МИНИСТЕРСТВО ПО РАЗВИТИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И КОММУНИКАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

КАРШИНСКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

РЕФЕРАТ

На тему: *Дифференциальные операции второго порядка.*

Выполнил: *студент 1 курса Бердиев С.*

Руководитель: *страший преподаватель* Л.Х.*Хужаев.*

Карши-2016

Содержание

Введение

Вычисление градиента, дивергенции и ротора связано с однократным дифференцированием некоторых функций, поэтому эти операции называют дифференциальными операциями первого порядка.

Для скалярного поля $U(M)$ был введен один оператор первого порядка

$$gradU = \nabla U.$$

Для векторного поля введены два оператора первого порядка

$$div\mathbf{F} = \nabla\mathbf{F}, \quad rot\mathbf{F} = [\nabla\mathbf{F}].$$

Повторное применение оператора "набла" приводит к необходимости вычисления вторых производных. Т.о. мы приходим к дифференциальным операторам второго порядка.

Имеет смысл рассматривать пять дифференциальных операций второго порядка:

) $grad(div\mathbf{F}) \equiv \nabla(\nabla\mathbf{F})$;
) $div(gradU) \equiv \nabla(\nabla U)$;
) $div(rot\mathbf{F}) \equiv \nabla[\nabla\mathbf{F}]$;
) $rot(gradU) \equiv [\nabla(\nabla U)]$;
) $rot(rot\mathbf{F}) \equiv [\nabla[\nabla\mathbf{F}]]$.

Будем считать, что необходимые условия дифференцируемости, непрерывности и пр. выполнены. Более детально эти вопросы обсуждаются в расширенных курсах высшей математики.

1. Оператор Лапласа

Рассмотрим скалярное поле $U = U(\mathbf{r})$. Существует единственный дифференциальный оператор, действующий на это поле

$$gradU = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

Полученный вектор указывает величину и направление максимального возрастания функции $U = U(\mathbf{r})$.

Вычислим в явном виде $div(gradU)$. Используя оператор "набла", имеем

$$div(gradU) \equiv \nabla(\nabla U) = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Убедимся в справедливости этого выражения путем непосредственного дифференцирования:

$$div(gradU) = div\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Выражение, естественно, получилось таким же.

Такое выражение часто встречается в различных задачах математической физики и для его записи введен специальный дифференциальный оператор второго порядка:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Этот оператор называют оператором Лапласа или лапласианом. Формально можно записать

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Итак, дивергенция градиента скалярной функции равна лапласиану этой функции. Оператор Лапласа широко применяется в различных задачах. Так, например, расчет температурного поля сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

с соответствующими граничными условиями.

Градиент дивергенции.

Рассмотрим операцию $grad(div\mathbf{F})$. В прямоугольной декартовой системе координат имеем

$$grad(div\mathbf{F}) = grad\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\mathbf{i}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\mathbf{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z}\right)\mathbf{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

Полученное выражение является вектором, компонентами которого являются комбинации частных производных второго порядка.

Отметим, что некорректное использование оператора "набла" может привести к неверным результатам:

$$grad(div\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\mathbf{F}) = \nabla^2\mathbf{F} = \Delta\mathbf{F}.$$

В этой формуле, которая отличается от полученной в начале параграфа, допущена ошибка в преобразовании

$$\nabla(\nabla \mathbf{F}) = \nabla^2 \mathbf{F}.$$

Три вектора, которые здесь используются, не образуют смешанное произведение векторов (в смешанном произведении $\mathbf{abc} = [\mathbf{ab}]\mathbf{c} = \mathbf{a}[\mathbf{bc}]$). Заменять действие двух операторов "набла" одним оператором Д недопустимо, т.к. их последовательные действия в отношении вектора **F** различаются.

Следует иметь в виду, что операции с оператором ∇ требуют внимания и аккуратности, поэтому соответствующие преобразования следует сопровождать непосредственными вычислениями, выполняя дифференцирование по координатам.

3. Дивергенция градиента и ротора

Дивергенцию градиента $div(gradU)$ мы определили в §1

$$div(gradU) \equiv \nabla(\nabla U) = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U,$$

где был введен оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Найдем дивергенцию ротора с помощью оператора "набла":

$$div(rot\mathbf{F}) \equiv \nabla[\nabla \mathbf{F}] = [\nabla\nabla]\mathbf{F} = 0.$$

Нетрудно убедиться в справедливости этого равенства и непосредственным дифференцированием. Предлагается сделать это самостоятельно.

