъни

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}x(t) \tag{130}$$

Агар ўртача қиймат $\bar{x}$ нолдан фарқли бўлса, (130) тенглама қуйидаги кўришшда ёзилади:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(x - \bar{x}) \tag{131}$$

Агар системага ω частота билан ўзгарувчи даврий куч $f(\omega)$ таъсир этаётган бўлса, таърифга кўра

$$x(\omega) = \alpha(\omega) f(\omega) \tag{132}$$

$$\bar{x} = \alpha(0) f(\omega) \tag{133}$$

бўлади.

(132) ва (133) ларни (131) га қўйиб, қўйидаги муносабатни оламиз:

$$-i\omega\tau\alpha(\omega) = -\alpha(\omega) + \alpha(0)$$

ёки

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha(0)}{1 - i\omega\tau}, \tag{134}$$

бунда τ физик катталик (оқим) x нинг релаксация вақти.

Умуман айтганда, (132) муносбатни номувозанатли термодинамика чизиқли қонунининг умумий кўриниши деб қараш мумкин. x_ω ва f_ω Фуръе-компонентлар орасидаги боғланиш қуйидагича эди:

$$x_\omega = \alpha(\omega) f(\omega).$$

Бундан

$$\langle x_{\omega} x_{\omega'} \rangle = \alpha(\omega)\alpha(\omega')\langle f_{\omega} f_{\omega'} \rangle$$

ёки

$$\langle x_{\omega}^2 \rangle = \alpha(\omega)\alpha(-\omega)\overline{f_{\omega}^2} = |\alpha(\omega)|^2 \overline{f_{\omega}^2}$$

(116) дан фойдаланиб, тасодифий куч Фурье-компоненти учун оламиз:

$$\overline{f_{\omega}^2} = \frac{\hbar\alpha''(\omega)}{2|\alpha(\omega)|^2} cth\frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{135}$$

ёки

$$\overline{f_{\omega+}^2} = \frac{\hbar\alpha''(\omega)}{|\alpha(\omega)|^2} cth\frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{136}$$

Масала. 6.17. Чизиқли гармоник осцилляторлар системаси учун ФДТ нинг ўринли эканини исботланг.

Ечиш. Маълумки, чизиқли гармоник осциллятор учун $2U(x) = k_1(\omega)x^2(\omega)$, бунда $U(x)$ - потенциал энергия. Бу ифодани осцилляторлар ансамбли бўйича ўртачаймиз: $2\overline{U}(x) = k_1(\omega)\overline{x_n^2}(\omega)$ ёки $2\overline{U}(x) = \langle \varepsilon(\omega) \rangle$ эканидан

$$\langle \varepsilon(\omega) \rangle = k_1(\omega)\overline{x_n^2}(\omega)$$

Бундан $k_1(\omega) = \dfrac{1}{\alpha''(\omega)}$ эканини назарда тутиб, қуйидагини оламиз:

$$\alpha''(\omega)\langle \varepsilon(\omega) \rangle = \overline{x_n^2}(\omega) = \omega\overline{x_{\omega}^2}$$

ёки бунда $2\overline{x_{\omega}^2} = \overline{x_{\omega+}^2}$ эканлигидан ФДТ келиб чиқади.

15-§. Корреляцион теорема

Фараз қилайлик, $t = 0$ вақтдан бошлаб, $H_0(p,q)$ эяергияли системага $f_k(t)$ кучлар таъсир қила бошласин. Куч таъснрида системанинг энергияси ўзгаради. Вақт Δt давомида $f_k(t)$ таъсирида системанинг гамильтониани H

$$H = E_0 - \sum_k f_k(t) x_k(p,q,t) \tag{137}$$

кўринишда ёзилиши мумкин. (6-§ қаранг). Бунда $\Delta x_k \equiv x_k(p,q,t)$ "микроскопик" оқимлар; $f_k x_k$ эса система томонидан бажарилган "микроскопик" ишлар, қулайлик учун қуйида йиғинди ишорасини тушириб ёзамиз.

Демак, системанинг локал тақсимоти функцияси $p_l(p,q,t)$ қуйидагича аниқланади:

$$\rho_l(p,q,t) = Z^{-1}\exp\{-\beta[E_0 - x_k(p,q,t) f_k(t)]\} \tag{138}$$

$$Z^{-1} = \int dpdq \exp\{-\beta[E_0 - x_k(p,q,t) f_k(t)]\} \tag{139}$$

Термодинамик катталик $\bar{x}_l$ ни аниқлайлик;

$$\bar{x}_l = \int dpdq x_l(p,q,t') p_l(p,q,t); \; t' > t \tag{140}$$

(138) ва (139) ни ҳисобга олиб, (140) дан

$$\theta \frac{\partial \overline{x_i}(t')}{\partial f_k(t)} = \left[\overline{x_i(t') x_k(t)} - \overline{x_i(t')}\,\overline{x_k(t)}\right] = \overline{\Delta x_i(t') \Delta x_k(t)} \tag{141}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бунда $\overline{\Delta x_i(t') \Delta x_k(t)}$ - корреляцион функция.

