

**O'ZBEKSTAN RESPUBLİKASI
XALIQ BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİĞİ
A'JİNİYAZ ATINDAG'I NO'KİS MA'MLEKETLİK
PEDAGOGİKALIQ İNSTİTUTI**

ULIWMA MATEMATİKA KAFEDRASI

Q.Elg'ondiev, S.Erisbaev

**MATEMATİKALIQ ANALİZ
(anıq emes integral)**

oqıw-metodikalıq qollanba

NO'KİS - 2011

Du'ziwshiler: Q.Elg'ondiev, S.Erisbaev

Oqıw-metodikalıq qollanbada matematikalıq analizdin' a'hmiyetli bo'limlerinen biri bolg'an anıq emes integralg'a arnalg'an temalar ken' tu'rdegi sıpatlamaları menen berilgen. Onda funktsiyanı tuwındısı boyınsha tabıwg'a mısallar, anıq emes integraldın' tiykarg'ı qa'siyetleri temalarg'a tiyisli mısallardın' sheshimin keltiriw menen berilgen bolıp, olardı esaplawda qollanılatus'ın usıllar integrallaw usılları temasında keltirilgen.

Bul qollanba pedagogikalıq institutlardın' matemiatika ta'lim bag'darının' talabları ushın arnalg'an bolıp, onnan basqa joqarı oqıw orınların' talabaları, kollejlerdin' oqıwshıları ham usı tema menen qızg'ıwshılardın' paydalanıwına boladı.

JUWAPLI REDAKTOR

K.M. Koshanov - A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutnıń professorı, filologiya ilimlerinin' kandidatı

PİKİR BİLDİRİWSHILER:

1. S. Tilewmuratov - Qaraqalpaq ma'mleketlik pdagogikalıq universitetinin' dotsrnti, fizika-matematika ilimlerinin' kandidatı.

2. Z. Saparov - A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutnıń fizika-matematika ilimlerinin' kandidatı.

SO'Z BASI

Bul o'qıw-metodikalıq qollanba "Matematikalıq analiz" pa'ninin' tiykarg'ı bo'limlerinen biri bolg'an anıq emes integral teoriyasına bag'ishlang'an.

Ha'r qanday funktsiyalardı integrallawda ratsional funktsiyalardı a'piwayı bo'lshekler qosındısı tu'rinde an'latıw, ko'pag'zalını ko'beytiwshilerge jiklew ha'm durıs ratsional bo'lsheklerden paydalanılǵ'an. Berilgen funktsiyalardı integrallawdı esaplawlar integrallaw usılları, ratsional funktsiyalardı integrallaw, Ostrogradskiy usılı, algebralıq irratsional funktsiyalardı integrallaw, transtsendent funktsiyalardı integrallaw arqalı orınlanıwı, jetkilikli sandag'ı mısallardın' sheshimlerin keltiriwi menen berilgen. Sonin' menen birge o'z betinshe islew ushın bir neshe shınıǵ'ıwlar keltirilgen.

Qaraqalpaq tilinde ja'riyalanıw atırg'an da'slepki qollanba bolg'anlıqtan onda geypara kemshiliklerdin' ushırasıwı mu'mkin. Avtorlar bul boyınsha pikirlerdi u'lken minnetdarshılıq penen qabıl etedi.

ANIQ EMES INTEGRAL

1. Funktsiyanı tuwındısı boyınsha tabıw

Klassikalıq matematikalıq analizdin' fundamental bo'limlerinin' biri bolg'an differentsiallıq esapta ha'reket nızamı berilgen jag'dayda onın' bir zamattag'ı tezligin tabıw ma'selesı. Eger $s = s(t)$ funktsiyanı materiallıq noqattın' ha'reket baslang'annan son' t waqıt dawamında basıp o'tken jolın an'latatug'ın bolsa, onda materiallıq noqattın' usı t waqıt dawamındag'ı bir zamattag'ı tezligi $s = s(t)$ funktsiyanın' tuwındısına ten' boladı, yag'nıy $v = s'(t)$.

Fizikada bul ma'selege kerı ma'sele: materiallıq noqattın' $v = v(t)$ tezligi ma'lim bolg'anda, onın' ha'reket nızamın tabıw, yag'nıy tuwındısı $v(t)$ funktsiyag'a ten' bolatug'ın $s(t)$ funktsiyanı tabıw ma'selesı. Usınday ma'selelerdi sheshiwidin' matematikalıq jolların islep shıg'ıw maqsetinde ju'rgizilgen ilimiy izertlewler na'tiyjesinde matematikalıq analizdin' bo'limi bolg'an integrallıq esap qa'liplesti.

Da'slepki funktsiya tu'sinigi. Meyli $f(x)$ ha'm $F(x)$ funktsiyaları (a, b) intervalında anıqlang'an, al $F(x)$ funktsiyanı usı intervalda differentsiallanıwshı bolsın. Eger ha'r bir $x \in (a, b)$ ushın

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

ten'ligi orınlı bolsa, onda $F(x)$ funktsiyanı $f(x)$ funktsiyanın' (a, b) intervalındag'ı da'slepki funktsiyanı delinedi.

Eskertiw 1. Da'slepki funktsiya tu'sinigin haqıyqıy sanlar ko'pliginde ushırasatug'ın basqa tiptegi kesindiler (segment, yarım interval-shekli yamasa sheksiz, yarım segment- shekli yamasa sheksiz) ushın da kiritiw mu'mkin. Ma'selen, eger $f(x)$ ha'm $F(x)$ funktsiyaları $[a, b]$ segmentinde anıqlang'an, $F(x)$ fuknktsiyanı (a, b) intervalında differentsiallanıwshı, al $[a, b]$ segmentinde u'zliksiz ha'm qa'legen $x \in (a, b)$ ushın (1) ten'ligi orınlı bolsa, onda $F(x)$ funktsiyanı $f(x)$ funktsiyanın' $[a, b]$ segmentindegi da'slepki funktsiyanı delinedi.

Eskertiw 2. Eger $F(x)$ funktsiyanı $f(x)$ funktsiyanın' (a, b) intervalındag'ı da'slepki funktsiyanı bolsa, onda $F(x) + C$ funktsiyanı, ha'r bir $S = const$ ushın $f(x)$ funktsiyanın' da'slepki funktsiyanı boladı.

Bug'an keri tastıyqlaw da orınlı boladı.

Teorema 1. Eger $F_1(x)$ ha'm $F_2(x)$ funksiyları $f(x)$ funksiyanın' (a, b) intervalındag'ı ha'r qıylı eki da'slepki funksiyları bolsa, onda ha'r bir $x \in (a, b)$ ushın,

$$F_2(x) = F_1(x) + C \quad (2)$$

ten'ligi orınlı boladı, bunda S – erikli tu'raqlı.

Da'lillew. $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$ belgilewin kiritemiz de teoremanın' sha'rtinen ha'm da'slepki funksiyanın' anıqlamasınan ha'r bir $x \in (a, b)$ ushın $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$, ten'likleri orınlı bolatug'ının jaza alamız. Bunnan $\Phi(x)$ funksiya (a, b) intervalında differentsallanıwshı ha'm qa'legen $x \in (a, b)$ ushın $\Phi'(x) = 0$ ten'ligi orınlı bolatug'ını kelip shıg'adı. Sonlıqtan, qa'legen $x \in (a, b)$ ushın $\Phi(x) = C = \text{const}$ ten'ligin jazıw mu'mkin (Lagranj teoremasınan' 1-saldarı). Demek, $F_2(x) - F_1(x) = C$, yag'nıy (2) ten'ligi durıs.

Da'lillengen teoremadan berilgen $f(x)$ funksiya ushın da'slepki funksiya bir ma'nisli anıqlanbaydı, tek tu'raqlıg'a shekemgi da'llikte g'ana anıqlanadı degen na'tiyje kelip shıg'adı.

$f(x)$ funksiyanın' da'slepki funksiyları ko'pliginen bazı bir $F_1(x)$ da'slepki funksiyan ajıratıp alıw ushın $y = F_1(x)$ funksiyanın' grafigine tiysli $M(x_0, y_0)$ tochkasın biliw jetkilikli boladı.

M ı s a l. $f(x) = \frac{1}{x^4}$ funksiya ushın grafigi $M(3;1)$ tochkası arqalı o'tetug'ın da'slepki funksiyan tabın'.

Sheshiliwi: $\frac{1}{x^4}$ funksiyanın' barlıq da'slepki funksiylarınan' ko'pligi

$$F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C$$

formulası menen beriledi. Mısaldın' sha'rtinen $F(3) = 1$, yag'nıy $1 = -\frac{1}{81} + C$,

sonlıqtan $C = 1\frac{1}{81}$. Demek, $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + 1\frac{1}{81}$.

Aniq emes integral tu'sinigi. $f(x)$ funksiyasının' bazı bir Δ kesindisindegi da'slepki funksiyaları ko'pligine onin' usi kesindidegi aniq emes integralı dep ataydı, $\int f(x)dx$ simvolı menen belgileydi ha'm

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (3)$$

tu'rinde jazıladı. Bul jazıwda $F(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyasının' Δ kesindisindegi bazı bir da'slepki funksiyası, al C erkli tu'raqlı, $\int$ - integral tan'bası, $f(x)$ integral astındag'ı funksiya, $f(x)dx$ integral astındag'ı an'latpa boladı.

Integral astındag'ı an'latpanı $F'(x)dx$ yamasa $dF(x)$ tu'rlerinde de jazıw mu'mkin, yag'nıy

$$f(x)dx = dF(x). \quad (4)$$

Berilgen funksiyanın' aniq emes integralın tabıw a'meli bul funksiyanı differentsiallaw a'meline keri a'mel bolıp, berilgen funksiyanı *integrallaw* dep ataladı. Sonlıqtan tuwındıg'a baylanışlı jazılg'an qa'legen formulanı, yag'nıy $F'(x) = f(x)$ tu'rindegi formulalardı (3) ten'ligi ko'rinishinde jazıw mu'mkin. Tuwındılar tablitsasınan paydalanıp bazı bir elementar funksiylardıń integralların tabıwg'a boladı. Ma'selen,

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ ten'liginen } \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C \text{ bolatug'ınlıg'ı kelip shıg'adı.}$$

Shınıg'ıwlar

1. No'kis qalasınan Kegeyli qalasına shıqqan «Tiko» jen'il avtomashinası tuwrı sızıq boylap $v = 4t^3 + 3t$ nızamı boyınsha qozg'aladı. Onın' ha'reket nızamın tabın'.

2. Tuwrı sızıq boylap qozg'alıwshı velisopedshinin' tezligi $v = 5t^2 + 3$ nızamı boyınsha o'zgeredi. Eger velisopedshi $t = 2c$ ta 20 m jol ju'rse, onda onın' ha'reket nızamı s -ti tabın'.

3. Eger baslang'ısh waqıtta denenin' tezligi nolge ten' bolsa, onda turaqlı tezleniw g menen erkin tu'siwshi denenin' ha'reket nızamın tabın'.

4. Tuwrı sızıq boylap Matiz jen'il avtomashinası $a = 7t - 12$ tezleniw menen ha'reketlenedi. Baslang'ısh waqıtta onın' tezligi $v_0 = 8$ m/s ten', al $s_0 = 10$ m.

1) Matiz avtomashinasının' tezligin ha'm ha'reket nızamın;

2) onun' 2-sekundtag'ı tezleniwın, tezligin ha'm ju'rgen jolın;

3) en' kishi tezlikke erisetug'ın waqtın tabın'.

5. Dene tuwrı sızıq boylap 1) $v = t^2 - 5t + 6$; 2) $v = 5t - 4t^2$ nızamları boyınsha qozg'alsa, onun' ha'reket nızamın tabın'.

6. Dene tuwrı sızıq boylap $v = 3t - 2$ tezlik penen ha'reketlenedi. Eger ol baslang'ısh waqıtta 6 m jol ju'rgen bolsa, onda onun' ha'reket nızamın tabın'.

7. Tuwrı sızıq boylap dene $v = 3t^2 + 4t - 1$ formulası boyınsha qozg'aladı. Eger dene baslang'ısh momentte koordinatalar basında bolsa, onda onun' ha'reket nızamın tabın'.

8. Top baslang'ısh v_0 tezlik penen vertikal joqarıg'a ılaqtırıldı. Usı toptın' ha'reket nızamın tabın' (hawanın' qarsılıg'ı esapqa alınbasın).

9. Materiallıq noqat tuwrı sızıq boylap $a = 10t^2 + 5t$ tezleniw menen ha'reketlenbekte. Eger onun' 1-sekundtag'ı tezligi $v = 8 \text{ m/s}$, al ju'rgen jolı $s = 6 \text{ m}$ bolsa, onda materiallıq noqattın' ha'reket nızamın tabın'.

10. Materiallıq noqattın' tezligi tuwrı sızıq boylap $v = 2 \sin t$ formulası boyınsha qozg'aladı. Eger $t = \frac{\pi}{6}$ momentte materiallıq noqat $s = 4 \text{ m}$ jol ju'rgen bolsa, onda onun' ha'reket nızamın tabın'.

2. Anıq emes integraldın' tiykarg'ı qa'siyetleri

1-qa'siyeti.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \quad (1)$$

Da'lillew. (1) ten'liktin' eki ta'repin differentsiallap, $f(x)dx = dF(x)$ ten'likti ha'm $dC = 0$ ekenligin esapqa alıp,

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = f(x)dx \quad (2)$$

bolatug'ınlıg'ın ko'remiz.

(2) formuladan, eger differentsial tan'bası integral tan'basının' aldında kelse, onda differentsial ha'm integral tan'baları bir-birin joq etedi degen juwmaq shıg'adı.

2-qa'siyeti.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (3)$$

Da'lillew. $f(x)dx = dF(x)$ ten'likten paydalanıp, $\int f(x)dx = \int dF(x)$ ten'ligine iye bolamız. Endi bul ten'likтин' on' jag'ın $\int f(x)dx = F(x) + C$ ten'likтин' on' jag'ı menen alması, (3) formulag'a iye bolamız. (3) formuladan integral tan'bası differentsial tan'basının' aldında kelgen jag'dayda da bul tan'balar bir-birin joq etedi (eger erkli tu'raqılı nolge ten' dep esaplasa) degen na'tiyjege kelemiz.

3-qa'siyeti. Eger $f(x)$ ha'm $g(x)$ funktsiyaları bazı bir kesindide da'slepki funktsiyalarına iye bolsa, onda qa'legen $\alpha\beta \neq 0$, sha'rtin qanaatlandıratug'ın $\alpha \in R, \beta \in R$ sanları ushın $\varphi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ funktsiyası da usı kesindide da'slepki funktsiyasına iye boladı ha'm

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx, \quad (4)$$

formulası orınılı boladı.

Da'lillew. $f(x)$ ha'm $g(x)$ funktsiyalarının' da'slepki funktsiyaların sa'ykes $F(x)$ ha'm $G(x)$ arqalı belgileymiz. Onda $\Phi(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$ funktsiyası $\varphi(x)$ funktsiyasına da'slepki funktsiya boladı. Sebebi, $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha f(x) + \beta g(x) = \varphi(x)$. Anıq emes integraldın' anıqlamasınan (4) tenliginin' shep ta'repi $\Phi(x) + C$ funktsiyalarına, al on' ta'repi $\alpha F(x) + \alpha C_1 + \beta G(x) + \beta C_2 = \Phi(x) + \beta G(x) + \beta C_2$ funktsiyalarına ten' boladı. $\alpha\beta \neq 0$ orınılı bolg'anı ushın $\Phi(x) + C$ funktsiyalar ko'pligindegi ha'r bir funktsiya $\Phi(x) + \beta G(x) + \beta C_2$ funktsiyalar ko'pligine de tiyisli boladı ha'm kersinshe, yag'nıy berilgen C sanı arqalı $C = \alpha C_1 + \beta C_2$ ten'ligi orınılı bolatug'ınday etip C_1, C_2 sanların tan'lap alıw mu'mkin ha'm eger C_1, C_2 sanları berilgen bolsa, onda $C = \alpha C_1 + \beta C_2$ boladı.

Da'lillengen 3-qa'siyet integrallawdın' *sızıqlılıq* qa'siyeti dep ataladı ha'm ol berilgen funktsiyaların' sızıqlı kombinatsiyasının' integralı olardın' sa'ykes integrallarının' sızıqlı kombinatsiyasına ten' bolatug'ınlıg'ın an'latadı.

3. Integrallaw usılları

3.1. O'zgeriwshilerdi almastırıw usılı. Meyli $t = \varphi(x)$ funktsiyası bazı bir Δ kesindisinde anıqlang'an ha'm differentsiallanıwshı funktsiya bolsın. Bul funktsiyanın' ma'nisler ko'pligin $\Lambda = \varphi(\Delta)$ arqalı belgileymiz. Eger $U(t)$ funktsiyası Λ ko'pliginde anıqlang'an, differentsiallanıwshı funktsiya ha'm

$$U'(t) = u(t) \quad (1)$$

bolsa, onda $F(x) = U(\varphi(x))$ quramalı funktsiyası Δ kesindisinde anıqlang'an, differentsiallanıwshı funktsiya boladı ha'm

$$F'(x) = (U(\varphi(x)))' = U'(\varphi(x))\varphi'(x) = u(\varphi(x))\varphi'(x). \quad (2)$$

(1) ha'm (2) ten'liklerden, eger $u(t)$ funktsiyası ushın $U(t)$ da'slepki funktsiya bolsa, onda $u(\varphi(x))\varphi'(x)$ funktsiyası ushın $U(\varphi(x))$ da'slepki funktsiya boladı degen juwmaq kelip shıg'adı.

Yag'nıy, eger

$$\int u(t)dt = U(t) + C \quad (3)$$

bolsa, onda

$$\int u(\varphi(x))\varphi'(x)dx = U(\varphi(x)) + C \quad (4)$$

yamasa

$$\int u(\varphi(x))d\varphi(x) = U(\varphi(x)) + C \quad (5)$$

ten'ligi orınlı boladı.

(5) ten'ligi o'zgeriwshilerdi almastırıp integrallaw formulası dep ataladı. Sebebi (5) ten'lik (3) ten'liktegi t nı differentsiallanıwshı $\varphi(x)$ funktsiyası menen almastırıwdan kelip shıg'adı.

(5) formulanın' a'hmiyetli dara jag'dayların keltirip o'temiz.

1) Meyli $F(x)$ funktsiyası $f(x)$ funktsiyasının' da'slepki funktsiyası bolsın, yag'nıy

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Onda

$$\int f(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad a \neq 0. \quad (6)$$

Bunda $\varphi(x) = ax + b$, $f(ax + b) = \frac{1}{a} f(ax + b) d(ax + b)$.

2) $\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$ ten'ligi tiykarında, eger $\varphi(x) \neq 0$ bolsa, (5) formuladan

paydalanıp,

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + C \quad (7)$$

ten'ligine iye bolamız.