В выражении $\nabla[\nabla \mathbf{F}] = [\nabla\nabla]\mathbf{F}$ рассматривается смешанное произведение трех векторов ∇, ∇ и $\mathbf{F}$. Отметим отличие этого случая от выражения

$$grad(div\mathbf{F}) = \nabla(\nabla \mathbf{F}),$$

которое не является смешанным произведением (выражение $(\nabla\mathbf{F})$ является скалярным произведением, а не векторным).

4. Ротор градиента и ротора

Для операции $rot(gradU)$ можно также использовать оператор "набла":
$rot(gradU) \equiv [\nabla(\nabla U)] = 0$,

Здесь учтено, что векторное произведение коллинеарных операторов равно нулю. Предлагается получить этот же результат путем непосредственного дифференцирования.

Из полученного результата можно получить важное следствие. Рассмотрим некоторую замкнутую кривую L и натянем на нее произвольную поверхность S.

Используя теорему Стокса, можем записать

$$\oint_L gradU d\mathbf{l} = \iint_S rot(gradU) d\mathbf{s} = 0.$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы:

Теорема 1. Циркуляция векторного поля $\mathbf{F} = gradU$ по любому замкнутому контуру равна нулю.

Следствие 1. Криволинейный интеграл от градиента скалярной функции не зависит от выбора пути интегрирования и полностью определяется начальной и конечной точками линии интегрирования.

$$\int_{AB} gradU d\mathbf{l} = \int_A^B dU(M) = U(B) - U(A).$$

Доказательство. Сделаем рисунок.

Выполним простейшие преобразования

$$\oint \nabla U d\mathbf{l} = \int_{ACB} + \int_{BDA} = 0,$$

$$\int\limits_{ACB} = -\int\limits_{BDA} = \int\limits_{ADB}$$

Следовательно

$$\int\limits_{ACB} \nabla U d\mathbf{l} = \int\limits_{ADB} \nabla U d\mathbf{l}$$

. Имеем

$$grad U d\mathbf{l} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

.

Это означает, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Следовательно, величина интеграла зависит только от выбора точек A и B:

$$\int\limits_{AB} \nabla U d\mathbf{l} = \int\limits_{AB} dU = U(B) - U(A)$$

.

Вычислим операцию $rot(rot\mathbf{F})$. Для этого используем известную из векторной алгебры формулу для двойного векторного произведения

$$\mathbf{[a[bc]] = b(ac) - c(ab)}$$

.

Перепишем эту формулу в более удобном для нас виде

$$\mathbf{[a[bc]] = b(ac) - (ab)c}$$

.

Преобразование сделано так, чтобы в дальнейших формулах оператор "набла" не стоял на последней позиции. В терминах оператора "набла" получим

$$rot(rot\mathbf{F}) = [\nabla[\nabla\mathbf{F}]] = \nabla(\nabla\mathbf{F}) - (\nabla\nabla)\mathbf{F} = grad(div\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$$

.

(Что было бы, если использовать обычную формулу для двойного векторного произведения?)

Используя обозначение оператора Лапласа, можно записать

$$rot(rot\mathbf{F}) = grad(div\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F}$$

.

Имеем систему трех дифференциальных соотношений, записанных для компонент вектора **F**.

Мы рассмотрели основные дифференциальные операции второго порядка. В дальнейшем будем их использовать при решении различных задач.

5. Формулы Грина

Получим еще несколько формул общего характера, которые связывают свойства различных функций и широко используются в приложениях. Запишем формулу Гаусса-Остроградского

$$\oiint_S \mathbf{F} d\mathbf{s} = \iiint_V div \mathbf{F} dv.$$

Пусть $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ - две произвольные скалярные функции. Положим

$$\mathbf{F} = \varphi \nabla \psi.$$

Тогда теорема Гаусса-Остроградского принимает вид

$$\iiint_V div(\varphi \nabla \psi) dv = \oiint_S \varphi \nabla \psi d\mathbf{s}.$$

Можно записать

$$div(\varphi \nabla \psi) = \nabla(\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \nabla(\nabla \psi) = \nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi,$$

$$\nabla \psi d\mathbf{s} = \nabla \psi \mathbf{n} ds = \frac{\partial \psi}{\partial n} ds.$$

Здесь введено обозначение

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \nabla \psi \mathbf{n}$$

для производной функции ψ по направлению $\mathbf{n}$

После подстановки этих выражений в видоизмененную формулу Гаусса-

Остроградского получим

$$\iiint_V (\varphi\Delta\psi + \nabla\varphi\nabla\psi)dv = \oiint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds.$$

Эта формула называется первой формулой Грина.