Системанинг қабул қилувчанлик коэффициентини, таърифга кўра, қйидагича аниқлаймиз:

$$\frac{\partial \overline{x_i}(t')}{\partial f_k(t)} = \alpha_{ik}(t' - t) \tag{141}$$

(Бу ерда $\tau < 0$ бўлганда $\alpha(\tau) = 0$ эканлиги назарда тутилди). (142) ифода чизиқли қонунни ифодалайди:

$$\overline{x_i}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik}(\tau) f_k(t-\tau) d\tau \qquad (143)$$

Бундан Фурье-компоненталари учун қуйидаги муносабатни оламиз;

$$\overline{x_i}(\omega) = \alpha_{ik}(\omega) f_k(\omega), \qquad (144)$$

$$\alpha_{ik}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{ik}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \qquad (145)$$

бунда $\alpha_{ik}(\omega)$ *- умумлашган қабул қилувчанлик дейилади*. (144) дан муносабат келиб чиқади.

$$\frac{\partial \overline{x_i}(\omega)}{\partial f_k(\omega)} = \alpha_{ik}(\omega) \qquad (146)$$

(142) ни ҳисобга олиб, корреляцион функция ифодаси (141) ни

$$\overline{\Delta x(t')\Delta x_k(t)} = \alpha_{ik}(t'-t)\theta \qquad (147)$$

кўринишда ёзамиз.

Фурье – компоненталари орасида эса

$$\overline{\Delta x_i(\omega)\Delta x_k(\omega)} = \left[\overline{x_i(\omega) x_k(\omega)} - \overline{x_i}(\omega)\ \overline{x_k}(\omega)\right] = \alpha_{ik}(\omega)\theta \qquad (148)$$

шаклда ёзилади. (147) ва (148) ни корреляцион теорема ифодалари деб атаймиз.

Шуни таъкидлаймизки, корреляцион функцияларнинг қуйидаги ифодаларидан

$$\overline{x_i(t')x_k(t)} = \overline{x_k(t')x_i(t)}$$

$$\overline{x_i(\omega)x_k(\omega)} = \overline{x_k(\omega)x_i(\omega)}$$

коэффициентларнинг уйидаги тенглиги (симметрияси) келиб чиқдади:

$$\alpha_{ik}(t'-t) = \alpha_{ki}(t'-t)$$

$$\alpha_{ik}(\omega) = \alpha_{ki}(\omega)$$

Хусусан, $i = k$ бўлганда физик катталикнинг вақт бўйича корреляцияси, ёки бошқача айтганда, унинг ўртача квадратик флуктуацияси ифодасини оламиз:

$$\overline{x(t')x(t)} = \alpha(t' - t)\theta .$$

Изоҳ. Флуктацияга оид масалаларни қаралганда θ катталикни

$$\theta = \frac{U}{\nu} = U = \frac{\hbar\omega}{2} cth\frac{\hbar\omega}{2kT},$$

яъни осяилляторнинг ўртача энергияси эканлигини назарда тутмоқ лозим.

16-§. Умумлашган қабул қилувчанлик билан кинетик коэффициентлар боғланиши

Номувозанатли термодинамика чизиқли муносабати қуйидаги кўринишга эга эди:

$$\overline{x_i(0)} = \alpha_{ik}(0)f_k = L_{ik}f_k , \tag{149}$$

бунда $x_i(0)$ - термодинамик оқим, $\alpha_{ik}(0) = L_{ik}$ - кинетик коэффициентлар.

Термодинамик катталик $\overline{x_i(t)}$ релаксацион тенгламани қаноатлантирсин (14-§ га қаранг):

$$\dot{\overline{x_i(t)}} = \tau_{ik}^{-1}\left(\overline{x_k(0)} - \overline{x_k(t)}\right), \tag{150}$$

бунда $\overline{x_k(0)}$ катталик $\overline{x_i(t)}$ нинг $t = 0$ даги қиймати; (150) дан Фурье компоненталари учун қуйидаги тенгликни оламиз:

$$- i\omega\overline{x_i(\omega)} = \tau_{ik}^{-1}\left(\overline{x_k(0)} - \overline{x_k(\omega)}\right), \tag{151}$$

(144) ва (149) ифодаларни (151) га қуйиб,

$$\alpha_{ik}(0) \equiv L_{ik} = \alpha_{ik}(\omega) - i\omega\tau_{im}\alpha_{mk}(\omega)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Бу муносабат умумлашган қабул қилувчанлик $\alpha_{ik}(\omega)$ билан кинетик коэффициент L_{ik} лар орасидаги боғланипши ифодалайди. Фақат тўғри эффектларни эътиборга олсак, бу тенглик

$$\alpha(0) = \alpha(\omega) - i\omega\alpha(\omega)$$

кўринишга келади. Бундан

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha(0)}{1 - i\omega\tau} \qquad (152)$$

келиб чиқади.

17-§. ¡лчов асбобларининг сезгирлигига флуктуацияларнинг таъсири

Юқори даражадаги сезгир асбобларда жумладан, тарозиларда, галванометрларда ва шунга ўхшаш асбобларда иссиқлик ҳаракати туфайли юзага келадиган флуктуацияларни ҳисобга олиш аҳамиятга эга. Ҳақиқатдан, агар ўрганилаётган катталикнинг қиймати асбобнннг хусусий флуктуациясидан кичик бўлса, у ҳолда физик жатталикни бевосита бир марта ўлчаганда, ўрганаётган катталикни эмас, балки асбобнинг хусусий флуктуациясини қайд этилади. Бошқача айтганда, иссиқлик ҳаракати (фон) ва шу билан боғлиқ флуктуация ҳар бир асбобнинг сезгирлигини чегаралаб қўяди. Физик катталикнинг қиймати иссиқлик ҳаракати фонидан кичик бўлганда (ундан паст бўлганда, унинг ичида бўлганда), у қийматни ўлчаш учун ва демак, сезгирлик даражасини юқорилаш учун кўп марта ўлчашлар ёки янги асбоблар яратиш лозим.

