

**УЗБЕКСКОЕ АГЕНСТВО ПОЧТЫ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ
ТАШКЕНТСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Кафедра
Антенно-фидерных
устройств

Конспект лекций по дисциплине

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ
Часть 2

Ташкент 2010

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

6.1. Общие сведения

Под волнами подразумевают колебательные движения непрерывных сред. Принципиальные отличия в математическом описании волновых процессов и колебаний токов и напряжений в радиотехнических цепях состоит в том, что для полного описания любой системы достаточно знать конечное число токов и напряжений на различных участках схем. Для полного описания волнового процесса необходимо знать его характеристики в бесконечно большом числе точек в рассматриваемом пространстве. Природа волновых процессов весьма разнообразна: электромагнитные волны, акустические, гравитационные и т. д. Физики полагают, что при распространении любых волн среда постепенно вовлекается в некоторый физический процесс, в результате которого происходит распространение энергии в пространстве.

6.2. Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде без потерь

Будем рассматривать свободные (существующие без сторонних источников) гармонические колебания электромагнитного поля в однородной изотропной среде без потерь. В этом случае удобно воспользоваться однородными уравнениями Гельмгольца относительно векторов электромагнитного поля.

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad \mathbf{1},$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad \mathbf{2},$$

$$k = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}.$$

Векторные уравнения (1) и (2) можно записать в виде системы из трех скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_y &= 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{3},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y &= 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{4}.$$

Наиболее просто уравнения (3) и (4) и их решения выглядят в случае рассмотрения плоских электромагнитных волн. Под плоскими подразумевают электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль линейной координаты, в каждый фиксированный момент времени неизменные в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Будем полагать, что волна распространяется вдоль оси Z, т.е. вектор Пойнтинга:

$$\bar{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^* \right] = \bar{I}_z \Pi_{zcp} \quad \mathbf{5}.$$

Из соотношения (5) видно, что вектор Пойнтинга определяется компонентами электромагнитного поля, находящимися в плоскости xOy. В данном случае отсутствуют составляющие поля вдоль оси z. Таким образом, должно выполняться условие: поскольку по определению поле должно быть неизменно в плоскости распространения волны, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0; \frac{\partial}{\partial z} \neq 0, \\ E_x, E_y, H_x, H_y \neq 0; E_z = H_z = 0 \end{aligned} \quad \mathbf{6}.$$

Используя соотношение (6), выражения (3) и (4) можно переписать следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x &= 0 \\ \frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y &= 0 \end{aligned} \right\} \mathbf{7},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \dot{H}_x}{dz^2} + k^2 \dot{H}_x &= 0 \\ \frac{d^2 \dot{H}_y}{dz^2} + k^2 \dot{H}_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{8.}$$

Решение каждого из уравнений $\dot{E}_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz} \quad \mathbf{9,}$

$$\dot{E}_y = B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz} \quad \mathbf{10.}$$

Для того, чтобы не увеличивать количество постоянных интегрирования, компоненты поля \vec{H} найдем, используя решения (9), (10) и уравнения Максвелла.

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_a \vec{H},$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \left(-\bar{I}_x \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} + \bar{I}_y \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \right) \quad \mathbf{11,}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \bar{I}_x & \bar{I}_y & \bar{I}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = \bar{I}_x \left(\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \right) + \bar{I}_y \left(\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right) + \bar{I}_z \left(\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right).$$

Используя соотношение (11), получим:

$$\dot{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu_a} (-jkB_1 e^{-jkz} + jkB_2 e^{jkz}) \quad \mathbf{12,}$$

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu_a} (-jkA_1 e^{-jkz} + jkA_2 e^{jkz}) \quad \mathbf{13.}$$

Вынося jk за скобки, получим: $\dot{H}_x = \frac{1}{\sqrt{\mu_a/\epsilon_a}} (-B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz}) \quad \mathbf{14,}$

$$\dot{H}_y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}} (A_1 e^{-jkz} - A_2 e^{jkz}) \quad 15.$$

В итоге получим систему решений: $\dot{E}_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz} \quad 16,$

$$\dot{H}_y = \frac{1}{z_c} (A_1 e^{-jkz} - A_2 e^{jkz}) \quad 17,$$

$$\dot{E}_y = B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz} \quad 18,$$

$$\dot{H}_x = \frac{1}{z_c} (-B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz}) \quad 19.$$

где $z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$, [Ом] — характеристическое сопротивление среды, определяющееся свойствами среды.

Пары (16)-(17) и (18)-(19) образуют вектор Пойнтинга, ориентированный по оси z . Полученные нами решения представляют собой сумму двух слагаемых (так как решалось дифференциальное уравнение). Уточним физический смысл каждого слагаемого. Для этого в уравнении (16) перейдем от комплексных амплитуд к мгновенным значениям.

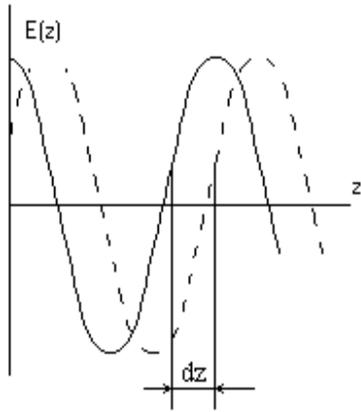
$$E_x(t) = \text{Re} \left(\dot{E}_x e^{j\omega t} \right),$$

$$E_x(t) = A_1 \cos(\omega t - kz) + A_2 \cos(\omega t + kz) \quad 20.$$

Аргумент первого слагаемого — $(\omega t - kz) \quad 21,$

Аргумент второго слагаемого — $(\omega t + kz).$

Рассмотрим аргументы и слагаемые для $t=t_1, z=z_1$, т.е. $\omega t_1 - kz_1, \omega t_1 + kz_1$. Дадим приращение времени $t = t_1 + dt$ и определим смещение точек $z = z_1 + dz$ этого волнового процесса с постоянными фазами $\omega t_1 - kz_1, \omega t_1 + kz_1$.



Для того, чтобы оценить это смещение, рассмотрим следующие равенства:

$$\omega(t_1 + dt) - k(z_1 + dz) = \omega t_1 - kz_1 \quad 22,$$

$$\omega(t_1 + dt) + k(z_1 + dz) = \omega t_1 + kz_1 \quad 23.$$

Приводя подобные члены в соотношениях (22) и (23), получим:

$$\omega dt - k dz = 0 \quad 24,$$

$$\omega dt + k dz = 0 \quad 25.$$

Выражая $\frac{dz}{dt}$ в первом и втором случаях, получаем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad 26,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{k} \quad 27.$$

Соотношение (26) определяет перемещения фиксированной фазы $(\omega t - kz)$, а соотношение (27) — $(\omega t + kz)$, т.е. соотношения (26) и (27) определяют фазовую скорость. Соотношение (26) определяет положительную фазовую скорость. Следовательно, компоненты $A_1 \cos(\omega t - kz)$ и $A_1 e^{-jkz}$ соответствуют плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси z . Аналогично и в соотношении (27).

Итак, в полученном нами решении (16) первое слагаемое - для плоской волны в положительном направлении, второе слагаемое - в отрицательном.

Уточним физический смысл волнового числа k . Волновое число k показывает изменение фазы волны в радианах при прохождении волной пути в 1 метр. Минимальное расстояние на котором фаза волны изменяется на 2π называется длиной волны (пространственным периодом).

$$k\lambda = 2\pi \quad 28,$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 29.$$

Проанализируем полученные решения на примере \dot{E}_x , \dot{H}_y .

$$\dot{E}_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz},$$

$$\dot{H}_y = \frac{1}{z_c} (A_1 e^{-jkz} - A_2 e^{jkz}).$$

В этих общих решениях выделим слагаемые, которые соответствуют волне, распространяющейся в положительном направлении оси z:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_o e^{-jkz} \quad 30,$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_o}{z_c} e^{-jkz} \quad 31.$$

Перейдем к мгновенным значениям:

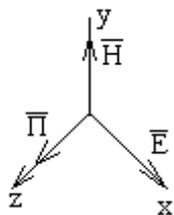
$$E_x(t) = E_o \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad 32,$$

$$H_y(t) = \frac{E_o}{z_c} \cos(\omega t - kz + \varphi) \quad 33.$$

Из приведенных соотношений следует:

- $z = \text{const}$ — это поверхность равных фаз представляет собой плоскость
- Поверхность равных амплитуд совпадает с поверхностью равных фаз (плоская однородная волна)
- В направлении распространения отсутствуют составляющие поля (плоская, однородная, поперечная)
- Компоненты поля плоской волны взаимноортогональны и перпендикулярны направлению распространения волны.

Между составляющими поля плоской волны существует взаимосвязь.



$$\dot{\vec{E}} = \bar{1}_x \dot{E}_x = z_c \left[\bar{1}_y \dot{H}_y, \bar{1}_z \right] = z_c \left[\dot{\vec{H}} \bar{1}_z \right],$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{z_c} \left[\bar{1}_z \dot{\vec{E}} \right].$$

Определим энергетические характеристики:

$$w_{Ecp} = \frac{\varepsilon_a \dot{\vec{E}} \dot{\vec{E}}^*}{4} = \frac{\varepsilon_a E_o^2}{4} \quad \text{— объемная плотность электрической энергии,}$$

$$w_{Hcp} = \frac{\mu_a \dot{\vec{H}} \dot{\vec{H}}^*}{4} = \frac{\mu_a E_o^2}{4z_c^2} = \frac{\varepsilon_a E_o^2}{4} \quad \text{— объемная плотность магнитной энергии.}$$

Так как среда однородная, изотропная и без потерь,

$$\bar{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* \right] = \frac{E_o^2}{2z_c} [\bar{1}_x \bar{1}_y] = \bar{1}_z \frac{E_o^2}{2z_c}.$$

Определим скорость распространения энергии:

$$\bar{V}^3 = \frac{\bar{\Pi}_{cp}}{W_{cp}} = \bar{1}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}.$$

Уравнение для фазовой скорости: $V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}}$, где $k = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$.

Тогда в случае среды без потерь: $V^3 = V_\phi$.

Различные комбинации полного решения для плоской электромагнитной волны фактически соответствуют одной и той же плоской волне при различных ее ориентациях относительно выбранной системы координат.

6.3. Плоские волны в однородной изотропной среде с проводимостью, отличной от нуля

В среде с проводимостью, отличной от нуля, энергия электромагнитной волны частично расходуется на возбуждение и поддержание токов проводимости. В общем случае в среде могут присутствовать также диэлектрические и магнитные потери. Тогда:

$$\nabla^2 \dot{\bar{E}} + \gamma^2 \dot{\bar{E}} = 0 \quad \mathbf{1,}$$

$$\nabla^2 \dot{\bar{H}} + \gamma^2 \dot{\bar{H}} = 0 \quad \mathbf{2,}$$

$$\gamma = \omega \sqrt{\widetilde{\mu}_a \widetilde{\epsilon}_a} \quad \mathbf{3.}$$

В этом случае решения по форме совпадают с полученными в предыдущем параграфе.

$$\dot{\bar{E}}_m = \dot{\bar{E}}_o e^{-j\gamma z} \quad \mathbf{4,}$$

$$\dot{\bar{H}} = \dot{\bar{H}}_o e^{-j\beta z} \quad \mathbf{5,}$$

$$\gamma = \beta - j\alpha \quad \mathbf{6.}$$

Перейдем для уяснения физического смысла к мгновенным значениям:

$$E(t) = \bar{1}_x E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi) = \bar{1}_x E_m(z) \cos(\omega t - \beta z + \varphi),$$

$$\dot{E}_o = E_o e^{j\varphi}.$$

В некоторый фиксированный момент времени изобразим $E_m(z)$.

Отметим физический смысл: γ — комплексная постоянная распределения; β — ее действительная часть, смысл тот же, что и у k , т.е. показывает изменение фазы волны в радианах при прохождении волной пути в 1 метр (фазовая постоянная); α — мнимая часть γ . Показывает, во сколько раз уменьшается амплитуда волны на пути в 1 метр (постоянная затухания).

Уменьшение амплитуды волны в процессе распространения характеризуют величиной затухания:

$$L = \ln \left(\frac{E_m(z)}{E_m(z+1)} \right) = \alpha l, \text{ [НП]} \quad 7,$$

$$L_{\text{дБ}} = 20 \lg \left(\frac{E_m(z)}{E_m(z+1)} \right) = 8,69 \alpha l, \text{ [дБ]}.$$

Будем рассматривать случай, когда потери в среде вызваны конечной проводимостью (только Джоулевы потери):

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_a &= \mu_a \text{ и } \tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta), \\ \gamma &= \operatorname{Re} \gamma + j \operatorname{Im} \gamma = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta)} \end{aligned} \quad 8,$$

Чтобы получить выражения для β и α , возведем в квадрат и получим:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} \gamma)^2 - (\operatorname{Im} \gamma)^2 &= \omega^2 \mu_a \varepsilon_a, & \nabla. \\ 2 \operatorname{Re} \gamma \operatorname{Im} \gamma &= -\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \operatorname{tg} \delta \end{aligned}$$

Выразим во втором уравнении мнимую часть и подставим в первое.

$$\operatorname{Im} \gamma = -\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \operatorname{tg} \delta}{2 \operatorname{Re} \gamma},$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} \gamma)^2 - \left(-\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \operatorname{tg} \gamma \right)^2 \frac{1}{(\operatorname{Re} \gamma)^2} - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a &= 0 \\ ((\operatorname{Re} \gamma)^2)^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a (\operatorname{Re} \gamma)^2 - \left(-\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \operatorname{tg} \delta \right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Решаем квадратное уравнение: $(\operatorname{Re} \gamma)^2 = \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \right)^2 + \left(\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \delta}$,

$$(\operatorname{Re} \gamma)^2 = \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \pm \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}.$$

Так как в левой части стоит возведение в квадрат, то в этом соотношении учитывается только знак

"+" . Тогда: $(\operatorname{Re} \gamma)^2 = \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta})$,

откуда получаем: $\operatorname{Re} \gamma = \pm \beta = \pm \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}$ **9.**

Воспользуемся соотношением (V), из которого следует, что мнимая часть

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = -\omega^2 \mu_a \varepsilon_a + (\operatorname{Re} \gamma)^2.$$

Подставим (9) в (V).

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = -\frac{2\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} + \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \pm \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta},$$

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = -\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \pm \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}.$$

Так как левая часть возведена в квадрат, то правая часть не может быть отрицательной. Получаем:

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} (-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}),$$

$$\operatorname{Im} \gamma = \pm \alpha = \pm \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right)} \quad 10.$$

Проанализируем экспоненциальный множитель $e^{\pm j\gamma z}$. Подстановкой можно получить: $e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$; $e^{-\alpha z} e^{j\beta z}$; $e^{\alpha z} e^{-j\beta z}$; $e^{\alpha z} e^{j\beta z}$. Физически реальными являются первое и последнее произведения. Первое из них соответствует затухающей волне, распространяющейся в положительном направлении оси z , а последнее — в отрицательном направлении оси z . Таким образом поле плоской волны, распространяющейся в среде с потерями, может быть представлено следующими соотношениями:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_o e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad 11,$$

$$\dot{\vec{H}}_m = \left[\frac{\dot{\vec{E}}_o}{z_c} \right] e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad 12.$$

В данном случае характеристическое сопротивление среды является комплексной величиной.

$$\begin{aligned} z_c &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta)}} = \sqrt{\frac{\mu_a (1 + j \operatorname{tg} \delta)}{\varepsilon_a (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + j \frac{\operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \left(\frac{\cos^2 \delta}{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta} + j \frac{\cos \delta \sin \delta}{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta} \right)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} (\cos^2 \delta + j \cos \delta \sin \delta)} = \\ &= \left| z_c \right| e^{j\psi}. \end{aligned}$$

Это можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} (\cos^2 \delta + j \cos \delta \sin \delta) = \left| \dot{A} \right| e^{j\psi},$$

$$\left| \dot{A} \right| = \sqrt{\left(\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \right)^2 (\cos^4 \delta + \cos^2 \delta \sin^2 \delta)} = \frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \cos \delta,$$

$$\operatorname{tg} \Psi' = \frac{\cos \delta \sin \delta}{\cos^2 \delta} = \operatorname{tg} \delta; \Psi' = \delta,$$

$$\dot{z}_c = \left(\left| \dot{A} \right| e^{j\Psi'} \right)^{1/2} = \left| \dot{z}_c \right| e^{j\Psi},$$

$$\left| \dot{z}_c \right| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \cos \delta}; \Psi = \delta/2 \quad 13.$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}.$$

Рассмотрим, как меняются фаза и характеристическое сопротивление при изменении $\sigma = 0 \dots \infty$.

$$\sigma = 0: \operatorname{tg} \delta = 0, \delta = 0, \Psi = 0, \left| \dot{z}_c \right| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon}},$$

$$\sigma = \infty: \operatorname{tg} \delta = \infty, \delta = \frac{\pi}{2}, \Psi = \frac{\pi}{4}, \left| \dot{z}_c \right| = 0.$$

С ростом проводимости характеристическое сопротивление по модулю убывает.

Вывод: По определению $\dot{E}_m = \dot{z}_c \dot{H}_m$. В среде с отличной от нуля проводимостью при постоянной напряженности электрического поля $\dot{E}_m = \text{const}$ с ростом проводимости увеличивается амплитуда магнитной компоненты \dot{H}_m .

Физически это можно объяснить так:

в среде с проводимостью, равной нулю, присутствуют только токи смещения $\vec{j}^{cm} = j\omega\varepsilon_a \vec{E}_m$. Если проводимость равна нулю, то в среде дополнительно появляются токи проводимости. Причем при неизменной напряженности электрического поля и диэлектрической проницаемости среды плотность тока остается неизменной.

Проанализируем полученный результат. Пусть \vec{E} имеет только иксовую составляющую, тогда вектор \vec{H} будет иметь одну составляющую, ориентированную по оси y , если волна распространяется вдоль оси z . Будем предполагать, что амплитуда \vec{E} является действительной величиной.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \bar{1}_x E_o e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \\ \vec{H} &= \bar{1}_y \frac{E_o}{z_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}. \end{aligned}$$

Перейдем к мгновенным значениям: $\bar{E}(t) = \bar{I}_x E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z),$

$$\bar{H}(t) = \bar{I}_y \frac{E_o}{\left| \dot{Z}_c \right|} e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z - \frac{\delta}{2}\right)$$

Проанализируем. Поверхность равных фаз определяется уравнением $z = \text{const}$. Поверхность равных амплитуд совпадает с поверхностью равных фаз, т.е. рассмотренный процесс является плоской однородной волной.

Имеются составляющие поля, взаимноортогональные и перпендикулярные направлению распространения волны, т.е. она является и поперечной. Амплитуда волны экспоненциально убывает в процессе ее распространения. В данном случае магнитная составляющая поля отстает от электрической на угол $\frac{\delta}{2}$.

Проанализируем основные характеристики электромагнитной волны. Фазовая скорость равна:

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1)}}$$

Из этого уравнения следует, что так как $\beta > k$, то фазовая скорость в среде с потерями меньше фазовой скорости в среде без потерь, так как $\text{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}$.

В данном случае фазовая скорость является функцией частоты. С ростом частоты $\text{tg} \delta$ убывает и фазовая скорость возрастает. Фазовая скорость зависит от проводимости среды. С ростом проводимости $\text{tg} \delta$ увеличивается и фазовая скорость убывает.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1)}}$$

Из соотношения видно, что λ в среде с потерями меньше λ в среде без потерь. С ростом проводимости $\text{tg} \delta$ увеличивается и λ убывает. Распространение волны сопровождается переносом энергии. Вектор Пойнтинга:

$$\dot{\bar{P}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^* \right] = \bar{I}_z \frac{E_o^2}{2 \left| \dot{Z}_c \right|} e^{-2\alpha z} e^{j\frac{\delta}{2}}.$$

Среднее за период значение:
$$\bar{\Pi}_{cp} = \bar{I}_z \frac{E_o^2}{2|z_c|} e^{-2\alpha z} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Вычислим скорость распространения энергии:
$$\bar{V}_3 = \frac{\text{Re}\bar{\Pi}}{w_{cp}}.$$

После подстановки получим, что $V_3 = V_\phi$.

$$\begin{aligned} z_c = f(\omega) \rightarrow \omega \uparrow \rightarrow tg \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \downarrow \rightarrow |z_c| \uparrow, \\ \omega \rightarrow \infty, tg \delta \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, |z_c| \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}, \\ z_c = f(\sigma) \rightarrow \sigma \uparrow \rightarrow tg \delta \uparrow \rightarrow \delta \uparrow \rightarrow |z_c| \downarrow, \\ \sigma \rightarrow \infty; tg \delta \rightarrow \infty, \delta \rightarrow \pi/2 \rightarrow |z_c| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В результате можно отметить, что характеристики плоских волн в среде с потерями и без потерь существенно отличаются. Главное принципиальное отличие состоит в том, что V_ϕ , V_3 , z_c в среде без потерь неизменны на любых частотах и определяются только электродинамическими параметрами среды. В среде с потерями эти же параметры являются функциями частоты. Явление зависимости параметров электромагнитной волны от частоты называется дисперсией, а соответствующие среды называются диспергирующими. Дисперсия возможна и в средах без потерь, если хотя бы один из электродинамических параметров является функцией частоты.

Рассмотрим два характерных случая распространения электромагнитных волн в реальных средах, т.е. определим параметры плоской волны в реальных диэлектриках и металлах.

6.4. Распространение волн в реальных диэлектриках

Для реальных диэлектриков $tg \delta \ll 1$.
$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} (1 - tg \delta)^{1/2}.$$

Используя неравенство, скобку можно представить в виде ряда Маклорена:

$$x \ll 1: (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots,$$

$$(1 - j\operatorname{tg}\delta)^2 = 1 + \frac{1/2}{1!}(-j\operatorname{tg}\delta) + \frac{1/2(-1/2)}{2!}(-j\operatorname{tg}\delta)^2 + \dots$$

Ограничиваясь тремя элементами разложения, пренебрегая всеми остальными, получаем:

$$\gamma \cong \beta - j\alpha \cong \omega\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left(1 + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta - j \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \right).$$

Приравнивая реальную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned} \beta &= \omega\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left(1 + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right), \\ \alpha &= \omega\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \end{aligned}$$

Используя выражение для β , получим:

$$V^\Phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left(1 + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right)}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left(1 - \frac{1}{64} \operatorname{tg}^4 \delta \right)} \approx V_o \left(1 - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right),$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left(1 + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right)} \cong \frac{V_o}{f} \left(1 - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right),$$

где V_o — скорость света в среде.