Аналогично, если положить

$$\mathbf{F} = \psi\nabla\varphi,$$

то первая формула Грина примет вид

$$\iiint_V (\psi\Delta\varphi + \nabla\psi\nabla\varphi)dv = \oiint_S \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds.$$

Вычитая соответствующие формулы, получим

$$\iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dv = \oiint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds.$$

Эта формула называется второй формулой Грина.

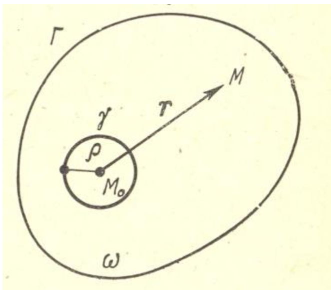
Используя формулы Грина, можно получить связи между значениями функции во внутренних точках выделенного объема и на границах.

Теорема 1. Значение функции $\varphi(M_0)$ во внутренней точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ области *T*, ограниченной поверхностью *S*, определяется формулой

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{1}{r}\Delta\varphi dv - \frac{1}{4\pi}\oiint_S \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds$$, где

$$r = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2}$$ -

расстояние между точками $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x, y, z)$. Доказательство. Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и окружим ее маленькой сферической поверхностью σ радиуса ρ



Введем функцию

$$\psi = \frac{1}{r}, \text{ где}$$

$$r = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2}.$$

Нетрудно вычислить оператор Лапласа от функции $\psi(r)$ (сделать самостоятельно)

$$\Delta\psi = \Delta\frac{1}{r} = 0.$$

Из второй формулы Грина

$$\iiint\limits_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dv = \oiint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds,$$

записанной для области, ограниченной поверхностями S и σ, получим

$$\iiint\limits_V \left(-\frac{1}{r}\Delta\varphi\right)dv = \oiint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds + \oiint\limits_\sigma \left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds$$

Рассмотрим интеграл по поверхности сферы

Учитывая условие $\dfrac{\partial}{\partial n} = -\dfrac{\partial}{\partial r}$, получим

$$\oiint_\sigma \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds = \oiint_\sigma \left(-\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) ds =$$

$$= \oiint_\sigma \left(\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) ds = \frac{1}{\rho^2}\oiint_\sigma \varphi ds + \frac{1}{\rho}\oiint_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds$$

Пусть $\rho \to 0$. Теорема о среднем для поверхностного интеграла имеет вид

$$\oiint_S f(M) ds = f(M')S, \quad M' \in S$$
.

Применим к нашему интегралу теорему о среднем

$$\frac{1}{\rho^2}\oiint_\sigma \varphi ds + \frac{1}{\rho}\oiint_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds = \frac{1}{\rho^2} 4\pi\rho^2 \varphi(M') + \frac{1}{\rho} 4\pi\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}(N')$$
.

В пределе $M' \to M_0, \quad N' \to M_0$ получим

$$\oiint_\sigma \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds = 4\pi\varphi(M_0)$$
.

Возвращаемся к первоначальной формуле Грина

$$\iiint_V \left(-\frac{1}{r}\Delta\varphi \right) dv = \oiint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds + 4\pi\varphi(M_0)$$
. тсюда

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left(\frac{1}{r}\Delta\varphi \right) dv - \frac{1}{4\pi}\oiint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds$$
.

В дальнейшем мы будем использовать эту формулу и другие формулы Грина при решении различных уравнений математической физики.

. Вопросы и задачи

. Вычислить оператор Лапласа для функций:

а) $U = xyz$,

б) $U = r$, где $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$,

в) $U = \dfrac{1}{r^2}$,

г) $U = 1/r$,

д) $U = \mathbf{ar}$, где $\mathbf{a} = const$.

Список использованной литературы и источников

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М.: МГУ, 1999, 798 с.*
2. *Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержев В.Ф. Специальный курс высшей математики для втузов, М.: "Высшая школа", 1976, 390 с.*
3. *Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, М.: Наука, 1985, 384 с.*
4. *Все решения к "Сборнику задач по общему курсу физики" В.С. Волькенштейн, М.: Аст, 1999, книга 1, 430 с., книга 2, 588 с.*
5. *Красильников О.М. Физика. Методическое руководство по обработке результатов наблюдений. М.: МИСиС, 2002, 29 с.*
6. *Супрун И.Т., Абрамова С.С. Физика. Методические указания по выполнению лабораторных работ, Электросталь: ЭПИ МИСиС, 2004, 54 с.*