Агар асбоб, флуктуация билан боғлиқ бўлган ўзининг хусусий ҳаракатини қайд қилса, у ҳолда маълумки, асбоб кўрсатишларининг ўртача қиймати нолга тенг бўлади.

Агар фонга ташқи таъсир қўшилса, асбоб янги ҳолат атрофида флуктуацияланади ва ўртача оғиш (четланиш) бу ҳолда нолдан фарқли бўлади. Бунда қанча кўп марта ўлчаш ўтказилса, шунча кичик миқдорни қайд қилиш имкони туғилади.

Бир неча асбобнинг бир марта ўлчашдаги сезгирликларини кўрайлик.

1. Газли термометр. Газли термометр воситасида температурани ўлчаш учун ўзгармас босимда ҳажмнинг ўзгаришидан фойдаланилади. Бу ҳолда улчанаётган температура хажм флуктуацияси туфайли (сабабли) узлуксиз флуктуацияланиб туради.

Фараз қилайлик, термометрдаги газ Клапейрон тенгламасини қаноатлантирсин. У ҳолда, ҳажмнинг ΔV га ўзгариши температуранинг қуйидаги ўзгаришига олиб келади:

$$\Delta T = \frac{T}{V}\Delta V$$

Агар ҳажм ва температура ўзгаришлари ΔV ва ΔT флуктуациялар сабабли бўлса, у ҳолда:

$$\Delta V = \sqrt{\overline{(\Delta V)^2}} = \sqrt{-kT\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)T} = \frac{V}{\sqrt{N}} \qquad (153)$$

$$\Delta T = \sqrt{\overline{(\Delta T)^2}} = \frac{T}{V}\Delta V = \frac{T}{\sqrt{N}} \qquad (154)$$

Агар $N \sim 10^{20}$ бўлса, $\Delta T \sim 10^{-10}T$ бўлади. Температуранинг бу минимал қиймати $10^{-10}T$ термометр ёрдамида ўлчанадиган температура

ўзгаришига нисбатан жуда ҳам кичикдир.

2. Осилган кўзгу. Физик кааталикни ўлчаш учун ингичка, одатда кварцдан ясалган ипга осилган енгил кўзгудан фойдаланилади. Бу оддийгина ҳамда жуда сезгир асбоблардан ҳисобланади. Асбобнинг сезгирлик даражаси, ипга осилган кўзгунинг қандай кичик бурчакка бурилишини қайд эта олиниши билан аниқланади. Одатда бу бурилиш бурчаги ниоятда кичик бўлади. Ўлчаниши лозим бўлган энг кичик бурилиш бурчаги кўзгу ва ипнинг молекулалари иссиқлик ҳаракати туфайли бўладиган флуктуация натижасида тасодифан буриладиган бурчакдан катта бўлиши керак. Кўзгунинг мувозалатли ҳолати $\varphi = 0$ дан молекуляр иссиқлик ҳаракати туфайли тасодифан φ бурчакка бурилши учун ипнинг эластиклик кучини енгиб маълум иш бажарилади. Бу иш ипнянг потенциал энергиясига айланади. Агар бурчак φ кичик бўлса, бу потенциал энергия қуйидагича аниқланади:

$$U(\varphi) = \frac{k_1(\omega)\varphi^2(\omega)}{2},$$

бунда $k_1(\omega)$ - эластиклик коэффициенти бўлиб, у

$$k_1(\omega) = \frac{\pi^2 r^2 g}{2l}$$

га тент, бунда r-ипнинг радиуси, l-унинг узунлиги, g-ипнинг силжиш коэффициенти. Бу ерда кўзгу фақат битта айланиш эркинлик даражасига эга деб қаралади.

$U(\varphi)$ ни ўртачалаб, флуктуацион - диссипацион теореманинг ифодасини оламиз:

$$2\overline{U}(\varphi) = k_1(\omega)\overline{\varphi^2(\omega)}$$

ёки

$$\overline{\varphi^2(\omega)} = \alpha''(\omega)\langle\varepsilon(\omega)\rangle, \tag{155}$$

бунда $\overline{U}(\varphi) = \langle\varepsilon(\omega)\rangle$ ва $k_1(\omega) = \dfrac{1}{\alpha''(\omega)}$ ҳисобга олинади.

1. Квант ҳолда $\langle\varepsilon(\omega)\rangle = \dfrac{\hbar\omega}{2}$ демак,

$$\overline{\varphi^2(\omega)} = \frac{\hbar\omega}{2k_1(\omega)}$$

2. Классик ҳолда $\langle\varepsilon(\omega)\rangle \approx kT$ демак,

$$\overline{\varphi^2(\omega)} = \frac{kT}{k_1(\omega)} \tag{156}$$

Бу (156) адабиётда учрайдиган одатдаги ифодадир.

Флуктуация таъсирида кўзгунинг бурилиш бурчагини баҳолайлик. $T = 300K$, жуда ингичка кварц ип бўлганда $\alpha \sim 10^{-5}$ эрг бўлади. Бу ҳолда $\sqrt{\overline{(\Delta\varphi)^2}} \sim 10^{-4}$. Агар ўлчанаётган катталик бундан кичик бурчакка кўзгуни бурса, бир марта ўлчаш натижасида бу бурчакни флуктуация туфайли буриладиган кўзгунинг хусусий бурчагидан ажратиб бўлмайди. Аммо жуда кўп марта ўлчаб, ташқи таъсир туфайли нолдан фарқли ўртача қийматни аниқлаш мумкин. Ҳатто физик катталикнинг таъсири фондан паст (кичик) бўлганда ҳам.