Из результатов следует, что параметры плоской волны в реальных диэлектриках мало отличаются от параметров в среде без потерь. Постоянная затухания λ в реальных диэлектриках является очень малой величиной и в первом приближении не зависит от частоты.

6.5. Распространение волн в реальных металлах

В проводящих средах $\operatorname{tg}\delta \gg 1$. Общее выражение:

$$\begin{aligned} \beta &= \omega\sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right)}, \\ \alpha &= \omega\sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

Пренебрегая единицей, получим:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \operatorname{tg} \delta} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \sigma}{2 \omega \varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}}.$$

β и α нелинейно зависят от ω , следовательно, с изменением ω они будут существенно изменяться.

Получим выражение для фазовой скорости
$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{\omega^2 2}{\omega \mu_a \sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}}$$

и для длины волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \sqrt{\frac{4\pi^2 2}{\omega \mu_a \sigma}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{f \mu_a \sigma}}.$$

Характеристическое сопротивление:

$$z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta)}},$$

пренебрегая единицей, получим

$$z_c = \sqrt{\frac{\mu_a \omega \varepsilon_a}{\varepsilon_a \sigma}} j = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}} e^{j\pi/2} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}} e^{j\pi/4}.$$

Представим z_c в виде реальной и мнимой частей:

$$z_c = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}} (\cos \pi/4 + j \sin \pi/4) = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}} (1 + j).$$

<u>ВАКУУМ</u>	<u>МЕДЬ</u>
$V_\phi = V_\ominus = 3 \cdot 10^8$ м/с	$V_\phi = V_\ominus = 421$ м/сек
$\lambda = 300$ м	$\lambda = 4,21 \cdot 10^{-6}$ м
	$z_c = 3,74 \cdot 10^{-4}$ Ом

Сравним параметры плоских волн в вакууме и меди при частоте $f = 1$ МГц

В реальных проводниках электромагнитные волны испытывают сильное поглощение. Так в меди с $f = 1 \text{ МГц}$ на пути в 1 мм затухание составит

$$\frac{E(z)}{E(z+l)} \Big|_{l=1\text{мм}} = e^{14,8} \sim 2,64 \cdot 10^6$$

Металлы следует использовать при экранировании переменного электромагнитного поля.

6.6. Характерные параметры проводящих сред

Расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в e раз, называется *глубиной проникновения d* , т.е.

$$e^{-\alpha d} = e^{-1}; \quad \alpha d = 1; \quad d = \frac{1}{\alpha}.$$

В общем случае:

$$d = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} - 1)}}$$

или для проводящих сред:

$$\text{tg} \delta \gg 1: \quad d = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2 \mu_a \epsilon_a \sigma}{2\omega \epsilon_a}}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}}.$$

Отсюда следует, что $\omega \uparrow \rightarrow d \downarrow$

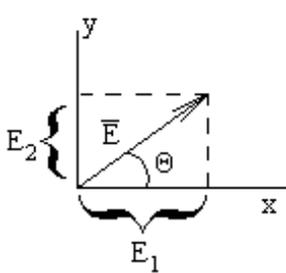
6.7. Поляризация волн

Для описания ориентации волн в пространстве вводят понятие поляризации. Под *плоскостью поляризации* подразумевают плоскость, проходящую через направление распространения волны параллельно вектору \vec{E} .

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \bar{1}_x (A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz}) \\ \dot{\vec{H}} = \bar{1}_y \frac{1}{z_c} (A_1 e^{-jkz} - A_2 e^{jkz}) \end{cases} \quad 1,$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \bar{1}_y (B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz}) \\ \dot{\vec{H}} = \bar{1}_x \frac{1}{z_c} (-B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz}) \end{cases} \quad 2.$$

Для того, чтобы проанализировать возможные случаи поляризации, рассмотрим следующие решения. Пусть плоская волна представляет собой композицию решений из (1) и (2), которые также являются решением уравнения Гельмгольца.



$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_2 = \bar{1}_x \dot{E}_1 + \bar{1}_y \dot{E}_2 \quad 3.$$

1. Пусть слагаемые в соотношении (3) синфазные, т.е.

$$\dot{E}_1 = E_1 e^{j\varphi}; \quad \dot{E}_2 = E_2 e^{j\varphi};$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_2}{E_1}.$$

Тогда результирующий вектор \vec{E} , а стало быть и плоскость поляризации оказываются повернутыми на угол Θ относительно оси x , причем положение плоскости поляризации в процессе распространения волны остается неизменным.

2. Пусть слагаемые равны по амплитуде, а по фазе отличаются на 90° :

$$\dot{E}_1 = E_0 e^{j\varphi}, \quad \dot{E}_2 = E_0 e^{j(\varphi - \pi/2)},$$

тогда получим:

$$\vec{E}(t) = \bar{1}_x E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) + \bar{1}_y E_0 \sin(\omega t - kz + \varphi).$$

Определим положение угла Θ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{E_2}{E_1} = \operatorname{tg}(\omega t - kz + \varphi)$$

В этом случае положение плоскости поляризации изменяется во времени и пространстве. Если зафиксируем некоторую плоскость, то вектор \vec{E} будет

вращаться со скоростью V , и его конец будет описывать окружность. Если зафиксируем время, то вектор будет описывать спираль вдоль оси z . Этот случай поляризации называется круговой, т.е. в процессе распространения плоскость поляризации вращается. Это случай левой поляризации. Для получения правой поляризации необходимо, чтобы

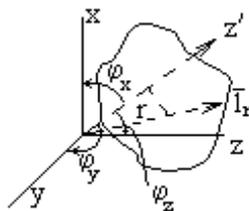
$$\dot{E}_1 = E_0 e^{j\varphi}, \quad \dot{E}_2 = E_0 e^{j(\varphi + \pi/2)}.$$

Условием круговой поляризации волны является временная и пространственная квадратура составляющих в соотношении (3). Компоненты должны быть взаимно ортогональны и должны отличаться по фазе на 90° , также необходимо выполнение условия равенства амплитуд. В том случае, когда одно из условий не выполняется, имеем эллиптическую поляризацию. В любой фиксированной плоскости вектор E движется по эллиптической замкнутой кривой. Степень поляризации характеризуют отношением большой оси к малой.

Волновые явления на границе раздела двух сред

7.1. Плоские волны произвольной ориентации

В предыдущих параграфах мы рассматривали плоские волны, распространяющиеся вдоль осей декартовой системы.



Предполагаем, что среда без потерь.

$$\dot{E} = \bar{E}_0 e^{-jkz'},$$

$$\dot{H} = \bar{H}_0 e^{-jkz'},$$

$$\bar{E}_0 = z_c [\bar{H}_0 \bar{l}_{z'}],$$

где $z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$, $\bar{l}_{z'} = \bar{l}_x \cos \varphi_x + \bar{l}_y \cos \varphi_y + \bar{l}_z \cos \varphi_z$ **1.**

Косинусы углов, определяющих направление волны, называются *направляющими*.

Уравнение фазовой плоскости ($z' = \text{const}$):

$$z' = (\bar{r} \bar{l}_{z'}),$$

где $\bar{r} = \bar{l}_x x + \bar{l}_y y + \bar{l}_z z$ **2.**

Тогда скалярное произведение

$$(\vec{r} | \vec{l}') = x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z \quad 3,$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_o e^{-jk(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)} \\ \vec{H} &= \vec{H}_o e^{-jk(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)} \end{aligned} \right\} 4.$$

Мы предполагали, что среда без потерь. В случае среды с потерями соотношения не меняются, только вместо k подставляется $\gamma = \beta - j\alpha$. Перед началом рассмотрения волновых явлений дадим ряд определений.

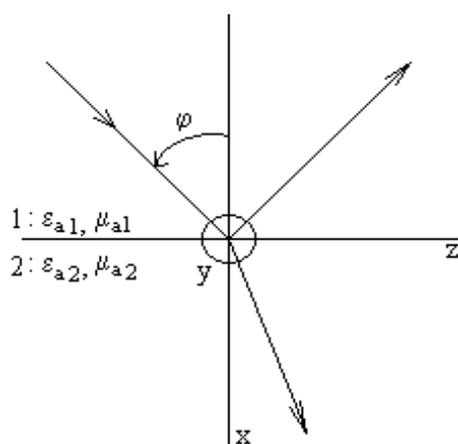
Плоскость, проходящая через нормаль к границе раздела параллельно направлению распространения волны, называется *плоскостью падения*. Вектор \vec{E} перпендикулярен направлению распространения волны, а относительно плоскости падения волны он ориентирован произвольным образом.

Не теряя общности рассуждений, достаточно рассмотреть два случая ориентации \vec{E} .

- 1.) \vec{E} перпендикулярен плоскости падения (нормальная поляризация)
- 2.) \vec{E} параллелен плоскости падения (параллельная поляризация)

При произвольной ориентации вектора \vec{E} , он может быть представлен как суперпозиция двух этих случаев.

7.2. Падение плоской волны на границу раздела двух диэлектриков



Вводное замечание

Рассмотрим падение плоской волны на плоскую границу раздела сред. Предположим, что потери в средах отсутствуют. Будем считать, что плоскость падения совпадает с плоскостью xOy декартовой системы координат. Угол между направлением распространения и осью x называется углом падения. Граница раздела сред совпадает с плоскостью yOz . Направляющие косинусы будут определяться следующим соотношением:

$$\cos \varphi_x = \cos \varphi; \quad \cos \varphi_y = 0; \quad \cos \varphi_z = \sin \varphi,$$

т.е. фазовый множитель:

$$e^{-jk_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}, \quad \text{где} \quad k_1 = \omega \sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}}.$$

7.3. Нормальная поляризация

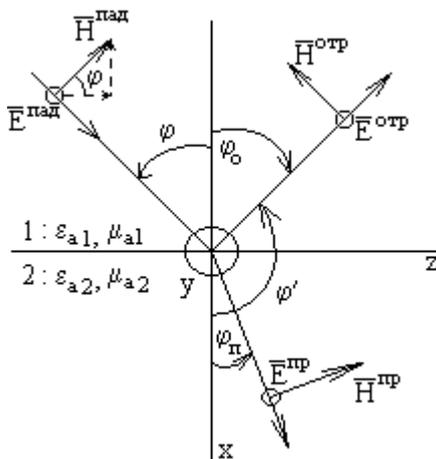
В общем случае: $\vec{E} = \vec{E}_o e^{-jk(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)}$ **1,**

$$\vec{H} = \vec{H}_o e^{-jk(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)} \quad \mathbf{2.}$$

В данном случае вектор \vec{E} направлен так же, как ось y .

$$\vec{E}_o^{nad} = \bar{1}_y E_o^{nad},$$

$$\vec{H}_o^{nad} = (-\bar{1}_x \sin \varphi + \bar{1}_z \cos \varphi) H_o^{nad}.$$



Фазовый множитель —
 $e^{-jk(x \cos \varphi_x + y \cos \varphi_y + z \cos \varphi_z)}$;

$$H_o^{nad} = \frac{E_o^{nad}}{z_{c1}}; \quad z_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}}.$$

Можно записать уравнение падающей волны. Подставляя предыдущие замечания в уравнения (1) и (2), получим:

$$\vec{E}^{nad} = \bar{1}_y E_o^{nad} e^{-jk_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)} \quad \mathbf{3,}$$

$$\vec{H}^{nad} = -(\bar{1}_x \sin \varphi - \bar{1}_z \cos \varphi) \frac{E_o^{nad}}{z_{c1}} e^{-jk_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)} \quad \mathbf{4.}$$

В общем случае в результате падения волны на границу падающая волна полностью или частично отражается или преломляется.

Естественно предположить, что отраженная и преломленная волны являются также плоскими, линейно поляризованными. Полагаем, что направление распространения падающей, отраженной и преломленной волн

находится в плоскости xOz . Кроме того, отраженная и преломленная волны, так же как и падающая, являются нормально поляризованными. Тогда для отраженной и преломленной волн можно записать:

$$\vec{E}^{\text{отр}} = \bar{I}_y E_0^{\text{отр}} e^{-jk_1(x \cos \varphi' + z \sin \varphi')} \quad \mathbf{5,}$$

$$\vec{H}^{\text{отр}} = -(\bar{I}_x \sin \varphi' - \bar{I}_z \cos \varphi') \frac{E_0^{\text{отр}}}{z_{c1}} e^{-jk_1(x \cos \varphi' + z \sin \varphi')} \quad \mathbf{6,}$$

$$\vec{E}^{\text{пр}} = \bar{I}_y E_0^{\text{пр}} e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)} \quad \mathbf{7,}$$

$$\vec{H}^{\text{пр}} = -(\bar{I}_x \sin \varphi_n - \bar{I}_z \cos \varphi_n) \frac{E_0^{\text{пр}}}{z_{c2}} e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)} \quad \mathbf{8,}$$

$$\text{где } k_2 = \omega \sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}} ; \quad z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}}.$$

В данном случае являются известными характеристики падающей волны φ , $E_0^{\text{пад}}$. Искомыми являются φ' , φ_n , $E_0^{\text{отр}}$, $E_0^{\text{пр}}$. Если в результате решения задачи нам удастся получить решение, которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$E_{1\tau}|_{x=0} = E_{2\tau}|_{x=0} ; H_{1\tau}|_{x=0} = H_{2\tau}|_{x=0} \quad \mathbf{9,}$$

то, в соответствии с теоремой единственности, найденное решение будет верным и единственно возможным. Соотношения (9) должны выполняться во всех точках границы раздела, которая совпадает с осью z , т.е. при любых z граничные условия (9) должны выполняться. Это возможно, если падающая, отраженная и преломленная волны имеют одинаковую зависимость по z .

$$k_1 \sin \varphi = k_1 \sin \varphi' \quad \mathbf{10,}$$

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \varphi_n \quad \mathbf{11.}$$

Учитывая, что угол φ' имеет пределы $\frac{\pi}{2} - \pi$, а угол φ имеет пределы $0 - \frac{\pi}{2}$, мы делаем заключение, что:

$$\varphi' = \pi - \varphi \quad \mathbf{12.}$$

При анализе подобных задач обычно предпочитают пользоваться не углом φ' , а дополняющим углом φ_0 — углом отражения:

$$\varphi_0 = \pi - \varphi' \quad \mathbf{13.}$$

Подставляя соотношение (13) в (12), получим: $\varphi_0 = \varphi$ **14**

— первый закон Снелиуса.

Воспользуемся соотношением (11) из которого следует, что:

$$\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2} \quad \mathbf{15,}$$

$$\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}}}{\sqrt{\mu_{a2} \varepsilon_{a2}}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12} \quad \mathbf{16.}$$

Соотношение (15), записанное в форме (16), называется *вторым законом Снелиуса*.

Отношение синуса угла отражения к синусу угла падения равно относительному коэффициенту преломления. Граничное условие (9) записывается следующим образом:

$$E_y^{\text{пад}} + E_y^{\text{отр}} = E_y^{\text{пр}}, \quad x = 0 \quad \mathbf{17,}$$

$$H_z^{\text{пад}} + H_z^{\text{отр}} = H_z^{\text{пр}}, \quad x = 0 \quad \mathbf{18,}$$

где учтено, что тангенциальные компоненты в первой среде образуются падающей и отраженной волнами, а тангенциальные компоненты во второй среде образуются преломленными волнами. Подставляя в соотношения (17), (18) соответствующие компоненты из соотношений (3) — (8), получим:

$$E_o^{\text{пад}} e^{-jk_1 z \sin \varphi} + E_o^{\text{отр}} e^{-jk_1 z \sin \varphi'} = E_o^{\text{пр}} e^{-jk_2 z \sin \varphi_n} \quad \mathbf{19,}$$

$$\cos \varphi \frac{E_o^{\text{пад}}}{Z_{c1}} e^{-jk_1 z \sin \varphi} + \cos \varphi' \frac{E_o^{\text{отр}}}{Z_{c1}} e^{-jk_1 z \sin \varphi'} = \cos \varphi_n \frac{E_o^{\text{пр}}}{Z_{c2}} e^{-jk_2 z \sin \varphi_n} \quad \mathbf{20.}$$

Учитывая одинаковую зависимость по z , отметим, что все фазовые множители одинаковые, и их можно сократить. Кроме того, $\cos \varphi' = \cos \varphi$, получим:

$$E_o^{\text{пад}} + E_o^{\text{отр}} = E_o^{\text{пр}} \quad \mathbf{21,}$$

$$\cos \varphi \frac{E_o^{\text{пад}}}{Z_{c1}} + \cos \varphi' \frac{E_o^{\text{отр}}}{Z_{c1}} = \cos \varphi_n \frac{E_o^{\text{пр}}}{Z_{c2}} \quad \mathbf{22.}$$

Амплитуда отраженной и преломленной волн пропорциональна $E_o^{\text{пад}}$, т.е.

$$\begin{aligned} E_o^{\text{отр}} &= R_{\perp} E_o^{\text{пад}}, \\ E_o^{\text{пр}} &= T_{\perp} E_o^{\text{пад}}, \end{aligned}$$

где R_{\perp} — коэффициент отражения, T_{\perp} — коэффициент преломления.

$$R_{\perp} = \frac{E_o^{\text{отр}}}{E_o^{\text{пад}}}; \quad T_{\perp} = \frac{E_o^{\text{пр}}}{E_o^{\text{пад}}},$$

$$\begin{cases} 1 + R_{\perp} = T_{\perp} \\ 1 - R_{\perp} = T_{\perp} \frac{z_{c1} \cos \varphi_n}{z_{c2} \cos \varphi} \end{cases} \quad 23.$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} R_{\perp} = \frac{z_{c2} \cos \varphi - z_{c1} \cos \varphi_n}{z_{c2} \cos \varphi + z_{c1} \cos \varphi_n} \\ T_{\perp} = \frac{2z_{c2} \cos \varphi}{z_{c2} \cos \varphi + z_{c1} \cos \varphi_n} \end{cases} \quad 24.$$

Коэффициенты отражения и преломления часто называют коэффициентами Френеля.

В соотношении (24) угол преломления можно исключить, используя закон Снелиуса.

$$\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2},$$

$$\cos \varphi_n = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 \varphi}.$$

Теперь можем записать результирующее поле в первой и второй средах, где учтено, что $\cos \varphi' = -\cos \varphi$ и $\sin \varphi' = \sin \varphi$:

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}^{\epsilon\lambda} + \dot{\vec{E}}^{\text{отр}} = \bar{1}_y E_o^{\epsilon\lambda} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} + R_{\perp} e^{-jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi} \\ \dot{\vec{H}}_1 = -\bar{1}_x \sin \varphi \frac{E_o^{\epsilon\lambda}}{z_{c1}} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} + R_{\perp} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi} + \bar{1}_z \cos \varphi \frac{E_o^{\epsilon\lambda}}{z_{c1}} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} - R_{\perp} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \\ \dot{\vec{E}}_2 = \bar{1}_y E_o^{\epsilon\lambda} T_{\perp} e^{-jk_2 (x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)} = \dot{\vec{E}}^{\text{пр}} \\ \dot{\vec{H}}_2 = \dot{\vec{H}}^{\text{пр}} = -(\bar{1}_x \sin \varphi_n - \bar{1}_z \cos \varphi_n) \frac{E_o^{\epsilon\lambda} T_{\perp}}{z_{c2}} e^{-jk_2 (x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)}. \end{cases}$$

7.4. Параллельная поляризация

Рассмотрим плоскую линейную поляризованную волну. Вектор \vec{E} находится в плоскости падения (так же, как и в первом случае).

Выражения для падающей, отраженной и преломленной волн:

$$\dot{\vec{E}}^{\text{пад}} = (\bar{1}_x \sin \varphi - \bar{1}_z \cos \varphi) E_o^{\text{пад}} e^{-jk_1 (x \cos \varphi + z \sin \varphi)} \quad x \leq 0 \quad \mathbf{1},$$

$$\vec{H}^{\text{пад}} = \bar{I}_y \frac{E_o^{\text{пад}}}{z_{c1}} e^{-jk_1(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}, \quad x \leq 0 \quad 2.$$

Аналогично для отраженной и преломленной волн:

$$\vec{E}^{\text{отр}} = (\bar{I}_x \sin \varphi' - \bar{I}_z \cos \varphi') E_o^{\text{отр}} e^{-jk_1(x \cos \varphi' + z \sin \varphi')}, \quad x \leq 0 \quad 3,$$

$$\vec{H}^{\text{отр}} = \bar{I}_y \frac{E_o^{\text{отр}}}{z_{c1}} e^{-jk_1(x \cos \varphi' + z \sin \varphi')}, \quad x \leq 0 \quad 4,$$

$$\vec{E}^{\text{пр}} = (\bar{I}_x \sin \varphi_n - \bar{I}_z \cos \varphi_n) E_o^{\text{пр}} e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)}, \quad x \geq 0 \quad 5,$$

$$\vec{H}^{\text{пр}} = \bar{I}_y \frac{E_o^{\text{пр}}}{z_{c2}} e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)}, \quad x \geq 0 \quad 6.$$

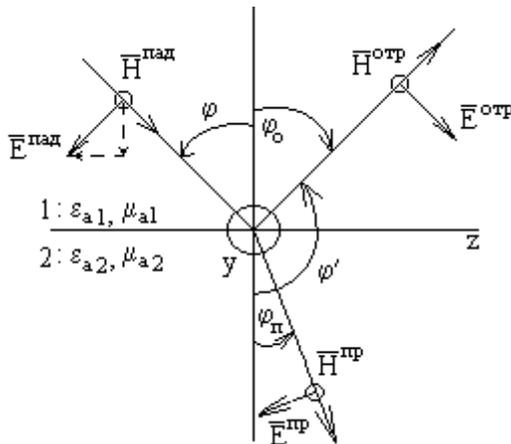
Неизвестными являются φ' , φ_n , $E_o^{\text{отр}}$, $E_o^{\text{пр}}$. Они могут быть найдены в результате решения граничной задачи:

$$: E_{1\tau}|_{x=0} = E_{2\tau}|_{x=0}; \quad H_{1\tau}|_{x=0} = H_{2\tau}|_{x=0} \quad 7.$$

В данном случае соотношение (7) записывается следующим образом:

$$\vec{E}_z^{\text{пад}} + \vec{E}_z^{\text{отр}} = \vec{E}_z^{\text{пр}}, \quad x = 0 \quad 8,$$

$$\vec{H}_y^{\text{пад}} + \vec{H}_y^{\text{отр}} = \vec{H}_y^{\text{пр}}, \quad x = 0 \quad 9.$$



Соотношения (7), (8), (9) должны выполняться во всех точках границы раздела, т.е. при любых значениях координаты z . Это возможно, если составляющие поля отраженной, падающей и преломленной волн имеют одинаковую зависимость от z ,

$$\text{т.е.} \quad k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \varphi' \quad 10,$$

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \varphi_n \quad 11.$$

Из соотношений (10), (11) следуют законы Снелиуса: $\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2}$, $\varphi_o = \varphi$

т.е. законы Снелиуса инвариантны (безразличны) к поляризации падающей волны.