3) $\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \quad t > 0$, ten'ligi tiykarında (5) formuladan

$$\int (\varphi(x))^\alpha \varphi'(x) dx = \int (\varphi(x))^\alpha d\varphi(x) = \frac{(\varphi(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (8)$$

bunda $\varphi(x) > 0$, $\alpha \neq -1$, formulasına iye bolamız.

M i s a l l a r.

1) Eger $a > 0$ bolsa, $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. $x = a \cdot \operatorname{tg} t$, bunda $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, formulasına sa'ykes o'zgeriwshilerdi

almastırıwdı orınlaymız. Onda

$$dx = \frac{adt}{\cos^2 t}, \quad x^2 + a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 t + a^2 = a^2 (\operatorname{tg}^2 t + 1) = \frac{a^2}{\cos^2 t}$$

boladı. Demek,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{a^3} \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2a^3} \left(\int dt + \int \cos 2t dt \right) = \\ &= \frac{1}{2a^3} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2a^3} (t + \sin t \cos t) + C. \end{aligned}$$

Ma'selenin' sheshimin aqırına jetkeriw maqsetinde t o'zgeriwshisinen da'slepki x

o'zgeriwshisine o'temiz. $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ funktsiyası $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ intervalında u'zliksiz,

qatan' o'siwshi bolg'anı ushın og'an keri funktsiya bar boladı ha'm ol $t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$

ko'rinisine iye ekenligi belgili.

$$\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t = \frac{\operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{ax}{x^2 + a^2}$$

ten'liginen paydalanıp, ma'selenin' sheshimin

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

tu'rinde jazamız.

2) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, ($a > 0$) anıq emes integralın esaplan'.

Sheshiliwi: O'zgeriwshini almasırıwdı $x = a \sin t$, bunda $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$,

formulası ja'rdeminde a'melge asıramız. Onda

$$dx = a \cos t dt, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t,$$

boladı. Demek,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C.$$

Endi t -dan x -qa o'tiw ushın $x = a \sin t$ funktsiyasına kerı funktsiyanı tabamız.

Bul kerı funktsiya bar boladı, sebebi $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ segmentinde $\sin t$ qatan' o'siwshi,

u'zliksiz funktsiya ha'm $t = \arcsin \frac{x}{a}$ ko'rinsine iye.

$$\frac{1}{2} \sin 2t = \sin t \cos t = \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

ten'ligin esapqa alıp,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

na'tiyjesine iye bolamız.

3.2. Ornına qoyıw usılı.. Bazı bir jag'daylarda

$$J = \int f(x) dx \quad (9)$$

integralın esaplawda taza o'zgeriwshilerge o'tiw esaplaw protsesin bir qansha a'piwaylastırıwı mu'mkin. Bunı to'mendegishe orınlaw mu'mkin.

Meyli $x = \phi(t)$ qatan' monoton ha'm bazı bir kesindide differentsallanıwshı funktsiya bolsın. Onda bul funktsiyag'a kerı funktsiya bar boladı. Keri funktsiyanı

$$t = \phi(x) \quad (10)$$

arqalı belgileymiz. Endi (9) integral astındag'ı an'latpanı $x = \phi(t)$,

$dx = d\phi(t) = \phi'(t)dt$ tu'rindegi ornına qoyıw arqalı tu'rlendiremiz. Onda integral astındag'ı an'latpa $f(x)dx = f(\phi(t))\phi'(t)dt$ ko'rinsine keledi.

$f(\phi(t))\phi'(t) = u(t)$ belgilewin kiritip,

$$f(x)dx = u(t)dt \quad (11)$$

ten'ligine iye bolamız.

Meyli $U(t)$ funksiya $u(t)$ funksiyanın' bazı bir da'slepki funksiya bolsın, yag'nıy

$$\int u(t)dt = U(t) + C. \quad (12)$$

(9)-(12) ten'liklerinen

$$J = \int f(x)dx = \int u(t)dt = U(t) + C = U(\phi(x)) + C. \quad (13)$$

formulasına iye bolamız. (13) formula *ornına qoyıwlar ja'rdeminde* integrallaw formulası dep ataladı.

Mısalılar.

1) $\int \frac{x^{n-1}dx}{(a + bx^n)^m}$ anıq emes integraln esaplan'.

Sheshiliwi. O'zgeriwshini

$$t = a + bx^n$$

o'zgeriwshisi menen almastırıp,

$$dt = nbx^{n-1}dx \Rightarrow x^{n-1}dx = \frac{dt}{nb},$$

formulasına iye bolamız. Bul tabılğ'anlardı berilgen integraldag'ı orınlarına qoyıp,

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(a + bx^n)^m} = \frac{1}{bn} \int \frac{dt}{t^m} = \frac{1}{bn} \int t^{-m} dt = \frac{t^{1-m}}{bn(1-m)} + C = \frac{(a + bx^n)^{1-m}}{bn(1-m)} + C,$$

bolatug'ınlıg'ın ko'remiz.

2) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$ integraln esaplan'.

Sheshiliwi. $t = \sqrt{x-1}$ belgilewin kiritemiz.

Onda $t^2 = x - 1 \Rightarrow x = 1 + t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$; $x^3 = (1 + t^2)^3$ boladı. Bul tabılg'anlardı berilgen integraldag'ı orınlarına qoyıp,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}} = \int \frac{(1+t^2)^3 2tdt}{t} = 2 \int (t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1) dt = \frac{2}{7} t^7 + \frac{6}{5} t^5 + 2t^3 + 2t + C,$$

ten'ligine iye bolamız. Endi $t = \sqrt{x-1}$ bolg'anı ushın, na'tiyjeni

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{7} (\sqrt{x-1})^7 + \frac{6}{5} (\sqrt{x-1})^5 + 2(\sqrt{x-1})^3 + 2(\sqrt{x-1}) + C,$$

tu'rinde jazamız.

Shınıg'ıwlar

O'zgeriwshilerdi almasırw usılınan paydalanıp to'mendegi integrallardı esaplan'

1. $\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x} dx.$

3. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 2}}.$

5. $\int e^{x^2} x dx.$

7. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

9. $\int 2x(x^2 + 1)^4 dx.$

11. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

13. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$

15. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{a^3 - x^3}}.$

17. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}.$

19. $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$

21. $\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx.$

23. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^7}.$

2. $\int \frac{(5 + 3x) dx}{4 + x^2}.$

4. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$

6. $\int \frac{xdx}{1 + x^4}.$

8. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x}.$

10. $\int \cos^2 x \sin x dx.$

12. $\int \frac{xdx}{a^2 b^2 - x^4}.$

14. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}}.$

16. $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$

18. $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

20. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx.$

22. $\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx.$

24. $\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$

$$25. \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx.$$

$$27. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$29. \int \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^3 + 3x + 1)^5}$$

$$26. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$$

$$28. \int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$30. \int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx.$$

3.3. Bo'leklep integrallaw usuli. Meyli $u(x)$ ha'm $v(x)$ differentsiallanishli funktsiyalari bolsin.

Ko'beymenin' differentsialin tabiw qag'iydasidan paydalanip,

$$d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x),$$

ten'ligin jazamiz. Usi ten'liknin' eki ta'repin integrallaymiz, na'tiyjede

$$\int d(u(x)v(x)) = \int u(x)dv(x) + \int v(x)du(x)$$

ten'ligine iye bolamiz. $\int d(uv) = uv + C$ ekenligin esapqa alsaq, keyingi ten'lik

$uv + C = \int u dv + \int v du$ yamasa $\int u dv = uv - \int v du + C$ tu'rine keledi. Erikli tu'raqlini $\int v du$ integralina birlestirip,

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \quad (14)$$

formulasina iye bolamiz. (14) formula $u(x)dv(x)$ an'latpasinin' integralin $v(x)du(x)$ an'latpasinin' integralina alip keledi, al keyingi an'latpanin' integrali bazi bir jag'daylarda a'piwayi esaplanadi. Aniq emes integraldi esaplawdin' bunday usulina bo'leklep integrallaw usuli dep ataladi.

(14) bo'leklep integrallaw formulasin bir neshe ma'rte qollanildi talap etetug'in jag'daylar da ushirasadi.

M i s a l l a r.

1. $\int \arcsin x dx$ aniq emes integralin esaplan'.

Sheshiliwi. Eger $u = \arcsin x$, $dv = dx$ belgilewin kiritip, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$

bolatug'inlig'in ko'remiz. Onda (14) formulag'a sa'ykes,

$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) = \\ = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

2. $\int x^2 \sin x dx$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. $u = x^2, v = \sin x dx$ belgilewlerin kiritip, $du = 2x dx, v = -\cos x$ bolatug'inlig'in ko'remiz. Onda (14) formuladan,

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

boladı. Bul ten'liktin' on' ta'repindegi integralg'a (14) formulanı ja'ne bir ma'rte qollanamız, yag'nıy $u = x, \cos x dx = dv \Rightarrow du = dx, v = \sin x$. Demek,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

boladı. Onda $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$.

Bazı bir jag'daylarda bo'leklep integrallaw protsesin bo'leklep integrallawdın' ulıwmalasqan formulası ja'rdeminde alıp barg'an na'tiyjeli boladı.

Meyli $u(x)$ ha'm $v(x)$ funktsiyaları $n+1$ ma'rte differentsiallanıwshı funktsiyalar bolsın. Onda (14) formula tiykarında

$$\begin{aligned} \int u v^{(n+1)} dx &= u v^{(n)} - \int u' v^{(n)} dx, \\ \int u' v^{(n)} dx &= u' v^{(n-1)} - \int u'' v^{(n-1)} dx, \\ &\dots\dots\dots \\ \int u^{(n+1)} v dx &= u^{(n)} v - \int u^{(n)} v dx. \end{aligned}$$

Bul ten'liklerdi izbe-iz $+1$ ha'm -1 sanlarına ko'beytip alıp, keyin o'z-ara qossaq, to'mendegi na'tiyje kelip shıg'adı:

$$\begin{aligned} \int u v^{(n)} dx &= u v^{(n-1)} - u' v^{(n-2)} + u'' v^{(n-3)} + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v dx \end{aligned} \quad (15)$$

Bul formula bo'leklep integrallawdın' ulıwmalasqan formulası dep ataladı.

Sonın' menen birge bo'leklep integrallaw formulası ko'birek

$\int f(x) e^{ax} dx, \int f(x) \cos \beta x dx, \int f(x) \sin \beta x dx, \int e^{ax} \cos b x dx, \int e^{ax} \sin b x dx,$
 $\int x^n e^{ax} \cos b x dx$ ha'm $\int x^n e^{ax} \sin b x dx$ ko'rinishindegi integrallarda qollanıladi. Bunday

ko'rinisidagi integrallar 9-paragraftag'ı IV, V, VI ha'm VIII tu'rdegi integrallarda keltirilgen.

M i s a l. $\int x^4 \cos x dx$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. $u = x^4, v^{(n)} = \cos x$ belgilewlerin kiritip, (15) formulasınan paydalanıp,

$$\begin{aligned} \int x^4 \cos x dx &= x^4 \sin x - 4x^3(-\cos x) + 12x^2(-\sin x) - \\ &- 12x \cos x + 12 \sin x + C = x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \sin x - \\ &- 12x \cos x + 12 \sin x + C \end{aligned}$$

na'tiyjesine iye bolamız.

Shınıg'ıwlar

Bo'leklep integrallaw usılınan paydalanıp to'mendegi integrallardı esaplan'

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\int \ln x dx$. | 2. $\int x^3 \ln x dx$. | 3. $\int x a^x dx$. |
| 4. $\int x^2 \cos x dx$. | 5. $\int x e^x dx$. | 6. $\int \arctg x dx$. |
| 7. $\int x^3 e^{2x} dx$. | 8. $\int x \sin x dx$. | 9. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. |
| 10. $\int e^{2x} \cos 3x dx$. | 11. $\int (\arcsin x)^2 dx$. | 12. $\int x \sin \sqrt{x} dx$. |
| 13. $\int \sin(\ln x) dx$ | 14. $\int (e^x - \cos x)^2 dx$. | 15. $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx$. |
| 16. $\int x (\arctg x)^2 dx$. | 17. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$. | 18. $\int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ |
| 19. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$. | 20. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x dx$. | 21. $\int (1+x^2)^2 \cos x dx$. |
| 22. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx$. | 23. $\int e^{ax} \sin^3 b x dx$. | 24. $\int x^2 e^x \cos x dx$. |

4. Anıq emes integrallardıń tiykarg'ı tablitsası

Meyli $u(x)$ funktsiyası bazı bir sanlar kesindisinde differentsiallanıwshı funktsiya bolsın. Onda differentsialaw esabındag'ı funktsiyalardı differentsiallaw qag'ıydalarınan paydalanıp, bazı bir elementar funktsiyalar ushın olardıń anıq emes integrallarının tablitsasın jazıwǵa boladı.

$$\text{I. } \int 0 \cdot du = C.$$

$$\text{II. } \int 1 \cdot du = u + C.$$

$$\text{III. } \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ (bunda } \alpha \neq -1).$$

$$\text{IV. } \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \text{ (bunda } u \neq 0)$$

$$\text{V. } \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \text{ (} a > 0, a \neq 0).$$

$$\text{VI. } \int e^u du = e^u + C.$$

$$\text{VII. } \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$\text{VIII. } \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$\text{IX. } \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \text{ (} \cos u \neq 0 \text{ bolatug'ın ha'r bir aralıqta).}$$

$$\text{X. } \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \text{ (} \sin u \neq 0 \text{ bolatug'ın ha'r bir aralıqta).}$$

$$\text{XI. } \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C \text{ (} \cos u \neq 0 \text{ bolatug'ın ha'r bir aralıqta).}$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C \text{ (} \sin u \neq 0 \text{ bolatug'ın ha'r bir aralıqta).}$$

$$\text{XIII. } \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C \text{ (} \sin u \neq 0 \text{ bolatug'ın ha'r bir aralıqta).}$$

$$\text{XIV. } \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C \text{ (} \cos u \neq 0 \text{ bolatug'ın ha'r bir aralıqta).}$$

$$\text{XV. } \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C \text{ (} u^2 \pm a^2 > 0 \text{ bolatug'ın ha'r bir aralıqta).}$$

$$\text{XVI. } \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \text{ (} u \neq a \text{ ha'm } a \neq 0 \text{ bolatug'ın ha'r bir aralıqta).}$$

$$\text{XVII. } \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0).$$

$$\text{XVIII. } \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0 \text{ ha'm } |u| < |a| \text{ bolatug'in}$$

ha'r bir aralıqta)

$$\text{XIX. } \int shudu = chu + C.$$

$$\text{XX. } \int chudu = shu + C.$$

$$\text{XXI. } \int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C \quad (shu \neq 0 \text{ bolatug'in ha'r bir aralıqta}).$$

$$\text{XXII. } \int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C.$$

Shınıg'ıwlar

***Anıq emes integraldın' tiykarg'ı tablitsasınan paydalanıp
to'mendegi integrallardı esaplan'***

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx.$ | 2. $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx.$ | 3. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$ |
| 4. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$ | 5. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$ | 6. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^4 - 1}} dx.$ |
| 7. $\int (5^x + 7^x)^2 dx.$ | 8. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$ | 9. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{5/2}}.$ |
| 10. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx.$ | 11. $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$ | 12. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$ |
| 13. $\int \frac{dx}{1+\sin x}.$ | 14. $\int (2x-3)^{10} dx.$ | 15. $\int a^x e^x dx.$ |

5. Ratsional funktsiyalardı a'piwayı bo'lshekler qosındısı tu'rinde an'latıw. Ko'p ag'zalını ko'beytiwshilerge jiklew

5.1. Ko'p ag'zalının' korenleri. Tek bir g'ana x o'zgeriwshisinin' n -da'rejeli ko'p ag'zalısı dep

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

ko'rinishindegi an'latpag'a aytiladı. Bunda $a_0 \neq 0$ bas koeffitsient, a_n koeffitsienti saltan ag'za dep ataladı. Ko'p ag'zalının' koeffitsientleri $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ haqıyqıy sanlar bolıwı da, kompleks sanlar bolıwı da mu'mkin, x o'zgeriwshisi R yamasa C ko'pliklerinen qa'legen ma'nisti qabıl ete aladı.

Eger $P_n(c) = 0$ ten'ligi orınlı bolsa, onda $x = c$ sanına ko'p ag'zalının' koreni dep aytiladı.

$P_n(x)$ ko'p ag'zalısın $x - a$ eki ag'zalısına bo'liw, degende $P_n(x)$ ko'p ag'zalısın

$$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + r, \quad (2)$$

ko'rinishinde an'latıw tu'siniledi, bunda a berilgen san. Bunda $Q_{n-1}(x)$ da'rejesi $n - 1$ bolg'an ko'p ag'zalı, r bazı bir san bolıp $P_n(x)$ ko'p ag'zalısın $x - a$ eki ag'zalısına bo'lgendegi qaldıq dep ataladı. Eger $r = 0$ bolsa, onda $P_n(x)$ ko'p ag'zalısı $x - a$ eki ag'zalısına qaldıqsız yamasa pu'tin bo'linedi dep aytiladı.

Teorema (Bezu teoreması). $x - a$ eki ag'zalısının' $P_n(x)$ ko'p ag'zalısına qaldıqsız bo'liniwi ushın a sanının' $P_n(x)$ ko'p ag'zalısının' koreni bolıwı za'ru'r ha'm jetkilikli boladı. Yag'nıy,

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x) \cdot (x - a) \quad (3)$$

ten'ligi orınlı boladı.

Da'lilleniwi. Za'rurliligi. Meyli $x = a$ sanı $P_n(x)$ ko'p ag'zalısınını' koreni bolsın. Onda birinshiden korennin' anıqlamasına sa'ykes $P_n(a) = 0$ boladı. Ekinshiden (2) ten'likten $x = a$ bolg'anda $r = P_n(a) = 0$ boladı. Demek, $r = 0$. Bul $P_n(x)$ ko'p ag'zalısınını' $x - a$ eki ag'zalısına qaldıqsız bo'linetug'ınlıg'ın an'latadı.

Jetkilikliliği. Meyli $P_n(x)$ ko'p ag'zalı $x-a$ eki ag'zalına qaldıqsız bo'linetug'in bolsın. Onda (3) ten'ligi orınlı bolıp, usı ten'likten $x=a$ bolg'anda $P_n(a)=0$ bolatug'inlıg'in keltirip shıg'aramız. Demek, $x=a$ sanı $P_n(x)$ ko'p ag'zalısnın' koreni boladı. Teorema da'lillendi.