3. Электр ток флуктуацияси. Электр занжирда тасодифий ЭЮК нинг таъсири туфайли электр ток ёки кучланишнинг флуктуацияси пайдо бўлади. ФДТ асосида бу флуктуацияларни аниқлайлик.

ЭЮК ва электр ток спектрал зичликлари $\varepsilon(\omega)$ ва $J(\omega)$ орасидаги боғланишни аниқлайлик. Квазистационар токлар учун Ом қонуни

$$JR + L\frac{dJ}{dt} + \frac{q}{c} = \varepsilon, \quad J = \frac{dq}{dt} \tag{157}$$

ўринли. Фурье компоненталарига нисбатан, $J_\omega = -i\omega q_\omega$, $\frac{dJ}{dt} = -i\omega q_\omega$ назарда тутилса, бу қонун

$$\varepsilon_\omega = Z(\omega) J_\omega \tag{158}$$

кўринишга келади; бунда тўла қаршилик

$$Z(\omega) = R + i\left(\frac{1}{\omega c} - \omega L\right) \tag{159}$$

(158) ни "оқим" q_ω орқали ёзайлик

$$q_\omega = \alpha(\omega)\varepsilon_\omega, \tag{160}$$

бунда

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) = \frac{i}{\omega Z} = \frac{iR}{\omega |Z|^2} + \frac{1}{\omega |Z|^2}\left(\frac{1}{\omega c} - \omega L\right) \tag{161}$$

Бундан

$$\alpha''(\omega) = \frac{R}{\omega |Z|^2} \tag{162}$$

ФДТ га асосан

$$\overline{q_\omega^2} = \frac{\hbar R}{\omega |Z|^2} cth \frac{\hbar\omega}{2kT} \tag{163}$$

Классик ҳолда $(\hbar\omega << kT)$, яъни юқори температурада (163) формула

$$\overline{q_\omega^2} = \frac{R}{\omega |Z|^2} kT \tag{164}$$

кўришинга келади. Бу Найквист формуласи.

Ток кучи $J(\omega)$ га нисбатан Найквист формуласи (164) $\overline{|J(\omega)|^2} = \omega^2 \overline{q_\omega^2}$ ни эътиборга олиниб,

$$\overline{|J(\omega)|^2} = \frac{R}{|Z(\omega)|^2} kT, \tag{165}$$

умумий олда эса

$$\overline{\left|J(\omega)\right|^2}=\frac{\hbar\omega R}{\left|Z(\omega)\right|^2}cth\frac{\hbar\omega}{2kT} \qquad (166)$$

кўринишда ёзилади. (117) га асосан ток кучи $J(t)$ нинг флуктуацияси

$$\overline{J^2(\omega)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\left|J(\omega)\right|^2}d\omega \qquad (167)$$

билан аниқланади.

Флуктуацион токлар, катоддан чиқадиган электронлар сони флуктуацияси билан боғлиқ бўлган "питра эффекти"' ҳозирги замон электр асбоблар сезгирлигини чегаралаб қўйди.

18-§. Зичлик флуктуацияларида ёруғлик сочилиши

Биламизки,

$$\rho=\frac{M}{V},\ \Delta\rho=-\frac{M}{V^2}\Delta V,\ \overline{(\Delta V)^2}=-kT\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Булардан зичлик флуктуациясини оламиз:

$$\overline{(\Delta\rho)^2}=\frac{M^2}{V^4}\overline{(\Delta V)^2}=-\frac{\overline{\rho^2}}{V^2}kT\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

ёки

$$\frac{\overline{(\Delta\rho)^2}}{\overline{\rho^2}}=-\frac{kT}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \qquad (168)$$

Зичлик флуктуацияланиши сабабли муҳитнинг диэлектрик коэффициенти ҳам флуктуацияланади:

$$\Delta\varepsilon=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)\Delta\rho;\ \overline{(\Delta\varepsilon)^2}=\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)\overline{(\Delta\rho)^2} \qquad (169)$$

Диэлектрикдан ўтаётган ёруғлик тўлқин унинг диэлектрик киритувчанлик ε флуктуацияси сабабли сочилади. Шу сочилишни қарайлик.

Қутбланиш вектори $\vec{P} = \left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\right)\vec{E}$ диэлектрик коэффициент ε ўзгарувчанлиги сабабли ўзгаради:

$$\Delta\vec{P} = \frac{\Delta\varepsilon}{4\pi}\vec{E} \tag{170}$$

Агар $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega t$ бўлса, $\Delta\vec{P}$ учун қуйидагини ёзамиз:

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{P}_0 \cos\omega t, \tag{171}$$

бунда

$$\Delta\vec{P}_0 = \frac{\Delta\varepsilon\vec{E}_0}{4\pi}$$

Ўзгарувчан қутбланиш вектори $\Delta\vec{P}$ ни шу частота билан тебранувчи диполь дейишимиз мумкин. Тебранувчи диполь шу частота билан электромагнит тўлқин нурлатади. Шундай қилиб, диэлектрикни шундай диполлар тўпламидан иборат деб қараш мумкин. Диполлар сони ва уларнинг диполь моменти $\Delta\vec{P}_0$ флуктуациялар сони ва уларнинг катталиги, зичлик флуктуациялар сони ва уларнинг катталитига боғлиқ. Диэлектрикдан ўтаётган ёруғлик тўлқини энергиясининг бир қисми ана шу тебранувчи диполлар томонидан ҳар томонга сочилади (тарқалади).