Подставим соотношения (8), (9) в соответствующие выражения для проекций поля:

$$\cos \varphi E_o^{na\delta} e^{-jk_1 z \sin \varphi} - \cos \varphi E_o^{omp} e^{-jk_1 z \sin \varphi'} = \cos \varphi_n E_o^{np} e^{-jk_2 z \sin \varphi_n} \quad \mathbf{12},$$

$$\frac{E_o^{na\delta}}{z_{c1}} e^{-jk_1 z \sin \varphi} + \frac{E_o^{omp}}{z_{c1}} e^{-jk_1 z \sin \varphi'} = \frac{E_o^{np}}{z_{c2}} e^{-jk_2 z \sin \varphi_n} \quad \mathbf{13},$$

Из соотношений (10), (11) следует, что все экспоненты равны. Сокращаем их и получаем:

$$\cos \varphi E_o^{na\delta} - \cos \varphi E_o^{omp} = \cos \varphi_n E_o^{np} \quad \mathbf{14},$$

$$\frac{E_o^{na\delta}}{z_{c1}} + \frac{E_o^{omp}}{z_{c1}} = \frac{E_o^{np}}{z_{c2}} \quad \mathbf{15},$$

$$R_{||} = \frac{E_o^{omp}}{E_o^{na\delta}}; \quad T_{||} = \frac{E_o^{np}}{E_o^{na\delta}}.$$

Тогда соотношения (14), (15) можно переписать:

$$1 - R_{||} = \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi} T_{||} \quad \mathbf{16},$$

$$1 + R_{||} = \frac{z_{c1}}{z_{c2}} T_{||} \quad \mathbf{17}.$$

Решая систему, получим:

$$R_{||} = \frac{z_{c1} \cos \varphi - z_{c2} \cos \varphi_n}{z_{c1} \cos \varphi + z_{c2} \cos \varphi_n} \quad \mathbf{18},$$

$$T_{||} = \frac{2z_{c2} \cos \varphi}{z_{c1} \cos \varphi + z_{c2} \cos \varphi_n} \quad \mathbf{19}.$$

— коэффициенты Френеля для параллельной поляризации.

Косинус φ можно исключить
$$\cos\varphi_n = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2\varphi}$$

Если сравнить коэффициенты Френеля для нормальной и параллельной поляризации, то можно отметить, что для разных поляризаций коэффициенты Френеля различны.

Получим выражения для результирующего поля в первой и второй средах для параллельной поляризации:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}^{\text{пад}} + \dot{\vec{E}}^{\text{отр}} = \bar{I}_x \sin\varphi E_o^{\text{пад}} \left(e^{-jk_1 x \cos\varphi} + R_{||} e^{jk_1 x \cos\varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin\varphi} - \\ - \bar{I}_z \cos\varphi E_o^{\text{пад}} \left(e^{-jk_1 x \cos\varphi} - R_{||} e^{jk_1 x \cos\varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin\varphi} \end{aligned} \quad x \leq 0 \quad \mathbf{20,}$$

$$\dot{\vec{H}}_1 = \dot{\vec{H}}^{\text{пад}} + \dot{\vec{H}}^{\text{отр}} = \bar{I}_y \frac{E_o^{\text{пад}}}{Z_{c1}} \left(e^{-jk_1 x \cos\varphi} + R_{||} e^{jk_1 x \cos\varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin\varphi} \quad x \leq 0 \quad \mathbf{21,}$$

$$\dot{\vec{E}}_2 = \left(\bar{I}_x \sin\varphi_n - \bar{I}_z \cos\varphi_n \right) E_o^{\text{пад}} \Gamma_{||} e^{-jk_2 (x \cos\varphi_n + z \sin\varphi_n)} = \dot{\vec{E}}^{\text{пр}} \quad x \geq 0 \quad \mathbf{22,}$$

$$\dot{\vec{H}}_2 = \dot{\vec{H}}^{\text{пр}} = \bar{I}_y \frac{E_o^{\text{пад}} \Gamma_{||}}{Z_{c2}} e^{-jk_2 (x \cos\varphi_n + z \sin\varphi_n)} \quad x \geq 0 \quad \mathbf{23.}$$

В том случае, если плоская волна падает по нормали к плоскости раздела, понятие плоскости падения теряет смысл. В этом случае углы падающий, отраженный и преломленный равны нулю, и выражения для коэффициентов Френеля упрощаются:

$$R_{\perp} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} = -R_{||},$$

$$T_{\perp} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}} = T_{||}.$$

7.5. Условия полного прохождения волны во вторую среду.

Угол Брюстера

В случае эффекта полного преломления волна в первую среду не отражается и коэффициент отражения равен нулю.

Рассмотрим случай параллельной поляризации:

$$R_{||} = 0 \quad \mathbf{1,}$$

$$z_{c1} \cos \varphi = z_{c2} \cos \varphi_n \quad \mathbf{2.}$$

Выражая косинусы угла падения через синусы, и возводя правую и левую части в квадрат, получим:

$$z_{c1}^2 (1 - \sin^2 \varphi) = z_{c2}^2 \left(1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sin^2 \varphi \right),$$

$$z_{c1}^2 - z_{c1}^2 \sin^2 \varphi = z_{c2}^2 - z_{c2}^2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sin^2 \varphi,$$

$$\left(z_{c1}^2 - z_{c2}^2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right) \sin^2 \varphi = z_{c1}^2 - z_{c2}^2,$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{z_{c1}^2 - z_{c2}^2}{z_{c1}^2 - z_{c2}^2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2},$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \frac{z_{c2}^2}{z_{c1}^2}}{1 - \frac{z_{c2}^2}{z_{c1}^2} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2},$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \frac{\mu_{a2} \varepsilon_{a1}}{\mu_{a1} \varepsilon_{a2}}}{1 - \frac{\mu_{a2} \varepsilon_{a1} \omega^2 \mu_{a1} \varepsilon_{a1}}{\mu_{a1} \varepsilon_{a2} \omega^2 \mu_{a2} \varepsilon_{a2}}},$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \frac{\mu_{a2} \varepsilon_{a1}}{\mu_{a1} \varepsilon_{a2}}}{1 - \frac{\varepsilon_{a1}^2}{\varepsilon_{a2}^2}} \quad \mathbf{3,}$$

$$\varepsilon_{a1} \neq \varepsilon_{a2}.$$

Для реальных диэлектрических сред выполняется равенство:

$$\mu_{a1} = \mu_{a2} \quad \mathbf{4.}$$

Тогда:
$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}}{1 - \frac{\varepsilon_{a1}^2}{\varepsilon_{a2}^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}} = \frac{\varepsilon_{a2}}{1 + \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}}} \quad \mathbf{5.}$$

Вспоминая известное тригонометрическое тождество: $\sin^2 \varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$, получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}}} = \operatorname{tg}\varphi_B$$

6.

Угол φ_B называется углом Брюстера.

В том случае, если в диэлектрических средах магнитные проницаемости не совпадают, то условие существования угла Брюстера определяется следующим неравенством:

$$0 \leq \frac{1 - \frac{\mu_{a2}\varepsilon_{a1}}{\mu_{a1}\varepsilon_{a2}}}{1 - \frac{\varepsilon_{a1}^2}{\varepsilon_{a2}^2}} \leq 1.$$

Рассмотрим случай нормальной поляризации: $\theta = \perp Я$, $z_{c2} \cos\varphi = z_{c1} \cos\varphi_n$.
Выражая $\cos\varphi$ и $\cos\varphi_n$ через $\sin\varphi$ и возводя в квадрат, получим:

$$z_{c2}^2(1 - \sin^2\varphi) = z_{c1}^2 \left(1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sin^2\varphi \right),$$

$$z_{c2}^2 - z_{c2}^2 \sin^2\varphi = z_{c1}^2 - z_{c1}^2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \sin^2\varphi.$$

Выражая $\sin^2\varphi$, получим: $\sin^2\varphi = \frac{z_{c2}^2 - z_{c1}^2}{z_{c2}^2 - z_{c1}^2 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2}$.

Вынося z_{c2} из числителя и знаменателя и раскрывая ее через параметры среды, получим:

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \frac{\mu_{a1}\varepsilon_{a2}}{\mu_{a2}\varepsilon_{a1}}}{1 - \frac{\mu_{a1}\varepsilon_{a2}\omega^2\mu_{a1}\varepsilon_{a1}}{\mu_{a2}\varepsilon_{a1}\omega^2\mu_{a2}\varepsilon_{a2}}},$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \frac{\mu_{a1}\varepsilon_{a2}}{\mu_{a2}\varepsilon_{a1}}}{1 - \frac{\mu_{a1}^2}{\mu_{a2}^2}}$$

7.

Из соотношения (7) следует, что в этом случае существование полного преломления возможно, если $\mu_{a1} \neq \mu_{a2}$ **8.**

Будем полагать, что

$$\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{a2} \quad \mathbf{9.}$$

Получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}} \quad \mathbf{10.}$$

Если же в этой среде $\underline{\varepsilon_{a1} \neq \varepsilon_{a2}}$, то существование угла Брюстера определяется следующим неравенством:

$$0 < \frac{1 - \frac{\mu_{a1} \varepsilon_{a2}}{\mu_{a2} \varepsilon_{a1}}}{1 - \frac{\mu_{a1}^2}{\mu_{a2}^2}} < 1.$$

Полное внутреннее преломление на границе диэлектрических сред с соотношениями $\underline{\varepsilon_{a1} \neq \varepsilon_{a2}}$ и $\mu_{a1} = \mu_{a2}$ возможно только в случае параллельной поляризации. Волны, нормально поляризованные, от границы раздела двух диэлектриков отражаются при любых условиях.

7.6. Полное отражение от границы раздела двух сред Две диэлектрические среды

Определим условия, при которых на границе раздела сред отсутствует преломленная волна, т.е. возникает эффект полного внутреннего отражения. Угол преломления изменяется в пределах $0 \leq \varphi_n \leq \pi/2$. Значение угла падения, при котором угол преломления равен 90° , называется *критическим углом*.

$$\sin \varphi_{\text{кр}} = \frac{k_2}{k_1} \quad \mathbf{1,}$$

$$\varphi_{\text{кр}} = \arcsin \frac{k_2}{k_1} \quad \mathbf{2.}$$

При дальнейшем увеличении угла падения, когда $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$, следует ожидать, что при любой поляризации падающей волны коэффициент отражения будет равен единице. Покажем это:

$$k_2 \sin \varphi_n = k_1 \sin \varphi.$$

Тогда при $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$ должно соблюдаться неравенство:

$$\sin \varphi_n = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi > 1 \quad \mathbf{2'.$$

При реальных значениях угла φ_n это неравенство невозможно. Поэтому для того, чтобы $\sin \varphi_n$ был больше единицы, предположим, что φ_n является комплексной величиной. Тогда:

$$\sin \varphi_n > 1 \rightarrow \varphi_n = \varphi'_n + j\varphi''_n \quad \mathbf{3,}$$

$$\sin \varphi_n = \sin \varphi'_n \operatorname{ch} \varphi''_n + j \cos \varphi'_n \operatorname{sh} \varphi''_n \quad \mathbf{4,}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$x \neq 0 \rightarrow \operatorname{ch} x > 1.$$

Этим свойством мы и воспользуемся. Для выполнения соотношения (2') нужно, чтобы:

$$\varphi'_n = \frac{\pi}{2}(4n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\sin \varphi'_n = 1; \quad \cos \varphi'_n = 0,$$

$$\text{т.е. } \sin \varphi_n = \operatorname{ch} \varphi''_n, \text{ тогда при } \varphi''_n \neq 0 \rightarrow \sin \varphi_n > 1 \quad \mathbf{5.}$$

Вновь вернемся к соотношениям для коэффициентов отражения для нормальной и параллельной поляризации.

$$R_{\perp} = \frac{Z_{C2} \cos \varphi - Z_{C1} \cos \varphi_n}{Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_n},$$

$$R_{\parallel} = \frac{Z_{C2} \cos \varphi - Z_{C1} \cos \varphi_n}{Z_{C2} \cos \varphi + Z_{C1} \cos \varphi_n},$$

$$\varphi > \varphi_{кр}: \sin \varphi_n > 1 \rightarrow \cos \varphi_n = Z_m.$$

Тогда для коэффициента отражения можно записать обобщенное соотношение:

$$\frac{a \mp jb}{a \pm jb},$$

где а и в некоторые действительные коэффициенты.

Найдем модуль:

$$\left| \frac{a - jb}{a + jb} \right| = \left| \frac{(a - jb)^2}{a^2 + b^2} \right| = \left| \frac{a^2 - b^2 - 2jab}{a^2 + b^2} \right| = \left(\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\text{так как при } \varphi > \varphi_{кр}: \quad R_{\perp} = e^{j\Psi_{\perp}} \quad \mathbf{7,}$$

$$R_{\parallel} = e^{j\Psi_{\parallel}} \quad \mathbf{8.}$$

Из (7) и (8) следует, что плотность потока энергии одинакова в падающей и отраженной волнах.

7.7. Условия возникновения полного внутреннего отражения

1 условие: $\sin \varphi_{кр} = \frac{k_2}{k_1}$ так как $\sin \varphi < 1$ то $k_2 < k_1$ -

вторая среда должна быть оптически менее плотной, чем первая

2 условие: $\varphi > \varphi_{кр}$. Получим выражение для структуры поля результирующей волны в первой среде при $\varphi > \varphi_{кр}$

$$\textcircled{I} \quad \dot{\vec{E}}_1 = \bar{I}_y E_0^{п ад} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} + R_{\perp} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \leq 0;$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_1 = & -\bar{I}_x \sin \varphi \frac{E_0^{п ад}}{Z_{C1}} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} + R_{\perp} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi} + \\ & + \bar{I}_z \cos \varphi \frac{E_0^{п ад}}{Z_{C1}} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} - R_{\perp} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \leq 0; \end{aligned}$$

$$\textcircled{II} \quad \begin{aligned} \dot{\vec{E}}_1 = & -\bar{I}_x \sin \varphi E_0^{п ад} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} + R_{\parallel} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi} - \\ & - \bar{I}_z \cos \varphi E_0^{п ад} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} - R_{\parallel} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \leq 0; \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{H}}_1 = \bar{I}_y \frac{E_0^{п ад}}{Z_{C1}} \left(e^{-jk_1 x \cos \varphi} + R_{\parallel} e^{jk_1 x \cos \varphi} \right) e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \leq 0.$$

В нашем случае коэффициенты $R_{\perp} = e^{j\Psi_{\perp}}$, $R_{\parallel} = e^{j\Psi_{\parallel}}$

Для свертки соотношений надо вынести за круглую скобку множитель $e^{\frac{j\Psi_{\perp}}{2}}$

С учетом проделанных преобразований:

$$\textcircled{I} \quad \dot{\vec{E}}_1 = \bar{I}_y 2 E_0^{п ад} \cos \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi_{\perp}}{2} \right) e^{\frac{j\Psi_{\perp}}{2}} e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \leq 0;$$

$$\dot{\vec{H}}_1 = -\bar{I}_x 2 \frac{E_0^{\text{пад}}}{Z_{C1}} \sin \varphi \cos \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi_{\perp}}{2} \right) e^{j \frac{\Psi_{\perp}}{2}} e^{-jk_1 z \sin \varphi} -$$

$$- \bar{I}_z j 2 \frac{E_0^{\text{пад}}}{Z_{C1}} \cos \varphi \sin \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi_{\perp}}{2} \right) e^{j \frac{\Psi_{\perp}}{2}} e^{-jk_1 z \sin \varphi} \quad x \leq 0;$$

$$\textcircled{\text{II}} \quad \dot{\vec{E}}_1 = \bar{I}_x 2 E_0^{\text{пад}} \sin \varphi \cos \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi_{\parallel}}{2} \right) e^{j \frac{\Psi_{\parallel}}{2}} e^{-jk_1 z \sin \varphi} +$$

$$+ \bar{I}_z j 2 E_0^{\text{пад}} \cos \varphi \sin \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi_{\parallel}}{2} \right) e^{j \frac{\Psi_{\parallel}}{2}} e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \leq 0;$$

$$\dot{\vec{H}}_1 = \bar{I}_y \frac{2 E_0^{\text{пад}}}{Z_{C1}} \cos \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi_{\parallel}}{2} \right) e^{j \frac{\Psi_{\parallel}}{2}} e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \leq 0;$$

Из полученных соотношений следует:

1. Они описывают плоскую электромагнитную волну,
2. поверхности равных фаз образуют семейство плоскостей, перпендикулярных оси Z , т.е. определяются уравнением $Z=\text{const}$;
3. амплитуда плоских волн зависит от угла падения φ и координаты X ;
4. поверхность равных амплитуд определяется уравнением $X=\text{const}$;
5. поверхность равных амплитуд не совпадает с поверхностью равных фаз;
6. плоские волны являются неоднородными;
7. плоские волны в первой среде распространяются вдоль оси Z , т.е. вдоль границы раздела, такие волны называются *направляемыми*.

В случае и перпендикулярной, и параллельной поляризации плоские волны имеют составляющую поля в направлении распространения (в случае перпендикулярной поляризации H_z , в случае параллельной поляризации E_z), т.е. полученные решения представляют собой плоскую неоднородную, не - поперечную волну.

Определим фазовую скорость.

Общее выражение $\bar{V}_{\text{TM}} = \frac{\omega}{k}.$

В нашем случае $\bar{V}_{\text{TM}} = \bar{I}_z \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi} = \bar{I}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}} \sin \varphi}.$

Проанализируем $k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \varphi_n,$

при $\varphi > \varphi_{кр}$ $\sin \varphi < 1$; $\sin \varphi > 1$,

$$k_1 > k_1 \sin \varphi > k_2, \quad \frac{\omega}{k_1} < \frac{\omega}{k_1 \sin \varphi} < \frac{\omega}{k_2},$$

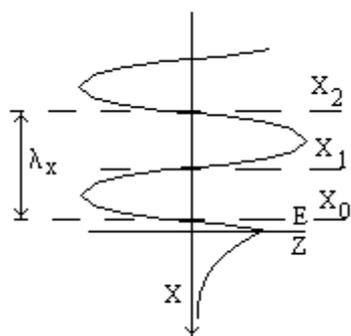
$$V_{\phi 1} < V_{\phi} < V_{\phi 2} \quad \mathbf{9.}$$

Из выражения (9) видно, что направляемая волна распространяется с фазовой скоростью, которая превышает фазовую скорость плоской волны в свободном пространстве с параметрами первой среды, но меньше фазовой скорости в свободном пространстве с параметрами второй среды. Определяем длину волны в направлении распространения: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$,

$$\text{Или в данном случае } \lambda_z = \frac{2\pi}{k_1 \sin \varphi} \quad \mathbf{10.}$$

$$\lambda_1 < \lambda_z < \lambda_2 \quad \mathbf{11.}$$

Из соотношений при $\varphi > \varphi_{кр}$ следует, что в направлении, перпендикулярном границе раздела (параллельной оси X), поле имеет характер стоячей волны с пространственным периодом или длиной волны:



$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_1 \cos \varphi}.$$

Глядя на эти же соотношения, можно отметить, что поперечные относительно направления распространения компоненты поля (\bar{I}_x, \bar{I}_y) — синфазны. Продольная относительно поперечных, имеет фазовый сдвиг 90° (Z).

Определим энергетические параметры. Определим комплексный вектор Пойнтинга:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\bar{E}} \bar{H}^*] = \bar{I}_z \frac{2E_0^2 \text{пад}}{Z_{C1}} \sin \varphi \cos^2 \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi}{2} \right) + \\ + \bar{I}_x j \frac{E^2 \text{пад}}{Z_{C1}} \cos \varphi \sin(2k_1 x \cos \varphi + \Psi) \end{aligned} \quad \mathbf{12.}$$

В выражении (12) знак "+" соответствует нормальной поляризации, а знак "-" параллельной поляризации. Как следует из (12), комплексный вектор Пойнтинга имеет реальную и мнимую части.

$$\bar{\Pi} = \bar{I}_z \Pi_z + j \bar{I}_x \Pi_x$$

Среднее за период значение вектора Пойнтинга направлено вдоль оси Z.

$$\bar{P}_{cp} = \bar{I}_z \frac{2E^2_{пад}}{z_{c1}} \sin \varphi \cos^2 \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi}{2} \right) \quad 13.$$

Т.е. в среднем за период энергия переносится вдоль оси Z. В направлении, перпендикулярном границе раздела, существует реактивный поток мощности. Из (*) видно, что имеется бесконечное количество плоскостей, перпендикулярных оси X (параллельных границе раздела), в которых E_τ и H_n обращаются в нуль. Точки пересечения этих плоскостей с осью X можно определить из следующего соотношения

$$\cos \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi}{2} \right) = 0.$$

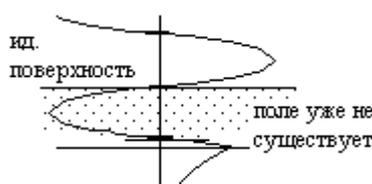
В случае поляризации, параллельной границе раздела будет компонента E_z . Из предыдущего соотношения следует:

$$\textcircled{\perp} \quad X_n = -\frac{\pi (2n+1) + \Psi_\perp}{2 k_1 \cos \varphi} \quad 14,$$

где $n=1, 2, 3, \dots$

Из приведенных рассуждений следует, что в плоскостях, параллельных границе раздела, положение которых описывается в (14), удовлетворяются граничные условия, соответствующие условиям на поверхности идеального проводника ($E_\tau=0, H_n=0$).

Если мы одну из этих плоскостей заменим идеально проводящей (X_n), то получим, что при $-\infty < X < X_n$ (т.е. над плоскостью в первой среде) поле останется неизменным.



Еще одна характерная особенность этих плоскостей (14) заключается в том, что поток энергии через эти поверхности (как активной, так и реактивной) равен нулю.

Определим среднее за период значение скорости распространения энергии в первой среде.

В первой среде при $\varphi > \varphi_{кр}$ выделим энергетическую трубку, т. е. часть пространства, через боковые поверхности которой отсутствует перенос энергии, т. е. $\bar{P}_n = 0$

В качестве энергетической трубки удобно взять часть пространства, ограниченную соседними поверхностями, положение которых определяется (14). Например X_n, X_{n+1} .