Eger sonday $k \in N$ sanı ha'm $Q_{n-k}(x)$ ko'p ag'zalı tabılıp, qa'legen $x \in R (x \in C)$ ushın

$$P_n(x) = Q_{n-k}(x) \cdot (x-a)^k, \quad (4)$$

orınlı bolsa, onda $x=a$ sanına $P_n(x)$ ko'p ag'zalısnın' k eseli koreni delinedi, bunda

$$Q_{n-k}(a) \neq 0. \quad (5)$$

5.2. Koeffitsientleri haqıyqıy sanlar bolg'an ko'p ag'zahılar. Koeffitsientleri haqıyqıy sanlar bolg'an

$$P(x) = x^2 + px + q.$$

u'sh ag'zalısn (kvadrat u'sh ag'zalısn) qarastıramız.

Meyli bul kvadrat u'sh ag'zalısnın' diskriminantı nolden kishi bolsın, yag'nıy

$$D = p^2 - 4q < 0.$$

Onda

$$P(x) = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = (x + \frac{p}{2})^2 - i^2 (-\frac{D}{4})$$

yamasa

$$P(x) = (x + \frac{p}{2} - i \frac{\sqrt{-D}}{2})(x + \frac{p}{2} + i \frac{\sqrt{-D}}{2})$$

tu'rinde sıızıqlı ko'beytiwshilerge jiklenedi. Bunnan $P(x)$ kvadrat ush ag'zalısnın' korenleri

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

tu'rindegi tu'yinles kompleks sanlar bolatug'inlıg'ı kelip shıg'adı ha'm bul u'sh ag'zalı basqa korenlerge iye emes. Bunday tastıyıqlaw koeffitsientleri haqıyqıy sanlar bolg'an ha'm da'rejesi ekiden kem bolmag'an qa'legen ko'p ag'zalı ushın orınlı boladı.

Teorema. Eger $z = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ kompleks sanı koefitsientleri haqıyqıy sanlar bolg'an $P_n(x)$ ko'p ag'zalınsın' koreni bolsa, onda og'an tu'yinles bolg'an $\bar{z} = \alpha - i\beta$ kompleks sanı da usı ko'p ag'zalınsın' koreni boladı.

Da'lilleniwi. Teoremanın' sha'rtine sa'ykes $P_n(z) = 0$, yag'nıy

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0.$$

Bunnan $\overline{P_n(z)} = 0$ yamasa $\overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = 0$ boladı. Endi tu'yinles sanlardın' qa'siyetinen paydalanıp keyingi ten'likti

$$\overline{a_0} \bar{z}^n + \overline{a_1} \bar{z}^{n-1} + \overline{a_2} \bar{z}^{n-2} + \dots + \overline{a_{n-1}} \bar{z} + \overline{a_n} = 0 \quad (6)$$

tu'rinde jazıw mu'mkin. $a_j \in R$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ bolg'anı ushın (6) ten'ligi

$$a_0 (\bar{z})^n + a_1 (\bar{z})^{n-1} + a_2 (\bar{z})^{n-2} + \dots + a_{n-1} \bar{z} + a_n = 0 \quad (7)$$

ten'ligine ten' ku'shli boladı. (7) ten'lik $P_n(\bar{z}) = 0$ tu'rinde jazıladı. Al bul bolsa $\bar{z}$ sanı $P_n(x)$ ko'p ag'zalınsın' koreni bolatug'ınlg'ın ko'rsetedi.

Bul da'lillengen teorema *kompleks korenler haqqındag'ı teorema* dep ataladı ha'm teoremada $P_n(x)$ ko'p ag'zalınsın' koreng'e iye dep esaplanıldı.

Ko'p ag'zalınsın' korenlerinin' bar bolıwı haqqındag'ı ma'selenin' sheshimi to'mendegi algebranın' tiykarg'ı teoreması arqalı beriledi.

Teorema. Da'rejesi birden kem bolmag'an ha'r qanday (haqıyqıy yamasa kompleks koefitsientli) ko'p ag'zalınsın' bolmag'anda bir koreng'e iye boladı.

Bul teoremanı da'lillewdin' bir neshe usılı bar. Da'lillew usılların' barlıg'ı haqıyqıy ha'm kompleks sanlar ko'pliklerinin' u'zliksizlik qasiyetine tiykarlanadı. Sol sebepli bul da'lillewlerdi algebralıq da'lillewler dep qabıl ete almaymız. Teoremanın' da'lili kompleks o'zgeriwshili funktsiyalar teoriyasında keltirilgen

(Mısalı [4] qaran').

Meyli $x = x_1$ sanı $P_n(x)$ ko'p ag'zalınsın' koreni bolsın. Onda Bezu teoremasınan paydalanıp

$$P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x),$$

ten'ligin jaza alamiz, bunda $Q_{n-1}(x)$ da'rejesi $n-1$ bolg'an ko'p ag'zali. Endi algebranin' tiykarg'i teoremasin ha'm Bezu teoremasin $Q_{n-1}(x)$ ko'p ag'zalisina paydalanip,

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_{n-2}(x),$$

ten'ligine iye bolamiz. Bunda $x = x_2$ sanı $Q_{n-1}(x)$ ko'p ag'zalisinin' koreni, $Q_{n-2}(x)$ da'rejesi $n-2$ bolg'an ko'p ag'zali. Bul teoremalardi izbe-iz paydalanip, induktsiya ja'rdeminde to'mendegi na'tiyjege kelemiz:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n), \quad (8)$$

bunda a_0 sanı $P_n(x)$ tin' bas koefitsienti, $x_k, k = 1, 2, \dots, n$ sanları $P_n(x)$ tin' korenlari. Bul korenler ishinde bir-birine ten' bolatug'inlari da bar bolıwı mu'mkin.

5.3. Koefitsientleri haqiqiy sanlar bolg'an ko'p ag'zalılardı ko'beytiwshilerge jiklew. Eger $x = a$ sanı koefitsientleri haqiqiy sanlar bolg'an $P_n(x)$ ko'p ag'zalisinin' k eseli haqiqiy koreni bolsa, onda (4) ten'ligi orınlı boladı ha'm bul ten'liktegi $Q_{n-k}(x)$ da'rejesi $n-k$ bolg'an haqiqiy koefitsientli ko'p ag'zali, al $x = a$ sanı bul ko'p ag'zalisinin' koreni bola almaydı.

Meyli $z = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ sanı $P_n(x)$ ko'p ag'zalisinin' haqiqiy emes koreni bolsın. Onda ko'p ag'zalinın' kompleks korenleri haqqındag'ı teoremadan $\bar{z} = \alpha - i\beta$ sanı da $P_n(x)$ tin' koreni boladı. Sonlıqtan (8) ten'likte $(x - z)$ ha'm $(x - \bar{z})$ tu'rindegi ko'beytiwshiler payda boladı ha'm olardıń o'z ara ko'beymesi

$$(x - z)(x - \bar{z}) = (x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + px + q,$$

boladı, bunda $p = 2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$, tu'rinde jazıladı ha'm $p^2 - 4q = -4\beta^2 < 0$ boladı. Demek, bul jag'dayda $P_n(x)$ ko'p ag'zalisinin' diskriminantı nolden kishi bolg'an $x^2 + px + q$, $p, q \in R$ kvadrat u'sh ag'zalisına qaldıqsız bo'linedi. Yag'nıy, koefitsientleri haqiqiy sanlar bolg'an $Q_{n-2}(x)$ ko'p ag'zalı tabıladı da

$$P_n(x) = (x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)$$

ten'ligi orınlı boladı.

Eger $z = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ kompleks sanı $P_n(x)$ ko'p ag'zalisinin' k eseli koreni bolsa, onda $\bar{z} = \alpha - i\beta$ sanı da bul ko'p ag'zalinın' k eseli koreni boladı. Bul jag'dayda

$$P_n(x) = (x - z)^k (x - \bar{z})^k Q_{n-2k}(x)$$

yamasa

$$P_n(x) = (x^2 + px + q)^k Q_{n-2k}(x)$$

ten'ligi orinli boladi. Bunda $p, q \in R$, $p^2 - 4q < 0$, $Q_{n-2k}(x)$ bolsa haqiqiy sanlar bolg'an $n - 2k$ da'rejeli ko'p ag'zali ha'm $z, \bar{z}$ sanlari bul ko'p ag'zalinin' korenleri bolmaydi, yag'nuy $Q_{n-2k}(z) \neq 0$, $Q_{n-2k}(\bar{z}) \neq 0$.

Meyli $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ sanlari $P_n(x)$ ko'p ag'zalinin' sa'ykes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ eseli barliq haqiqiy korenleri bolsin. Onda (8) ten'ligi

$$P_n(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} (x - x_3)^{\alpha_3} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} G(x),$$

tu'rinde jaziladi. Bunda $G(x)$ da'rejesi $n - \sum_{m=1}^k \alpha_m$ bolg'an ha'm haqiqiy korenlerge iye emes, haqiqiy koefitsientli ko'p ag'zali.

Eger $G(x)$ -tin' da'rejesi nolden o'zgeshe bolsa, onda $P_n(x)$ ko'p ag'zalinin' $x_j, \bar{x}_j$ tu'rindagi β_j eseli kompleks tu'yinles korenlerinin' ha'r bir jubina (8) formulada $(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j}$ tu'rindagi ko'beytiwshi sa'ykes keledi, bunda $p_j^2 - 4q_j < 0$. Sonliqtan, haqiqiy koefitsientli $P_n(x)$ ko'p ag'zalisi

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{\alpha_{11}} (x - x_2)^{\alpha_2} (x - x_3)^{\alpha_3} \dots$$

$$\dots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} (x^2 + p_2 x + q_2) \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s},$$

tu'rinde ko'beytiwshilerga toliq jiklenedi, bunda $\sum_{m=1}^m \alpha_m + 2 \sum_{j=1}^s \beta_j = n$.

5.4. Duris ratsional bo'lshekler. Ratsional funktsiya yamasa ratsional bo'lshek dep

$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ tu'rindagi funktsiyag'a (bo'lshekke) aytadi, bunda $P_m(x), Q_n(x)$

da'rejeleri sa'ykes m, n bolg'an ko'p ag'zalilar. $m < n$ ten'sizligi orinli bolg'an jag'dayda ratsional bo'lshek duris dep ataladi. Bizler $P_m(x), Q_n(x)$ ko'p ag'zalilari haqiqiy koefitsientli bolg'an jag'daydi qarastiramiz.

Lemma 1. Eger $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ duris ratsional funksiya ha'm $x = a$ sanı

$Q_n(x)$ ko'p ag'zalisının' k ($k \geq 1$) eseli haqiqiy koreni bolsa, onda sonday $A \in R$ sanı ha'm haqiqiy koeffitsientli $P(x)$ ko'p ag'zalı bar boladı da

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)}{(x-a)^{k-1} G_{n-k}(x)}, \quad (9)$$

ten'ligi orinli boladı, bunda $G_{n-k}(x)$ arqalı $Q_n(x)$ tı $(x-a)^k$ g'a bo'lgendegi tiyindi.

(9) ten'liktin' on' ta'repindegi ekinshi qosılıwshı duris ratsional bo'lshek, $A \in R$ sanı ha'm $P(x)$ ko'p ag'zalı bir ma'nisli anıqlanadı.

Da'lilleniwi. (9) formuladag'ı A sanın

$$\varphi(x) = P_m(x) - AG_{n-k}(x) \quad (10)$$

ko'p ag'zalı $x-a$ sızıqlı eki ag'zalına qaldıqsız bo'linetug'ınday etip saylap alamız.

(9) ha'm (10) formulalardag'ı $G_{n-k}(x)$ ko'p ag'zalı $Q_n(x)$ tı $(x-a)^k$ g'a bo'lgendegi qaldıq bolıp, (4) ten'likten ha'm (5) sha'rtinen anıqlanadı. Bezu teoremasınan $\varphi(a) = 0$ bolg'anda g'ana $\varphi(x)$ ko'p ag'zalı $x-a$ sızıqlı eki ag'zalına qaldıqsız bo'linedi. Yag'nıy

$$P_m(a) - AG_{n-k}(a) = 0.$$

Bul ten'lemeden

$$A = \frac{P_m(a)}{G_{n-k}(a)}. \quad (11)$$

Demek, $A \in R$ ha'm (11) formula menen birma'nisli anıqlanadı. Sonlıqtan $\varphi(x)$ ko'p ag'zalı $x-a$ sızıqlı eki ag'zalına qaldıqsız bo'linedi. Onda koeffitsientleri haqiqiy sanlar bolatug'ın bir g'ana $P(x)$ ko'p ag'zalı bar boladı da

$$\varphi(x) = (x-a)P(x) \quad (12)$$

ten'ligi orinli boladı. (10) ha'm (12) formulalarınan

$$P_m(x) = AG_{n-k}(x) + (x-a)P(x) \quad (13)$$

ten'ligine iye bolamız. Endi (13) tin' eki ta'repin $Q_n(x) = (x-a)^k G_{n-k}(x)$ qa bo'lsek, (9) formula kelip shıg'adı.

$\phi(x)$ ko'p ag'zalisinin' da'rejesin r arqali belgileymiz. Onda $r \leq \max(m, n-k)$, bunda $m < n, n-k \leq n-1 < n$, sonliqtan $r < n$ ten'sizligi orinli. Demek,

$$\frac{P(x)}{(x-a)^{k-1}G_{n-k}(x)} = \frac{\phi(x)}{Q_n(x)}$$

ratsional bo'lshegi duris bo'lshek boladi.

Da'lillengen lemmani k ma'rte izbe-iz qollanuv na'tiyjesinde

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{p(x)}{G_{n-k}(x)}, \quad (A)$$

tu'rindegi ten'ligine iye bolamiz. Bul ten'liktegi $A_1, A_2, \dots, A_k$ haqiqiy sanlar, $p(x)$

haqiqiy koeffitsientli ko'p ag'zali, $\frac{p(x)}{G_{n-k}(x)}$ duris ratsional bolshek ha'm $x=a$ san

$G_{n-k}(x)$ ko'p ag'zalisinin' koreni emes.

Lemma 2. Eger $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ duris bo'lshek, al $z = \alpha + i\beta$ san $Q_n(x)$ ko'p

ag'zalisinin' s eseli haqiqiy bolmag'an koreni bolsa, onda B, D haqiqiy sanlari ha'm koeffitsientlari haqiqiy sanlar bolg'an $T(x)$ ko'p ag'zali bar boladi da

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{T(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1}H_{n-2s}(x)}, \quad (14)$$

ten'ligi orinli boladi. Bul ten'liktin' on' jag'indagi ekinshi qosiluvshi duris ratsional bolshek, B, D sanlari ha'm $T(x)$ ko'p ag'zalisinin' koeffitsientlari bir ma'nisli aniqlanadi, al $H_{n-2s}(x)$ ko'p ag'zali bolsa $Q_n(x)$ ti $(x^2 + px + q)^s$ ko'p ag'zalisina bo'liwdegi qaldiqti an'latadi, $x^2 + px + q = (x-z)(x-\bar{z})$.

Da'lilleniwi. B ha'm D sanlarin

$$\phi(x) = P_m(x) - (Bx + D)H_{n-2s}(x) \quad (15)$$

ko'p ag'zali $x^2 + px + q$ kvadrat u'sh ag'zalisina qaldiqsiz bo'linetug'inday etip saylap alamiz. Bul talaptin' orinli boluvu bezu teoremasinan ha'm kompleks korenler haqqindagi teoremadan $z = \alpha + i\beta$ san $\phi(x)$ tin' koreni bolg'an jag'dayda g'ana orinlanadi, yag'nuy

$$\phi(z) = P_m(z) - (Bz + D)H_{n-2s}(z) = 0.$$

Bul ten'likten $H_{n-2s}(z) \neq 0$ an'latpasin esapqa alip,

$$Bz + D = \frac{P(z)}{H_{n-2s}(z)} \quad (16)$$

ten'ligine iye bolamiz. Meyli $\operatorname{Re}\left\{\frac{P_m(z)}{H_{n-2s}(z)}\right\} = c$, $\operatorname{Im}\left\{\frac{P_m(z)}{H_{n-2s}(z)}\right\} = d$ bolsin. Onda (16)

ten'ligin $B(\alpha + i\beta) + D = c + id$, tu'rinde jazıw mu'mkin. Endi kompleks sanlardın' ten' bolıw sha'rtinen paydalanıp,

$$\begin{cases} B\alpha + D = c, \\ \beta B = d \end{cases}$$

algebralıq tenlemeler sistemasına iye bolamiz. $\beta \neq 0$ bolg'anlıg'ı ushın bul sistemadan B, D sanları bir ma'nisli anıqlanadı. B, D sanlarının' usı tabılg'an ma'nislerinde $\phi(x)$ ko'p ag'zalı $x^2 + px + q$ kvadrat u'sh ag'zalına qaldıqsız bo'linedi. Sonlıqtan, haqıyqiy koeffitsientli jalg'ız $T(x)$ ko'p ag'zalı bar boladı da

$$\phi(x) = (x^2 + px + q)T(x) \quad (17)$$

ten'ligi orınlı boladı. Endi (15) ha'm (17) ten'liklerinen

$$P_m(x) = (Bx + D)H_{n-2s}(x) + (x^2 + px + q)T(x)$$

ten'ligin payda etemiz. Usı ten'liktin' eki ta'repin

$$Q_n(x) = (x^2 + px + q)^s H_{n-2s}(x)$$

ko'p ag'zalına bo'lsek, (14) formulasına iye bolamiz. (14) formuladag'ı

$$\frac{\phi(x)}{Q_n(x)} = \frac{T(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} H_{n-2s}(x)} \text{ an'latpası durıs bo'lshek, sebebi, eger } \phi(x) \text{ tın'}$$

da'rejesin r arqalı belgilesek, onda $r \leq m$ ha'm $r \leq n - 2s + 1$ ten'sizlikleri orınlı boladı, al bunnan $r \leq n - 1$ bolatug'inlıg'ı kelip shıg'adı.

Bul da'lillengen lemmamı s ma'rte paydalanıp,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_s x + D_s}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{B_{s-1} x + D_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \dots + \frac{B_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{p^*(x)}{H_{n-2s}(x)}, \quad (V)$$

ekenligin jaza alamız. Bunda B_j, D_j ($j = \overline{1, s}$) haqıyqiy sanlar, $p^*(x)$ haqıyqiy

koeffitsientli ko'p ag'zalı, $\frac{p^*(x)}{H_{n-2s}(x)}$ durıs ratsional bo'lshek, $H_{n-2s}(x)$ ko'p ag'zalı

$x^2 + px + q$ u'sh ag'zalına qaldıqsız bo'linbeydi.