Бирлик вақтда диполь нурланиши интенсивлиги I қуйидагича аниқланади:

$$I = \frac{2}{3c^3}\left(\Delta\ddot{\vec{P}}\right)^2, \tag{172}$$

бунда c - ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги. Бундан сочилган ёруғлик нури итенсивлигининг ўртачасини топамиз:

$$\bar{I} = \frac{\omega^4}{3c^3}\overline{(\Delta\vec{P})^2} \tag{173}$$

(173) формуладан кўрамизки, сочилган ёруғлик нурининг ўртача интенсивлиги тушаётган ёруғлик тўлқини $\vec{E}$ частотасининг тўртинчи даражасига мутаносиб (ёки тўлқин узунлигининг тўртинчи даражасига тескари мутаносиб). Бу боғланишни Релей қонуни дейилади. Шу қонун асосида, атмосфера зичлиги флуктуацияларида ёруғлик нурлари сочилшпи асосида, осмоннинг мовий ҳамда Қуёшнинг чиқиши ва ботишида тўқ сариқ бўлишлиги тушунтирилган.

(173) формулани, $\Delta\vec{P}_0$ нинг ўрнига унинг қийматини қўйгандан кейин, ўзгартириб ёзамиз:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \frac{\omega^4}{3c^3}\left(\frac{\vec{E}_0}{4\pi}\right)^2\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \frac{\omega^4}{3c^3}\left(\frac{\vec{E}_0}{4\pi}\right)^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2\overline{(\Delta\rho)^2} = \\ &= \frac{\omega^4}{3c^3}\left(\frac{\vec{E}_0}{4\pi}\right)^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2\frac{kT}{V^2}\overline{\rho^2}\left|\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\right|\end{aligned} \tag{174}$$

Бу формуладан кўринадики, агар $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$ бўлса, масалан, модда критик ҳолатда бўлса, зичлик флуктуацияси энг катта ва демак, ёруғлик нури сочилиши энг кўп бўлади. Ҳақиқатда, ёруғликнинг критик ҳолатда энг кўп сочилиши (деярли тўла сочилиши) ҳодисаси кузатилада. Бу ҳодисани критик опалесценция дейалади.

19-§. Броун ҳаракати назарияси. Ланжевен тенгламаси

Р.Броун 1827 йилда суюқликдаги майда (коллоид) зарралар узлуксиз, тартибсиз ҳаракат қилаётганини кузатди. Бу Броун ҳаракати назариясини 1905 йилда А.Эйнштейн ва 1906 йилда М.Смолуховский яратдилар.

Суюқликдаги оғир (коллоид) зарра ҳаракатини текширайлик. Бу масала номувозанатли система масалаларидан биридир.

M массали заррага суюқлик ёпишқоқлиги туфайли ишқалиниш кучи $\vec{f}$ таъсир қилади. Бу куч $\vec{f}$ шу зарранинг тезлиги $\vec{v}$ га пропорционал (Стокс қонуни), яъни

$$\vec{f} = -M\xi\vec{v}, \tag{175}$$

бунда ξ - ишқаланиш коэффициенти. Суюқлик молекулалари зарра билан тўқнашиб, унга таъсир кўрсатади. Бу таъсирларнинг натижавий кучини $M\vec{R}(t)$ билан белгиласак, броун заррасининг ҳаракат тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\dot{\vec{v}} = -\xi\vec{v} + \vec{R}(t), \tag{176}$$

Бу Ланжевен тенгламаси.

Микроскопик миқёсда қатъий қаралганда ишқаланиш коэффициенти вақтнинг функцияси ва

$$R(t) = \xi(t)\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)} F(t-\tau), \tag{177}$$

бўлади. Бу ҳолда Ланжевен тенгламаси

$$\dot{v}(t) = -\xi(t)v(t) + \xi(t)\int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)} F(t-\tau) \tag{178}$$

кўриншпда бўлади. Инерцион куч эътиборга олинмаса, (178) дан

$$v(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\xi(\tau)} F(t-\tau) \tag{179}$$

тенглама келиб чиқади.

Бу (112) муносабатнинг хусусий ҳоли ва демак,

$$v(\omega) = \mu(\omega) F(\omega) \qquad (180)$$

$\mu(\omega) = \dfrac{1}{\xi(\omega)}$ - зарра ҳаракатчанлигининг Фурье компонентаси.

Молекулалар билан Броун зарраси ҳар бир тўқашганда ўз траекториясидан четланади. Бундай оғишлар ҳам катталик (миқдор), ҳам йўналиш жиҳатдан жуда ҳар хил ва ниҳоятда бетартиб булади. Шу сабабли бу оғишларни, яъни $\overline{R}(t)$ нинг вақт бўйича ўзгаришидаги қийматини ва демак, броун заррасининг ҳар бир вақт моментидаги аниқ ўрни ва тезлигини амалда аниқ билиб бўлмайда. Аммо броун зарра билан молекулалар туқнашишларининг ўртача таъсирига асосланиб, броун зарраси ҳаракатини қарашимиз мумкин. Шу мазмунда Ланжевен тенгламаси (176) стахостик тенгламаларнинг типик мисолидир.