В этом случае, учитывая, что составляющая поля зависит от координаты X , выражение для скорости распространения энергии обязательно включает интегрирование. Подставляя соответствующие компоненты и осуществляя интегрирование, получим

$$\bar{V}_z = \frac{\int_{X_n}^{X_{n+1}} \bar{n}_{-p} dx}{\int_{X_n}^{X_{n+1}} \omega_{cp} dx} \quad 15,$$

$$\bar{V}_z = \bar{I}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}}} \sin \varphi \quad 16.$$

Из (16) видно, что скорость распространения энергии в первой среде меньше скорости света в первой среде.

□ квадрат скорости света

Выражение для фазовой скорости $\bar{V}_\Phi = \bar{I}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}} \sin \varphi} \bar{V}_z \bar{V}_\Phi = V_{01}^2$.

Рассмотрим поле во второй среде

Исходные соотношения:

$$\textcircled{I} \quad \dot{\bar{E}}_2 = \bar{I}_y E_0^{\text{н ад}} \Gamma_\perp e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)}, \quad x \geq 0 \quad 1;$$

$$\dot{\bar{H}}_2 = -(\bar{I}_x \sin \varphi_n - \bar{I}_z \cos \varphi_n) \frac{E_0^{\text{н ад}} \Gamma_\perp}{Z_{C2}} e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)}, \quad x \geq 0 \quad 2;$$

$$\textcircled{II} \quad \dot{\bar{E}}_2 = (\bar{I}_x \sin \varphi_n - \bar{I}_z \cos \varphi_n) E_0^{\text{н ад}} \Gamma_\parallel e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)}, \quad x \geq 0 \quad 3;$$

$$\dot{\bar{H}}_2 = \bar{I}_y \frac{E_0^{\text{н ад}} \Gamma_\parallel}{Z_{C2}} e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)}, \quad x \geq 0 \quad 4.$$

При $\varphi > \varphi_{кр}$ $\cos \varphi_n$ является чисто мнимой величиной.

Удобно ввести обозначение $k_2 \cos \varphi_n = -j\alpha$ 5,

где α при $\varphi > \varphi_{кр}$ является действительной величиной: $\alpha = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \varphi - k_2^2}$ 6.

Из закона Снелиуса: $\frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2}$, $\sin \varphi_n = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi$, вспомогательная величина

$$\cos \varphi_n = \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 \varphi} = jB, \quad B = \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 \varphi - 1}, \quad \alpha = jk_2 B.$$

Минус в (5) выбран из физических соображений.

Подставляя (5) в (1) - (4) и учитывая, что $k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \varphi_n$, получим:

$$\textcircled{I} \quad \dot{\bar{E}}_2 = \bar{I}_y E_0^{\text{пад}} \Gamma_{\perp} e^{-\alpha x} e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \geq 0 \quad \mathbf{7};$$

$$\dot{\bar{H}}_2 = -\frac{k_1}{k_2} \left(\bar{I}_x \sin \varphi + \bar{I}_z \frac{j\alpha}{k_1} \right) \frac{E_0^{\text{пад}} T_{\perp}}{Z_{C2}} e^{-\alpha x} e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \geq 0 \quad \mathbf{8};$$

$$\textcircled{II} \quad \dot{\bar{E}}_2 = \left(\bar{I}_x \sin \varphi + \bar{I}_z j \frac{\alpha}{k_1} \right) \frac{k_1}{k_2} E_0^{\text{пад}} \Gamma_{\parallel} e^{-\alpha x} e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \geq 0 \quad \mathbf{9};$$

$$\dot{\bar{H}}_2 = \bar{I}_y \frac{E_0^{\text{пад}} \Gamma_{\parallel}}{Z_{C2}} e^{-\alpha x} e^{-jk_1 z \sin \varphi}, \quad x \geq 0 \quad \mathbf{10}.$$

Из (7) - (10) видно, что при $\varphi > \varphi_{\text{кр}}$ поле во второй среде имеет характер плоской волны (поверхность равных фаз определяется уравнением $Z=\text{const}$) распространяющейся вдоль границы раздела. Поверхность равных амплитуд ($X=\text{const}$) перпендикулярна поверхности равных фаз ($Z=\text{const}$), т.е. плоская волна является неоднородной. В направлении распространения вдоль оси Z имеются составляющие поля (H_z при перпендикулярной поляризации и E_z при параллельной поляризации), т. е. плоская неоднородная волна является непоперечной. Фазовая скорость волны и длина волны определяется теми же соотношениями, что и для волны в первой среде

$$\bar{V}_{\varphi} = \bar{I}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \epsilon_{a1}} \sin \varphi}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_1 \sin \varphi},$$

$$\alpha = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \varphi - k_2^2}, \quad k_2 \cos \varphi_n = -j\alpha.$$

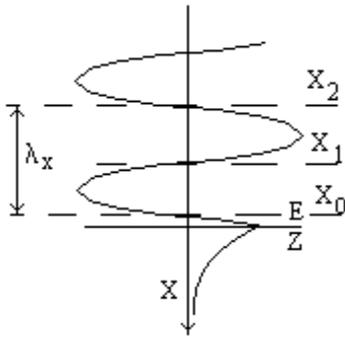
Характерное отличие: амплитуда плоской волны экспоненциально убывает от границы раздела, т. е. поле существует в некотором приграничном слое. Направляемые волны, амплитуды которых экспоненциально затухают при удалении от границы раздела, называются *поверхностными*.

Проанализируем, в каких пределах изменяется α — коэффициент, характеризующий уменьшение амплитуды волны в направлении, перпендикулярном границе раздела.

При $\varphi > \varphi_{кр}$ α является действительным коэффициентом. При изменении

$$\varphi_{кр} \leq \varphi \leq \pi/2$$

α изменяется так: $0 \leq \alpha \leq \sqrt{k_1^2 - k_2^2}$.



Для вычисления скорости распространения энергии в качестве энергетической трубки следует взять часть пространства, которое простирается от $x = \infty$ до $x = x_0$.

Вектор Пойнтинга в первой среде:

$$\dot{\vec{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^*] = \bar{I}_z \frac{2E_0^{2na0}}{z_{c1}} \sin \varphi \cos^2 \left(k_1 x \cos \varphi + \frac{\Psi}{2} \right) \pm \bar{I}_x j \frac{E_0^{2na0}}{z_{c1}} \cos \varphi \sin (2k_1 x \cos \varphi + \Psi)$$

Координата X_0 определяется из соотношения: $\sin(2k_1 x_0 \cos \varphi + \Psi) = 0$

$$X_0 = -\frac{\Psi}{2k_1 \cos \varphi}, \quad \bar{V}_\varnothing = \frac{\int_{\Delta S} \bar{\Pi}_{cp} dx}{\int_{\Delta S} \omega_{cp} dx}$$

В данном случае интегрирование осуществляется не по площади, а по координате X .

$$\bar{V}_\varnothing = \frac{\int_{X_n}^{X_{n+1}} \bar{\Pi}_{cp} dx}{\int_{X_n}^{X_{n+1}} \omega_{cp} dx}, \quad \bar{V}_\varnothing = \bar{I}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}}} \sin \varphi$$

Скорость распространения энергии во второй среде определяется тем же соотношением, что и в первой среде.

7.8. Диэлектрик и идеальный проводник

Пусть первая среда — идеальный диэлектрик, $\mu_{a1}, \varepsilon_{a1}$.

Вторая среда — идеальный проводник, $\sigma = \infty$.

Характеристическое сопротивление проводящих сред $z_{cm} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\sigma}} e^{j\pi/4}$.

Характеристическое сопротивление идеальной проводящей среды равно нулю — $\sigma \rightarrow \infty, z_{cm} \rightarrow 0$.

Полученные ранее выражения для коэффициентов Френеля для двух идеальных диэлектрических сред применимы и в данном случае.

$$R_{\perp} = \frac{z_{c2} \cos \varphi - z_{c1} \cos \varphi_n}{z_{c2} \cos \varphi + z_{c1} \cos \varphi_n}, \quad T_{\perp} = \frac{2z_{c2} \cos \varphi}{z_{c2} \cos \varphi + z_{c1} \cos \varphi_n};$$

$$R_{\parallel} = \frac{z_{c1} \cos \varphi - z_{c2} \cos \varphi_n}{z_{c1} \cos \varphi + z_{c2} \cos \varphi_n} \quad | \quad T_{\parallel} = \frac{2z_{c2} \cos \varphi}{z_{c1} \cos \varphi + z_{c2} \cos \varphi_n}.$$

Полагая вторую среду идеальным проводником, подставляем $z_{c2}=0$.

$$R_{\perp} = -1; \quad R_{\parallel} = e^{j\pi}; \quad \Psi_{\perp} = \pi; \quad T_{\perp} = 0,$$

$$R_{\parallel} = 1; \quad \Psi_{\parallel} = 0; \quad T_{\parallel} = 0.$$

Если вторая среда является проводником, то полное внутреннее отражение имеет место при любых углах падения. Поле во второй среде отсутствует, поле в первой среде представляет собой направляемую волну, распространяющуюся вдоль границы раздела. Выражение фазовой скорости, длины волны вдоль границы раздела, для скорости распространения энергии совпадают с предыдущим случаем:

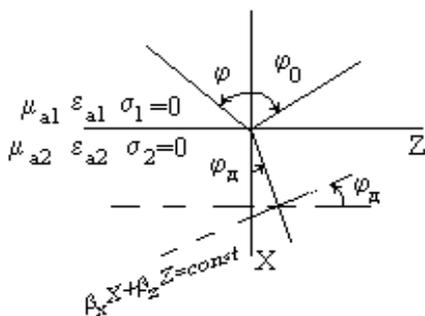
$$\bar{V}_{\phi} = \bar{V}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1} \sin \varphi}}, \quad l_z = \frac{2p}{k_1 \sin j}, \quad \bar{V}^{\partial} = \bar{V}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_{a1} \varepsilon_{a1}}} \sin \varphi.$$

В направлении, перпендикулярном границе раздела, поле в первой среде имеет характер стоячей волны с пространственным периодом (длиной волны):

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_1 \cos \varphi}.$$

7.9. Падение плоской волны на границу поглощающей среды

Пусть плоская волна падает из идеального диэлектрика на плоскую границу с поглощающей средой. Общие соотношения, полученные для двух идеальных диэлектрических сред, применимы и в данном случае; т. к. вторая среда является поглощающей, то мы должны предположить, что k_2 является комплексной величиной:



$$k_2 = \text{Re} + j\text{Im}, \quad k_2 = \beta_2 + j\alpha_2.$$

Закон Снелиуса применим в любых случаях

$$k_2 \sin \varphi_n = k_1 \sin \varphi ;$$

т. к. k_2 величина комплексная, а k_1 и $\sin \varphi$ — действительные, то следует предположить, что $\sin \varphi_n$ — комплексная величина.

Таким образом в данном соотношении φ_n уже нельзя считать геометрическим углом, характеризующим направление распространения преломленной волны. В этом случае удобно ввести следующие обозначения:

$$k_2 \sin \varphi_n = k_1 \sin \varphi = \beta_z,$$

$$k_2 \cos \varphi_n = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi} = \beta_x - j\alpha.$$

Рассмотрим случай перпендикулярной поляризации и запишем выражения для составляющих поля во второй среде:

$$\textcircled{\perp} \quad \dot{\vec{E}}_2 = \bar{1}_y E_0^{n\text{ад}} T_{\perp} e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)} \quad x \geq 0,$$

$$\dot{\vec{H}}_2 = -(\bar{1}_x \sin \varphi_n - \bar{1}_z \cos \varphi_n) \frac{E_0^{n\text{ад}} T_{\perp}}{z_{C2}} e^{-jk_2(x \cos \varphi_n + z \sin \varphi_n)} \quad x \geq 0,$$

$$\dot{\vec{E}}_2 = \bar{1}_y E_0^{n\text{ад}} T_{\perp} e^{-\alpha x} e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)} \quad x \geq 0,$$

$$\dot{\vec{H}}_2 = -(\bar{1}_x \beta_z - \bar{1}_z (\beta_x - j\alpha)) \frac{E_0^{n\text{ад}} T_{\perp}}{k_2 z_{C2}} e^{-\alpha x} e^{-j(\beta_x x + \beta_z z)} \quad x \geq 0.$$

Из соотношения следует, что в этом случае поле во второй среде представляет собой плоскую волну, у которой поверхность равных фаз не совпадает с поверхностью равных амплитуд

$$b_x x + b_z z = \text{const}, \quad x = \text{const}.$$

Это плоская неоднородная непоперечная волна. Направление распространения преломленной волны составляет с осью угол φ_d (действит.).

Учитывая, что фазовый фронт перпендикулярен направлению распространения волны, угол φ_d можно определить как :

$$\text{tg } \varphi_d = \frac{\beta_z}{\beta_x} = \frac{k_1 \sin \varphi}{\text{Re} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}.$$

В этом случае поле в первой среде не имеет принципиальных отличий от случая двух идеальных диэлектрических сред.

Амплитуда поля во второй среде экспоненциально затухает при удалении от границы раздела. Угол между поверхностью равных фаз и поверхностью равных амплитуд также совпадает с φ_d .

Для дальнейшего рассмотрения особо важным является случай, когда
 $k_2 \gg k_1$.

Обычно это неравенство выполняется, если вторая среда является реальным проводником

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}}.$$

В этом случае при любом угле падения φ $\operatorname{tg} \varphi_d \cong 0$, отсюда $\varphi_d \cong 0$.

Это означает, что при любом угле φ преломленная волна распространяется практически перпендикулярно к границе раздела. При этом поверхность равных фаз можно считать совпадающей с поверхностью равных амплитуд, т. е. преломленная волна является однородной. Кроме того, при выполнении этого неравенства составляющими поля в направлении распространения преломленной волны можно пренебречь по сравнению с поперечными составляющими, т. е. она является плоской, однородной и поперечной.

Таким образом при выполнении этого неравенства преломленную волну можно рассматривать как плоскую волну, существующую в однородном свободном изотропном пространстве с параметрами второй среды. При выполнении этого неравенства преломленная волна существует в тонком приграничном слое.

Для реальных металлов $z_{cm} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$, поэтому между компонентами преломленной волны существует фазовый сдвиг $\pi/4$.

7.10. Приближенные граничные условия Щукина-Леонтовича

Самой распространенной задачей является задача реальных проводящих сред. Решение подобных задач существенно упрощается при использовании приближенных граничных условий Щукина-Леонтовича.

В отличие от традиционных граничных условий, которые устанавливают взаимосвязь между составляющими поля на границе раздела в разных средах, граничные условия Щукина-Леонтовича устанавливают взаимосвязь в одной среде. Из предыдущего параграфа известно, что если вторая среда является

реальным проводником, то преломленная в ней волна распространяется перпендикулярно к границе раздела и составляющие поля преломленной волны можно описать теми же соотношениями, что плоскую волну в однородном изотропном пространстве.

$$\dot{\vec{E}}_2 = z_{C2} [\bar{1}_n \dot{\vec{H}}_2] \quad \mathbf{1.}$$

$\bar{1}_n$ — нормаль к границе раздела направленная в сторону проводящей среды.

Составляющие поля преломленной волны находятся в плоскости, параллельной границе раздела.

На границе раздела S должны выполняться условия:

$$\left. \begin{array}{l} E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{array} \right\} \text{ на } S \quad \mathbf{2.}$$

Тогда, с учетом (2), (1) можно переписать

$$\bar{1}_\tau E_{1\tau} = z_{C2} [\bar{1}_n, \bar{1}_\tau H_{1\tau}] \quad \mathbf{3.}$$

В (3) вектор H можно представить в полной форме:

$$\bar{H}_1 = \bar{1}_n H_{1n} + \bar{1}_\tau H_{1\tau}, \text{ потому, что } [\bar{1}_n, \bar{1}_n H_{1n}] \equiv 0,$$

$$\boxed{\bar{1}_\tau E_{1\tau} = z_{C2} [\bar{1}_n \bar{H}_1]} \quad \mathbf{4.}$$

— приближенное граничное условие Шукина-Леонтовича — устанавливает взаимосвязь между тангенциальными составляющими в первой среде на границе раздела с хорошо проводящей средой.

Из (4) следует, что на поверхности реальных проводников имеется малая по величине, но конечная тангенциальная компонента E_τ . E_τ и H_τ на поверхности реальных проводников определяют поток энергии, направленной внутрь проводящей среды: $z_{C2} = z_{cm} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}}$;

z_{C2} — очень малая величина. При $\sigma \rightarrow \infty$ $z_{C2} \rightarrow 0$ и получаем: $E_{1\tau}|_S = 0$

—граничное условие на поверхности идеальных проводников.

В основе наших рассуждений стоит предположение о том, что $\varphi_d = 0$ т. е. преломленная волна распространяется перпендикулярно к поверхности. В

действительности она распространяется под очень малым углом к нормали. Приближенность состоит в том, что мы предполагаем этот угол равным нулю.

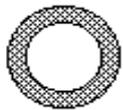
Тангенциальная компонента магнитного поля на поверхности реальных металлов мало отличается от тангенциальной компоненты на поверхности идеального проводника, поэтому при решении задач и используются граничные условия Щукина-Леонтовича. Обычно предполагают:

$$H_{1\tau} \Big|_{S, \sigma \uparrow \uparrow} = H_{1\tau} \Big|_{S, \sigma = \infty}$$

Поверхностный эффект

8.1. Явление поверхностного эффекта

В предыдущих параграфах было показано, что переменное электромагнитное поле, а следовательно и объемная плотность тока проводимости, в проводящих средах экспоненциально убывают при удалении от границы раздела ($\vec{j}^{\text{э}} = \sigma \vec{E}$). Т. е. на высоких частотах поле и ток оказываются сосредоточенными в тонком приграничном слое. Это явление получило название *поверхностного* или *скин-эффекта* (пов. эф.).



Вследствие поверхностного эффекта эффективное поперечное сечение проводника оказывается существенно меньше его геометрического сечения, что является причиной увеличения активного сопротивления.

С другой стороны поверхностный эффект позволяет создавать защитные металлические экраны, предотвращающие воздействие электромагнитного поля на радиотехнические устройства.

Следует подчеркнуть, что в случае постоянного или низкочастотного электромагнитного поля металлические экраны выполняются из диа- и парамагнитных материалов. Это позволяет осуществить защиту от электрического поля, но не экранирует магнитное поле.

8.2. Потери энергии в проводниках

На поверхности реальных проводников $E_{\tau} \neq 0$. Это является причиной существования потока энергии, направленного внутрь проводящей среды. Получим соотношения для мощности потерь в проводящей среде.

Будем считать, что размеры проводящего тела и минимальный радиус кривизны $\gg d$ (глубины проникновения). Это условие применимости приближенных граничных условий Щукина-Леонтовича. В этом случае поток

энергии, направленный внутрь среды, определяет джоулевы потери. Предположим, что на поверхности S задана компонента H_τ .

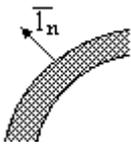
$$\bar{1}_\tau H_{1\tau} \Big|_S = \dot{\bar{H}}_0$$

E_τ можно вычислить из граничных условий Щукина-Леонтовича

$$\bar{1}_\tau E_{1\tau} \Big|_S = \dot{\bar{E}}_0 = z_{C2} [\bar{1}_n \dot{\bar{H}}_0]$$

Используя выражения для E и H , определим плотность потока энергии, направленного внутрь проводящей среды:

$$\dot{\bar{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^*] = \frac{z_{C2}}{2} [[\bar{1}_n \dot{\bar{H}}_0] \dot{\bar{H}}_0^*],$$



$$[[\bar{1}_n \dot{\bar{H}}_0] \dot{\bar{H}}_0^*] = \dot{\bar{H}}_0 (\dot{\bar{H}}_0^* \bar{1}_n) - \bar{1}_n (\dot{\bar{H}}_0^* \dot{\bar{H}}) = -\bar{1}_n \left| \dot{\bar{H}}_{0m} \right|^2.$$

Таким образом

$$\dot{\bar{\Pi}} = -\bar{1}_n \frac{z_{C2}}{2} \left| \dot{\bar{H}}_{0m} \right|^2.$$

Здесь $\bar{1}_n$ имеет отрицательное значение, т. к. поток направлен внутрь проводящей среды, а нормаль является внешней по отношению к среде.

Если размеры тела \gg глубины проникновения d , т. е. поток энергии проходит сквозь тело, то путем интегрирования вектора $\dot{\bar{\Pi}}$ по замкнутой поверхности S проводящего тела можно вычислить комплексную мощность потерь:

$$\dot{P} = \oint_S \dot{\bar{\Pi}} d\bar{S},$$

Учитывая, что векторный элемент площади $d\bar{S} = -\bar{1}_n dS$, получим:

$$\dot{P} = \frac{z_{C2}}{2} \oint_S \left| \dot{\bar{H}}_{0m} \right|^2 dS,$$

$$z_{C2} = z_{Cm} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} (1+j), \quad d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}},$$

$$\frac{z_{C2}}{2} = \frac{1+j}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma} \left(\frac{\sigma}{\sigma}\right)}} = \frac{1+j}{2\alpha d}.$$

Таким образом

$$\dot{P}_\Pi = \frac{1+j}{2\alpha d} \oint_S \left| \dot{\bar{H}}_{0m} \right|^2 dS$$

1.

Таким образом
$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_{AB} \bar{H} d\bar{l}.$$

Будем полагать известной тангенциальную компоненту магнитного поля на поверхности проводящей среды $\bar{l}_\tau H_\tau = \bar{l}_\tau H_0.$

Учитывая $d\bar{l} = \bar{l}_\tau dl$, а также неизменность магнитного поля в пределах dl ,

$$\int_{AB} \bar{H} dl = H_0 \Delta l \quad 2.$$

Мы получили, что $I^\vartheta = H_0 \Delta l.$

Если предположить, что ток сосредоточен в бесконечно тонком слое, получим:

$$\boxed{J^\vartheta = \frac{I^\vartheta}{\Delta l} = H_0} \quad 3.$$

Используя систему единичных векторов:

$$\vec{J}^\vartheta = [\bar{l}_n \bar{H}_0] \quad 4.$$

Соотношения, определяющие эквивалентный поверхностный ток через тангенциальную компоненту магнитного поля совпадают с известным граничным условием на поверхности идеального проводника.