Teorema. Eger $P_m(x)$, $Q_n(x)$ berilgen haqiqiy koeffitsientli ko'p ag'zalilar, olardın' da'rejeleri ushın $m < n$ ten'sizligi orınlı ha'm $Q_n(x)$ ko'p ag'zalı

$$Q_n(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3} \cdots (x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \cdots \\ \cdots (x^2+p_2x+q_2)(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}$$

tu'rinde ko'beytiwshilergén jiklenetug'ın bolsa, onda $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ durıs ratsional bo'lshegi

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2^{(\alpha_1-1)}}{(x-x_1)^{\alpha_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{x-x_1} + \frac{A_2^{(\alpha_2)}}{(x-x_2)^{\alpha_2}} + \frac{A_2^{(\alpha_2-1)}}{(x-x_2)^{\alpha_2-1}} + \cdots \\ \cdots + \frac{A_2^{(1)}}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_k^{\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}} + \frac{A_k^{(\alpha_k-1)}}{(x-x_k)^{\alpha_k-1}} + \cdots + \frac{A_k^{(1)}}{x-x_k} + \frac{B_1^{(\beta_1)}x + D_1^{(\beta_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \cdots \\ \cdots + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_s^{(\beta_s)}x + D_s^{(\beta_s)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}} + \cdots + \frac{B_s^{(1)}x + D_s^{(1)}}{x^2+p_sx+q_s},$$

yamasa

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_m} \frac{A_m^{(j)}}{(x-x_m)^j} + \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\beta_m} \frac{B_m^{(j)}x + D_m^{(j)}}{(x^2+p_mx+q_m)^j}, \quad (18)$$

tu'rinde a'piwayı bo'lsheklerdin' qosındısına jiklenedi. Bul jikleniwdin' koeffitsientleri haqiqiy sanlar bolıp, bir ma'nisli anıqlanadı.

Da'lilleniwi. Da'slep $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ bo'lsheginen $\frac{A_1^p}{(x-x_1)^p}$, bunda $p = 1, 2, \dots, \alpha_1$,

tu'rindegi a'piwayı bo'lsheklerdi ajıratamız. Bul 1-lemmanı paydalanıw arqalı orınlanatug'ınılıg'ı bizge belgili. Keyin 1-lemma qaytadan $\frac{p(x)}{G_{n-k}(x)}$ durıs ratsional

bo'lsheginé qollanıladı (formula (A)). 1-lemmanı izbe-iz paydalanıw protsesi $Q_n(x)$ ko'p ag'zalısnın' barlıq haqiqiy korenlerine sa'ykes keletug'ın a'piwayı bo'lsheklerdi

ajıratıp bolg'ansha dawam ettiriledi. Na'tiyjede $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ bo'lshegi

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^{\alpha_m} \frac{A_m^{(j)}}{(x-x_m)^j} + \frac{p(x)}{Q_{n-t}(x)}, \quad (19)$$

Bunda $t = n - \sum_{m=1}^k \alpha_m$, $\frac{p(x)}{Q_{n-t}(x)}$ duris bo'lshek ha'm $Q_{n-t}(x)$ ko'p ag'zalisi

haqiqiy korengi iye emes. Endi $Q_n(x)$ tin' kompleks tu'yinles korenlerinin' ha'r bir jubina 2-lemmani (formula (V)) paydalanip,

$$\frac{p(x)}{G_{n-k}(x)} = \sum_{m=1}^s \sum_{j=1}^{\beta_m} \frac{B_m^{(j)} X + D_m^{(j)}}{(x^2 + px + q)^j} \quad (20)$$

ten'ligine iye bolamiz. (19) ha'm (20) formulalardan duris ratsional bo'lshekti a'piwayi bo'lshekler qosindisi arqali an'latiw imkanin beretug'in (18) formulasina iye bolamiz.

A'dette (18) formulaning' on' ta'repindegi $A_m^{(j)}, B_m^{(j)}, D_m^{(j)}$ koefitsientlerin tabiw ushin ten'lik tin' on' ta'repindegi a'piwayi bo'lshekler uliwma bo'limge keltiredi, onda

(18) ten'lik $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{R(x)}{Q_n(x)}$ tu'rinde jaziladi. Bunnan $P_m(x) = R(x)$ ten'ligi kelip

shig'adi. Mine usi ten'liktegi $P_m(x), R(x)$ ko'pag'zalarindag'i x tin' birdey da'rejelerinin' aldindag'i koefitsientlerin ten'lestirip, $A_m^{(j)}, B_m^{(j)}, D_m^{(j)}$ koefitsientlerine baylanisli algebralik ten'lemelerdin' sızıqlı sistemasına iye bolamiz. Bul algebralik ten'lemelerdin' sızıqlı sisteması birden bir sheshimge iye boladi (joqarida da'lillengen son'g'i teoremag'a qaran').

M i s a l. $\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ duris ratsional bo'lshegin a'piwayi bo'lsheklerdin'

qosindisi ko'rinishinde jazın'.

Sheshiliwi. Joqaridag'i teoremadan bul ratsional bo'lshek to'mendegi ko'rinishde a'piwayi bo'lsheklerdin' qosindisi ko'rinishinde jaziladi:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Bul ten'liktegi belgisiz A, B, C, D, E koefitsientlerin to'mendegi qatnastan aniqlaymiz:

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

x -tin' birdey da'rejeleri aldindag'i koefitsientlerdi ten'lestirip

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A + B = 0, \\ x^3 & -2B + C = 0, \\ x^2 & 2A + B - 2C + D = 2, \\ x^1 & -2B + C - 2D + E = 2, \\ x^0 & A - 2C - 2E = 13, \end{array}$$

sıziqlı ten'lemeler sistemasına iye bolamız. Bul sistemanı sheship

$$A = 1, B = -1, C = -2, D = -3, E = -4$$

ma'nislerin tabamız.

Demek,

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}$$

boladı.

Shınıg'ıwlar

Berilgen ratsional bo'lsheklerdi a'piwayı bo'lsheklerdin' qosındısı ko'rinishinde jazın'

$$1. \frac{x}{(x+1)(2x+1)}.$$

$$3. \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)}.$$

$$5. \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}.$$

$$7. \frac{(x^2 - 3x + 2)}{x(x^2 + 2x + 1)}.$$

$$9. \frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}.$$

$$11. \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}.$$

$$13. \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4.$$

$$15. \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

$$17. \frac{(x^4+1)}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

$$2. \frac{x}{2x^2 - 3x - 2}.$$

$$4. \frac{1}{6x^3 - 7x^2 - 3x}.$$

$$6. \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x}.$$

$$8. \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{1}{x}.$$

$$10. \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2}.$$

$$12. \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)}.$$

$$14. \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2}.$$

$$16. \frac{1}{1+x^3}.$$

$$18. \frac{(2x^2 - 3x - 3)}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}.$$

$$19. \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}.$$

$$21. \frac{(3x^2+x+3)}{(x-1)^3(x^2+1)}.$$

$$23. \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}.$$

$$25. \frac{(5x^2-12)}{(x^2-6x+13)^2}.$$

$$27. \frac{1}{(x^2+9)^3}.$$

$$29. \frac{1}{(1+x^2)^4}.$$

$$20. \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

$$22. \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

$$24. \frac{1}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}.$$

$$26. \frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}.$$

$$28. \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)^3}.$$

$$30. \frac{x^9}{(x^4-1)^2}.$$

6. Ratsional funktsiyalardi integrallaw

Pu'tin ratsional funktsiya dep

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

ko'rinisidagi funktsiyag'a aytiladi. Bul funktsiyani aniq emes integralni esaplaw integraldin' sızıqlılıq qa'siyetinen paydalanıw arqalı a'melge asırıladi, yag'nıy:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n)dx = \int a_0x^n dx + \int a_1x^{n-1} dx + \dots + \int a_n dx = \\ &= \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \dots + a_n x + C \end{aligned}$$

boladi.

Eger $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tu'rindegi ratsional funktsiya berilse, onda tikkeley integrallawdı

orınlaw ko'pshilik jag'daylarda mu'mkin emes.

Eger $f(x)$ ko'p ag'zalınnı' da'rejesi $\varphi(x)$ ko'p ag'zalınnı' da'rejesinen kishi bolmasa, onda $f(x)$ tı $\varphi(x)$ qa mu'yesh arqalı bo'lip, berilgen ratsional funktsiyani

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x) + \frac{h(x)}{\varphi(x)},$$

ko'rinisine alıp keliw mu'mkin.

Bunda $\psi(x)$ ko'p ag'zalı $f(x)$ tı $\varphi(x)$ qa bo'liwdegi tiyindi, al $h(x)$ bolsa, $f(x)$ tı $\varphi(x)$ qa bo'liwdegi qaldıq ha'm onın' da'rejesi $\varphi(x)$ tin' da'rejesinen kishi, yag'nıy $\frac{h(x)}{\varphi(x)}$ durıs bo'lshek.

Demek, bo'lshek ratsional funksiylardıń integralın esaplawdı u'yreniw ushın durıs bo'lshekı integrallaw haqqındag'ı ma'selenin' sheshiw usılların jaqsı o'zlestiriw jetkilikli boladı. Solay etip, endi durıs bo'lshekı integrallaw ma'selesin qarastıramız.

Meyli $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$ integralın esaplaw talap etilsin. Bunda $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ durıs qısqartılmaytug'ın bo'lshek, yag'nıy $m < n$. Bul bo'lshek 5-paragraftag'ı (18) formulag'a sa'ykes

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2), \quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (n \geq 2), \quad (1)$$

tu'rindegi a'piwayı bo'lsheklerinin' qosındısına jiklenedi.

Bunda, M, N, A, a, p, q -haqıyqıy sanlar bolıp, x^2+px+q ko'p ag'zalı haqıyqıy korenlerge iye emes, yag'nıy

$$\frac{p^2}{4} - q < 0.$$

Demek, eger (1) formulada keltirilgen a'piwayı bo'lsheklerdi integrallaw ma'slesi tolıq u'yrenilgen bolsa, onda $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ durıs ratsional bo'lsheginin' integralın esaplaw ma'slesi sheshilgen boladı. Endi usı bo'lsheklerdi integrallaw haqqındag'ı ma'seleni ko'rip o'temiz.

I. $\frac{A}{x-a}$ bo'lshegin integrallaw.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int d(\ln|x-a|) = A \ln|x-a| + C.$$

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, bunda $k \geq 2$, bo'lshegin integrallaw.

$x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ ma'nisleri ushın

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \quad (2)$$

III. $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ bo'lshegi berilsin.

Bul bo'lshektin' bo'limin to'mendegishe tu'rlendiremiz

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= \left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} \right) + \left(q - \frac{p^2}{4} \right) = \\ &= \left(x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4} \right), \quad \left(q - \frac{p^2}{4} \right) > 0. \end{aligned}$$

Endi $q - \frac{p^2}{4} = b^2$ belgilewin ha'm $t = x + \frac{p}{2} \Rightarrow dx = dt$ tu'rinde o'zgeriwshilerdi

almastırıw orınlansa, onda

$$x^2 + px + q = t^2 + b^2, \quad Mx + N = Mt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right)$$

boladı. Demek,

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right)}{t^2 + b^2} dt = \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + b^2} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \\ &= \frac{M}{2} \ln(t^2 + b^2) + \frac{1}{b} \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \end{aligned}$$

boladı.

IV. $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}$, ($n > 2$) bo'lshegin integrallaw.

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2} \right)}{(t^2 + b^2)^n} dt = \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2 + b^2)^n} + \\ &+ \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + b^2)^n} = \frac{M}{2(1-n)(t^2 + b^2)^{n-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + b^2)^n} \end{aligned} \quad (3)$$

Solay etip, IV-tipindegi a'piwayı bo'lshekti integrallaw

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2 + b^2)^n}, \quad n \in N, \quad (4)$$

tu'rindagi integraldı esaplawg'a alıp kelindi. Bul integraldı bo'leklep integrallaw usılı ja'rdeminde esaplaw mu'mkin. Usı maqsette,

$$u = \frac{1}{(t^2 + b^2)^n} \Rightarrow du = -\frac{2nt}{(t^2 + b^2)^{n+1}}; \quad dv = dt \Rightarrow v = t$$

belgilewlerin kiritip, bo'leklep integrallaw formulası tiykarında

$$J_n = \frac{t}{(t^2 + b^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2 + b^2)^{n+1}} dt,$$

bolatug'inlig'ın ko'remiz. Bunda

$$\int \frac{t^2}{(t^2 + b^2)^{n+1}} dt = \int \frac{t^2 + b^2 - b^2}{(t^2 + b^2)^{n+1}} dt = \int \frac{1}{(t^2 + b^2)^n} dt - b^2 \int \frac{1}{(t^2 + b^2)^{n+1}} dt =$$

$$J_n - b^2 J_{n+1}.$$

Demek,

$$J_n = \frac{t}{(t^2 + b^2)^n} + 2n J_n - 2nb^2 J_{n+1},$$

bunnan

$$J_{n+1} = \frac{t}{2nb^2(t^2 + b^2)^n} + \frac{2n-1}{2nb^2} J_n. \quad (5)$$

(4) formulada $n=1$ bolsa, $J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C$ boladı. Onda (5) formuladan

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + b^2)^2} = \frac{t}{2b^2(t^2 + b^2)} + \frac{1}{2b^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{b} + C$$

bolatug'inlig'ı kelip shıg'adı. (5) *rekurrent* formulanı izbe-iz qayta qollanıw na'tiyjesinde (4) integraldı

$$J_n = \frac{At}{(t^2 + b^2)^{n-1}} + \frac{Bt}{(t^2 + b^2)^{n-2}} + \dots + \frac{Ht}{t^2 + b^2} + K \int \frac{dt}{t^2 + b^2}, \quad (6)$$

tu'rine keltiriwge boladı, bunda $A, B, \dots, H, K$ haqıyqiy sanlar. $n=2, 3, \dots$ ma'nislerine sa'ykes keliwshi (4) integraldın' ma'nisleri (5) formuladan rekurrent esaplanadı. Solay etip, ha'r qanday ratsional bo'lshektin' integralın esaplaw na'tiyjesinde ko'p ag'zalı (ratsional bo'lshek durıs bolmag'an jag'dayda), ratsional funktsiyalar, logarifmlik funktsiyalar ha'm arktangenslerdin' sıziqlı kombinatsiyasına iye bolamız.

Ratsional funktsiyalardı a'piwayı bo'lsheklerdin' qosındısına jiklew arqalı integrallaw usılı ba'rqulla tolıq na'tiyje beredi. Biraq, bul usıldan paydalanıw

protseinde $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ratsional bo'lshegin a'piwayı bo'lsheklerdin' qosındısına jiklew ushın $Q_n(x)$ ko'p ag'zalısnın' korenlerin tabıwg'a, yag'nıy $Q_n(x) = 0$ tu'rindegi algebralıq ten'lemeni sheshiwge ma'jbu'r bolamız. $n \in N$ jetkilikli u'lken bolg'an jag'daylarda bul ten'lemeni sheshiw an'sat bolmaydı. Mine usı jag'day bul integrallaw usılının' tiykarg'ı kemshiligi bolıp tabıladı.

Degen menen qa'legen ratsional bo'lshektin' a'piwayı bo'lsheklerge jikleniwiniñ o'zine say ta'repinen qarasaq, qa'legen ratsional funktsiyanın' integralı bar ha'm ol integral a'piwayı funktsiyalar (ratsional funktsiya, logarifm ha'm arktangens) arqalı g'ana an'latıladı degen juwmaqqa kelemiz. Ratsional funktsiyalardan basqa elementar funktsiyalardıń ishinde integralları elementar funktsiyalar arqalı an'latılmaytug'ınları ju'da' ko'p. Mısalı a'meliyatta jiyi ushırasatug'ın

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ -integrallıq logarifm,}$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \text{ - integrallıq sinus,}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx \text{ -integrallıq kosinus,}$$

$$\int \sin(x^2) dx \text{ ha'm } \int \cos(x^2) dx \text{ -Frenel integralları,}$$

$$\int e^{-x^2} dx \text{ -Puasson integralı,}$$

turindegi integrallar ha'm basqa da ko'plegen integrallardıń elementar funktsiyalar arqalı an'latılmaytug'ınlıg'ı burınnan da'lillengen. Bunday integrallardı «*integrallanbaytug'ın*», «*aqırına shekem an'latılmaytug'ın*» integrallar dep ataydı.

Ratsional bo'lsheklerdi integrallawg'a bir neshe mısallar keltiremiz.

Mısalılar.

1) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x}$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. Integral astındag'ı funktsiyanı a'piwayı bo'lsheklerdin' qosındısı tu'rinde an'latamız, yag'nıy

$$\frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}.$$

Ten'liktin' on' ta'repin ulıwma bolimge keltirip ha'm eki bo'lshektin' ten' bolıwı sha'rtinen paydalansaq,

$$1 = A(x - 2) + Bx$$

ten'ligine iye bolamız. Endi eki ko'p ag'zalı bir-birine ten' bolıwı ushın o'zgeriwshi x tin' birdey da'rejeleri aldındag'ı koeffitsientler ten' bolıwı tiyis ekenligin esapqa alıp, A ha'm B tu'raqlılarına baylanıslı

$$A + B = 0$$

$$-2A = 1$$

tu'rindagi algebralıq ten'lemelerdin' sıızqlı sistemasına iye bolamız. Usı sistemanı sheship, $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ bolatug'ınlıg'ın ko'remiz. Demek,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 2x} &= \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x - 2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 2} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x - 2| + C = \ln \left| \sqrt{\frac{x - 2}{x}} \right| + C. \end{aligned}$$

2) $\int \frac{x - 3}{x^3 - x} dx$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi.

$$\frac{x - 3}{x^3 - x} = \frac{x - 3}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{D}{x + 1}.$$

Bunnan:

$$x - 3 = A(x^2 - 1) + Bx(x + 1) + Dx(x - 1).$$

x -tin' birdey da'rejeleri aldındag'ı koeffitsientlerin ten'lestirse, to'mendegi ten'lemeler kelip shıg'adı:

$$A + B + D = 0,$$

$$B - D = 1,$$

$$-A = -3.$$

Bul ten'lemelerdi sheship $A = 3$, $B = -1$, $D = -2$ ma'nislerine iye bolamız.

Bul belgisiz koeffitsientlerdi to'mendegi on'ay usıl menen tabıwg'a boladı:

a) $x = 0$ dep alsaq, $-3 = -A$, yag'nıy $A = 3$ bolsa,

b) $x = 1$ dep alsaq, $-2 = 2B$, yag'nıy $B = -1$,

v) $x = -1$ dep alg'anda, $-4 = 2D$ bolıp, bunnan $D = -2$ kelip shıg'adı.

Demek berilgen bo'lshek

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

ko'rinishine keledi.

Bunnan

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^3-x} dx &= 3 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{x+1} = 3 \ln|x| - \ln|x-1| - \\ &- 2 \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \right| + C \end{aligned}$$

boladi.

3) $\int \frac{3x+2}{x^4+3x^3+3x^2+x} dx$ integraln esaplan'.