Ланжевен тенгламасини ечишда қуйидап шартлар бажарилсин:

1. $t = 0$ вақтдаги (моментда) v_0 тезликли броун зарралари ансамбли бўйича олинган $\overline{R}(t)$ нинг ўртача қиймати нолга тенг:

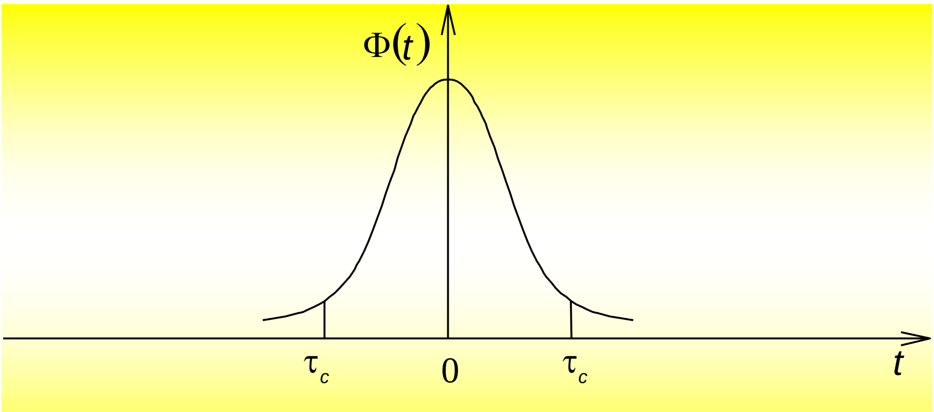
$$\left\langle \vec{R}(t) \right\rangle_{v_0} = 0 \qquad (181)$$

Бу шарт броун заррасининг ўртача тезлиги макроскопик тенглама (175) билан аниқланишини таъминлайди.

2. Бетартиб тўқнашишлар, агар вақт бўйича етарли даражада бир-биридан ажралган бўлса, бир-бири билан статистик боғлиқ эмас, деб ҳисобланади. Бошқача айтганда, t_1 ва t_2 пайтлардаги кучлар $\vec{R}(t)$ корреляцияси тўқнашиш вақти $\tau_c < t_2 - t_1$ бўлганда нолдан фарқли, $\tau_c \geq t_2 - t_1$ бўлганда нолга тент деб қаралади, яъни:

$$\left\langle \vec{R}(t_1)\vec{R}(t_2) \right\rangle_{v_0} = \Phi(t_2 - t_1) \qquad (182)$$

Бунда корреляцион функция $\Phi(t_2 - t_1)$ графиги $t_2 - t_1 = 0$ булганда кескин тикликка (чуққига) эга бўлади; $t_2 - t_1 > \tau_c$ бўлганда эса амалда нолга тенг бўлади (6.4-расм).



6.4- расм.

$$\Phi(t_2 - t_1) = \begin{cases} \neq 0 & t_2 - t_1 < \tau_c \\ = 0 & t_2 - t_1 \geq \tau_c \end{cases}$$

Бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама (176) нинг ечимини

$$\vec{v} = \vec{v}_\sigma + \vec{v}_H$$

кўринишда излайлик, бунда

$$\vec{v}_\sigma = \vec{v}_0 e^{-\xi t}$$

бир жинсли тенглама $\dot{\vec{v}} = -\xi\vec{v}$ нинг умумий ечими, $\vec{v}_H$ эса (176) тенгламанинг хусусий ечимидир:

$$\vec{v}_H = e^{-\xi t}\int_0^t d\tau e^{\xi\tau}\vec{R}(\tau)$$

Шундай қилиб, (176) тенгламанинг ечими

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\xi t} + e^{-\xi t}\int_0^t d\tau e^{\xi\tau}\vec{R}(\tau) \qquad (183)$$

кўринишга эга. Бунда $\vec{R}(\tau)$ - номаълум, (183) ечимнннг ҳамма ҳадларини ансамбль бўйича ўртачалаймиз:

$$\langle\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}_0 e^{-\xi t}\rangle + \left\langle e^{-\xi t}\int_0^t d\tau e^{\xi\tau}\vec{R}(\tau)\right\rangle \tag{184}$$

Бунда

$$\langle\vec{v}_0 e^{-\xi t}\rangle = \vec{v}_0 e^{-\xi t} \tag{185}$$

$$\left\langle e^{-\xi t}\int_0^t d\tau e^{\xi\tau}\vec{R}(\tau)\right\rangle = e^{-\xi t}\int_0^t d\tau e^{\xi\tau}\langle\vec{R}(\tau)\rangle \tag{186}$$

(181) шартни ҳисобга олсак, (184) ифодани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\langle\vec{v}\rangle_{\vec{v}_0} = \vec{v}_0 e^{-\xi t} \tag{187}$$

Бу эса макроскопик тенглама $\dot{\vec{v}} = -\xi\vec{v}$ нинг ечимидир.

(183) ифодани квадратга кўтариб, сўнг уни ўртачалаб

$$\langle\vec{v}^2\rangle = \left\langle v_0^2 e^{-2\xi t} + e^{-2\xi t}\int_0^t d\tau_1\int_0^t d\tau_2 e^{\xi(\tau_1+\tau_2)}\langle\vec{R}(\tau_1)\vec{R}(\tau_2)\rangle\right\rangle \tag{188}$$

ифодага эга бўламиз. Бунда (181) шарт ҳисобга олинди. (188) ифодада ўзгарувчиларни

$$\tau_1 + \tau_2 = \chi,\ \tau_2 - \tau_1 = s$$

муносабатлар воситасида алмаштириб,

$$\alpha(t) = \int_{-t}^{+t} ds\phi(s) \tag{189}$$

функцияни киритамиз. Бунда

$$\int_0^t d\tau_1\int_0^t d\tau_2 e^{\xi(\tau_1+\tau_2)}\langle\vec{R}(\tau_1)\vec{R}(\tau_2)\rangle = \frac{1}{2}\int_{-t}^{+t} ds\phi(s)\int_0^{2t} d\chi e^{\xi\chi} = \frac{\alpha(t)}{2\xi}\left(e^{2\xi t} - 1\right) \tag{190}$$