8.4 Поверхностные сопротивления

На поверхности проводящей среды тангенциальная компонента E и вектор плотности поверхностного тока являются сонаправленными. Поэтому можно записать соотношение:

$$\boxed{\vec{E}_0 = z_s \vec{J}^\vartheta} \quad 1,$$

где z_s — поверхностное сопротивление. Учитывая, что поверхностный ток

$$\vec{J}^\vartheta = [\bar{l}_n \vec{H}_0] \quad 2$$

и $\vec{E}_0 = z_{c2} [\bar{l}_n \vec{H}_0]$ — граничные условия Щукина-Леонтовича 3

Из сопоставления (1) — (3) следует, что $z_s = z_{c2} \quad 4,$

$$\boxed{z_s = \frac{1+j}{\sigma d}} \quad 5.$$

Выделим целую часть поверхностного сопротивления

$$R_s = \frac{1}{\sigma d}$$

6.

Из (6) следует, что вследствие поверхностного эффекта проводящее полупространство обладает таким активным сопротивлением, как проводящий слой толщиной d без учета поверхностного эффекта.

Введенное новое понятие поверхностного сопротивления можно использовать в выражении для комплексной мощности потерь

$$\dot{P} = \frac{1+j}{2\sigma d} \oint_S |\dot{H}_{0m}|^2 dS,$$

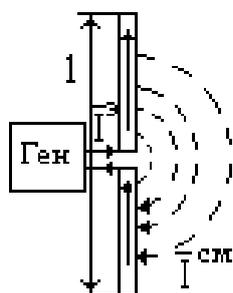
$$\dot{P} = \frac{1}{2} \oint_S z_s |\dot{J}^{\partial}|^2 dS.$$

Соответственно

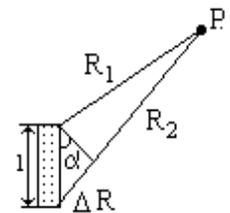
$$P_{cp} = \frac{1}{2} \oint_S R_s |\bar{J}^{\partial}|^2 dS.$$

Элементарные излучатели

9.1. Элементарный электрический излучатель (ЭЭИ)



Под ЭЭИ подразумевают линейный проводник с переменным электрическим током, длина которого $\ll \lambda$ (диаметр \ll длины). ЭЭИ предназначен для возбуждения электромагнитного поля в свободном пространстве.



Учитывая, что длина ЭЭИ $\ll \lambda$, его можно рассматривать как гипотетический изотропный излучатель.

Для вычисления поля в точке P , вдали от ЭЭИ, можно воспользоваться *принципом суперпозиции*. Для этого ЭЭИ можно разбить на элементарные излучатели, каждый из которых можно рассматривать как точечный излучатель.

Поле, возбуждаемое в каждом из фрагментов, будет отличаться по фазе вследствие геометрической разности хода. Эта разность будет максимальна для фрагментов, расположенных на краях ЭЭИ. Из рисунка видно, что максимальная разность хода будет:

$$\Delta R = l \sin \alpha,$$

максимальная разность фаз

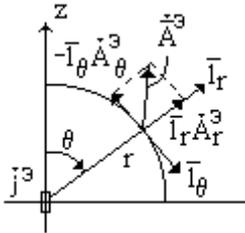
$$\Delta \varphi = \beta \Delta R = \frac{2\pi}{\lambda} l \sin \alpha.$$

По определению $l/\lambda \ll 1$. Таким образом видно, что $\Delta\phi$ будет мало при любом угле α . То есть это свойство, которое является основным свойством точечного излучателя, позволяет ЭЭИ также рассматривать в качестве точечного.

9.2. Векторный электрический потенциал для ЭЭИ

$$\nabla^2 \vec{A}^{\dot{\vartheta}} + \gamma^2 \vec{A}^{\dot{\vartheta}} = -\mu_a \vec{j}^{\dot{\vartheta} \text{ct}}, \quad \gamma = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0},$$

Общее решение
$$\vec{A}^{\dot{\vartheta}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \vec{j}^{\dot{\vartheta}} \frac{e^{-j\gamma R}}{R} dV \quad 1.$$



В силу пространственной симметрии поставленной задачи естественно выбрать сферическую систему координат. ЭЭИ разместим в центре. Нужно вычислить, используя (1), поле векторного электрического потенциала, создаваемого ЭЭИ в любой точке пространства.

В это соотношение входит радиус-вектор R (от точки на поверхности ЭЭИ до точки наблюдения P). Так как l/λ мало, то радиус-вектор можно считать величиной постоянной и равной радиальной координате до точки наблюдения r .

Таким образом:

$$\vec{A}^{\dot{\vartheta}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \int_V \vec{j}^{\dot{\vartheta} \text{ct}} dV \quad 2.$$

В соотношении (2) интегрирование осуществляется по объему, занимаемому ЭЭИ.

На первый взгляд интеграл в (2) должен вызывать логические трудности т. к. интегрирование осуществляется по исчезающе малому объему. Это

преодолевают так: анализируют размерность $\int_V [A \cdot m]$. Учитывая, что в ЭЭИ

амплитуду тока можно считать практически равномерной, а интегрирование по объему вырождается в интегрирование по длине, размерность интеграла соблюдается, если он равен:

$$\int_V \vec{j}^{\dot{\vartheta} \text{ct}} dV = \vec{I}_z I^{\dot{\vartheta}} l \quad 3.$$

Таким образом, векторный электрический потенциал будет равен:

$$\vec{A}^{\dot{\vartheta}} = \vec{I}_z \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma r}}{r} I^{\dot{\vartheta}} l \quad 4,$$

$$\vec{A}^{\dot{\vartheta}}(p) = \vec{I}_z \frac{\mu_a}{4\pi} I^{\dot{\vartheta}}(Q) l \frac{e^{-j\gamma r}}{r}$$

Место
положения

Полученный векторный электрический потенциал совпадает по направлению с током, протекающим по ЭЭИ. Разложим векторный электрический потенциал по координатам сферической системы:

$$\dot{A}_r^\vartheta = \left| \vec{\dot{A}}^\vartheta \right| \cos\theta e^{-j\gamma r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \dot{I}^\vartheta l \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \cos\theta \quad \mathbf{5},$$

$$\dot{A}_\theta^\vartheta = - \left| \vec{\dot{A}}^\vartheta \right| \sin\theta e^{-j\gamma r} = - \frac{\mu_a}{4\pi} \dot{I}^\vartheta l \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \sin\theta \quad \mathbf{6},$$

$$\text{Т. к. } \varphi \perp z, \text{ то} \quad \dot{A}_\varphi^\vartheta = 0 \quad \mathbf{7}.$$

9.3. Составляющие электромагнитного поля

В соответствии с изложенным выше алгоритмом, составляющие электромагнитного поля определяются по полю вектора энергетического, используя уравнения связи, которые имеют следующий вид:

$$\vec{\dot{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{\dot{A}}^\vartheta \quad \mathbf{1},$$

$$\vec{\dot{E}} = \frac{1}{j\omega\mu_a\epsilon_a} [\text{grad div } \vec{\dot{A}}^\vartheta + \gamma^2 \vec{\dot{A}}^\vartheta] \quad \mathbf{2},$$

$$\dot{A}_r^\vartheta = \frac{\mu_a}{4\pi} \dot{I}^\vartheta l \cos\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad \mathbf{3},$$

$$\dot{A}_\theta^\vartheta = - \frac{\mu_a}{4\pi} \dot{I}^\vartheta l \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad \mathbf{4},$$

$$(\text{rot } \vec{\dot{A}}^\vartheta)_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\varphi} (\dot{A}_\theta^\vartheta r) - \frac{\partial}{\partial\theta} (\dot{A}_\varphi^\vartheta r \sin\theta) \right],$$

$$(\text{rot } \vec{\dot{A}}^\vartheta)_\theta = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\dot{A}_\varphi^\vartheta r \sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\varphi} \dot{A}_r^\vartheta \right],$$

$$(\text{rot } \vec{\dot{A}}^\vartheta)_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \dot{A}_r^\vartheta - \frac{\partial}{\partial r} (\dot{A}_\theta^\vartheta r) \right].$$

Задача вычисления электромагнитного поля существенно упрощается; т. к.

$$\dot{A}_\varphi^\vartheta = 0, \text{ оставшиеся проекции не зависят от угла } \varphi \text{ и } \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0.$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{1}{\mu_a} \frac{1}{r} \left[\frac{\mu_a}{4\pi} \dot{I}^\vartheta l \frac{e^{-j\gamma r}}{r} (-\sin\theta) + \frac{\mu_a}{4\pi} \dot{I}^\vartheta l \sin\theta (-j\gamma) e^{-j\gamma r} \right],$$

магнитное поле в любой точке пространства

$$\dot{H}_\varphi = - \frac{\dot{I}^\vartheta l}{4\pi r^2} \sin\theta e^{-j\gamma r} (1 + j\gamma r) \quad \mathbf{5}.$$

Теперь определим электрическое поле:

Первое уравнение Максвелла в нашем случае

$$\text{rot } \vec{\dot{H}} = j\omega\epsilon^s \vec{\dot{E}},$$

$$\vec{\dot{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \text{rot } \vec{\dot{H}}.$$

Подставим вместо \vec{A} в соотношениях (для $\text{rot } \vec{A}$) стоит \vec{H} т. к. уравнения сходны:

$$\dot{E}_r = -\frac{1}{j\omega\epsilon_a} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\dot{H}_\varphi r \sin\theta) = \frac{1}{j\omega\epsilon_a r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\frac{I^{\text{ЭИ}}}{4\pi r} \sin^2\theta e^{-j\gamma r} (1 + j\gamma r) \right],$$

$$\boxed{\dot{E}_r = \frac{I^{\text{ЭИ}}}{j\omega\epsilon_a r^3 2\pi} \cos\theta e^{-j\gamma r} (1 + j\gamma r)} \quad \mathbf{6,}$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} (\dot{H}_\varphi r \sin\theta) = \frac{-1}{j\omega\epsilon_a r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{I^{\text{ЭИ}}}{4\pi r} \sin^2\theta [e^{-j\gamma r} + j\gamma e^{-j\gamma r}] \right),$$

$$\dot{E}_\theta = -\frac{I^{\text{ЭИ}}}{j\omega\epsilon_a 4\pi r} \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-j\gamma r}}{r} + j\gamma e^{-j\gamma r} \right] = -\frac{I^{\text{ЭИ}}}{j\omega\epsilon_a 4\pi r} \sin\theta \left[-\frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} - j\gamma \frac{e^{-j\gamma r}}{r} + \gamma^2 e^{-j\gamma r} \right],$$

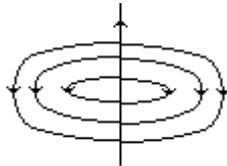
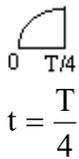
$$\boxed{\dot{E}_\theta = \frac{I^{\text{ЭИ}}}{j\omega\epsilon_a 4\pi r^3} \sin\theta e^{-j\gamma r} [1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2]} \quad \mathbf{7,}$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{I^{\text{ЭИ}}}{4\pi r^2} \sin\theta (1 + j\gamma r) e^{-j\gamma r}.$$

9.4. Ближняя и дальняя зоны ЭИИ



Полученные соотношения позволяют построить структуру поля в свободном пространстве, т. е. в любой области на любом расстоянии от излучателя. Используя эти соотношения для ряда дискретных значений времени, построим *качественно* структуру электрического поля.



Пусть ток протекает снизу вверх, как показано на рис. 1, тогда к концу промежутка верхняя часть зарядится положительно, нижняя - отрицательно.



$$t = \frac{T}{4} \div \frac{T}{2}$$

наблюдается

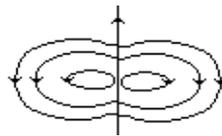
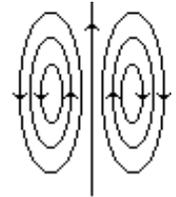


Рис. 1

Ток начинает убывать, при этом “отшнуривание” силовых линий



электрического поля. К концу четверти периода электрический ток равен нулю, процесс “отшнуривания” завершается полностью, т. е. электрическое поле не связано с поверхностью ЭИИ.

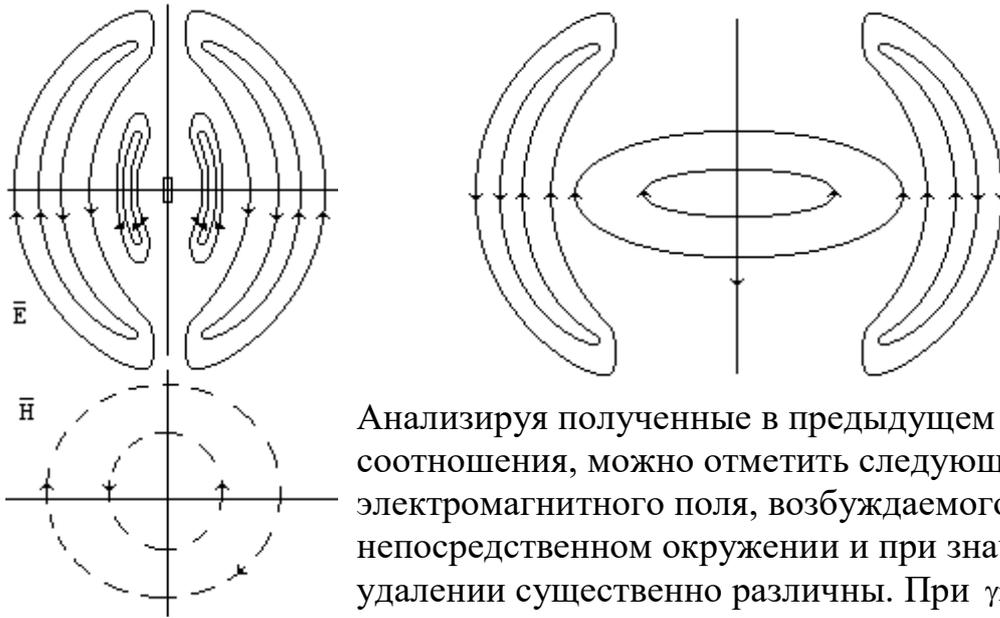
$\frac{T}{2} \div \frac{3T}{4}$

$$t = \frac{T}{2} \div \frac{3T}{4}$$

Ток протекает сверху вниз. Нижняя часть заряжается положительно, верхняя - отрицательно.

Первое поле уже сместилось и т. д.

Структура поля для некоторого фиксированного момента времени приведена на рисунке:



Анализируя полученные в предыдущем параграфе соотношения, можно отметить следующее: свойства электромагнитного поля, возбуждаемого ЭЭИ в непосредственном окружении и при значительном удалении существенно различны. При $\gamma r \rightarrow 0$, т. е. в непосредственном окружении, основное значение в

выражениях имеют слагаемые, зависящие от расстояния — $1/r^3$, $1/r^2$.

Слагаемые, зависящие по закону $1/r$, незначительный вклад. При

$\gamma r \rightarrow \infty$ основной вклад вносят составляющие, имеющие зависимость от расстояния по закону $1/r$.

В связи с тем, что поле при $\gamma r \rightarrow 0$ и при $\gamma r \rightarrow \infty$ существенно отличается, вводят понятия *ближней* и *дальней зоны* ЭЭИ.

Ближнюю зону (БЗ) определяют правилом $\gamma r \ll 1$ **1.**

Дальняя зона (ДЗ) $\gamma r \gg 1$ **2.**

Точной границы между ними не существует.

Рассмотрим свойства электромагнитного поля в ближней и дальней зонах.

В БЗ поле имеет преимущественно реактивный характер. Говорят, что в БЗ поле

является квазистатическим, т.е. в БЗ поле сохраняется даже частота

возбуждающего тока стремится к 0. В БЗ существуют все 3 компоненты E_θ , E_r ,

H_ϕ . Амплитуда поля в БЗ быстро затухает с удалением от ЭЭИ.

В ДЗ (зона излучения) компоненты поля синфазны, что свидетельствует об

активном характере электромагнитного поля. E_r пренебрежимо мала по

сравнению с E_θ . Вектор Π чисто активен и параллелен радиальной координате,

т. е. активная мощность переносится в радиальном направлении. Поле в ДЗ

имеет характер бегущей волны, уносящей энергию на бесконечность.

Ввиду особой важности поля рассмотрения в ДЗ приведем предельные

соотношения для составляющих поля в ДЗ:

$$\dot{E}_\theta = j \frac{I^3 \gamma^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad \mathbf{3,}$$

$$\dot{H}_\phi = j \frac{I^0 \gamma}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad 4,$$

$$\dot{E}_r \cong 0 \quad 5.$$

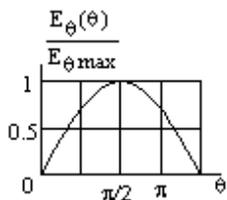
Компоненты поля взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны (одно из свойств плоской волны). Из соотношений видно, что фазовый фронт имеет форму сферической волны.

$$\frac{E_\theta}{H_\phi} = \frac{\gamma}{\omega \epsilon_a} = \frac{\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}}{\omega \epsilon_a} = Z_c.$$

(Одно из свойств плоской волны). На достаточно большом удалении от ЭЭИ локальный фрагмент фазового фронта обладает свойствами локально плоской волны (компоненты поля взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения).

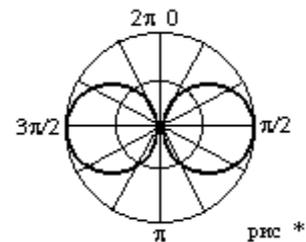
9.5. Диаграмма направленности ЭЭИ

Из соотношений (3), (4) предыдущего параграфа видно, что амплитуда поля в различных направлениях существенно различна, т. е. ЭЭИ обладает направленными свойствами. Для описания направленных свойств излучателей вводят диаграмму направленности. Под ней подразумевают зависимость амплитуды поля в ДЗ от угловых координат. Из (3), (4) видно, что диаграмма направленности описывается $\sin\theta$. При анализе характеристик антенн пользуются понятием нормированной диаграммы направленности. Под нормированной подразумевают диаграмму направленности пронормированную к максимальному значению

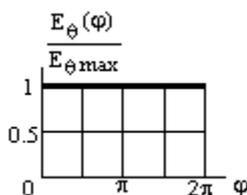


$$F(\theta) = \frac{E_\theta(\theta)}{E_{\theta_{\max}}} = \frac{E_\theta(\theta)}{E_\theta(\pi/2)} = \sin\theta.$$

Очень наглядным является изображение диаграммы направленности в полярной системе



координат. В полярной системе координат для наглядности θ измеряют не от 0 до π , а от 0 до 2π с тем, чтобы показать пространственную симметрию ЭЭИ.



В меридианальной плоскости (проходящей через ось ЭЭИ) диаграмма направленности имеет, показанный вид рис. В плоскости перпендикулярной оси излучателя (экваториальная плоскость) ДН приведена на рис.**.

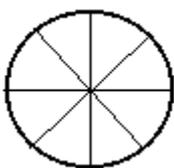


Рис.**

9.6. Вычисление излучаемой мощности Сопrotивление излучения

Так как излучение в форме бегущей волны существует в ДЗ, то данный анализ должен относиться исключительно к ДЗ. В ДЗ составляющие поля имеют вид:

$$\dot{E}_\theta = j \frac{I^{\text{Э}} l \gamma^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad 1,$$

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{I^{\text{Э}} l \gamma}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad 2.$$

Вычислим $P_{\text{ср}}$, а затем, т. к. ЭЭИ является единственным, найдем $P_\Sigma = \oint_S P_{\text{ср}} dS$.

Замкнутая поверхность должна охватывать ЭЭИ и находится в ДЗ. Форма ее может быть произвольная. Наиболее просто интегрирование осуществляется для сферической поверхности.

$$\text{Вычислим } P_{\text{ср}}: \quad \bar{P}_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\overline{E\dot{H}}^*] = \bar{I}_r \frac{I^{\text{Э}2} l^2 \gamma^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_a} \sin^2 \theta \frac{1}{r^2}.$$

Осуществим интегрирование в сферической системе координат. Учтем, что $dS = \bar{I}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$.

$$\text{Получим} \quad P_\Sigma = \frac{I^{\text{Э}2} l^2 \gamma^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta.$$

Учитывая, что $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$ (табличный) получим:

$$P_\Sigma = \frac{I^{\text{Э}2} l^2 \gamma^3 2\pi 4}{32\pi^2 \omega \epsilon_a 3} = \frac{I^{\text{Э}2} l^2 \gamma^3}{12\pi \omega \epsilon_a} \quad 3.$$

Из соотношения (3) следует, что мощность излучения пропорциональна квадрату амплитуды тока в ЭЭИ. Возникают ассоциации с обычным

электротехническим определением: $P_\Sigma = \frac{I^{\text{Э}2} R_\Sigma}{2} \quad 4.$

В связи с этим R_Σ называют сопротивлением излучения

$$R_\Sigma = \frac{l^2 \gamma^3}{6\pi \omega \epsilon_a}.$$

Преобразуем: $\gamma = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}},$

$$R_\Sigma = \frac{\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} 4\pi^2 l^2}{6\pi \omega \epsilon_a \lambda^2} = \frac{2}{3} \pi z_c \frac{l^2}{\lambda^2} \quad 5.$$

Если речь идет о воздушном пространстве или вакууме, для которого $z_c = 120\pi$ Ом получим:

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

6,

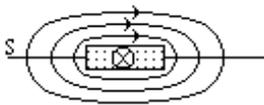
из выражения для мощности излучения следует, что при постоянном токе с ростом сопротивления излучения мощность также возрастает. Поэтому, когда анализируют излучение, отмечают, что сопротивление излучения характеризует излучательную способность антенны, подчеркивая тем самым приведенную

логическую связь:

$$\left(\frac{l}{\lambda}\right) \ll 1 \rightarrow R_{\Sigma} \downarrow\downarrow.$$

Поэтому с точки зрения антенных свойств (антенна предназначена для наиболее полного излучения мощности, подводимой к ее входу) ЭЭИ является плохой антенной (низкое сопротивление, мощность при постоянном токе).

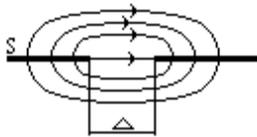
9.7. Понятие о магнитном токе



Пусть имеется бесконечно тонкая пластина, по которой протекает электрический ток. В близости он нее магнитные линии повторяют контуры проводника. При удалении от пластины они постепенно стремятся к окружности.

В силу полной симметрии задачи на поверхности S тангенциальная компонента магнитного поля равна 0.

$H_{\tau} = 0$ (на поверхности S) вне проводника, $H_{\tau} \neq 0$ на проводнике.



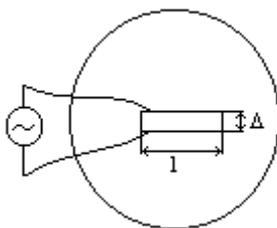
Рассмотрим две полубесконечных разнополярных металлических пластины, расположенные в плоскости S . Толщина исчезающе мала (бесконечно тонкие пластины).