Sheshiliwi.

$$\frac{3x+2}{x^4+3x^3+3x^2+x} = \frac{3x+2}{x(x+1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x+1)^3} + \frac{A_3}{(x+1)^2} + \frac{A_4}{x+1};$$

$$\begin{aligned} 3x+2 &= (A_1+A_4)x^3 + (3A_1+A_3+2A_4)x^2 + \\ &+ (3A_1+A_2+A_3+A_4)x + A_1. \end{aligned}$$

Bunnan:

$$A_1 + A_4 = 0,$$

$$3A_1 + A_3 + 2A_4 = 0,$$

$$3A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 3,$$

$$A_1 = 2.$$

Bul ten'lemeler sistemasin sheship,

$$A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = -2, A_4 = -2$$

ma'nislerine iye bolamiz. Onda:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^4+3x^3+3x^2+x} dx &= 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{(x+1)^3} - 2 \int \frac{dx}{(x+1)^2} - 2 \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= 2 \ln|x| - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} - 2 \ln|x+1| + C = \\ &= \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \ln \frac{x^2}{(x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

4) $\int \frac{4dx}{x^4+1}$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi.

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^4+1} &= \frac{4}{(x^4+2x^2+1)-2x^2} = \frac{4}{(x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{4}{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2-x\sqrt{2}+1} \end{aligned}$$

Bunnan ten'liktin' on' ta'repin ulıwma bo'limge keltirgennen son', bo'lsheklerdin' alımların ten'lestirip,

$$\begin{aligned} (M_1+M_2)x^3 + (N_1-M_1\sqrt{2}+N_2+M_2\sqrt{2})x^2 + \\ + (M_1-N_1\sqrt{2}+M_2+N_2\sqrt{2})x + (N_1+N_2) = 4 \end{aligned}$$

ten'lemesine iye bolamız. Endi x tın' birdey da'rejeleri aldındag'ı koeffitsientlerdi salıstırıw na'tiyjesinde

$$\begin{aligned} N_1+N_2 &= 4 \\ M_1+M_2+(N_2-N_1)\sqrt{2} &= 0 \\ N_1+N_2+(M_2-M_1)\sqrt{2} &= 0 \\ M_1+M_2 &= 0. \end{aligned}$$

tu'rindagi algebralıq ten'lemelerdin' sıızılıq sistemasın payda etemiz. Bul sistemanın' sheshimin tawıp, $M_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$, $N_1 = 2$, $M_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}}$, $N_2 = 2$ ma'nislerine iye bolamız.

Sonlıqtan:

$$\begin{aligned} \int \frac{4dx}{x^4+1} &= \int \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}x+2}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx + \int \frac{-\frac{2}{\sqrt{2}}x+2}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(2x+\sqrt{2})+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(2x-2)-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2+x\sqrt{2}+1)}{x^2+x\sqrt{2}+1} dx + \int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x^2-x\sqrt{2}+1)}{x^2-x\sqrt{2}+1} dx + \int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x^2 + x\sqrt{2} + 1| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |x^2 - x\sqrt{2} + 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right| + \sqrt{2} [\operatorname{arctg} (x\sqrt{2} + 1) + \\
&+ \operatorname{arctg} (x\sqrt{2} - 1)] + C.
\end{aligned}$$

Endi $y = \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1)$, $z = \operatorname{arctg} (x\sqrt{2} - 1)$ belgilewin kiritsek,

$$\operatorname{tgy} = x\sqrt{2} + 1, \operatorname{tgz} = x\sqrt{2} - 1 \text{ boladı. Al, } \operatorname{tg}(y+z) = \frac{\operatorname{tgy} + \operatorname{tgz}}{1 - \operatorname{tgy} \operatorname{tgz}} = \frac{x\sqrt{2} + 1 + x\sqrt{2} - 1}{1 - (x\sqrt{2} + 1)(x\sqrt{2} - 1)} = \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2},$$

$$\text{onda } y + z = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}, \text{ yag'niy } \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}.$$

$$\text{Demek, } \int \frac{4dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right| + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C.$$

$$5) \int \frac{x^7 + x^5 + x^3 + x}{x^8 + 10x^6 + 37x^4 + 60x^2 + 36} dx \text{ integralın esaplan'}.$$

$$\textbf{Sheshiliwi.} \quad x^8 + 10x^6 + 37x^4 + 60x^2 + 36 = (x^2 + 2)^2 (x^2 + 3)^2.$$

Sonliqtan:

$$\begin{aligned}
\frac{x^7 + x^5 + x^3 + x}{x^8 + 10x^6 + 37x^4 + 60x^2 + 36} &= \frac{x^7 + x^5 + x^3 + x}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 3)^2} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + 2)^2} + \\
&+ \frac{M_2 x + N_2}{x^2 + 2} + \frac{M_3 x + N_3}{(x^2 + 3)^2} + \frac{M_4 x + N_4}{x^2 + 3} \text{ boladı.}
\end{aligned}$$

Bunnan:

$$\begin{aligned}
x^7 + x^5 + x^3 + x &= (M_1 x + N_1)(x^2 + 3)^2 + \\
&+ (M_2 x + N_2)(x^2 + 2)(x^2 + 3)^2 + (M_3 x + N_3)(x^2 + 2)^2 + \\
&+ (M_4 x + N_4)(x^2 + 3)(x^2 + 2)^2 = (M_2 + M_4)x^7 + (N_2 + N_4)x^6 + \\
&+ (M_1 + 8M_2 + M_3 + 7M_4)x^5 + (N_1 + 8N_2 + N_3 + 7N_4)x^4 + \\
&+ (6M_1 + 21M_2 + 4M_3 + 16M_4)x^3 + (6N_1 + 21N_2 + 4N_3 + 16N_4)x^2 + \\
&+ (9M_1 + 18M_2 + 4M_3 + 12M_4)x + (9N_1 + 18N_2 + 4N_3 + 12N_4).
\end{aligned}$$

Bul ten'liktegi x -tin' birdey da'rejeleri aldındag'ı koeffitsientlerdi ten'lestirgende kelip shıg'atug'ın ten'lemeler sistemasın sheshkende,

$$M_1 = -5, M_2 = 19, M_3 = -20, M_4 = -18, N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = 0$$

kelip shıg'adı.

Demek,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7 + x^5 + x^3 + x}{x^8 + 10x^6 + 37x^4 + 60x^2 + 36} dx &= \int \frac{-5x dx}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{19x dx}{x^2 + 2} + \int \frac{-20x}{(x^2 + 3)^2} dx + \\ &+ \int \frac{-18x}{x^2 + 3} dx = -\frac{5}{2} \int (x^2 + 2)^{-2} d(x^2 + 2) + \frac{19}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{x^2 + 2} - \\ &- 10 \int (x^2 + 3)^{-2} d(x^2 + 3) - 9 \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{5}{2(x^2 + 2)} + \frac{19}{2} \ln(x^2 + 2) + \\ &+ \frac{10}{x^2 + 3} - 9 \ln(x^2 + 3) + C = \frac{5}{2(x^2 + 2)} + \frac{10}{x^2 + 3} + \ln \frac{\sqrt{(x^2 + 2)^{10}}}{(x^2 + 2)^9} + C. \end{aligned}$$

Shınıg'ıwlar

To'mendegi berilgen integrallardı esaplan'

$$1. \int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)}.$$

$$2. \int \frac{x dx}{2x^2 - 3x - 2}.$$

$$3. \int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{6x^3 - 7x^2 - 3x}.$$

$$5. \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

$$6. \int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx.$$

$$7. \int \frac{(x^2 - 3x + 2) dx}{x(x^2 + 2x + 1)}.$$

$$8. \int \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}.$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}.$$

$$10. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2 (x+4)^2}.$$

$$12. \int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3 (x-5)} dx.$$

$$13. \int \frac{1}{8} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^4 dx.$$

$$14. \int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3 (x-2)^2} dx.$$

$$15. \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$$

$$16. \int \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$17. \int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

$$18. \int \frac{(2x^2 - 3x - 3) dx}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}.$$

$$19. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)}.$$

$$20. \int \frac{dx}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}.$$

$$21. \int \frac{(3x^2 + x + 3)dx}{(x - 1)^3(x^2 + 1)}.$$

$$22. \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx.$$

$$23. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

$$24. \int \frac{dx}{x(4 + x^2)^2(1 + x^2)}.$$

$$25. \int \frac{(5x^2 - 12)dx}{(x^2 - 6x + 13)^2}.$$

$$26. \int \frac{(x + 1)^4 dx}{(x^2 + 2x + 2)^3}.$$

$$27. \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}.$$

$$28. \int \frac{2x dx}{(1 + x)(1 + x^2)^3}.$$

$$29. \int \frac{dx}{(1 + x^2)^4}.$$

$$30. \int \frac{x^9 dx}{(x^4 - 1)^2}.$$

7. Ostrogradskiy usılı

Ostrogradskiy durıs ratsional bo'lshektin' anıq emes integralın esaplaw protsesin a'piwaylastırıw maqsetinde matematikag'a o'zinin' integrallaw usılın kiritken. Bul usıl integraldın' ratsional bo'legin algebralıq jol menen ajıratıp alıwg'a mumkinshilik jaratadı.

Meyli,

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P(x)}{\dots(x - a)^k \dots(x^2 + px + q)^s \dots} \quad (1)$$

tu'rindegi durıs ratsional funktsiyanı integrallaw ma'selesı qoyılǵ'an bolsın. Bul funktsiyanın' integralın esaplaw a'piwayı bo'lsheklerdin' integralların esaplaw ma'selesine alıp keletug'inlıǵ'ı ma'lim. Eger $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ durıs bo'lshegin a'piwayı bo'lshekler qosındısına jikleniwde

$$\frac{A}{x - a}, \frac{A}{(x - a)^k}, \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}, \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} \quad (2)$$

tu'rindegi bo'lshekler ushirasatug'in bolsa, onda sa'ykes onin' integrali

$$\begin{aligned} & \int \left[\frac{A}{x-a} + \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \right] dx = \\ & = \ln|x-a| + \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx + \\ & \quad + \frac{\Phi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}} + L \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ & = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{k-1}(x^2+px+q)^{n-1}} + \int \frac{\psi(x)dx}{(x-a)(x^2+px+q)} \end{aligned} \quad (3)$$

ko'rinisine keledi. (2) formuladag'i

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{k-1}(x^2+px+q)^{n-1}}, \frac{\psi(x)}{(x-a)(x^2+px+q)}$$

duris ratsional bo'lshekler bolip esaplanadi.

Berilgen funktsiyanin' (1) tu'rindegi jikleniwinde (2) bo'lsheklerden koeffitsientleri g'ana o'zgeshe bolg'an, basqa da a'piwayi bo'lshekler kiriwi mu'mkin. Aqirinda, sol formulalardin' ba'rin biriktirsek, to'mendegi formula kelip shig'adi

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx. \quad (4)$$

Bunda $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ penen $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ -duris ratsional bo'lshekler, sonin' menen birge

$$Q_1(x) = \dots(x-a)^{k-1} \dots (x^2+px+q)^{n-1} \dots,$$

$$Q_2(x) = \dots(x-a) \dots (x^2+px+q) \dots$$

Bul (4) ten'lik **Ostrogradskiy formulasi** dep ataladi.

Ostrogradskiy formulasinin' qolaylilig'i ratsional bo'lshek $\frac{P(x)}{Q(x)}$ -tin' integralinin'

ratsional bo'legi $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ -ti tawip aliwg'a mu'mkinshilik beredi. Sol sebepli $\frac{P(x)}{Q(x)}$

bo'lshegin integrallaw ma'seleasi an'sat integrallanatug'in I ha'm III tiptegi a'piwayi bo'lsheklerge jiklenetug'in ratsional $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ bo'lshegin integrallaw orqali sheshiledi.

Endi Ostrogradskiy formulasindag'i $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ penen $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ -duris ratsional

bo'lsheklerin qalay anqlaw kerekligin keltirip o'temiz.

Berilgen (1) bo'lshektin' bo'limi $Q(x)$ -ti sızıqlı ko'beytiwshiler menen kvadratlıq ko'beytiwshilerge jiklew kerek. Sonda $Q_2(x)$ ko'p ag'zalıında bul ko'beytiwshilerdin' barlıg'ı birinshi da'reje menen qatnasadı.

$$Q(x) = Q_1'(x)Q_2(x) \quad (5)$$

bolg'anlıqtan ko'p ag'zalı $Q(x)$ -tin' ishindegi ko'p ag'zalı $Q_2(x)$ -ke kirmey qalg'an ko'beytiwshilerdin' barlıg'ı ko'p ag'zalı $Q_1(x)$ -tin' ishine kiredi. $Q_1(x)$ penen $Q_2(x)$ -ti berilgen $Q(x)$ ko'p ag'zalıını ko'beytiwshilerge jiklemey de tabıwg'a boladı. $Q(x)$ ko'p ag'zalıına ko'beytiwshilerdin' barlıg'ı onın' tuwındısı $Q'(x)$ ko'p ag'zalıına da'reje ko'rsetkishleri birlikke g'ana kemeyip kiretug'ın bolg'anlıqtan $Q_1(x)$ ko'p ag'zalılar $Q(x)$ penen $Q'(x)$ -tin' en' ulken ulıwma bo'liwshisi bolıp, algebrada qarastırılatus'ın izbe-iz bo'liw usılı boyınsha tabıladı. Bunnan keyin, (5) ten'likten $Q_2(x)$ tabıladı. Endi (4) formuladag'ı bo'lsheklerdin' alımları $P_1(x)$ penen $P_2(x)$ -ti tabıw ushın anıq emes koefitsientler usılınan paydalanamız.

Eger $Q_1(x)$ -tin' da'rejesin n_1 , $Q_2(x)$ -tin' da'rejesin n_2 dep belgilesek ($n_1 + n_2 = n$), $P_1(x)$ penen $P_2(x)$ -tin' sa'ykes da'rejeleri dep $n_1 - 1$ menen $n_2 - 1$ sanların alamız. Al $P_1(x)$ penen $P_2(x)$ ko'p ag'zalılarının' anıq emes koefitsientlerin ha'ripler menen belgileyemiz. Bunday anıq emes koefitsientler sanı n -ge ten' boladı.

(4) formulanı differentsiallasaq,

$$\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q_1} \right)' + \frac{P_2}{Q_2}$$

yamasa

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1' Q_1 - P_1 Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1' Q_2 - P_1 \frac{Q_1' Q_2}{Q_1} + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} \quad (6)$$

kelip shıg'adı.

$Q_1(x)$ ko'p ag'zalıındag'ı ha'r bir ko'beytiwshi $Q_1'(x)$ ko'p ag'zalıına da'reje ko'rsetkishi birge kemip, al sol ko'beytkishler $Q_2(x)$ ko'p ag'zalıına birinshi da'rejede kiretug'ın bolg'anlıqtan $Q_1' Q_2$ ko'beymesi $Q_1(x)$ -ke bo'linedi. Onda ko'beyme $Q_1' Q_2$ -ti

$$Q_1' Q_2 = Q_1 H \quad (7)$$

ko'riniside jazamız, sonın' menen birge $H(x)$ ko'p ag'zalıssının' da'rejesi $n_2 - 1$ -ge ten' boladı. Onda (6) formula to'mendegishe boladı:

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1' Q_2 - P_1 H + P_2 Q_1}{Q_1 Q_2} = \frac{T}{Q_1 Q_2}. \quad (8)$$

Bunda $T = P_1' Q_2 - P_1 H + P_2 Q_1$ $n-1$ da'rejeli ko'p ag'zalı ha'm onın' koeffitsientleri P_1 menen P_2 ko'p ag'zalıların' anıq emes koeffitsientlerinin' sızıqlı kombinatsiyası boladı.

(8) formuladan

$$T(x) = P(x) \quad (9)$$

ten'be-ten'ligi kelip shıg'adı.

Demek, $P_1(x)$ penen $P_2(x)$ ko'p ag'zalıların' anıqlanbag'an n koeffitsientlerin tabıw ushın (9) ten'liktin' shep ta'repi menen on' ta'repindegi x -tin' birdey da'rejelerinin' aldındag'ı koeffitsientlerin ten'lestiriw arqalı n sızıqlı ten'lemeler sistemasın du'zemiz. Demek berilgen funksiya Ostrogradskiy formulası boyınsha jiklenetug'ının da'lilledik.

M ı s a l. Ostrogradskiy formulasınan paydalanıp

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx$$

integralın essaplan'.

Sheshiliwi. Bunda $Q(x) = (x^2 + 2)^2$. Onda:

$$Q_2(x) = x^2 + 2 \text{ ha'm } Q_1(x) = x^2 + 2. \text{ Sonlıqtan: } P_1(x) = Ax + B, \quad P_2(x) = Dx + E$$

dep belgileymiz. Bul jag'day ushın Ostrogradskiy formulası to'mendegishe boladı:

$$\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \int \frac{Dx + E}{x^2 + 2} dx.$$

Bul ten'liktin' eki ta'repin differentziallasaq

$$\frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} = \frac{A(x^2 + 2) - 2x(Ax + B)}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 2}$$

ten'ligine iye bolamız. Bunnan:

$$x^3 + x - 1 = A(x^2 + 2) - 2x(Ax + B) + (Dx + E)(x^2 + 2).$$

Bul ten'liktin' eki ta'repindegi x -tin' birdey da'rejelerinin' aldındag'ı koefitsientlerin salıstırıp, A, B, D, E koefitsientlerine baylanışlı algebralıq ten'lemelerdin' sızıqlı

$$\begin{aligned} D &= 1, \\ -A + E &= 0, \\ -2B + 2D &= 1, \\ 2A + 2E &= -1. \end{aligned}$$

sistemasına iye bolamız. Bul sistemadan

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad D = 1, \quad E = -\frac{1}{4}$$

ma'nisleri kelip shıg'adı. Onda,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx &= \frac{x + 2}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4} \int \frac{4x - 1}{x^2 + 2} dx = \frac{x + 2}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2)}{x^2 + 2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \\ &= \frac{x + 2}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

boladı.