(190) ни назарда тутиб, (188) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\langle\vec{v}^2\rangle = v_0^2 e^{-2\xi t} + \frac{\alpha(t)}{2\xi}\left(1 - e^{-2\xi t}\right) \tag{191}$$

Бу тенгламада кузатиш вақти t тўқнашиш вақти τ_c дан етарли даражада катта бўлса, яъни $t >> \tau_c$ бўлса, $\alpha(t)$ нинг ўрнига унинг вақтга боғлиқ бўлмаган қиймати

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \phi(s)$$

ни олиш мумкин. (191) формуладан кўринадики, t нинг жуда кичик қийматлари $\left(t << (2\xi)^{-1}\right)$ да тезлик флуктуацияси тезликнинг бошланғич қиймати v_0 билан аниқланади, аммо t нинг жуда катта қийматларида бу бошланғич тезликнинг роли умуман йўқолади (эсдан чиқади) ва тезлик квадратик флуктуацияси доимий катталик $\frac{\alpha}{2\xi}$ га интилади; бошқача айтганда, бу флуктуация бутунлай тўқнашишлар механизмига боғлиқ бўлиб, бошланғич тезлик $\overline{v_0^2}$ га боғлиқ бўлмайди. $t \to +\infty$ бўлганда система мувозанат ҳолатига келади, дейлик, у ҳолда (191) дан

$$\left\langle \overline{v^2} \right\rangle = \frac{\alpha}{2\xi} \tag{192}$$

(59) формулдан маълумки, $\overline{p_x^2}(\omega) = m\langle\varepsilon\rangle$. Бу формулани икки ўлчамли ҳол учун ёзсак бўлади:

$$\left\langle p_x^2(\omega) \right\rangle = 2M\langle\varepsilon(\omega)\rangle$$

ёки

$$\left\langle v^2(\omega) \right\rangle = \frac{2\langle\varepsilon(\omega)\rangle}{M}$$

Бундан классик ҳол учун

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{2kT}{M}$$

ёки (192) ни эъборга олсак,

$$\frac{\alpha}{2\xi} = \frac{2kT}{M}$$

экани келиб чиқади. Буни эътиборга олиб, (191) ифодани

$$\left\langle \vec{v}^2 \right\rangle_{v_0} = \frac{2kT}{M} + \left[v_0^2 - \frac{2kT}{M} \right] e^{-2\xi t} \qquad (193)$$

шаклда ёзамиз. (193) формуладан кўринадики, броун зарралари вақт ўтиши билан ўзининг бошланғич тезлигини эсдан чиқара боради ва суюқлик молекулалари билан тўқнашишлари туфайли мувозанат ҳолатига кела боради.

Формула (193) “йирик структурали” ёки вақт бўйича текисланган (силлиқланган) манзарани ифодалайди. Бу эса макроскопик жараёнларда кузатилувчи қайтмаслик микроскопик жараёнларни вақт бўйича яхлитлаш орқали назарияга киради, дейишга асос бўлади.

Броун зарраси силжишларининг шу зарра ҳамда муҳитнинг хоссаларига боғлиқлигнни кўрайлик. Бунинг учун зарра ҳаракати тенгламасини инерция кучини ҳисобга олмасдан ёзайлик:

$$\xi \dot{\vec{r}} = \vec{R}(t) \qquad (194)$$

Бу тенгламанинг ечими

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \frac{1}{\xi} \int_0^t d\tau \vec{R}(\tau) = \frac{1}{\xi} \int_0^t d\vec{F}(\tau) \qquad (195)$$

бўлади, бунда $d\vec{F}(\tau) = \vec{R}(\tau) d\tau$ - куч импульси ва $\vec{r}_0$ - радиус-вектор $\vec{r}$ нинг $t = 0$ даги қиймати. (195) ифодани квадратга кўтариб, ансамбль бўйича ўртачалайлик:

$$\left\langle (\vec{r}-\vec{r}_0)^2 \right\rangle = \frac{1}{\xi^2}\int_0^t\int_0^t \left\langle dF(\tau_1)dF(\tau_2)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\xi^2}\int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \left\langle \vec{R}(\tau_1)\vec{R}(\tau_2)\right\rangle = \qquad (196)$$

$$= \frac{1}{\xi^2}\int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 \phi(\tau_2-\tau_1) = \frac{1}{\xi^2}\alpha(t)t$$

Вақт катта бўлганда, (192) дан фойдаланиб, (196) ифодани

$$\overline{(\Delta r)^2} = \frac{4kT}{M\xi}\cdot t \qquad (197)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан Эйнштейн формуласи келиб чқади:

$$\overline{(\Delta r)^2} = 2Dt, \qquad (198)$$

бунда

$$D = \frac{2kT}{M\xi} \qquad (199)$$

диффузия коэффициенти. Стокс қонуни бўйича $\xi = \dfrac{6\pi\eta a}{M}$ ва демак:

$$D = \frac{kT}{3\pi\eta a}, \qquad (200)$$

бунда η - суюқликнинг ёпишқоқлик коэффщиенти. a - броун заррасининг радиуси.