Между ними имеется зазор Δ . Силовые линии также превращаются в окружности.

$E_{\tau} = 0$ вне зазора; $E_{\tau} \neq 0$ в зазоре.

Из сопоставления двух рисунков видно, что с точностью до направления силовых линий рисунки совпадают. Из этого совпадения следует заключение, что в зазоре параллельно его краям протекает магнитный ток, который и возбуждает подобное электрическое поле. В природе в настоящее время магнитных зарядов и токов не обнаружено, но введение подобным образом магнитных токов существенно упрощает решение многих задач.

9.8. Элементарные щелевые излучатели



Рассмотрим бесконечный металлический экран, в котором прорезана узкая щель. Предположим, что она возбуждается источником гармонических колебаний. Можно предположить, что в этой щели протекает переменный магнитный ток. С тем, чтобы этот магнитный излучатель был элементарным, следует положить, что $l \ll \lambda$ ($\Delta \ll l$).

Рассматриваемая система называется *двухсторонней излучающей щелью*.

Существуют способы одностороннего возбуждения щели.

Необходимо решить задачу о возбуждении электромагнитного поля малым током, протекающим в щели. Наибольший интерес представляет электромагнитное поле в ДЗ относительно щели ($\gamma r \gg 1$).

Типовой алгоритм решения задачи:

Решить неоднородное уравнение Гельмгольца относительно векторного магнитного потенциала.

Затем, используя уравнение связи, по найденным значениям векторного магнитного потенциала надо вычислить составляющие электромагнитного поля.

Так как нас интересует ДЗ, то в общих выражениях необходимо осуществить предельный переход, полагая $\gamma r \gg 1$.

Но решение подобной задачи существенно упрощается, если воспользоваться принципом *перестановочной двойственности*: выпишем найденные ранее выражения для ЭЭИ:

$$\text{ЭЭИ:} \quad \gamma r \gg 1, \quad r \gg \lambda/2\pi,$$

$$\dot{E}_\theta = j \frac{I^3 l \gamma^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad \mathbf{1,}$$

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{I^3 l \gamma}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad \mathbf{2;}$$

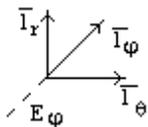
$$\text{ЭМИ:} \quad \gamma r \gg 1,$$

$$E \leftrightarrow H, \quad I^3 \leftrightarrow -I^M, \quad \epsilon_a \leftrightarrow -\mu_a,$$

$$\dot{H}_\theta = j \frac{I^M l \gamma^2}{4\pi\omega\mu_a} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad \mathbf{3,}$$

$$\dot{E}_\varphi = -j \frac{I^M l \gamma}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad \mathbf{4,}$$

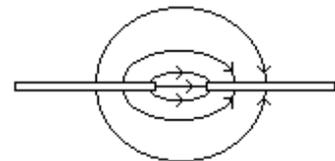
$$\frac{\dot{E}_\varphi}{\dot{H}_\theta} = -\frac{\omega\mu_a}{\gamma} = -\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = -Z_C.$$



Знак “—” говорит о том, что E распространяется в положительном направлении радиальной координаты.

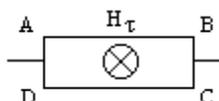
Из соотношения (4) следует, что в ДЗ электрическое поле ЭМИ имеет только φ -ую составляющую; это

свидетельствует о том, что в ДЗ электрическое поле, постепенно деформируясь, стремится к окружности.



При анализе щелевых излучателей пользуются напряжением в щели, а не формальным магнитным током.

Постараемся перейти от магнитного тока к напряжению. В соответствии с законом полного тока



$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = I^{\text{э}} \rightarrow H_{\tau} 2\Delta = I^{\text{э}} \quad 5.$$

Размеры пластины малы, толщина исчезающе мала, т. е. в пределах этой пластины компоненту H_{τ} можно считать неизменной. Интегрирование по поверхности в данном случае заменяется интегрированием по участкам. Контур предполагается совпадающим с контуром поперечного сечения.

Вычислим напряжение в щели:

$$E_{\tau} \Delta = U_{\text{щ}} \quad 6.$$

К выражению (5) применим принцип перестановочной двойственности:

$$E_{\tau} \cdot z \Delta = -I^{\text{м}} \quad 7.$$

Из сопоставления (6) и (7) следует $\frac{U_{\kappa}}{\Delta} = -\frac{I^{\text{м}}}{2\Delta}$,

откуда

$$\bar{d}\bar{r} = \bar{l}_x dx + \bar{l}_y dy + \bar{l}_z dz \quad 8.$$

Переходя к соотношения (3), (4) от (8) получим:

$$\dot{H}_{\theta} = -j \frac{U_{\kappa} l \gamma^2}{2\pi\omega\mu_a} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad 9,$$

$$\dot{E}_{\varphi} = j \frac{U_{\kappa} l \gamma}{2\pi} \sin\theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \quad 10.$$

Вычислим мощность излучения ЭМИ (вычислим Π и проинтегрируем его по контуру).

$$\bar{\Pi}_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^*] = [j \bar{l}_{\varphi} j \bar{l}_{\theta}] \frac{U_{\text{щ}}^2 l^2 \gamma^3}{8\pi^2 \omega \mu_a} \sin^2 \theta \frac{1}{r^2} = \bar{l}_r \frac{U_{\text{щ}}^2 l^2 \gamma^3}{8\pi \omega \mu_a} \sin^2 \theta \frac{1}{r^2},$$

$$\|\mu_a\| = \begin{vmatrix} \mu_{axx} & \mu_{axy} & \mu_{axz} \\ \mu_{fчн} & \mu_{фнн} & \mu_{ayz} \\ \mu_{azx} & \mu_{azy} & \mu_{azz} \end{vmatrix}.$$

$$d\bar{S} = \bar{l}_r r^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$\bar{B} = \|\mu_a\| \bar{H} \quad 11.$$

Выражение из электротехники:

$$P_{\Sigma} = \frac{U_{\text{щ}}^2}{\frac{3}{4} \frac{1}{\pi} z_c \left(\frac{\lambda}{1}\right)^2} \quad 12.$$

Из сопоставления (11) и (12) следует:

$$R_{\Sigma} = \frac{3}{8} \frac{1}{\pi} z_c \left(\frac{\lambda}{1}\right)^2 \quad 13.$$

Для вакуума или воздуха:

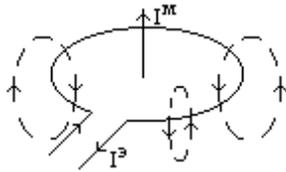
$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_x \\ \mathbf{D}_y \\ \mathbf{D}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \\ \mathbf{E}_z \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{cases} \mathbf{D}_x = \varepsilon_{xx} \mathbf{E}_x + \varepsilon_{xy} \mathbf{E}_y + \varepsilon_{xz} \mathbf{E}_z \\ \mathbf{D}_y = \varepsilon_{yx} \mathbf{E}_x + \varepsilon_{yy} \mathbf{E}_y + \varepsilon_{yz} \mathbf{E}_z \\ \mathbf{D}_z = \varepsilon_{zx} \mathbf{E}_x + \varepsilon_{zy} \mathbf{E}_y + \varepsilon_{zz} \mathbf{E}_z \end{cases} \quad [\text{Ом}].$$

Представляет интерес сравнение характеристик ЭЭИ и ЭМИ. Будем предполагать, что оба они излучают одинаковую мощность, тогда:

$$\frac{I^{\partial 2} R_{\Sigma}}{2} = \frac{U_{\text{щ}}^2}{2R_{\Sigma \text{щ}}}.$$

Для определенности зададим $I^{\partial}=1$ А. Из этого соотношения следует, что напряжение в щели $U_{\text{щ}}=188$ В. Из последних рассуждений вытекают недостатки щелевых излучателей:



для излучения большой мощности напряжение щели должно быть велико, в свою очередь напряжение ограничено величиной пробоя в среде при заданных условиях.

Щелевой излучатель является неединственным вариантом ЭМИ. В качестве ЭМИ могут рассматриваться элементарные рамки с электрическим током (периметр рамки должен быть $\ll \lambda$). В этом случае можно полагать, что перпендикулярно поверхности рамки протекает магнитный ток.

Раздел 10. Основные теоремы электродинамики

10.1. Лемма Лоренца

Лемма Лоренца устанавливает взаимосвязь между разнесенными в пространстве сторонними источниками и возбуждаемыми ими электромагнитными полями.

Предположим, что в точке 1 находится сторонний источник, который характеризуется значениями $\dot{j}_1^{\partial}, \dot{j}_1^{\text{M}}, \dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$.

В точке 2 расположен другой источник $\dot{j}_2^{\partial}, \dot{j}_2^{\text{M}}, \dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$.

Очевидно, что взаимосвязь между ними может быть описана уравнениями

Максвелла:

$$\varepsilon_a \approx \varepsilon_a \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} \right) \quad \text{rot} \dot{\mathbf{H}}_1 = j\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{j}_1^{\partial} \quad \mathbf{1},$$

$$\text{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_1 - \dot{j}_1^{\text{M}} \quad \mathbf{2}.$$

Аналогично для второго источника:

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 = j\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{j}_2^{\partial} \quad \mathbf{3},$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_2 = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^M \quad 4.$$

(1) скалярно умножим на $\dot{\vec{E}}_2$. (4) умножим на $\dot{\vec{H}}_1$ и вычтем из второго результата первый:

$$\dot{\vec{H}}_1 \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{E}}_2 \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_1 = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_1 \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 - j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{j}}_1^\ominus \dot{\vec{E}}_2 \quad 5.$$

(2) умножим скалярно на $\dot{\vec{H}}_2$; (3) на $\dot{\vec{E}}_1$ и из первого результата вычтем второй:

$$\dot{\vec{H}}_2 \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{E}}_1 \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_2 = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_1 \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 - j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{j}}_2^\ominus \dot{\vec{E}}_1 \quad 6.$$

Вспомним известное векторное тождество:

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] = \dot{\vec{H}}_1 \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{E}}_2 \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_1,$$

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] = \dot{\vec{H}}_2 \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{E}}_1 \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_2.$$

Используя его, (5) и (6) можно переписать следующим образом:

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_1 \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 - j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{j}}_1^\ominus \dot{\vec{E}}_2 \quad 7,$$

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_1 \dot{\vec{H}}_2 - \dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 - j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{E}}_1 - \dot{\vec{j}}_2^\ominus \dot{\vec{E}}_1 \quad 8.$$

Из (7) вычтем (8):

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] - \operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] = -\dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{j}}_1^\ominus \dot{\vec{E}}_2 + \dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 + \dot{\vec{j}}_2^\ominus \dot{\vec{E}}_1 \quad 9.$$

Выражение (9) называется *леммой Лоренца в дифференциальной форме* (соотношение справедливо в каждой точке пространства, где имеются сторонние источники).

Проинтегрируем (9) по объему, который включает все сторонние источники:

$$\int_V \left\{ \operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] - \operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] \right\} dV = \int_V \left\{ -\dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{j}}_1^\ominus \dot{\vec{E}}_2 + \dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 + \dot{\vec{j}}_2^\ominus \dot{\vec{E}}_1 \right\} dV \quad 10.$$

Левую часть (10) преобразуем, используя теорему Остроградского-Гаусса. В соответствии с этой теоремой

$$\int_V \left\{ \operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] - \operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] \right\} dV = \oint_{S_1} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] - \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] \right\} d\vec{S} \quad 11,$$

где S_1 — замкнутая поверхность, ограничивающая объем.

Тогда, с учетом (11), соотношение (9) запишется в следующем виде:

$$\oint_{S_1} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1 \right] - \left[\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2 \right] \right\} d\vec{S} = \int_V \left\{ -\dot{\vec{j}}_2^M \dot{\vec{H}}_1 - \dot{\vec{j}}_1^\ominus \dot{\vec{E}}_2 + \dot{\vec{j}}_1^M \dot{\vec{H}}_2 + \dot{\vec{j}}_2^\ominus \dot{\vec{E}}_1 \right\} dV \quad 12$$

— лемма Лоренца для ограниченного объема.

Рассмотрим случай бесконечного увеличения объема V_1 . При этом поверхность S_1 размещается в бесконечно удаленных точках относительно расположения сторонних источников. В случае неограниченного объема V_1 поверхностный интеграл в (12) равен нулю. Это можно объяснить, используя два аргумента:

- 1) поверхность S_1 удалена на бесконечность. Скорость распространения имеет конечное значение, т. е. за любой конечный промежуток времени волны не смогут достигнуть поверхности S_1 , т. е. на поверхности S_1 отсутствуют составляющие поля, а, следовательно, интеграл по этой поверхности будет равен нулю.

2) как нам известно, в ДЗ амплитуда составляющих поля убывает пропорционально $1/r$. В случае реальных сред, которые характеризуются малыми, но конечными по величине потерями, амплитуда убывает еще быстрее. Таким образом в реальных средах векторное произведение $[\dot{\vec{E}}\dot{\vec{H}}]$ в ДЗ убывает быстрее, чем $1/r^2$.

Площадь сферы с ростом r возрастает пропорционально r^2 . Таким образом, предел при $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S_1} \left\{ [\dot{\vec{E}}_2 \dot{\vec{H}}_1] - [\dot{\vec{E}}_1 \dot{\vec{H}}_2] \right\} d\vec{S} = 0.$$

Таким образом в случае неограниченного объема V_1 лемма Лоренца записывается в следующей форме:

$$\int_V \left\{ -\dot{j}_2^M \dot{\vec{H}}_1 - \dot{j}_1^{\ominus} \dot{\vec{E}}_2 + \dot{j}_1^M \dot{\vec{H}}_2 + \dot{j}_2^{\ominus} \dot{\vec{E}}_1 \right\} dV = 0 \quad 13.$$

10.2. Теорема взаимности для двух элементарных излучателей

Пусть в некоторой точке 1 находится ЭЭИ, который характеризуется значениями $\dot{j}_1^{\ominus}, \dot{\vec{I}}_1$

В точке 2 второй излучатель: $\dot{j}_2^{\ominus}, \dot{\vec{I}}_2$.

Обозначим $\dot{\vec{E}}_{12}$ напряженность электрического поля, возбуждаемого первым излучателем в месте расположения второго. И аналогично $\dot{\vec{E}}_{21}$.

Для данной задачи лемма Лоренца:

$$\int_V \left\{ -\dot{j}_1^{\ominus} \dot{\vec{E}}_2 + \dot{j}_2^{\ominus} \dot{\vec{E}}_1 \right\} dV = 0 \quad 1.$$

Интеграл в (1) отличен от нуля только в тех точках пространства, где \dot{j}^{\ominus} отлична от нуля, т. е. в пределах объемов, занимаемых излучателями. Поэтому (1)

можно переписать следующим образом: $\int_V \dot{j}_1^{\ominus} \dot{\vec{E}}_2 dV = \int_V \dot{j}_2^{\ominus} \dot{\vec{E}}_1 dV$

$$\text{или} \quad \int_{V_{\%01}} \dot{j}_1^{\ominus} \dot{\vec{E}}_2 dV = \int_{V_{\%02}} \dot{j}_2^{\ominus} \dot{\vec{E}}_1 dV \quad 2,$$

где V_{B1} и V_{B2} - объемы, занимаемые первым и вторым излучателями (вибраторами). Ввиду малости излучателей можно считать, что

$$\dot{\vec{E}}_2 = \dot{\vec{E}}_{21}, \quad \dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}_{12}.$$

Делая вывод можно записать:

$$\dot{\vec{E}}_{21} \int_{V_{B1}} \dot{j}_1^{\ominus} dV = \dot{\vec{E}}_{12} \int_{V_{B2}} \dot{j}_2^{\ominus} dV \quad 3.$$

Элементы объема dV можно записать следующим образом:

$$1. dV = \bar{S}_1 d\bar{l}; \quad 1. dV = \bar{S}_2 d\bar{l},$$

где \bar{S}_1 и \bar{S}_2 — площадь поперечного сечения первого и второго излучателей.

Учитывая, что диаметр d ЭЭИ \ll длины, можно предполагать, что амплитуда векторов объемной плотности электрического тока в пределах поперечного сечения неизменна: $\dot{J}_1^{\ominus} \bar{S}_1 = \dot{I}_1^{\ominus}$, $\dot{J}_2^{\ominus} \bar{S}_2 = \dot{I}_2^{\ominus}$.

В силу малости ЭЭИ амплитуду тока можно считать неизменной. Поэтому её можно вынести за знак интеграла:

$$\dot{E}_{21} \dot{I}_1^{\ominus} \int_{l_1} d\bar{l} = \dot{E}_{12} \dot{I}_2^{\ominus} \int_{l_2} d\bar{l} \quad \mathbf{4},$$

$$\boxed{\dot{E}_{21} \dot{I}_1^{\ominus} \bar{l}_1 = \dot{E}_{12} \dot{I}_2^{\ominus} \bar{l}_2} \quad \mathbf{5 -}$$

- теорема взаимности ЭЭИ, она позволяет определить любую из величин, входящих в неё.

Теорема взаимности может быть получена для ЭМИ. Используя лемму Лоренца и аналогичные преобразования, легко можно получить:

$$\boxed{\dot{H}_{21} \dot{I}_1^M \bar{l}_1 = \dot{H}_{12} \dot{I}_2^M \bar{l}_2} \quad \mathbf{6.}$$

Используя лемму Лоренца, можно получить выражение и для разноименных излучателей. В этом случае лемма Лоренца выглядит следующим образом:

$$\int_V \left\{ -\dot{J}_2^M \dot{H}_1 - \dot{J}_1^{\ominus} \dot{E}_2 \right\} dV = 0.$$

После преобразований получим:

$$\boxed{-\dot{H}_{12} \dot{I}_2^M \bar{l}_2 = \dot{E}_{21} \dot{I}_1^{\ominus} \bar{l}_1} \quad \mathbf{7,}$$

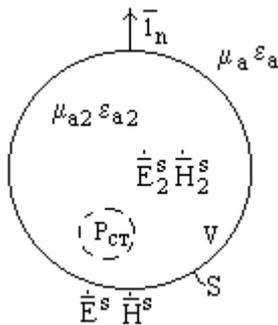
здесь 1 — ЭЭИ, 2 — ЭМИ.

10.3. Эквивалентные источники электромагнитного поля. Принцип Гюйгенса-Кирхгофа.

Часто распределение сторонних источников бывает неизвестно, но зато бывает известным распределение поля на некоторой замкнутой поверхности, охватывающей область с источниками.

Задача формулируется так:

Определить поле, создаваемое сторонними источниками с неизвестным распределением в области V по заданному распределению электромагнитного поля на поверхности S , охватывающей объем V .



Компоненты Поля на внешней стороне поверхности S обозначим \dot{E}^s, \dot{H}^s , а поля на внутренней стороне поверхности S - \dot{E}_2^s, \dot{H}_2^s

На поверхности S существуют заряды и токи. В силу непрерывности электромагнитного поля на поверхности S должны выполняться следующие граничные условия:

$$\bar{l}_n \epsilon_a \dot{E}^s = \bar{l}_n \epsilon_{a2} \dot{E}_2^s \quad \mathbf{1,}$$

$$\left[\bar{l}_n \dot{E}^s \right] = \left[\bar{l}_n \dot{E}_2^s \right] \quad \mathbf{2,}$$

$$\bar{l}_n \mu_a \dot{H}^s = \bar{l}_n \mu_{a2} \dot{H}_2^s \quad \mathbf{3,}$$

$$\left[\bar{1}_n \dot{\vec{H}}^S \right] = \left[\bar{1}_n \dot{\vec{H}}_2^S \right] \quad 4.$$

Попробуем переформулировать задачу таким образом, чтобы она стала традиционной: была связана с расчетом электромагнитного поля по известному распределению сторонних источников. Для этого воспользуемся следующим приемом. Предположим, что на внутренней части поверхности S поле отсутствует: $\dot{\vec{E}}_2^S = 0, \dot{\vec{H}}_2^S = 0$, тогда на границе S будут нарушены граничные условия (1) — (4), т. е. на границе поверхности S будет происходить разрыв непрерывности составляющих электромагнитного поля. При сохранении составляющих электромагнитного поля на внешней стороне поверхности S и соблюдении непрерывности составляющих поля на границе введем на поверхности S *фиктивные источники* (виртуальные).

Обобщенное граничное условие:

$$\bar{1}_n \varepsilon_a \dot{\vec{E}}^S - \bar{1}_n \varepsilon_{a2} \dot{\vec{E}}_2^S = \tau^\ominus \quad 5,$$

$$\left[\bar{1}_n \dot{\vec{H}}^S \right] - \left[\bar{1}_n \dot{\vec{H}}_2^S \right] = \dot{\vec{j}}^\ominus \quad 6.$$

По аналогии с электрическими источниками могут быть введены источники магнитные.

$$\bar{1}_n \mu_a \dot{\vec{H}}^S - \bar{1}_n \mu_{a2} \dot{\vec{H}}_2^S = \tau^M \quad 7,$$

$$\left[\bar{1}_n \dot{\vec{E}}^S \right] - \left[\bar{1}_n \dot{\vec{E}}_2^S \right] = -\dot{\vec{j}}^M \quad 8.$$

В соответствии с этим приемом было сделано предположение об отсутствии поля на внутренней поверхности S. С учетом этого получим выражение для фиктивных источников на поверхности S.

$$\bar{1}_n \varepsilon_a \dot{\vec{E}}^S = \tau^\ominus \quad 9,$$

$$\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_n^S = \tau^\ominus \quad 9',$$

$$\left[\bar{1}_n \dot{\vec{H}}^S \right] = \dot{\vec{j}}^\ominus \quad 10,$$

$$\bar{1}_n \mu_a \dot{\vec{H}}^S = \tau^M \quad 11,$$

$$\mu_a \dot{\vec{H}}_n^S = \tau^M \quad 11',$$

$$\left[\bar{1}_n \dot{\vec{E}}^S \right] = -\dot{\vec{j}}^M \quad 12.$$

В природе не обнаружено магнитных источников, и они вводятся в задачи с целью упрощения решения. В данном случае фиктивными являются не только магнитные, но и электрические источники, распределенные на поверхности S.

На поверхности S известно распределение электромагнитного поля. Используя (9) — (12), распределение электромагнитного поля мы заменяем известное распределение распределением фиктивных источников (поверхностных токов и зарядов).

По известному распределению сторонних источников на поверхности S нужно определить поле снаружи от поверхности S.

