

TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI
QARSHI FILIALI

KI fakulteti DI-11-15 guruh talabasi Olimov A tomonidan

“Oliy matematika” fanidan tayyorlagan

R E F E R A T

**MAVZU: Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. Aniqmas integralning
asosiy xossalari**

Rahbar: “TABIIY VA UMUMKASBIY FANLAR” kafedrası o‘qituvchisi

Ro‘zimurodov Ixtiyor Nishonovich

Qarshi - 2016

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral. Aniqmas integralning asosiy xossalari

Reja:

- 1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari**
- 2. Aniqmas integralning asosiy xossalari**
- 3. Aniqmas integrallar jadvali**

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari

Aytaylik, $f(x)$ funksiya biror (a, b) (chekli yoki cheksiz) intervalda aniqlangan boisin

Agar (a, b) intervalda $f(x)$ funksiya ($f(x)dx$ ifoda) shu intervalda differensiallanuvchi $F(x)$ funksiyaning hosilasiga (differensialiga) teng boisa, ya'ni ushbu

$$F'(x)=f(x) \text{ (} dF(x)=f(x)dx \text{), } x \in (a,b)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a, b) intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)=\frac{x^3}{3}$ bo'ladi, chunki

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2=f(x), \text{ shuningdek, } f(x)=\cos x \text{ funksiyaning boshlang'ich}$$

funksiyasi $F(x)=\sin x$ bo'ladi, chunki $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$. (1) munosabatga ko'ra

$$(F(x)+c)'=F'(x)+0=F'(x)=f(x) \quad (2)$$

bo'ladi, bunda c -ixtiyoriy o'zgarmas son.

Shunday qilib,

$$F(x)+c$$

funktsiyalar ham $f(x)$ ning boshlang'ich funktsiyalari bo'ladi.

Demak, $f(x)$ boshlang'ich funktsiyaga ega bo'lsa, u cheksiz ko'p boshlang'ich funktsiyalarga ega bo'lar ekan.

Ayni paytda, $f(x)$ funktsiya ixtiyoriy ikkita $F(x)$ va $\phi(x)$ boshlang'ich funktsiyalarga ega, ya'ni

$$F'(x)=f(x), \quad \phi'(x)=f(x)$$

bo'lsa,

$$\phi(x)=F(x)+c \quad (c=\text{const})$$

bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$[\phi(x)-F(x)]' = \phi'(x)-F'(x) = f(x)-f(x)=0$$

bo'lib, Lagranj teoremasining natijasiga ko'ra

$$\phi(x)-F(x)=c \quad (c=\text{const})$$

bo'ladi va undan

$$\phi(x)=F(x)+c$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Natijada quyidagi xulosaga kelamiz:

Agar $f(x)$ funktsiya (a,b) da boshlang'ich funktsiya $F(x)$ ga ega bo'lsa, u holda

- 1) $f(x)$ funktsiya cheksiz ko'p boshlang'ich funktsiyalarga ega,
- 2) barcha boshlang'ich funktsiyalarning umumiy ifodasi

$$F(x)+c \quad (c=\text{const}) \quad (3)$$

bo‘ladi, ya’ni ixtiyoriy boshlang‘ich funksiya shu ifodadan (o‘zgarmas c ga qiymat berish natijasida) kelib chiqadi.

Ta’rif. (3) ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi, bunda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, $\int$ —integral belgisi.

Demak,

$$\int f(x)dx=F(x)+c \quad (c=\text{const}) \quad (4)$$

1-misol. Ushbu

$$\int 5x^5 dx$$

integral topilsin.

◀Ta’rifga ko‘ra, bu integral shunday funksiya, uning hosilasi $5x^5$ ga teng. Ravshanki,

$$F(x)=\frac{5}{6}x^6+c \quad (c=\text{const})$$

funksiya uchun

$$F'(x)=(\frac{5}{6}x^6+c)'=\frac{5}{6}\cdot 6x^5+0=5x^5$$

bo‘ladi. Demak,

$$\int 5x^5 dx=\frac{5}{6}x^6+c. \blacktriangleright$$

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) da uzluksiz bo'lsa, uning aniqmas integrali mavjud bo'ladi. (Bu tasdiq keyinroq isbotlanadi).

Ko'pincha funksiyaning aniqmas integrali qaralganda uni qanday oraliqda bo'lishi ko'rsatilmaydi. Bunda funksiyaning aniqlanish sohasida qaralayapti, deb hisoblanadi.

Aniqmas integralning sodda xossalari

Aniqmas integral ta'rifidan uning quyidagi sodda xossalari kelib chiqadi:

1) Ushbu $\int f(x)dx$ aniqmas integralning hosilasi $f(x)$ ga teng bo'ladi.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2) Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya ga teng bo'ladi (o'zgarmas son aniqligida)

$$\int dF(x) = F(x) + c \quad (c = \text{const})$$

Xususan,

$$\int dx = x + c \quad (c = \text{const})$$

bo'ladi.