Shınıg'ıwlar

Ostrogradskiy formulasınan paydalanıp to'mendegi integrallardı esaplan'

$$1. \int \frac{x^3 + 3}{(x + 1)(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$2. \int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}.$$

$$3. \int \frac{4x^2 - 8x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$4. \int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x + 1)^2(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$5. \int \frac{x^7 + 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$$

$$6. \int \frac{(4x^2 - 8)dx}{(x - 1)^2(x^2 + 1)^2}$$

$$7. \int \frac{x^2 + x + 1}{x^5 - 2x^4 + x^3}.$$

$$8. \int \frac{x^6 + x^4 - 4x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx.$$

$$9. \int \frac{(x^2 - 1)^2}{(1 + x)(1 + x^2)^3} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^4(x^3 + 1)^2}.$$

$$11. \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^3}.$$

$$12. \int \frac{9dx}{5x^2(3 - 2x^2)^3}.$$

8. Algebralıq irratsional funktsiyalardı integrallaw

İrratsional an'latpalardı integrallaw ma'selesin bazı bir jag'daylarda ha'r qıylı almasırlar na'tiyjesinde aldın'g'ı eki paragrafta u'yrenilgen ratsional funktsialardı integrallaw ma'selesine alıp keliwge boladı. Bunday usıl **r a t s i o n a l l a w** usılı dep ataladı. Usı **r a t s i o n a l l a w** usılının' algebralıq irratsional funktsiyalardıń bazı bir tu'rlerinin' integralların esaplawda qollanıw usılların ko'rsetemiz.

$$I. \quad \int \Re \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}} \right) dx \quad \text{tu'rindegi integraldı esaplaw, bunda } n \in N.$$

$\Re$ ha'ribi integral astındag'ı funktsiya qawsırmanın' ishindegi an'latpalardıń ratsional funktsiyası degendi an'latadı.

Berilgen integralda $z = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}$ tu'rinde o'zgeriwshini almasırlaw qollanılsa,

onda

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = z^n \Rightarrow x = \frac{b_1z^n - b}{a - a_1z^n} \Rightarrow dx = \left(\frac{b_1z^n - b}{a - a_1z^n} \right)' dz$$

boladı. Bul tabılğ'anlardı berilgen integraldag'ı orınlarına qoyıp,

$$\int \Re \left(\frac{b_1z^n - b}{a - a_1z^n}, z \right) \cdot \left(\frac{b_1z^n - b}{a - a_1z^n} \right)' dz \quad (1)$$

tu'rindegi integralg'a iye bolamız. (1) integral z o'zgeriwshisinin' ratsional funktsiyasının' integralı ha'm onı esaplaw usılları bizge belgili. (1) integraldın'

ma'nisi tabılğ'annan son' z o'zgeriwshisinen $z = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{a_1x+b_1}}$ formulasına sa'ykes

da'slepki x o'zgeriwshisine o'tiledi.

$$a) \int R \left(x, \sqrt[n]{ax+b} \right) dx, \quad a \neq 0,$$

$$b) \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \right)^{\frac{r_m}{s_m}} \right) dx,$$

bunda r_j ha'm $s_j (j=1,2,...,m)$ natural sanlar, $a, b, a_1, b_1 \in R, ab_1 - ba_1 \neq 0$, tu'rindagi integrallardi I tiptegi integralg'a keltiriv mumkin.

Haqiqatında da, a) integralı I tiptegi integralda $a_1 = 0, b_1 = 1$ bolg'andag'ı dara jag'dayı.

b) $\frac{s_j}{r_j}$ bo'lsheklerinin' ulwma bo'limin n arqalı belgilep, $\frac{ax+b}{a_1x+b_1} = z^n$

tu'rlendiriwi orınlansa, onda $x = \frac{b_1 z^n - b}{a - a_1 z^n}, dx = (\frac{b_1 z^n - b}{a - a_1 z^n})' dz$ boladı ha'm integral b)

$$\int \Re(\frac{b_1 z^n - b}{a - a_1 z^n}, z^{\frac{nr_1}{s_1}}, z^{\frac{nr_2}{s_2}}, \dots, z^{\frac{nr_m}{s_m}}) (\frac{b_1 z^n - b}{a - a_1 z^n})' dz,$$

tu'rindagi

ratsional funksiyanın' integralına keledi, bunda $\frac{nr_1}{s_1}, \frac{nr_2}{s_2}, \dots, \frac{nr_m}{s_m} \in Z$. Bul integraldın'

ma'nisi tabılg'annan son' z o'zgeriwshisinen da'slepki x o'zgeriwshisine

$z = (\frac{ax+b}{a_1x+b_1})^{\frac{1}{n}}$ tu'rlendiriwine sa'ykes o'tiledi.

M i s a l l a r.

1. $\int \frac{dx}{x - \sqrt[3]{3x+2}}$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. x ti $\sqrt[3]{3x+2} = z$ formulasına sa'ykes almastıramız. Onda

$x = \frac{z^3 - 2}{3} \Rightarrow dx = z^2 dz$ boladı da, berilgen integral

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt[3]{3x+2}} = \int \frac{z^2 dz}{\frac{z^3 - 2}{3} - z} = 3 \int \frac{z^2 dz}{z^3 - 3z - 2},$$

tu'rindagi integralg'a keledi.

Endi $\int \frac{z^2 dz}{z^3 - 3z - 2}$ integralına ratsional bo'lshekli integrallaw usılın qollansaq,

na'tiyjede

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 dz}{z^3 - 3z - 2} &= \int \frac{3z^2 dz}{(z+1)^2(z-2)} = \int (\frac{A}{(z+1)^2} + \frac{B}{z+1} + \frac{D}{z-2}) dz = \\ &= \frac{1}{z+1} + \frac{5}{3} \ln|z+1| + \frac{4}{3} \ln|z-2| + C, \end{aligned}$$

boladı. Bundag'ı A, B, C tu'raqılıların tabıw ushın

$$\frac{3z^2}{(z+1)^2(z-2)} = \frac{A}{(z+1)^2} + \frac{B}{z+1} + \frac{D}{z-2},$$

$$3z^2 = A(z-2) + B(z+1)(z-2) + D(z+1)^2,$$

ten'liklerinen paydalanıldı ha'm $A = -1, B = \frac{5}{3}, D = \frac{4}{3}$ ma'nisleri tabıldı.

Endi z o'zgeriwshisinen da'slepki x o'zgeriwshisine o'tip,

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt[3]{3x+2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3x+2} + 1} + \frac{5}{3} \ln |\sqrt[3]{3x+2} + 1| + \frac{4}{3} \ln |\sqrt[3]{3x+2} - 2| + C$$

bolatug'inlıg'ın ko'remiz.

2. $\int \frac{(x-1)dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. $z = \sqrt[6]{x}$ belgilewin kiritemiz. Onda

$$x = z^6, \quad \sqrt{x} = z^3, \quad \sqrt[3]{x^2} = z^4, \quad dx = 6z^5 dz$$

boladı. Onda, $\int \frac{z^6-1}{z^6(z^3+z^4)} 6z^5 dz = 6 \int \frac{z^6-1}{z^4(1+z)} dz$ tu'rindegi ratsional bo'lshektin'

integralına iye bolamiz.

$$\int \frac{z^6-1}{z^4(z+1)} dz = \int \frac{z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1}{z^4} dz = \left(\frac{z^2}{2} - z + \ln|z| + \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3z^3} \right) + C = \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + \ln \sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right) + C.$$

Demek, $\int \frac{(x-1)dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})} = 6 \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + \ln \sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right) + C.$

II. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + d}) dx$, bunda $a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0$ tipindegi integrallar.

Bul tiptegi integrallar Eyler tu'rlendiriwleri dep atalatug'ın tu'rlendiriwler ja'rdeminde esaplanıwı mu'mkin. Bunda u'sh jag'day qarastırıladi.

1. $a > 0$ bolg'an jag'day. Bul jag'dayda o'zgeriwshini

$$\sqrt{ax^2 + bx + d} = z - x\sqrt{a} \quad (2)$$

formulası ja'rdeminde almastırıladi. (2) formula **Eylerdin' birinshi ornına qoyıwı** dep ataladı. (2) ten'liginin' eki ta'repin kvadratqa ko'tersek,

$$ax^2 + bx + d = z^2 - 2zx\sqrt{a} + ax^2,$$

yamasa

$$bx + d = z^2 - 2zx\sqrt{a}$$

boladı. Onda, $x = \frac{z^2 - d}{2z\sqrt{a} + b} \Rightarrow dx = \left(\frac{z^2 - d}{2z\sqrt{a} + b}\right)' dz$ boladı.

Demek, berilgen integral

$$\int R\left(\frac{z^2 - d}{2z\sqrt{a} + b}, z - \sqrt{a} \frac{z^2 - d}{2z\sqrt{a} + b}\right) \left(\frac{z^2 - d}{2z\sqrt{a} + b}\right)' dz,$$

tu'rindegi ratsional funksiyanın' integralına aylanadı.

Eskertiw. Eger $ax^2 + bx + d$ kvadrat u'sh ag'zalısnın' korenleri kompleks tu'iyndes sanlar bolsa, $a > 0$ bolg'an jag'dayda integral astındag'ı funksiyanın' ma'nisleri haqıyqıy boladı ha'm $b^2 - 4ad < 0$ ten'sizligi orınlanadı. Sonlıqtan,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + d &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + d = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(d - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ad - b^2}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

boladı.

$b^2 - 4ad < 0$ ten'sizligin esapqa alsaq, x tın' qa'legen ma'nisinde $ax^2 + bx + d$ ko'p ag'zalı menen a sanının' tan'bası birdey bolatug'ının ko'remiz. Demek, $a > 0$ bolg'an jag'dayda integral astındag'ı funksiya

$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + d}\right)$ tek haqıyqıy ma'nislerdi g'ana qabıllaydı.

2) $a < 0$ **bolg'an jag'day.** Matematikalıq analizde haqıyqıy ma'nisli funksiya u'yreniletug'ın bolg'anlıg'ı ushın $a < 0$ bolg'an jag'dayda $ax^2 + bx + d$ u'sh ag'zalısnın' haqıyqıy korenleri u'yreniliwi tiyis.

Meyli, $ax^2 + bx + d$ kvadrat u'sh ag'zalısnın' korenleri $\alpha, \beta \in R$ bolsın.

Onda, $ax^2 + bx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)$ ten'ligi orınlı boladı.

Integral astındag'ı an'latpada

$$\sqrt{ax^2 + bx + d} = (x - \alpha)z \quad (3)$$

tu'rindegi almasırıwın jasaymız. Bul ten'lik tin' eki ta'repin kvadratqa ko'terip,

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 z^2,$$

yamasa

$$a(x - \beta) = (x - \alpha)z^2,$$

tu'rine alıp kelemiz. Keyingi ten'likten,

$$x = \frac{\alpha z^2 - \alpha\beta}{z^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + d} = \left(\frac{\alpha z^2 - \alpha\beta}{z^2 - a} \right) z, \quad dx = \left(\frac{\alpha z^2 - \alpha\beta}{z^2 - a} \right)' dz$$

kelip shıg'adı. Bul tabılǵ'anlardı berilgen integraldag'ı orınlarına qoyıp,

$$\int \Re \left(\frac{\alpha z^2 - \alpha\beta}{z^2 - a}, \left(\frac{\alpha z^2 - \alpha\beta}{z^2 - a} - \alpha \right) z \right) \left(\frac{\alpha z^2 - \alpha\beta}{z^2 - a} \right)' dz$$

tu'rindegi ratsional funksiyanın' integralına iye bolamız. (3) ten'lik **Eylerdin' ekinshi ornına qoyıwı** dep ataladı.

II tiptegi integraldı ratsional funksiyanın' integralına keltiriw ushın Eylerdin' bul eki almasıwı jetkilikli, biraq analizde **Eylerdin' u'shinshi ornına qoyıwı** dep atalatug'ın

$$\sqrt{ax^2 + bx + d} = \sqrt{d} - xz \quad (4)$$

ten'ligi de u'yreniledi.

Bul almasıwı tek $d > 0$ bolg'an jag'dayda g'ana qollanıladı. (4) ten'liginin' eki ta'repin kvadratqa ko'tergennen son',

$$x = \frac{b + z\sqrt{d}}{z^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + d} = \frac{a\sqrt{d} + bz}{a - z^2}, \quad dx = \left(\frac{b + z\sqrt{d}}{z^2 - a} \right)' dz$$

tabıladı. Bul tabılǵ'anlardı berilgen integraldag'ı orınlarına qoysaq,

$$\int \Re \left(\frac{b + z\sqrt{d}}{z^2 - a}, \frac{a\sqrt{d} + bz}{a - z^2} \right) \left(\frac{b + z\sqrt{d}}{z^2 - a} \right)' dz$$

tu'rindegi ratsional funksiyanın' integralına iye bolamız.

M i s a l l a r.

1) $\int \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{1 + x^2 + x^4}} dx$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. Da'slep berilgen integraldı II tiptegi integralg'a alıp kelemiz. Onın' ushın

$$x^2 = t$$

formulası boyınsha o'zgeriwshini almastıramız. Onda integral

$$J = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)dt}{t\sqrt{t^2+3t+1}}$$

ko'rinishine keledi.

Endi Eylerdin' birinshi almastırıwın qollanamız, yag'nıy

$$\sqrt{t^2+3t+1} = z - t$$

dep alamız.

Bunnan:

$$3t+1 = z^2 - 2zt, \quad t = \frac{z^2-1}{3+2z}, \quad dt = \frac{2z^2+6z+2}{(3+2z)^2} dz,$$

$$\sqrt{t^2+3t+1} = z - t = \frac{z^2+3z+1}{3+2z}, \quad t-1 = \frac{z^2-2z-4}{3+2z}$$

kelip shıg'adı.

Bul tabılǵ'anlardı integralǵ'a alıp barıp qoysaq, to'mendegi na'tiyje kelip shıg'adı:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{z^2-2z-4}{3+2z} \cdot 2 \frac{z^2+3z+1}{(3+2z)^2}}{\frac{z^2-1}{3+2z} \cdot \frac{z^2+3z+1}{3+2z}} dz = \int \frac{z^2-2z-4}{(z^2-1)(3+2z)} dz = \\ &= \int \frac{(z^2-1)-(2z+3)}{(z^2-1)(3+2z)} dz = \int \frac{dz}{3+2z} - \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} \ln|3+2z| - \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(3+2z)(z+1)}{z-1} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(3+2t+2\sqrt{t^2+3t+1})(t+1+\sqrt{t^2+3t+1})}{t-1+\sqrt{t^2+3t+1}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(2t+3+2\sqrt{t^2+3t+1})(t+1+\sqrt{t^2+3t+1})(t-1-\sqrt{t^2+3t+1})}{t-1+\sqrt{t^2+3t+1}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(2t+3)(3t+2) + (5t+5)2\sqrt{t^2+3t+1} + 4(t^2+3t+1)}{5t} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2t^2+5t+2+(t+1)2\sqrt{t^2+3t+1}}{t} \right| + C = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\left((t+1) + \sqrt{t^2 + 3t + 1} \right)^2}{t} \right| + C = \ln \left| \frac{x^2 + 1 + \sqrt{1 + 3x^2 + x^4}}{x} \right| + C.$$

Bul misaldı Eylerdin' ekinshi ha'm u'shinshi almasırıwları ja'rdeminde de esaplawg'a boladı.

2) $\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}}$ integraln esaplan'.

Sheshiliwi. (3) ten'liginen paydalanıp,

$$\sqrt{x(1-x)} = xz$$

tu'rinde ornına qoyıwdı orınlaymız. Onda

$$x(1-x) = x^2 z^2, \quad 1-x = xz^2, \quad x = \frac{1}{z^2+1}$$

$$dx = -\frac{2zdx}{(z^2+1)^2}, \quad 2x-1 = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \sqrt{x-x^2} = \frac{z}{z^2+1}.$$

Demek,

$$\int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{x-x^2}} = 2 \int \frac{dz}{z^2-1} = \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{x}} + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}} \right| + C$$

boladı.

İntegrallardı Eylerdin' ornına qoyıw usıllarınan paydalanıp tabıwda bir qansha quramalı esaplaw jumısların alıp barıw talap etedi. Sonlıqtan Eylerdin' ornına qoyıwlarınan paydalanbastan esaplanıwı mu'mkin bolag'an integrallardıń bir neshe a'piwayı jag'dayların keltirip o'temiz.

İntegral astındag'ı an'latpanı bazı bir tu'rlendiriwler ja'rdeminde

$$\mathfrak{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + d}) dx = \left(\frac{G_1(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + d}} + G_2(x) \right) dx$$

ko'rinsine alıp keliw mumkin. Bunda $G_1(x)$, $G_2(x)$ ratsional bo'lshekler. $G_1(x)$ tı $P_n(x)$

ko'p ag'zalı ha'm a'piwayı bo'lsheklerdin' qosındısına jiklep, II-tiptegi integrallardı

a) $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + d}} dx, \quad (5)$

b) $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^r \sqrt{ax^2 + bx + d}}, \quad r \in N, \quad (6)$

$$v) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k \sqrt{ax^2 + bx + q}}, \quad k \in N, \quad p^2 + 4q < 0, \quad (7)$$

integrallarının' sızılıq kombinatsiyası tu'rinde an'latıwg'a boladı.

(7) integraldı esaplawda

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + d}} dx = Q(x) \sqrt{ax^2 + bx + d} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + d}} \quad (8)$$

formulasınan paydalang'an qolaylı boladı, bunda $P_n(x)$ da'rejesi n ge ten' bolg'an ko'p ag'zalı. (8) formulada $Q(x)$ da'rejesi $n-1$ den asıp ketpeytug'in ko'p ag'zalı, λ bazı bir san. (8) ten'liktin' eki ta'repin differentsiallap ha'm na'tiyjeni $2\sqrt{ax^2 + bx + d}$ g'a ko'beytkennen son',

$$2P_n(x) = 2Q'(x)(ax^2 + bx + d) + Q(x)(2ax + b) + 2\lambda \quad (9)$$

ten'ligine iye bolamız. (9) ten'ligindegi x tın' birdey da'rejeleri aldındag'ı koeffitsientlerdi ten'lestirip, kelip shıqqan algebralıq ten'lemelerdin' sızılıq sistemasınan λ sanı ha'm $Q(x)$ ko'p ag'zalısnın' koeffitsientlerin tabamız. (8) ten'liginin' on' ta'repindegi $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + d}}$ integralı kvadrat u'sh ag'zalıdan tolıq kvadratqa ajıratıw na'tiyjesinde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

tu'rindegi tablitsalıq integrallarg'a keledi.

(6) integralda $t = \frac{1}{x - \alpha}$ almasırwın jasaymız. Na'tiyjede (5) tu'rindegi

integralg'a kelemiz.

M i s a l l a r.

1) Eger $\int \frac{dx}{\sqrt{x - 2x^2}}$ integralın esaplaw talap etilse, koren astındag'ı an'latpanı

$$x - 2x^2 = -2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) = -2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right]$$

ko'rinisine keltirip alıp, $x - \frac{1}{4} = t$ dep o'zgeriwshini almastırsa, q

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x-2x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{16} - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin 4t + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin (4x-1) + C\end{aligned}$$

kelip shig'adi.

2) $\int \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$ integraln esaplan'.