(198) ва (200) муносабатларнинг ўрипли эканини Ж.Перрон ва Т.Сведберг тажрибада кўрсатдилар. Улар Больцман доимийси k ва Авагадро сони $N = \dfrac{R}{k}$ ни тажрибада аниқладилар ва буларнинг қиймати бошқа методлар билан олинган қийматларга мос эканлигини кўрсатдилар.

Масалалар.

6.18. <u>Ҳаракатчанлик</u> $\mu(\omega)=\dfrac{1}{\xi(\omega)}$ нинг Фурье компоненти аниқлансин.

Ечиш. (180) тенгламага асосан

$$v(\omega)=\mu(\omega)F(\omega) \tag{1}$$

ФДТ асосида

$$\mu(\omega)=\frac{1}{\xi(\omega)}=\theta^{-1}(\omega)\langle v_n^2(\omega)\rangle=\beta(\omega)\omega\langle v^2(\omega)\rangle \tag{2}$$

эканини аниқлаймиз. Бунда

$$\theta(\omega)=\frac{1}{\beta(\omega)}=\frac{\hbar\omega}{2}cth\frac{\hbar\omega}{2kT}$$

$\langle v^2(\omega)\rangle$ тезлик автокорреляцияси Фурье компонентасининг квадратидир.

6.19. Ҳаракатчанлик μ (ёки ишқаланиш коэффициенти ξ) ни аниқланг.

Ечиш. (184) тенгламани етарли даражада кичик вақт интервали $t'-t=\tau\to 0$ учун ёзамиз:

$$dv(t)=\mu(t'-t)F(t)dt=\mu(t'-t)dF(t) \tag{3}$$

Бунда $\mu(t)$ кинетик коэффициент (ҳаракатчанлик “зичлиги”), $dF(t)$ - куч импульси. (3) дан корреляцион теорема асосида

$$\mu(\tau)=\theta^{-1}\langle w(\tau)\rangle \tag{4}$$

муносабатни оламиз, Бу ифодани вақт бўйича интеграллаб, ҳаракатчанлик (ёки ишқаланиш коэффициенти) нинг умумий ифодаси учун

$$\mu_t\equiv\frac{1}{\xi_t}=\int_0^t\mu(\tau)d\tau=\theta^{-1}\int_0^t d\tau\langle w(\tau)\rangle \tag{5}$$

тенгламага эга бўламиз.

Эслатма: Стационар ҳолат учун қуйидаги

$$\mu = \lim_{t\to\infty}\mu = \theta^{-1}\lim_{t\to\infty}\int_0^t d\tau\langle w(\tau)\rangle \qquad (6)$$

интеграл мавжуд деб қаралади.

4.20. $D = \theta\xi^{-1} = \theta\mu$ тенгликни исбот қилинг, бунда D - диффузия коэффициенти.

Ечиш. аввалги масаланинг ечимидан маълумки, ((5) тенглама)

$$\frac{\theta}{\xi} = \int_0^t d\tau\langle w(\tau)\rangle \qquad (7)$$

Демак,

$$D = \int_0^t d\tau\langle w(\tau)\rangle \qquad (8)$$

эканлигини исбот қилиш керак.

1) $R(\tau) = \xi v(\tau)$ ни назарга олиб, (189) ни қуййдагича ёзамиз:

$$\alpha(t) = \xi^2\int_{-t}^{+t} d\tau\langle w(\tau)\rangle = 2\xi^2\int_0^t d\tau\langle w(\tau)\rangle = 2\xi^2(t) \qquad (9)$$

(9)ни (196) га қўйиб, оламиз:

$$\overline{(\Delta r)^2} = 2D(t)\cdot t \qquad (10)$$

t етарли даражада катта бўлганда, яъни $t >> \tau_c$ бўлганда. D ни доимий деб қарасак, (10) ифода Эйнштейн формуласига ўтади, Бу эса диффузия коэффициенти D ифодаси (8) билан аниқланган тезлик автокорреляциясининг интеграли эканлигини исботлайди.

2) иккинчи усул,

$$v = \mu F$$

ёки чекли ўзгариш учун

$$\Delta r = \mu \Delta t F$$

Корреляцион теоремага асосан

$$\theta\mu\Delta t = \langle \Delta r \Delta r(\tau) \rangle$$

ёки ҳар икки томонга силжишни эътиборга олсак,

$$2\theta_{\mu}\Delta t = \langle \Delta r \Delta r(\tau) \rangle = 2D\Delta t$$

бўлади. Бундан

$$D = \theta\mu = \theta\xi^{-1}$$

эканлиги келиб чиқади.

6.21. Броун заррасининг r масофага силжиш эҳтимолини аниқланг.

Ечиш. Берилган ҳолатдан броун заррасининг силжишлари тасодифий ва симметрикдир. Шу сабабли силжишлар нормал (Гаусс) тақсимоти билан аниқланади:

$$dW(x) = A\exp\left[\frac{-x^2}{2\overline{(\Delta x)^2}}\right]dx \tag{11}$$

Шунингдек dy га силжиш эҳтимоли

$$dW(y) = A\exp\left[\frac{-y^2}{2\overline{(\Delta y)^2}}\right]dy \tag{12}$$

бўлади. Броун заррасинннг r га силжиш эҳтимоли (11) ва (12) эҳтимолларни кўпатириб, сўнг бурчаклар бўйича интеграллаб топилади:

$$dW(r) = C\exp\left[\frac{-r^2}{2\overline{(\Delta r)^2}}\right]rdr \tag{13}$$

бунда $\overline{(\Delta r)^2} = 2Dt$. Бу ифодадан кўрднадики, (13) тақсимот вақт ўтиши билан ёйилиб кетади.