3) O'zgarmas sonni integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k = \text{const}, k \neq 0) \quad (5)$$

4) Ikki funksiya yig'indisining integrali bu funksiyalar integrallarining yig'indisiga teng:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (6)$$

Eslatma. Yuqoridagi (5), (6) tengliklarni o'ng va chap tomonidagi ifodalar orasidagi ayirma o'zgarmas songa barobarligi ma'nosidagi (o'zgarmas son aniqligida) tengliklar deb qaraladi.

Ma'lumki, berilgan funksiyaning hosilasini topish uni differensiallash deyiladi. Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish esa uni integrallash deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ma'lumotlardan funksiyaning differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanini payqash qiyin emas.

Ma'lumki,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ ya'ni } F'(x) = f(x)$$

bo'lsa, unda

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

bo'ladi va aksincha bo'ladi.

Aniqmas integrallar jadvali

Funksiya hosilalari jadvali hamda aniqmas integral ta'rifidan foydalanib, ba'zi funksiyalar aniqmas integrallarining jadvalini keltiramiz.

1) $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$, chunki $(x + C)' = 1$.

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$, chunki $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$.

3) $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, chunki

$x > 0$ da $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ va $(\ln x + C)' = x^{-1}$.

$$x < 0 \text{ da } \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \text{ va } (\ln(-x) + C)' = x^{-1}.$$

$$4) \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ chunki } \left(\frac{a^x}{\ln a} + C \right)' = a^x.$$

$$5) \int e^x \cdot dx = e^x + C, \text{ chunki } (e^x + C)' = e^x.$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C, \text{ chunki } (-\cos x + C)' = \sin x.$$

$$7) \int \cos x dx = \sin x + C, \text{ chunki } (\sin x + C)' = \cos x.$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \text{ chunki } (-\operatorname{ctg} x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \text{ chunki } (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \text{ chunki } (\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C, \text{ chunki}$$

$$(-\arccos x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \text{ chunki } (\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$13) \int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccotg} x + C, \text{ chunki } (-\operatorname{arccotg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$14) \int \sinh x dx = \cosh x + C, \text{ chunki } (\cosh x + C)' = \sinh x.$$

$$15) \int \cosh x dx = \sinh x + C, \text{ chunki } (\sinh x + C)' = \cosh x.$$

Yuqorida keltirilgan integrallar jadvali hamda integralning sodda xossalariidan foydalanib, aniqmas integrallarni hisoblashga doir misollar qaraymiz.

$$\text{2-misol. } \int (3x^2 - 2x + 7) dx = \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 7 dx =$$

$$= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 7 \int dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x + c = x^3 - x^2 + 7x + c$$

3-misol.

$$\int \frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5} dx = \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \int x^{-3} dx - \int x^{-2} dx + \int x^{-5} dx =$$

$$\int x^{-5} dx = \frac{1}{-2} x^{-2} - \frac{1}{-1} x^{-1} + \frac{1}{-4} x^{-4} + c = -\frac{2x^2 + 4x^3 - 1}{4x^4} + c$$

$$\text{4-misol. } \int (5\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}) dx = 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{3}{5}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 5 \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} - 3 \frac{1}{\frac{3}{5}+1} x^{\frac{3}{5}+1} - 2 \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{10}{3} \sqrt{x^3} - \frac{15}{8} \sqrt[5]{x^8} - 4\sqrt{x} + c$$

$$\text{5-misol. } \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + c.$$

adabiyotlar.

1. Данко П.И., Попов А.Г. Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. М. Высш. III К 1966. Ч 1-2.
2. Романовский П. И Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразования Лапласа. М.: Наука, 1973 г.
3. Гмурман В. Н. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, «Ўқитувчи», 1978
4. Н.М.Жабборов, Е.О.Аликулов, Қ.С.Ахмедова Олий математика. 1-2-қисм . Қарши 2010
5. Гнеденко В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., Высшая школа, 1981.

6. Sirojiddinov S.X., Mamatov M. Ehtimollar nazariyasi kursi. T. O'qituvchi, 1980.
7. Беклимишсв Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М. Наука, 1964.
8. Берман Г.Н Сборник задач по курсу математического анализа. М . Наука, 1965.
9. Бугров Я.С Никольский С.М Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М. Наука, 1988.
10. Бугров Я.С Никольский С.М Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Фурье. М. Наука 1961, 1985.
11. Минорский В.И. Сборник задач по высшей математике. М: Наука, 1987.
12. Пискуня Н.С. Дифференциальное исчисления для вузов. М. Наука, 1985. Т. 1-2.
13. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1982.