Токи и заряды фиктивных источников связаны между собой уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{J}}^{\ominus} = -j\omega\tau^{\ominus} \quad 13,$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}^{\text{M}} = -j\omega\tau^{\text{M}} \quad 14,$$

т.е. поверхностные заряды можно определить, используя (13), (14), по распределению поверхностных токов. То есть для решения задачи достаточно знать распределение поверхностных токов на поверхности S .

Таким образом для решения задачи достаточно знать распределение тангенциальных составляющих электромагнитного поля на поверхности S . В результате представленных преобразований исходная задача (определение компонент поля во внешнем пространстве по заданному распределению электромагнитного поля на замкнутой поверхности S , ограничивающей область V с неизвестным распределением реальных источников) была сведена к задаче по вычислению компонент поля во внешнем пространстве по известному распределению фиктивных источников на поверхности S . Был сформулирован принцип, названный принципом эквивалентности. Принцип эквивалентности тесно связан с известным принципом Гюйгенса-Кирхгофа. В соответствии с этим принципом каждая точка фазового фронта распространяющейся волны может рассматриваться как точечный источник сформированной волны.



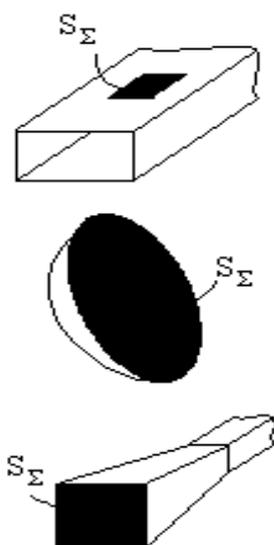
Пусть в момент времени t_1 поверхность равных фаз Ψ_0 описывается поверхностью S_0 . В момент времени $t_1 + \Delta t$, очевидно, поверхность равных фаз с фазой Ψ_0 уже не будет совпадать с поверхностью S_0 , она сместится. Для определения ее нового положения в момент времени $t_1 + \Delta t$ каждую точку фазового фронта S_0 рассмотрим как точку - источник сферической волны.

Огибающая по этим сферам S_1 (с учетом направления распространения волны) будет соответствовать поверхности равных фаз с фазой Ψ_0 в момент времени $t_1 + \Delta t$.

Аналитически принцип Гюйгенса сформулирован Кирхгофом, отсюда двойное название.

Принцип Гюйгенса-Кирхгофа применим и к поверхностям, которые не совпадают с фазовым фронтом волны. В этом случае, определяя возбуждение точечных источников, нужно учитывать фазовый сдвиг каждого из них.

Принцип Гюйгенса-Кирхгофа широко применяется в теории антенн при вычислении поля, излучаемого *апертурными антеннами*.



Обычно полагается, что эти антенны изготовлены из идеального металла. Обычно в результате вычислений удается вычислить поле в излучающей апертуре.

В соответствии с принципом эквивалентности эту апертуру нужно окружить замкнутой поверхностью. Обычно эту поверхность располагают так, чтобы она совпадала с излучающей апертурой и неизлучающей частью поверхности антенны. Поле считается заданным только в излучаемой апертуре, т.к. эти антенны предполагаются изготовленными из идеального металла, то на неизлучающей поверхности $E_{\tau}|_S = 0$, то очевидно и поверхностный магнитный ток $\bar{J}^M|_S = 0$.

При расчетах антенн пренебрегают затеканием поверхностного электрического тока на не излучающую поверхность антенны

$$\dot{j}^{\varepsilon}|_S = 0, \text{ т. е. } \bar{N}_{\tau}|_S = 0.$$

Таким образом, на замкнутой поверхности, охватывающей антенну тангенциальные компоненты поля равны нулю везде, кроме S_{Σ} (излучающей поверхности).

Далее задачу решают следующим образом. Используя принцип эквивалентности в излучающем раскрыве переходят от известного распределения электромагнитного поля к известному распределению фиктивных источников.

Обычно в дальнейшем при вычислении поля используют принцип суперпозиции, т. е. излучающий раскрыв разбивают на элементарные площадки (с тем, чтобы в пределах каждой площадки распределение токов и фаз можно было считать постоянными).

Затем вычисляют поле в точке наблюдения как сумму полей, создаваемых отдельными элементарными площадками. Эти поверхностные элементарные излучатели называются элементами Гюйгенса.

10.4. Элемент Гюйгенса

В качестве элемента Гюйгенса можно рассматривать элементарный фрагмент фазового фронта распространяющейся волны.

$$H_{\tau}|_{\Delta S} = H_0 e^{j\omega t},$$

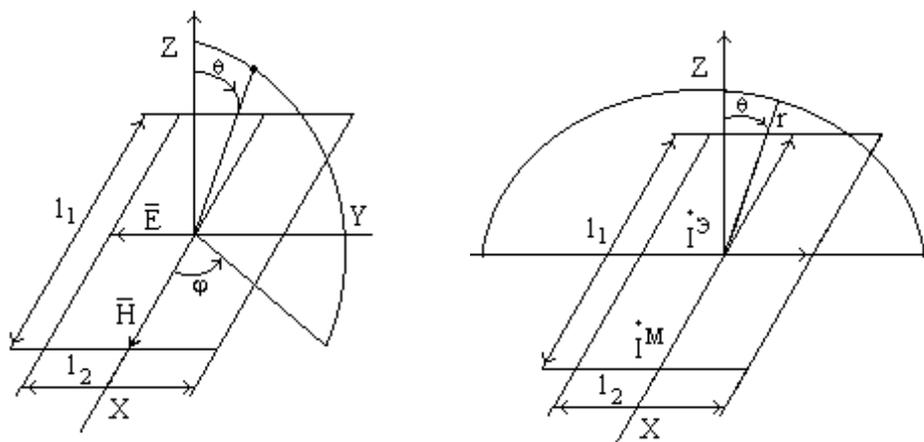
$$E_{\tau}|_{\Delta S} = E_0 e^{j\omega t}.$$

Переходим к токам $\dot{j}^{\varepsilon} = [\bar{1}_n \dot{\bar{H}}] = \bar{1}_y \dot{j}_0 = \bar{1}_y \dot{H}_0,$

$$j_0^{\ominus} = H_0, \quad \boxed{\dot{I}^{\ominus} = j_0^{\ominus} l_1 = \dot{H}_0 l_1},$$

$$\dot{j}^M = -[\bar{l}_n \dot{\bar{E}}] = -\bar{l}_x j_0^M = -\bar{l}_x \dot{E}_0,$$

$$\boxed{\dot{I}^M = -j_0^M l_2 = -\dot{E}_0 l_2}.$$



Учитывая, что размеры площадки малы, можно считать, что амплитуды токов постоянны. Введем сферическую систему координат с центром в середине площадки. В пределах этой площадки протекают токи. Эти токи будут ортогональны друг другу. Амплитуда их считается неизменной.

Таким образом задача определения поля, возбуждаемого элементом Гюйгенса, эквивалентна задаче нахождения поля, возбуждаемого находящимися в одной плоскости ортогональными друг другу электрическим и магнитным излучателями.

Вычислим поле, возбуждаемое подобной системой в плоскости ZOY (плоскость вектора E). При этом

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \begin{array}{l} (+) \rightarrow (+)y \\ (-) \rightarrow (-)y. \end{array}$$

Соотношения для поля в ДЗ ЭЭИ

$$\dot{E}_0 = j \frac{\Gamma^{\ominus} l \gamma^2}{4\pi \epsilon \epsilon_a} \sin \theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r},$$

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{\Gamma^{\ominus} l \gamma}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r}.$$

Преобразуем

$$\gamma = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\dot{E}_\theta = j \frac{I^{\Theta} l \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}{4\pi \omega \varepsilon_a} \sin \theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r} = j \frac{I^{\Theta} l}{2\lambda r} z_C \sin \theta e^{-j\gamma r} \quad \mathbf{1,}$$

$$\dot{H}_\theta = j \frac{I^{\Theta} l}{2\lambda r} \sin \theta e^{-j\gamma r} \quad \mathbf{2.}$$

Соотношение для ЭМИ $\dot{E}_\varphi = -j \frac{I^M l \gamma}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r},$

$$\dot{H}_\theta = j \frac{I^M l \gamma^2}{4\pi \omega \mu_a} \sin \theta \frac{e^{-j\gamma r}}{r}.$$

Преобразуем $\dot{E}_\varphi = -j \frac{I^M l}{2\lambda r} \sin \theta e^{-j\gamma r} \quad \mathbf{3,}$

$$\dot{H}_\theta = j \frac{I^M l}{2\lambda r} \frac{1}{z_C} \sin \theta e^{-j\gamma r} \quad \mathbf{4.}$$

Расчет проведем для напряженности электрического поля. Определим поле, возбуждаемое ЭЭИ, в плоскости ZOY, длина которого $(-) \rightarrow (+)y$
 $(+) \rightarrow (-)y.$

$$E_\theta^{(1)} = \mp j \frac{I^{\Theta} l_2}{2\lambda r} z_C \cos \theta e^{-j\gamma r} \quad \text{т. к. } \theta \text{ отсчитывается от нормали}$$

Определим величину напряженности электрического поля в плоскости ZOY, возбуждаемого ЭМИ

$$E_\theta^{(2)} = \pm j \frac{I^M l_1}{2\lambda r} e^{-j\gamma r} \quad \begin{matrix} (+) \rightarrow (+)y \\ (-) \rightarrow (-)y. \end{matrix}$$

Плоскость ZOY перпендикулярна ЭМИ, т. е. она находится в максимуме излучения ЭМИ, т. е. в соотношении (3) угол θ примем равным 90^0 ($\sin \theta=1$). Найдем результирующее поле:

$$E_\theta = E_\theta^{(1)} + E_\theta^{(2)} = \mp j \frac{E_0 l_1 l_2}{2\lambda r} \left(1 + \frac{H_0}{E_0} z_C \cos \theta \right) e^{-j\gamma r} \quad \mathbf{5.}$$

Аналогичным образом получим выражения для поля в плоскости ЭМИ (XOZ). Для плоскости угла φ :

$$E_\varphi = E_\varphi^{(1)} + E_\varphi^{(2)} = \mp j \frac{E_0 l_1 l_2}{2\lambda r} \left(\cos \theta + \frac{H_0}{E_0} z_C \right) e^{-j\gamma r} \quad \mathbf{6,}$$

“—” относится к $X>0$, “+” относится к $X<0$.

Получим выражение для результирующих электрических полей в двух ортогональных плоскостях в ДЗ. При произвольных θ и φ результирующее поле выглядит так:

$$E_{\theta} = \mp j \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} \left(1 + \frac{H_0}{E_0} z_c \cos \theta \right) e^{-j\gamma r} \quad 7,$$

$$E_{\varphi} = \mp j \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} \left(\cos \theta + \frac{H_0}{E_0} z_c \right) e^{-j\gamma r} \quad 8.$$

Если отношение $\frac{H_0}{E_0} = \frac{1}{z_c}$, соотношения (7) и (8) упрощаются:

$$\dot{E}_{\theta} = \mp j \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \sin \varphi e^{-j\gamma r} \quad 9,$$

$$E_{\varphi} = \mp j \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \cos \varphi e^{-j\gamma r} \quad 10.$$

Абсолютная величина электрического вектора в произвольной плоскости, проходящей через ось Z:

$$|\dot{E}| = \left| \sqrt{E_{\theta}^2 + E_{\varphi}^2} \right| = \frac{|E_0| \Delta S}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) \quad 11.$$

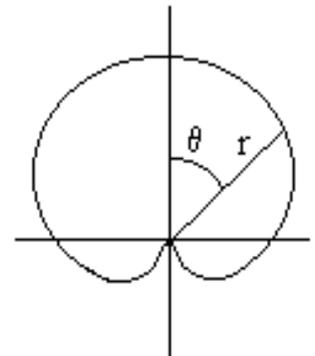
Она не зависит от угла φ , так как поле не зависит от угла φ .

Кроме того, из (11) видно, что элемент Гюйгенса обладает направленными свойствами.

Из (11) следует, что нормированная диаграмма

$$F(\theta) = \frac{|\dot{E}(\theta)|}{|\dot{E}(\theta)|_{\max}} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$$

Её изображение в полярной системе координат приведено на рисунке.



По найденным выражениям электрического поля (9) и (10) можно вычислить магнитное поле, используя

следующее соотношение: $\dot{H} = \frac{[\bar{l}_r \dot{E}]}{z_c}$,

где \bar{l}_r направлен от центра элемента Гюйгенса к точке наблюдения.

Раскрывая, получим

$$\dot{H}_\theta = -\frac{\dot{E}_\varphi}{z_c}, \quad \dot{H}_\varphi = \frac{\dot{E}_\theta}{z_c}.$$

Итак, мы знаем 3 типа ЭИ: ЭЭИ, ЭМИ, элемент Гюйгенса (2 перекрещенных ЭИ).

Элементы теории дифракции

11.1. Строгая постановка задачи дифракции

В большинстве реальных электромагнитных задачах поверхность раздела сред нельзя считать безграничной и плоской, а падающую волну - плоской электромагнитной волной. В этом случае при падении электромагнитной волны на тело конечных размеров наряду с явлением отражения и преломления возникает процесс, называемый *дифракцией*.

В этом разделе будут рассмотрены методы решения задач рассеяния электромагнитной волны на металлических телах, расположенных в однородном изотропном пространстве. Волны будем считать гармоническими, металлические тела — идеально проводящими, а бесконечное изотропное пространство – не имеющим потерь.

Процесс дифракции можно описать следующим образом:

Падающие электромагнитные волны (предполагается известными) наводят на металлических телах поверхностные токи. Эти токи, в свою очередь, возбуждают вторичные электромагнитные волны. Задача дифракции, таким образом, сводится к вычислению вторичного электромагнитного поля. Достаточно вычислить только одну компоненту \dot{E} или \dot{H} , так как они связаны через уравнения Максвелла. Сформулируем математически задачу дифракции.

Обозначим составляющие падающей волны $\dot{\vec{E}}_0$, $\dot{\vec{H}}_0$; составляющие вторичного поля $\dot{\vec{E}}$, $\dot{\vec{H}}$.

Во внешнем пространстве по отношению к рассеивающему телу, вектор $\dot{\vec{E}}$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца.

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \dot{\vec{E}} = 0 \quad \mathbf{1},$$

на поверхности S рассеивающего тела суммарная тангенциальная компонента электрического поля:

$$\left[\vec{1}_n \dot{\vec{E}} \right]_S = - \left[\vec{1}_n \dot{\vec{E}}_0 \right]_S \quad \mathbf{2}.$$

В точках, бесконечно удаленных от рассеивающего тела, вторичное поле должно удовлетворять условию излучения на бесконечность:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial r} + j\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \dot{\vec{E}} \right) = 0 \quad \mathbf{3}.$$

В ряде задач бывает удобно провести подобное рассмотрение относительно магнитного поля

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}} + \omega^2 \mu_a \epsilon_a \dot{\vec{H}} = 0 \quad 4.$$

В этом случае граничное условие (2) можно переписать, используя первое уравнение Максвелла:

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}},$$

$$\dot{\vec{E}} = \frac{1}{j\omega \epsilon_a} \text{rot} \dot{\vec{H}},$$

$$\left[\bar{I}_n \text{rot} \dot{\vec{H}} \right]_s = -j\omega \epsilon_a \left[\bar{I}_n \dot{\vec{E}}_0 \right]_s \quad 5.$$

Часто при решении задач второго вида бывает удобно записывать граничные условия относительно нормальных компонент:

$$\left(\bar{I}_n \dot{\vec{H}} \right) \Big|_s = - \left(\bar{I}_n \dot{\vec{H}}_0 \right) \Big|_s \quad 6.$$

Задача второго вида тоже должна быть дополнена

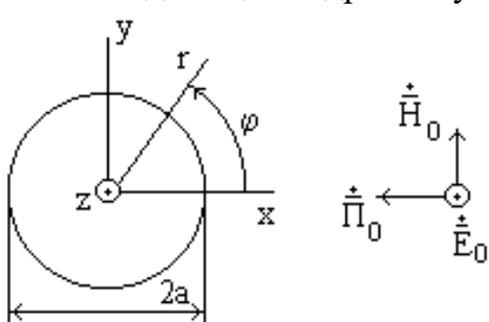
$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \dot{\vec{H}}}{\partial r} + j\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \dot{\vec{H}} \right) = 0 \quad 7.$$

Сформулированные задачи дифракции относительно $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ имеют одинаковое решение, если рассеивающее тело не имеет ребер, изломов. Если на теле имеются изломы поверхности, то при решении задачи приведенные соотношения должны быть дополнены дополнительным условием: условием на ребре.

11.2. Дифракция плоской волны на круговом цилиндре

Рассмотрим задачу дифракции плоской поперечной линейно поляризованной волны на идеальном круговом проводящем бесконечном цилиндре.

Введем цилиндрическую систему координат. Ось Z совпадает с осью цилиндра. Угол φ отсчитывается от направления, противоположного направлению распространения падающей первичной волны. Достаточно рассмотреть 2 дифракционные задачи:



1 задача: $\dot{\vec{E}}_0 \parallel Z,$

2 задача: $\vec{H}_0 \parallel Z$.

При произвольной ориентации векторов E и H задача может быть представлена как суперпозиция двух оговоренных задач.

Рассмотрим первую задачу.

В этом случае электрическое поле падающей волны

$$\vec{E}_0 = \bar{l}_z \dot{E}_0(r, \varphi) = \bar{l}_z E_0 \exp(jkx) = \bar{l}_z E_0 e^{-jkr \cos \varphi} \quad \mathbf{1.}$$

Рассматриваемая задача является двумерной, так как составляющие поля не зависят от Z , причем это условие распространяется и на первичное, и на вторичное поле:

$$\nabla^2 \dot{E} + \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \dot{E} = 0 \quad \mathbf{2,}$$

$$\dot{E} = \bar{l}_z \dot{E}(r, \varphi) \quad \mathbf{3.}$$

Однородное уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах можно записать так (так как не зависит от Z):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}}{\partial \varphi^2} + k^2 \dot{E} = 0 \quad \mathbf{4,}$$

где $\dot{E} = \dot{E}(r, \varphi)$; $k = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$.

Составляющие электрического поля на поверхности цилиндра должны удовлетворять нулевому граничному условию:

$$\left[\bar{l}_n \dot{E} \right]_s = - \left[\bar{l}_n \dot{E}_0 \right]_s,$$

$$\boxed{\dot{E}(a, \varphi) = -E_0 e^{-jka \cos \varphi}} \quad \mathbf{5.}$$

Искомое выражение напряженности вторичного электромагнитного поля должно удовлетворять условию излучения на бесконечность. Физически это означает, что в полученном решении мы должны оставить только те частные решения, у которых фазовый множитель e^{-jkr} соответствует волнам, расходящимся от цилиндра, кроме того, должны быть исключены частные решения с фазовым множителем e^{-jkr} .

Решим уравнение (4) методом разделения переменных. Предполагаем, что искомая функция

$$\dot{E} = R(r)\Phi(\varphi) \quad \mathbf{6.}$$

Подставим (6) в (4). Осуществим дифференцирование и поделим после этого все слагаемые после этого на (6):

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + k^2 = 0 \quad 7.$$

Умножим все слагаемые (7) на r^2 и сгруппируем слева функции от r , а справа - функции от φ . Получим:

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = - \frac{d^2 \Phi}{\Phi} \quad 8.$$

Из (8) следует, что в этом соотношении приравниваются функции от независимых координат. Это возможно, если левая и правая части равны некоторой постоянной m^2 . Получим:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad 9,$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - m^2) R = 0.$$

Продифференцируем: $r \frac{dR}{dr} + r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + (k^2 r^2 - m^2) R = 0,$

$$\boxed{\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0} \quad 10.$$

В данном случае искомое выражение для $E(r, \varphi)$ обладает следующим свойством:

$$\dot{E}(r, \varphi + 2\pi) = \dot{E}(r, \varphi) \quad 11,$$

т. е. является периодичным по углу φ . Очевидно, этим же свойством обладает функция Φ .

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad 12.$$

Решим уравнение (9) (дифференциальное уравнение второго порядка):

$$\Phi(\varphi) = A \sin m\varphi + B \cos m\varphi \quad 13.$$

Полученное решение (13) обладает свойством (12) в том случае, когда m является постоянным числом (целым). Очевидно, что искомая функция \dot{E} , а следовательно и функция Φ , являются четными функциями φ .

$$\dot{E}(r, \varphi) = \dot{E}(r, -\varphi), \quad \Phi(\varphi) = \Phi(-\varphi).$$

Таким образом в решении (13) мы должны оставить только второе слагаемое

$$\Phi(\varphi) = B \cos m\varphi \quad \mathbf{14.}$$

Дифференциальное уравнение (10) вида называется *уравнением Бесселя*.

Известно, что это уравнение имеет следующее решение:

$$R(r) = C' J_m(kr) + D' N_m(kr) \quad \mathbf{15.}$$

$J_m(kr)$ — цилиндрическая функция 1-ого рода (функция Бесселя первого порядка).

$N_m(kr)$ — цилиндрическая функция второго рода (функция Неймана).

В данном случае решение (15) удобно записать через цилиндрические функции третьего рода (функции Ганкеля).

$$R(r) = CH_m^{(1)}(kr) + DH_m^{(2)}(kr) \quad \mathbf{16.}$$

Эти функции связаны с функциями Бесселя и Неймана

$$H_m^{(1)}(kr) = J_m(kr) + jN_m(kr),$$

$$H_m^{(2)}(kr) = J_m(kr) - jN_m(kr).$$

При $r \rightarrow \infty$ для функции Гангеля справедливо следующее асимптотическое представление

$$H_m^{(1)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{j[kr - \frac{\pi}{4}(2m+1)]},$$

$$H_m^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-j[kr - \frac{\pi}{4}(2m+1)]}.$$

Из этого следует, что в решении (16) мы должны положить $R(r) = DH_m^{(2)}(kr)$.

Из последних соотношений следует, что функция Ганкеля первого рода представляет собой цилиндрическую волну, которая распространяется из бесконечности к оси Z ; функция Ганкеля второго рода представляет собой цилиндрическую волну, которая распространяется от оси Z в бесконечность.

Полученные решения должны удовлетворять условию излучения на бесконечность. Физически оно означает, что реальными являются те поля, которые соответствуют волнам, расходящимся от источника. В данном случае источником искомой вторичной волны является поверхность цилиндра. На основании приведенных рассуждений мы должны положить $C=0$. Обобщая рассмотренные решения, можно отметить, что решением однородного уравнения (4) являются функции вида

$$\dot{E}_m(kr) = D_m H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi \quad \mathbf{17,}$$

где D_m — неизвестные пока коэффициенты амплитуды.