Sheshiliwi. Joqaridag'ı (8) formuladan paydalanıp integraldı to'mendegi ko'riniste jazıp alamız:

$$\int \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Bul ten'liktin' eki ta'repin differentsiallap ha'm na'tiyjeni $2\sqrt{x^2 + 2x + 2}$ ge ko'beytirsek

$$x^3 - x + 1 = (2ax + b)(x^2 + 2x + 2) + (ax^2 + bx + c)(x + 1) + \lambda$$

ten'ligine iye bolamiz. Bul ten'lemedegi x-tin' birdey da'rejeleri aldındag'ı koeffitsientlerdi ten'lestiremiz. Sonda: $3a = 1$, $5a + 2b = 0$, $4a + 3b + c = -1$, $2b + c + \lambda = 1$ ten'lemeler sistemasına iye bolamiz. Bul ten'lemeler sistemasın sheship

$a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{6}$, $c = \frac{1}{6}$, $\lambda = \frac{5}{2}$ ma'nislerin alamız. Demek,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx &= \frac{1}{6} (2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \\ &= \frac{1}{6} (2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \\ &= \frac{1}{6} (2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C.\end{aligned}$$

(7) integraldı esaplaw. Eger sonday ω sanı tabılıp, qa'legen $x \in R$ ushın $ax^2 + bx + d = \omega(x^2 + px + q)$ ten'ligi orınlı, yag'niy $b = ap$, $d = aq$ bolsa, onda (7) integraldı

$$J_1 = \int \frac{(2x + p)dx}{(x^2 + px + q)^{k+\frac{1}{2}}} \text{ ha'm } J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k+\frac{1}{2}}}$$

integrallarının' sızıqlı kombinatsiyası arqalı an'latıw mumkin. J_1 integralı tablitsalıq integral. J_2 integralın Abeldin' ornına qoyıwı dep atalatug'ın

$$u = (\sqrt{x^2 + hx + q})' = \frac{2x + p}{2\sqrt{x^2 + px + q}} \quad (10)$$

tu'rlendiriwi ja'rdeminde ko'p ag'zalınnı' integralına keltiredi.

Eger $b \neq ap$ bolsa, onda

$$x = \frac{\alpha + \beta}{t + 1}, \quad (11)$$

bunda α, β sanları integral astındag'ı an'latpadag'ı kvadrat u'sh ag'zalıda t nın' koeffitsienti nolge ten' bolatug'ınday etip tan'lap alınadı, ornına qoyıw paydalanıladı. Bunday tu'rlendiriwde (7) integralı

$$\int \frac{P(t)dt}{(t^2 + \lambda)^k \sqrt{\mu t^2 + \nu}}, \quad (12)$$

bunda $P(t)$ da'rejesi $2k - 1$ ge ten' bolg'an ko'p ag'zalı, $\lambda > 0$. Eger $b = ap$, al $d \neq aq$ bolsa, onda (11) ornına qoyıwdın' ornına $t = x + \frac{p}{2}$ tu'rindegi almastırıwdı paydalanıw mu'mkin.

(21) integraldı esaplaw ushın durıs ratsional bo'lshekti a'piwayı bo'lshekler qosındısına jiklep, bul integraldı

$$J' = \int \frac{tdt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \nu}}, \quad J'' = \int \frac{dt}{(t^2 + \lambda)^m \sqrt{\mu t^2 + \nu}}, \quad m \in N$$

tu'rindegi integrallardınnı' sızıqlı kombinatsiyası arqalı an'latıw mumkin.

J' interalı $u^2 = \mu t^2 + \nu$ ornına qoyıwı ja'rdeminde esaplanadı, al J'' integralı bolsa $v = \frac{\mu t}{\sqrt{\mu t^2 + \nu}}$ Abel ornına qoyıwı ja'rdeminde esaplanadı.

M i s a l. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}}$ integraldı esaplan'.

Sheshiliwi. Bul integraldı integrallaw ushın Abel almastırıwınan paydalanamız, yag'nıy

$$v = \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$v^2(x^2 + 1) = x^2, \quad x^2 + 2 = \frac{2 - v^2}{1 - v^2},$$

$$v\sqrt{x^2 + 1} = x, \quad dv\sqrt{x^2 + 1} + v^2 dx = dx,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{dv}{1 - v^2}$$

qatnaslar payda boladı. Onda

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}} &= \int \frac{dv}{2 - v^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + v}{\sqrt{2} - v} + C = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2x^2 + 2} + x}{\sqrt{2x^2 + 2} - x} + C. \end{aligned}$$

b) $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + d}} dx$ tu'rindegi integrallar da kvadrat u'sh ag'zalıni tu'rlendiriw

arqalı esaplanadı.

M i s a l. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}}$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi.

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{xdx}{\sqrt{(x+1)^2 + \frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(z-1)dz}{\sqrt{z^2 + \frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int \frac{zdz}{\sqrt{z^2 + \frac{3}{2}}} - \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

bunda $x+1=z$ belgilewi paydalanıladı. Endi

$$\begin{aligned} \int \frac{zdz}{\sqrt{z^2 + \frac{3}{2}}} &= \sqrt{z^2 + \frac{3}{2}} + C = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{3}{2}} + C, \\ \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \frac{3}{2}}} &= \ln \left| z + \sqrt{z^2 + \frac{3}{2}} \right| + C = \ln \left| x+1 + \sqrt{(x+1)^2 + \frac{3}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

ten'liklerinen paydalanıp, natiyjede berilgen integral

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 2x + \frac{5}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + \frac{5}{2}} \right| + C$$

bolatug'inlig'ın ko'remiz.

Eger tabılg'an da'slepki funktsiyag'a turaqlı $-\frac{\ln \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ma'nisin qossağ,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 5}} = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 4x + 5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2}(x + 1) + \sqrt{2x^2 + 4x + 5} \right| + C$$

boladı.

$$v) \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \text{ ha'm } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

tu'rindegi integrallar to'mendegishe esaplanadı.

$$\begin{aligned} J &= \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \int \frac{x^2 \pm a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \\ &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \end{aligned}$$

boladı.

$J = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$ integralına bo'leklep integrallaw formulasın qollansaq, onda

$$u = x, \quad dv = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}; \quad du = dx, \quad v = \sqrt{x^2 \pm a^2},$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = x \sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = x \sqrt{x^2 \pm a^2} - J$$

boladı.

Demek,

$$J = x \sqrt{x^2 \pm a^2} - J \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

boladı.

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ integralda usıg'an uqsas esaplanadı.

g) $\int \sqrt{ax^2 + bx + d} dx$ tu'rindegi integrallardı kvadrat u'sh ag'zalını tu'rlendiriw arqalı esaplaw mumkin.

d) $\int (mx + n)\sqrt{ax^2 + bx + d} dx$ tu'rindegi integrallar kvadrat u'sh ag'zalını tu'rlendiriw ha'm taza o'zgeriwshini kirgiziw arqalı an'sat esaplanadı.

M i s a l. 1) $\int (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} dx$ integraln esaplan'.

Sheshiliwi. $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$. Eger $x-1 = z$ dep alıp, taza o'zgeriwshi z -ti kiritsek, $dx = dz$, $x = z+1$ bolıp,

$$\begin{aligned} \int (x+1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} dx &= \int (z+2)\sqrt{z^2 + 2} dz = \int z\sqrt{z^2 + 2} dz + 2 \int \sqrt{z^2 + 2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \int (z^2 + 2)^{1/2} d(z^2 + 2) + 2 \left(\frac{z\sqrt{z^2 + 2}}{2} + \ln|z + \sqrt{z^2 + 2}| \right) + C = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(z^2 + 2)^3} + z\sqrt{z^2 + 2} + 2 \ln|z + \sqrt{z^2 + 2}| + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 2x + 3)^3} + \\ &+ (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2 \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}| + C = \\ &= \frac{x^2 + x}{3} \sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2 \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}| + C \end{aligned}$$

boladı.

2) $\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx$ integraldı esaplan'.

Bul integral to'mendegishe esaplanadı:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 - 2x + 2} dx &= \int x\sqrt{(x-1)^2 + 1} dx = \int (x-1)\sqrt{(x-1)^2 + 1} dx + \int \sqrt{(x-1)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int ((x-1)+1)^{\frac{1}{2}} d((x-1)^2 + 1) + \int \sqrt{(x-1)^2 + 1} d(x-1) = \frac{1}{2} \frac{((x-1)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \\ &+ \frac{x-1}{2} \sqrt{(x-1)^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln|(x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 1}| + C = \frac{1}{3} (x^2 - 2x + 2)^{\frac{3}{2}} + \\ &+ \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2} \ln|(x-1) + \sqrt{x^2 - 2x + 2}| + C \end{aligned}$$

e) n -natural san bolg'an jag'dayda $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 + a^2}}$ integraln esaplag'anda

o'zgeriwshini $x = \frac{1}{t}$ tu'rinde almasırg'an qolaylı boladı.

M i s a l. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ integraldı esaplan'.

Sheshiliwi. O'zgeriwshini $x = \frac{1}{t}$ dep almastırsa, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ bolıp,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arccos t + C = \arccos \frac{1}{x} + C$$

boladı.

III. $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, bunda $n, m, p \in Q$, $a, b \in R$, tipindegi integraldı esaplaw.

$a = 0$ yamasa $b = 0$ bolsa bul integral tablitsalıq integral boladı. Bizler $abnp \neq 0$ bolatug'ın jag'daydı qarasıtıramız. İntegral astındag'ı $x^m (a + bx^n)^p dx$ an'latpasına **differentialsalıq binom** dep ataladı. Differentialsalıq binomnın' integralı to'mendegi u'sh jag'dayda g'ana elementar funksiya arqalı an'latıladı.

1. p pu'tin san bolg'an jag'day. Eger p menen birge n ha'm m sanları da pu'tin sanlar bolıp kelse, onda integral astındag'ı funksiya ratsional funksiya boladı. Meyli $p \in Z$, n ha'm m bo'lshek sanlar bolsın, onda n ha'm m bo'lsheklerinin' ulıwma bo'limin q arqalı belgilep, berilgen integraldı $x = t^q$ ornına qoyıwınan paydalanıp ratsional funksiyanın' integralına alıp kelemiz, yag'nıy

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = q \int t^{q(m+1)-1} (a + bt^{nq})^p dt,$$

bunda $qm, qn, p, q \in Z$ bolg'anı ushın keyngi ten'liktin' on' ta'repi ratsional funksiyanın' integralı boladı ha'm onı esaplaw usılları bizge belgili.

2. $\frac{m+1}{n} \in Z$ bolg'an jag'day. Meyli $p = \frac{r}{s}$, bunda $r \in Z, s \in N$, tu'rindegi

bo'lshek bolsın. Bul jag'dayda

$$a + bx^n = z^s$$

formulasına sa'ykes x o'zgeriwshisinin' ornına taza z o'zgeriwshisin kiritemiz. Onda,

$$x = \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} (z^s - a)^{\frac{1}{n}}, \quad x^m = \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} (z^s - a)^{\frac{m}{n}}, \quad dx = \frac{sz^{s-1}}{nb^{\frac{1}{n}}} (z^s - a)^{\frac{1}{n}-1} dz, \quad (a + bx^n)^p = z^r b$$

oladı. Demek,

$$\int x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} dx = \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int z^{r+s-1} (z^s - a)^{\frac{m+1}{n}-1} dz$$

tu'rine keledi. Ten'ликтin' on' ta'repindegi integralda $\frac{m+1}{n}$ pu'tin san bolg'anı ushın integral astındag'ı funksiya ratsional funksiya boladı.

Demek, eger $\frac{m+1}{n}$ pu'tin san bolsa, differentsiallıq binom

$$a + bx^n = z^s$$

almastırıwı ja'rdeminde integrallanadı.

3. $\frac{m+1}{n} + p \in Z$ **bolg'an jag'day.** Meyli $p = \frac{r}{s}$, bunda $r \in Z, s \in N$, ha'm

$\frac{m+1}{n}$ bo'lshek sanlar bolsın. Bul jag'dayda o'zgeriwshini almastırıw ushın

$$a + bx^n = z^s x^n$$

formulası qollanıladı. Sonda,

$$x = a^{\frac{1}{n}} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}}, \quad dx = -\frac{sa^{\frac{1}{n}}}{n} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} z^{s-1} dz, \quad a + bx^n = az^s (z^s - b)^{-1}$$

boladı. Demek,

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = -\frac{sa^{\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}}}{n} \int (z^s - b)^{-\left(\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} + 1\right)} z^{r+s-1} dz.$$

Bunnan $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ qosındı pu'tin san bolsa g'ana berilgen integraldı ratsional funksiyanın' integralına keltiriwge boladı degen na'tiyjege kelemiz.

Demek, eger $\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}$ pu'tin san bolsa, differentsiallıq binomnın' integralı

$a + bx^n = z^s x^n$ almastırıwı ja'rdeminde esaplanadı.

Joqarida ko'rip o'tken u'sh jag'day Nyuton da'wirinde de belgili bolg'an. Differentsialliq binomnin' qarastirilg'an u'sh jag'daydan basqa jag'daylarda elementar funktsiyalar orqali an'latilmaytug'inlig'in XIX a'sirdin' ortalarina kelip belgili rus matematigi P.L.Chebyshev da'lillegen.

Chebyshevtin' teoremasi. $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ tu'rindegisi aniq emes integral $p, \frac{m+1}{n}, \frac{m+1}{n} + p$ sanlarinin' en' bolmag'anda birewi pu'tin san bolg'anda g'ana ratsional funktsiyanin' integralina keledi, demek, algebralik funktsiya, logarifmlik funktsiya menen trigonometriyalik funktsiya orqali an'latiladi. Eger bul sanlardin' birde-birewi pu'tin san bolmasa, onda differentsialliq binom qanday usil qollanilsa da integrallanbaydi.

Misal. 1) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ integralni esaplan'.

Sheshiliwi. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$. Bunda $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$

ha'm $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$. Demek, ekinshi jag'day boyinsha belgilew kiritemiz,

yag'niy:

$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}, \quad x = (t^3 - 1)^4, \quad dx = 12 t^2 (t^3 - 1)^3 dt.$$

Bunnan

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \frac{3}{7} t^4 (4t^3 - 7) + C$$

boladi.

2) $\int \frac{dx}{x^2 (2 + x^3)^{\frac{5}{3}}}$ integralni esaplan'.

Sheshiliwi. Bunda $m = -2, n = 3, p = \frac{r}{s} = -\frac{5}{3}$ ha'm $\frac{m+1}{n} = -\frac{1}{3},$

$$\frac{m+1}{n} + p = -2.$$

Demek, joqarıda keltirilgen 3-jag'day orınlı. Sonlıqtan $2 + x^3 = z^3 x^3$ tu'rindegi ornına qoyıwdı qollanamız.

$$\text{Sonda: } x = 2^{\frac{1}{3}}(z^3 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad dx = -2^{\frac{1}{3}}(z^3 - 1)^{\frac{4}{3}} z^2 dz, \quad 2 + x^3 = 2z^3(z^3 - 1)^{-1}$$

boladı. Demek,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}} &= -\frac{1}{4} \int \frac{z^3-1}{z^3} dz = -\frac{2z^3+1}{8z^3} + C = \\ &= -\frac{2 \left[\frac{(2+x^3)^{\frac{1}{3}}}{x} \right]^3 + 1}{8 \left[\frac{(2+x^3)^{\frac{1}{3}}}{x} \right]^2} + C = -\frac{4+3x^3}{8x(2+x^3)^{\frac{3}{2}}} + C \end{aligned}$$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. İntegral astındag'ı an'latpa ushın

$$a = b = 1, \quad m = 0, \quad n = 4, \quad p = -\frac{1}{4} \text{ bolıp,}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \text{ boladı.}$$

Demek, $1 + x^{-4} = t^4$ almastırıwın jasaymız. Na'tiyjede:

$$x = (t^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{(t^4 - 1)^{\frac{1}{4}}}{t},$$

$$dx = -t^3(t^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dt.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = -\frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{t^2 - 1} + \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2} \arctg t + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 4}{\sqrt[4]{1+x^4} - 4} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

Shıng'ıwlar

To'mendegi berilgen integrallardı esaplan'

$$1. \int \frac{3\sqrt{x}dx}{2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$2. \int x\sqrt[3]{x+2}dx.$$

$$3. \int \frac{x^{\frac{1}{7}} + x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{8}{7}} + x^{\frac{15}{4}}} dx.$$

$$4. \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$6. \int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}.$$

$$7. \int \frac{x^2 dx}{(4x+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$8. \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}.$$

$$11. \int \frac{xdx}{(2+3x-2x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$12. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$13. \int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} dx.$$

$$14. \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}.$$

$$15. \int \frac{xdx}{(x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}}.$$

$$16. \int \frac{x - \sqrt{1+x}}{1 + \sqrt[4]{1+x}} dx.$$

$$17. \int x^3 \sqrt{1+x} dx.$$

$$18. \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{3+2x^2}}.$$

$$19. \int \frac{x^2 dx}{(2+3x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$20. \int x(x+1)^{\frac{3}{2}} dx.$$

$$21. \int \frac{5dx}{x^2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$23. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx.$$

$$24. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx.$$

$$25. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$26. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$27. \int \sqrt{x^2-2x-1} dx.$$

$$28. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2-x+1}}.$$

$$29. \int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx.$$

$$30. \int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx.$$

9. Transtsendent funktsiyalardı integrallaw

Ko'birek ushırasatug'ın integrallardıń bir neshe tipin qarastıramız. Olar:

A) Trigonometriyalıq an'latpalardı integrallaw

I. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ tu'rindegi integrallar. Bunda $R(\sin x, \cos x)$ funktsiyası $\sin x$ ha'm $\cos x$ qa baylanıslı ratsional funktsiya. Bul integraldı $t = tg \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi; \pi)$ tu'rindegi ornına qoyıw ja'rdeminde ratsional bo'lshektin' integralına keltiriw mu'mkin. Sebebi,

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Demek, u'yrenilip otırg'an integral ushın,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2dt}{1 + t^2}$$

ten'ligi orınlı boladı. Ten'ликтin' on' ta'repindegi integral t o'zgeriwshisinin' ratsional funktsiyasının' integralı ha'm bunday integrallardı esaplaw usılları bizge belgili. Integraldı esaplap bolg'annan son' t dan x qa qayta o'tiledi.

Joqarıda ko'rsetilgen $t = tg \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi; \pi)$ ornına qoyıwı universal tu'rlendiriw dep ataladı. Universal tu'rlendiriwden paydalanıwda quramalı esaplawlar alıp barıwıg'a tuwra keledi. Sonlıqtan bul tu'rlendiriw integraldı esaplawdın' basqa usıllarınan paydalanıw mu'mkin bolmag'an jag'daylarda qollanıladı.

Eger integral astındag'ı funktsiya $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ sha'rtin qanaatlandıratug'ın bolsa, onda $t = \cos x$, $x \in (0, \pi)$ ornına qoyıwın,

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ sha'rtin qanaatlandırsa $t = \sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ornına qoyıwın, al eger $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ sha'rti orınlı bolsa, onda

$t = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ yamasa $t = \cos 2x$ ornına qoyıwınan paydalang'an qolaylı boladı.

Mısalılar.

1) $I = \int \frac{dx}{1+a \cos x}$ a) $0 < a < 1$; b) $a > 1$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ almastırıwı na'tiyjesinde integral

$$I = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{1+a \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2 dt}{1+a+(1-a)t^2}$$

ko'rinishine keledi.

$1-a$ an'latpanın' belgisi a g'a baylanışlı bolıp, a) jag'day ushın, yag'nıy $0 < a < 1$ da on', b) jag'dayda, yag'nıy $a > 1$ da teris boladı. Demek, $0 < a < 1$ bolg'anda

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{1-a} \int \frac{dt}{\frac{1+a}{1-a} + t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} t + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

boladı, $a > 1$ bolg'anda

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{1-a} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1+a}{a-1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1+a}{a-1}} - t}{\sqrt{\frac{1+a}{a-1}} + t} \right| + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln \left| \frac{1+a+t^2(a-1)-2t\sqrt{a^2-1}}{1+a-t^2(a-1)} \right| + C \end{aligned}$$

boladı.

2) $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x + \cos x - 1} dx$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi.

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{ctgx}}{\sin x + \cos x - 1} dx &= \int \frac{\frac{\cos x}{\sin x} dx}{\sin x + \cos x - 1} = \int \frac{\frac{1-t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} = \\ &= \int \frac{(1+t)dt}{2t^2} = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \quad \int \frac{dx}{\cos x (\sin x - 3)} &= \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin^2 x)(\sin x - 3)} = \left| \begin{array}{l} \sin x = z \\ \cos x dx = dz \end{array} \right| = \int \frac{dz}{(1 - z^2)(z - 3)} = \\ &= \int \left(\frac{1}{2(1 - z)} - \frac{1}{2(1 + z)} + \frac{1}{z - 3} \right) dz = -\frac{1}{2} \ln|1 - \sin x| - \frac{1}{2} \ln|1 + \sin x| + \\ &\quad + \ln|\sin x - 3| + \ln C = \ln \left| \frac{C(\sin x - 3)}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \right|.\end{aligned}$$

II. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ tu'rindegi integrallar. Bul ko'rinishdagi integrallar to'mendegi jag'daylarda an'sat integrallanadi:

1) Eger $m = 2k + 1$, $k = 1, 2, \dots$ bolsa, o'zgeriwshini $t = \cos x$ formulasina sa'ykes almasirsaq, onda $dt = -\sin x dx$ boladi ha'm

$$\int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx = -\int (1 - t^2)^k t^n dt$$

ko'rinishine keledi. Endi ten'liktin' on' ta'repi an'sat integrallanadi.

M i s a l. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ integralin esaplan'.

$$\begin{aligned}\text{Sheshiliwi.} \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx &= -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^3} dt = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^3} dt = \\ &= -\frac{t^2}{2} + 2 \ln|t| + \frac{1}{2t^2} + C = -\frac{\cos^2 x}{2} + 2 \ln|\cos x| + \frac{1}{2 \cos^2 x} + C.\end{aligned}$$

2) Eger $n = 2k + 1$, $k = 1, 2, \dots$ bolsa, o'zgeriwshi x ni $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ formulası ja'rdeminde almasırıw berilgen integraldı

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \int (1 - t^2)^k t^m dt$$

ko'rinishine alıp keledi, al bul keyingi kelip shıqqan integral an'sat esaplanadi.

M i s a l. $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$ integralin esaplan'.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx &= \int t^{\frac{1}{2}} (1-t^2) dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + C = \\ &= \sqrt{\sin x} \left(\frac{2}{3} \sin x - \frac{2}{7} \sin^2 x \right) + C.\end{aligned}$$

3) Eger $m+n=0$ ha'm $m, n \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ bolsa, onda berilgen integral

$\int tg^m x dx$ ko'rinisiga, al $n > 0$ bolg'an jag'dayda $\int ctg^n x dx$ ko'rinisiga keledi.

Bunday jag'dayda $\int tg^m x dx$ integralında o'zgeriwshi $tgx = t$ formulasına sa'ykes

almastırıladi ha'm $dt = \sec^2 x dx$, $dx = \frac{dt}{\sec^2 x} = \frac{dt}{tg^2 x + 1} = \frac{dt}{t^2 + 1}$ boladi.

Bunnan $\int tg^m x dx = \int \frac{t^m}{t^2 + 1} dt$ bolatug'inlig'in ko'riw qiyin emes.

Al $\int ctg^m x dx$ integralı ushın x tı $t = ctgx$ formulası ja'rdeminde almasteradi.

Na'tiyjede $dt = -\operatorname{cosec}^2 x dx$, $dx = -\frac{dt}{t^2 + 1}$ boladi da,

$$\int ctg^m x dx = -\int \frac{t^n}{t^2 + 1} dt$$

ten'ligi kelip shıg'adı.

Solay etip, eki jag'dayda da $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ integralı ratsional funksiyanın' integralına keledi.

M i s a l.

$$\begin{aligned}\int tg^5 x dx &= \int \frac{t^5}{t^2 + 1} dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C = \frac{1}{4} tg^4 x - \frac{1}{2} tg^2 x + \frac{1}{2} \ln(1 + tg^2 x) + C.\end{aligned}$$

4) $m+n=-2k$, $k \in \mathbb{N}$ yag'nıy teris jup san bolsa, onda $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ integralı $\int tg^m x \sec^{2k} x dx$ yamasa $\int ctg^m x \operatorname{cosec}^{2k} x dx$ tu'rine keledi.

Birinshi tu'rdegi integralda o'zgeriwshini $tgx = t$ formulası boyınsha almasterıladi da,

$$\int tg^m x \sec^{2k} x dx = \int tg^m x \sec^{2k-2} \sec^2 x dx = \int t^m (1+t^2)^{k-1} dt$$

boladi.

Al ekinshi tu'rdegi integralda o'zgeriwshini $ctgx = t$ formulası arqalı almasırsaq, onda $\int ctg^m x \sec^{2k} x dx = -\int t^n (1+t^2)^{k-1} dt$ boladi.

M i s a l l a r.

$$1) \int tg^2 x \sec^6 x dx = \left| \begin{array}{l} tg x = t \\ \sec^2 x dx = dt \\ \sec^2 x = 1 + tg^2 x \end{array} \right| = \int t^2 (1+t^2) dt = \frac{1}{7} t^7 + \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C =$$

$$= \frac{1}{3} tg^3 x + \frac{2}{5} tg^5 x + \frac{1}{7} tg^7 x + C$$

$$2) \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x \sec^2 x dx = \left| \begin{array}{l} tg x = t \\ \sec^2 x dx = dt \end{array} \right| = \int (1+t^2) dt =$$

$$= tg x + \frac{1}{3} tg^3 x + C.$$

5) Eger $m = -(2k+1)$, $k \in N$, yag'niy teris pu'tin taq san, al $n=0$ bolsa, onda (44) almasırw formulasın qollanamız,

$$\int \frac{dx}{\sin^{2k+1} x} = \frac{1}{2^{2k}} \int \frac{(1+t^2)^{2k}}{t^{2k+1}} dt$$

ko'rinishidegi an'sat integrallanatu'g'ın integral'g'a keledi.

M i s a l.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^5 x} &= \left| \begin{array}{l} x = z - \frac{\pi}{2} \\ dx = dz \\ \cos x = \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \right) = \sin z \end{array} \right| = \int \frac{dz}{\sin^5 z} = \left| \begin{array}{l} t = tg \frac{z}{2} \\ dz = \frac{2 dt}{1+t^2} \\ \sin z = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{(1+t^2)^4}{t^5} dt = \frac{1}{64} tg^4 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{8} tg^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \\ &+ \frac{3}{8} \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{8} tg^{-2} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{64} tg^{-4} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C. \end{aligned}$$

6) Eger $n = -(2k + 1), k \in N$ yag'niy teris pu'tin taq san, al $m = 0$ bolsa,

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ integral $\int \frac{dx}{\cos^{2k+1} x}$ ko'rinishine keledi. Bul integraldı $\int \operatorname{ctg}^n x dx$

ko'rinske keltiriw ushın $x = t - \frac{\pi}{2}$ dep belgilew jetkilikli.

Onda:

$$dx = dt, \cos x = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$$

boladı.

Eger $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ ko'rinishindegi integrallar ushın 1) - 6) jag'daylardin' hesh biri de orinlanbasa, onda bul integrallar qıyınraq jollar menen esaplanadı.

M i s a l. $J = \int \cos^4 x dx$ integralın esaplan'.

Sheshiliwi. Berilgen integral 1) – 6) jag'daylardin' birewin de qanaatlantırmaydı.

Eger bul integraldı esaplaw ushın $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ almasırwın qollansaq, integral to'mendegi ko'rinske keledi:

$$J = \int \frac{2(1 - t^2)^4}{(1 + t^2)^5} dt.$$

Integral astındag'ı funksiyanı a'piwayı bo'lsheklerge jiklew ushın 10 koeffitsient tabıw, al integraldı esaplaw ushın III tu'rdegi bir integraldı, IV tu'rdegi to'rt integraldı esaplaw kerek. Al, eger

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

formulasın paydalansaq, berilgen integral a'piwayı esaplanadı.

Haqıyqatında da,

$$\begin{aligned} J &= \int \cos^4 x dx = \int \cos^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx = \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

$$\text{III. } \int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx \quad \text{ko'rinisidegi}$$

integrallar (m ha'm n - haqiqiy sanlar). Integral astidagi funksiyalar

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)]$$

formulalarini orqali sinus ha'm kosinusning birinchi darajelerining qosindisi ko'risine keltirilip integrallanadi.

M i s a l.

$$\int \left(\cos \frac{x}{2} + \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{5}{2}x + \cos \frac{3}{2}x \right) dx = \frac{1}{5} \sin \frac{5}{2}x + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}x + C.$$

$$\text{IV. } \int f(x) e^{ax} dx, \int f(x) \cos \beta x dx, \int f(x) \sin \beta x dx,$$

ko'rinisidegi integrallar. (Bunda $f(x)$ -ko'p ag'zali, a ha'm β - haqiqiy sanlar)

Bul integrallar bo'leklep integrallaw usuli menen integrallanadi. Bunun' ushin $u = f(x)$ dep aliw kerek.

$$\text{V. } \int e^{ax} \cos bx dx, \int e^{ax} \sin bx dx,$$

ko'rinisidegi integrallar.

$$\begin{aligned} \text{Eger} \quad (e^{ax} \cos bx)' &= e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx), \\ (e^{ax} \sin bx)' &= e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) \end{aligned}$$

bolsa, onda

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) e^{ax} \cos bx &= b(e^{ax} \sin bx)' + a(e^{ax} \cos bx)', \\ (a^2 + b^2) e^{ax} \sin bx &= a(e^{ax} \sin bx)' - b(e^{ax} \cos bx)' \end{aligned}$$

bolatug'inin esapqa alsaq, tenglikning eki jag'in da $a^2 + b^2$ sanina bo'lip, odan keyin integrallasaq, to'mendegi natijje kelip shig'adi:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C, \\ \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}$$

$$\text{VI. } \int x^n e^{ax} \cos bxdx, \int x^n e^{ax} \sin bxdx,$$

tu'rindegi integrallar. (Bunda: n - natural san, α ha'm β - haqiqiy sanlar.)

Bul integrallardi tabiw ushin bo'lekkep integrallaw usuli qollaniladi. Birinshi integralda

$$u = x^n, \quad dv = e^{ax} \cos bxdx,$$

ekinshi integralda

$$u = x^n, \quad dv = e^{ax} \sin bxdx,$$

dep alinadi.

Bunun' na'tiyjesinde x -tin' da'reje ko'rsetkishi birme-bir kemeyip barip, aqirinda integrallar V tipke keledi.

VII. $\int x^m (\ln x)^n dx$ tu'rindegi integrallar. (Bunda: n - natural san, m - haqiqiy san.)

Bul tiptegi integrallardi integrallawda o'zgeriwshi x -ti

$$t = \ln x$$

formulasi boyinsha almashtiriladi.

Sonda:

$$x = e^t, \quad dx = e^t dt$$

boladi da, integral to'mendegi tu'rge keledi:

$$\int x^m (\ln x)^n dx = \int t^n e^{(m+1)t} dt.$$

Demek, VII-tu'rdegi integral IV-tu'rdegi integralg'a keledi.

M i s a l.

$$\begin{aligned} \int x^3 (\ln x)^2 dx &= \left| \begin{array}{l} \ln x = z \\ x = e^z \\ dx = e^z dz \end{array} \right| = \int e^{4z} z^2 dz = \left| \begin{array}{l} u = z^2, \quad du = 2z dz \\ dv = e^{4z} dz, \quad v = \frac{1}{4} e^{4z} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{4} z^2 e^{4z} - \frac{1}{2} \int z e^{4z} dz = \frac{1}{4} z^2 e^{4z} - \frac{1}{8} z e^{4z} + \frac{1}{8} \int e^{4z} dz = \\ &= \frac{1}{4} z^2 e^{4z} - \frac{1}{8} z e^{4z} + \frac{1}{32} e^{4z} + C = \frac{x^4}{4} \left[(\ln x)^2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right] + C. \end{aligned}$$

VIII. $\int x^m (\arcsin x)^n dx, \int x^m (\arccos x)^n dx$ tu'rindegi integrallar. (bunda m -natural san yamasa nol, n -natural san). Birinshi integraldı esaplaw ushın $t = \arcsin x$ formulasın, al, ekinshi integral ushın $t = \arccos x$ formulasın alıw kerek. Sonda berilgen integrallar sa'ykes

$$\int t^n \sin^m t \cos t dt$$

ha'm

$$-\int t^n \cos^m t \sin t dt$$

integrallarına keledi. Bul integrallar bo'leklep integrallaw usılı menen esaplanadı.

M i s a l.

$$\begin{aligned} \int x \arccos x dx &= \left| \begin{array}{l} \arccos x = t \\ dx = -\sin t dt \end{array} \right| = -\int t \sin t \cos t dt = \left| \begin{array}{l} u = t \\ dv = \sin t \cos t dt \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{4} t \cos 2t - \frac{1}{4} \int \cos 2t dt = \frac{1}{4} t \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t + C = \\ &= \frac{1}{4} \arccos x (\cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x)) - \frac{1}{4} \sin(\arccos x) \cdot \cos(\arccos x) + C = \\ &= \frac{1}{4} (2x^2 - 1) \arccos x - \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Shınıg'ıwlar

To'mendegi berilgen integrallardı esaplan'

$$1. \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

$$2. \int \frac{tg x \cos^6 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$3. \int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$$5. \int \frac{1+tg^2 x}{1-tg^2 x} dx.$$

$$6. \int \frac{1-ctgx}{1+ctgx} dx.$$

$$7. \int \cos \frac{3}{4} x \sin \frac{1}{4} x dx.$$

$$8. \int \sin^3 x dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$10. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$$

11. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}.$
12. $\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}.$
13. $\int \frac{dx}{(1 + a \cos x)^2}, \quad 0 < a < 1.$
14. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x}.$
15. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}.$
16. $\int \sqrt{1 + \sin x} dx.$
17. $\int \frac{e^x dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}.$
18. $\int \operatorname{sh}^3 x dx.$
19. $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$
20. $\int \frac{x dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$
21. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$
22. $\int \frac{1 - \cos(x - a)}{1 - \cos(x + a)} dx$
23. $\int \cos^6 x \sin^2 x dx$
24. $\int \frac{dx}{7 \cos x - 4 \sin x + 8}$
25. $\int \operatorname{cth}^5 x dx$
26. $\int \frac{e^{2x} dx}{\operatorname{sh}^4 x}$
27. $\int \frac{dx}{\sin^n x}$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$
29. $\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x}$
30. $\int x^3 \ln(x^2 + 1) dx$

Paydalanilg'an a'debiyatlar:

1. Azlarov T.A., Mansurov X.T., Matematik analiz, 1-qism, – T.: “O’qituvchi”, 1994.
2. Abduxamedov A.U. ha’m t.b. Algebra ha’m matematikalıq analiz tiykarları. – No’kis: «Bilim», 2005.
3. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М. “Наука” 1990.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Т.1. – М.: Наука, 1979.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1981.
6. Sadullaev A., Mansurov X.T., Xudoyberganov G., Varisov A.K., Gulomov R. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to’plami. 1-qism. – T.: “O’qituvchi”, 1993.
7. Тер-Крикоров М., Шабунин И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – М.: Наука, 1969.

M A Z M U N I

So'z basi	3
-----------------	---

ANIQ EMES İNTEGRAL

1. Funktsiyanı tuvındısı boyınsha tabıw.....	4
2. Anıq emes integraldın' tiykarg'ı qa'siyetleri.....	7
3. İntegrallaw usılları.....	9
3.1. O'zgeriwshilerdi almasırw usılı.....	9
3.2. Ornına qoyıw metodu.....	11
3.3. Bo'leklep integrallaw usılı.....	14
4. Anıq emes integrallardın' tiykarg'ı tablitsası.....	17
5. Ratsional funktsiyalardı a'piwayı bo'lshekler qosındısı tu'rinde an'latıw. Ko'p ag'zalını ko'beytiwshilerge jiklew.....	19
5.1. Ko'p ag'zalının' korenleri.....	19
5.2. Koeffitsientleri haqıyqıy sanlar bolg'an ko'p ag'zalılar.....	20
5.3. Koeffitsientleri haqıyqıy sanlar bolg'an ko'p ag'zalılardı ko'beytiwshilerge jiklew.....	22
5.4. Durıs ratsional bo'lshekler.....	23
6. Ratsional funktsiyalardı integrallaw.....	30
7. Ostrogradskiy usılı.....	40
8. Algebralıq irratsional funktsiyalardı integrallaw.....	45
9. Transtsendent funktsiyalardı integrallaw.....	63
Paydalanılğ'an a'debiyatlar.....	73

Du'ziwshiler: Q.Elg'ondiev, S.Erisbaev

MATEMATİKALIQ ANALİZ
(anıq emes integral)
oqıw-metodikalıq qollanba

Oqıw-metodikalıq qollanba A`jiniyaz atındag`ı No`kis ma`mleketlik pedagogikalıq institutınım` İlimiy-metodikalıq Ken`esi qararı (4-iyul 2011-jılğ`ı №11) menen baspag`a usınılg`an.

Tex.redaktor U.B. Bahıмова

Korrektor K. Kadirniyazova

Operator N. Nısanbaev

A`jiniyaz atındag`ı NMPI redaktsiya-baspa bo`limi

A`jiniyaz atındag`ı NMPI kishi baspaxanasında basılg`an. 2011-j.

Buyırtpa №0106. Nusqası 100 dana. Formatı 60x84. Ko`lemi 4,6 b.t.

742005, No`kis qalası, A. Dosnazarov ko`shesi-104. Reestr № 11-0927