Коэффициенты D_m могут быть найдены из граничного условия $\dot{E}(a, \varphi) = -E_0 e^{jka \cos \varphi}$,

Представим искомое вторичное поле в виде бесконечной композиции решений вида (17).

$$\dot{E}(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi \quad \mathbf{18}$$

— ряд Фурье по цилиндрическим функциям.

Воспользуемся известным из теории цилиндрических функций разложением

$$e^{jka \cos \varphi} = J_0(ka) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (j)^m J_m(ka) \cos m\varphi \quad \mathbf{19.}$$

Выражение (19) есть фактически разложение в ряд Фурье экспоненциальной функции.

Подставляем (18) и (19) в граничные условия

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi = -E_0 \left[J_0(ka) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (j)^m J_m(ka) \cos m\varphi \right] \quad \mathbf{20.}$$

В выражении (20) справа и слева стоят разложения одной и той же функции в ряд Фурье по цилиндрическим функциям. Известно, что это разложение является единственно возможным, т. е. в (20) должно также соблюдаться равенство соответствующих амплитудных коэффициентов.

Приравняем соответствующие амплитудные коэффициенты, и из этих равенств выразим искомые коэффициенты D_m .

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= -E_0 \frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} \\ D_m &= -E_0 2(j)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{21.}$$

Подставим (21) в общее соотношение (17):

$$\boxed{\dot{E}(r, \varphi) = -E_0 \left[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} H_0^{(2)}(kr) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (j)^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)} H_m^{(2)}(kr) \cos m\varphi \right]} \quad \mathbf{22}$$

— общее решение для электрического поля рассеиваемой волны, представленное в виде разложения по цилиндрическим функциям.

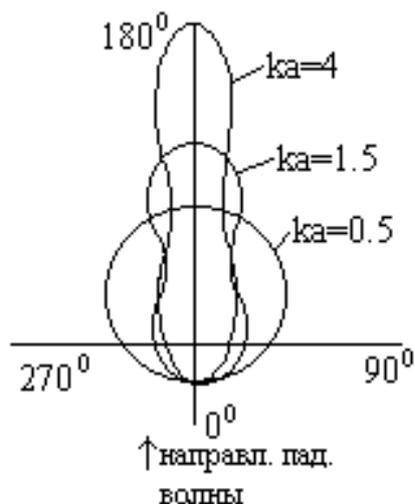
Окончательное решение выглядит следующим образом:

$$\dot{\vec{E}}(r, \varphi) = \bar{I}_z \dot{E}(r, \varphi) \quad \mathbf{23}$$

Ряд в (22) является абсолютно сходящимся и дифференцируемым в каждой точке. Поэтому выражение для магнитной составляющей легко может быть получено из второго уравнения Максвелла с использованием (22):

$$\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \text{rot}\dot{\vec{E}}.$$

Найденное решение в форме (22) является симметричным по углу φ , с периодом по φ , равным 2π . Найденное решение удовлетворяет условию излучения на бесконечность.



Попробуем изобразить графически решение (22) для некоторых значений радиуса (a) цилиндра для $r \gg a$, $r \gg \lambda$ (т. е. в дальней зоне):

$$\frac{|\dot{E}(r, \varphi)|}{|\dot{E}(r, 0)|} \quad \text{нормировка}$$

Из приведенных рисунков следует, что в результате дифракции на цилиндре плоской волны появляется вторичное поле с четко выраженным максимумом при $\varphi=180^\circ$. Полученное решение (22) в принципе применимо для любого радиуса цилиндра. Однако при больших значениях ka сходимость ряда в соотношении (22) ухудшается. В этом случае, хотя и можно использовать выражение (22), целесообразно получить новые соотношения, которые следуют из (22) путем асимптотического перехода.

Изложенный строгий (точный) метод решения дифракционной задачи называют *методом Фурье*. Точное решение возможно в том случае, если поверхность тела может быть описана в известных системах координат (декартова, цилиндрическая, сферическая, коническая...). Если же тело не может быть описано в известных системах координат, то при решении однородного дифференциального уравнения метод разделения переменных оказывается неприменимым, что исключает возможность применения метода Фурье. Если поверхность тела не совпадает ни с одной из координатных поверхностей, то строгими методами задача дифракции не решается. В этом случае прибегают к приближенным решениям.

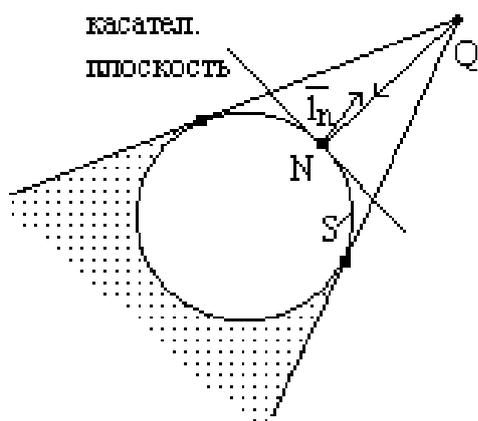
11.3. Приближение Гюйгенса-Кирхгофа

Ранее было отмечено, что поле в любой точке пространства, внешнего по отношению к объему V , может быть однозначно определено по известным тангенциальным составляющим \vec{E} и \vec{H} на поверхности S . В качестве поверхности S в задачах дифракции удобно взять поверхность дифрагированного тела. Если на этой поверхности известны точные значения

E_τ и H_τ , то используя принцип эквивалентности на поверхности S , можно определить эквивалентные источники вторичного поля и далее, используя традиционный алгоритм, вычислить поле в заданной точке.

Но для точного вычисления E_τ и H_τ на поверхности S необходимо решить дифракционную задачу, это невозможно. Эта трудность может быть преодолена, если E_τ и H_τ на поверхности S вычислять, используя приближенные методы. При этом полученные решения дифракционной задачи также будут приближенные.

Рассмотрим два характерных примера.

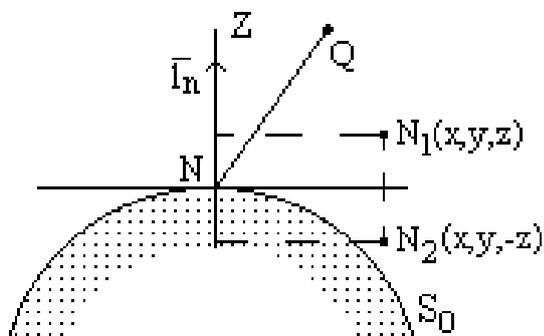


1. Пусть на идеально проводящую поверхность S падает электромагнитная волна. Источник расположен в точке Q . В данной задаче предполагается, что размеры тела и минимальный радиус кривизны \gg длины волны λ .
2. $\sigma = \infty$ $l \gg \lambda$ $R \gg \lambda$ **1.**

На поверхности S тангенциальная компонента $\dot{\vec{E}}$ равна нулю. При условии (1) можно пренебречь затеканием поверхностных электрических токов на "теневую" часть поверхности S (часть поверхности тела, которая видна из точки расположения источника называемой "освещенной", остальная часть называется "теневой"). $\bar{J} = 0$.

При этом на "освещенной" части поверхности S в каждой точке плотность поверхностного тока будет такой же, какой она была бы при том же источнике на идеально проводящей плоскости, касательной к поверхности S в данной точке.

Эти предположения являются приближенными.



Определим величину тока в точке N . Для этого проведем касательную. В точке N , как в начале координат, построим декартову систему. \bar{n} совпадает с осью Z . Определим величину поверхностных токов, возбуждаемых на идеально проводящей касательной плоскости при той же системе источников.

$$\dot{\vec{J}}^0 = [\bar{n} \dot{\vec{H}}_z]_S,$$

где $\dot{\vec{H}}_z = \dot{\vec{H}}_0 + \dot{\vec{H}}$.

Первичное поле (поле падающей волны) предполагается известным, и в частности $\dot{\vec{H}}_0(x, y, 0)$ равно магнитному полю, возбуждаемому в точке N в отсутствие идеально проводящей плоскости.

Вторичное поле $\dot{\vec{H}}(x, y, 0)$ возникает как результат протекания поверхностных токов. Таким образом, в точке N поверхностный ток

$$\dot{\vec{J}}^{\partial} = \left[\vec{1}_n \left(\dot{\vec{H}}_0(x, y, 0) + \dot{\vec{H}}(x, y, 0) \right) \right] \quad 2.$$

Очевидно, под идеально проводящей плоскостью электромагнитное поле отсутствует. Это можно аргументировать тем, что поверхностные токи возбуждают в нижнем полупространстве магнитное поле, равное по величине магнитному полю источника и противоположное ему по знаку.

$$\dot{\vec{H}}_2(x, y, -z) = -\dot{\vec{H}}_0(x, y, -z) \quad 3.$$

Кроме того, из метода зеркальных изображений известно, что в точках, симметричных относительно идеально проводящей плоскости, магнитное поле равно по величине и противоположно по знаку.

$$\dot{\vec{H}}_1(x, y, z) = -\dot{\vec{H}}_2(x, y, -z) = \dot{\vec{H}}_0(x, y, z) \quad z \geq 0 \quad 4.$$

Таким образом в точке N:

$$\dot{\vec{J}}^{\partial} = 2 \left[\vec{1}_n \dot{\vec{H}}_0(x, y, 0) \right] \quad 5.$$

После получения (5) задача определения вторичного поля становится традиционной.

поле векторного

электрического

$$\dot{\vec{J}}^{\partial} \rightarrow \dot{\vec{A}}^{\partial} \rightarrow \dot{\vec{H}}, \dot{\vec{E}}$$

$$\dot{\vec{A}}^{\partial} = \frac{\mu_a}{2\pi} \int_{S_0} \left[\vec{1}_n \dot{\vec{H}}_0 \right]_{S_0} \frac{e^{-jkR}}{R} dS \quad 6,$$

где R - расстояние от элемента поверхности dS до точки наблюдения.

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \dot{\vec{A}}^{\partial} \quad 7,$$

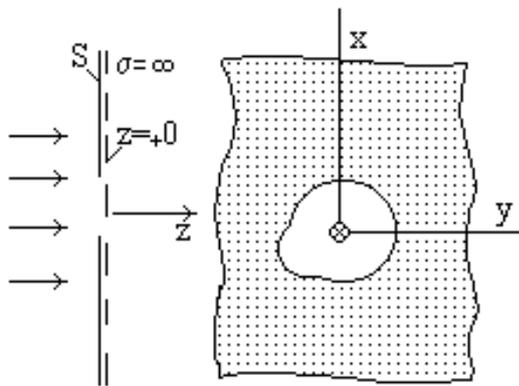
$$\dot{\vec{E}} = -\frac{j}{\omega \mu_a \epsilon_a} \text{grad} \text{ div} \dot{\vec{A}}^{\partial} - j\omega \dot{\vec{A}}^{\partial} \quad 8.$$

Определение вторичного поля через векторный электрический потенциал не является единственно возможным методом.

Можно поступить так: **1.** Освещенную поверхность с найденным распределением поверхностного тока можно рассматривать как ЭЭИ. Тогда

поле в заданной точке может быть найдено как суперпозиция полей, возбуждаемых отдельными ЭЭИ.

2. Рассмотрим дифракцию плоской волны на отверстии в идеально проводящей плоскости.



Уравнение плоской волны, падающей на этот экран

$$l \gg \lambda, \quad \vec{E} = \bar{1}_x E_0 e^{-jkz}, \quad \vec{H} = \bar{1}_y \frac{E_0}{z_c} e^{-jkz}.$$

Поверхность интегрирования расположим с тыльной стороны поверхности S. Она оказывается совпадающей с отверстием, а вне отверстия совпадает с теневой частью металлического экрана. При

выполнении условия $l \gg \lambda$ можно пренебречь затеканием поверхностных токов на теневую часть плоскости. Кроме того, если размеры отверстия \gg длины волны λ , то поле в отверстии можно считать совпадающим с полем падающей плоской волны при $Z=0$.

В дальнейшем задача сводится к следующему. Площадь отверстия разбиваем на элементарные площадки с известным распределением электромагнитного поля (элементы Гюйгенса). В этом случае поле за отверстием можно найти как суперпозицию полей, возбуждаемых отдельными элементами Гюйгенса.

Рассмотренные методы решения дифракционных задач называются приближением Гюйгенса-Кирхгофа. Метод является принципиально приближенным, тем не менее, он позволяет получить удовлетворительные результаты в максимуме интенсивности поля.

Приближение Гюйгенса-Кирхгофа называется методом физической оптики.

11.4. Геометрическая оптика

Метод геометрической оптики является наиболее простым при решении дифракционных задач.

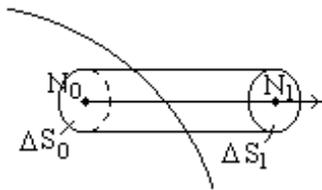
Он применим для определения отраженного поля от тел, размеры которых \gg длины волны λ и минимальный радиус кривизны которых \gg длины волны λ . Ранее отмечали, что направление распространения волны перпендикулярно фазовому фронту. В однородной среде направление распространения плоской волны одинаково во всех точках. Волны, фазовый фронт которых отличен от плоского, этим свойством не обладают. Но при

больших расстояниях от источника, произвольную электромагнитную волну можно рассматривать как локально-плоскую.

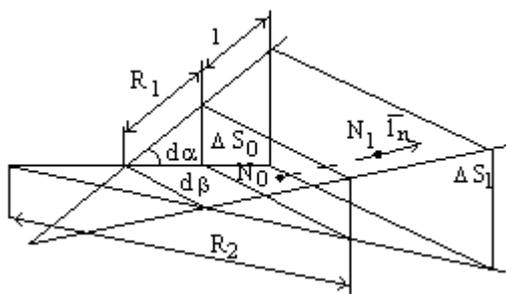
Если амплитуда векторов \vec{E} и \vec{H} в направлении распространения волны не меняется на расстояниях, близких к λ , то для такой волны можно ввести понятие лучей. Под ними подразумевают линии, касательные в каждой точке к которым совпадают с направлением распространения волны.

В однородной среде лучи - прямые линии, в неоднородной - произвольные. В геометрической оптике распространение электромагнитной волны рассматривается как распространение лучей (т.е. мы отвлекаемся от волнового характера электромагнитного поля).

Общей тенденцией является повышение точности полученных результатов с уменьшением длины волны. При вычислении поля по методу геометрической оптики предполагается, что каждой точке луча соответствует определенное значение составляющих электромагнитного поля. Составляющие поля E и H перпендикулярны лучу. Их фазы изменяются линейно вдоль луча. Характер изменения амплитуды составляющих поля вдоль луча устанавливается на основании закона сохранения энергии.



Энергия электромагнитного поля распространяется вдоль луча. Если на поверхности фазового фронта выделить элементарную площадку ΔS_0 , то вся энергия, проходящая через эту площадку, будет распространяться вдоль энергетической трубки, образованной лучами, проведенными по периметру площадки ΔS_0 . В пределе при $\Delta S \rightarrow 0$ энергетическая трубка вырождается в луч N_0N_1 . Получим основное уравнение геометрической оптики.



Два последовательных положения фазового фронта. R_1 и R_2 — радиусы кривизны, l — расстояние между фазовыми фронтами S_0 и S_1 .

Рассмотрим две площадки ΔS_0 и ΔS_1 , вырезанные энергетической трубкой в поверхностях равных фаз S_0 и S_1 . Очевидно, что средний за период поток энергии через эти площадки будет

равен

$$\frac{|\dot{\vec{E}}_m(N_1)|^2}{|\dot{\vec{E}}_m(N_0)|^2} = \frac{\Delta S_0}{\Delta S_1} \quad \mathbf{1.}$$

Выразим отношение $\Delta S_0/\Delta S_1$ через главные радиусы кривизны. Из приведенного рисунка следует

$$\Delta S_0 = R_1 d\alpha R_2 d\beta,$$

$$\Delta S_1 = (R_1 + l)d\alpha(R_2 + l)d\beta,$$

$$\frac{\Delta S_0}{\Delta S_1} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + l)(R_2 + l)}.$$

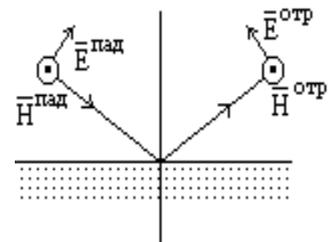
В однородной среде лучи прямолинейны. В случае линейной поляризации волны ориентация векторов электромагнитного поля остается неизменной. Поэтому для напряженности электрического поля, соответствующего разным точкам луча, с учетом приведенных соотношений можно записать:

$$\dot{\vec{E}}_m(N_1) = \dot{\vec{E}}_m(N_0) \left(\frac{R_1 R_2}{(R_1 + l)(R_2 + l)} \right)^{1/2} e^{-jkl} \quad 2,$$

где k — постоянная распространения, R_1 и R_2 — главные радиусы, l — расстояние между рассматриваемыми точками на луче.

Аналогичное соотношение можно записать для магнитного поля. Так же, как и в случае электромагнитных волн, луч, падающий на границу раздела сред, расщепляется на отраженный и преломленный. В геометрической оптике полагается, что направление отраженного и преломленного лучей подчиняются закону Снелиуса. Кроме того, амплитуда векторов поля, соответствующих отраженному и преломленному лучам на границе раздела определяется коэффициентами Френеля.

Если отражения происходят от поверхности идеального проводника, то нормальные составляющие электрического поля падающего и отраженного лучей в точке отражения полагаются равными, а тангенциальные составляющие — равными по амплитуде, но противоположными по направлению.



$$\begin{cases} \dot{\vec{E}}^{\text{пад}} = \bar{I}_n \dot{\vec{E}}_n^{\text{пад}} + \bar{I}_t \dot{\vec{E}}_t^{\text{пад}} \\ \dot{\vec{E}}^{\text{отр}} = \bar{I}_n \dot{\vec{E}}_n^{\text{отр}} + \bar{I}_t \dot{\vec{E}}_t^{\text{отр}} \end{cases}$$

Такая взаимосвязь между компонентами приводит к тому, что $\dot{\vec{E}}^{\text{отр}}$ становится перпендикулярной отраженному лучу. Вектор \bar{H} , соответствующий отраженному лучу, может быть найден как

$$\dot{\vec{H}}^{\text{отр}} = \frac{1}{Z_C} \left[\bar{I}_0 \dot{\vec{E}}^{\text{отр}} \right],$$

где \vec{l}_0 — соответствует направлению распространения отраженного луча.

Итак, если известны составляющие поля и направление распространения в точке отражения луча, то используя соотношение (2), можно вычислить составляющие поля в любой точке отраженного луча, заменив R_1 и R_2 на соответствующие главные радиусы кривизны отраженной волны. В тех случаях, когда через рассмотренные точки пространства проходит несколько лучей (например: падающий и отраженный), то результирующее значение составляющих электромагнитного поля находится как сумма полей.

Таким образом, для решения задач дифракции методом геометрической оптики достаточно знать главные радиусы кривизны фронтов падающей и отраженной волн, что является чисто геометрической задачей, которая всегда может быть решена в данном конкретном случае.

Метод геометрической оптики является приближенным. Он применим, когда главные радиусы кривизны фронтов, минимальные радиусы кривизны рассеивающей поверхности и расстояние от источника электромагнитного поля до поверхности \gg длины волны λ .

В этом случае метод позволяет получить удовлетворительные результаты в освещенной части поверхности в максимуме интенсивности поля.

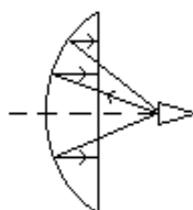
Метод неприменим для определения поля в области тени и вблизи границы освещенной и теневой областей. Кроме того, метод неприменим в тех точках пространства, где имеет место пучок отраженных лучей (*фокальные точки*).

Несмотря на то, что методы геометрической оптики и Гюйгенса-Кирхгофа существенно различны, у них есть и нечто общее. Так в методе геометрической оптики в каждой точке проводящего рассеивающего тела поле полагается таким же, как на идеальной проводящей плоскости касательной к поверхности тела в данной точке

$$\vec{j}^{\text{э}} = 2 \left[\vec{l}_n \dot{H}_z \right].$$

Эти соотношения полностью совпадают с методом Гюйгенса-Кирхгофа.

В методе Гюйгенса-Кирхгофа в точках вблизи отражающего тела справедливы законы геометрической оптики. Поэтому, в частности, метод Гюйгенса-Кирхгофа и называют методом физической оптики.



Часто методы физической и геометрической оптики совмещают при решении задач (например: задача о параболической антенне). На первом этапе в такой задаче используют метод геометрической оптики, вычисляют распределение поля в раскрыве зеркала, а затем по известному распределению поля в излучающей апертуре, используя метод

Гюйгенса-Кирхгофа, вычисляют поле в заданных точках пространства.

11.5. Метод краевых волн

Под физической теорией дифракции волн подразумевают методы решения дифракционных задач, в которых используются различного рода приближения при описании токов на рассматриваемой поверхности. Математическая теория дифракции включает строгие методы решения дифракционных задач. Метод краевых волн в физической теории дифракции является дальнейшим развитием метода физической оптики и предназначен для решения дифракционных задач на выпуклых металлических телах, имеющих изломы (ребра).

Рассмотрим основные принципы. Пусть плоская электромагнитная волна падает на идеально проводящее тело, находящееся в свободном пространстве. Под действием волны на поверхности тела наводятся поверхностные электрические токи. В физической оптике показано, что в каждой точке поверхности тела плотность тока определяется по формуле

$$\dot{J}_0^{\text{э}} = 2[\bar{1}_n \dot{H}_0] \quad \mathbf{1},$$

где $\bar{1}_n$ — единичная нормаль к поверхности тела,

\dot{H}_0 — напряженность магнитного поля падающей волны.

Характерная особенность заключается в том, что это равенство выполняется только для освещенной части поверхности. На теневой части поверхности $\dot{J}_0^{\text{э}} = 0$. В действительности плотность тока отличается от определяемой соотношением (1). Для уточнения плотности тока ее записывают в виде суммы:

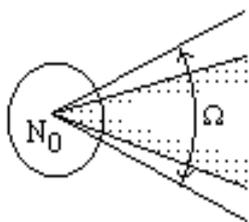
$$\dot{J} = \dot{J}_0 + \dot{J}_1 \quad \mathbf{2},$$

где \dot{J}_0 — равномерная часть поверхностного тока (определяется приближенным методом физической оптики);

\dot{J}_1 — добавочная или неравномерная часть поверхностного тока (дополняющее значение поверхностного тока до более точного значения).

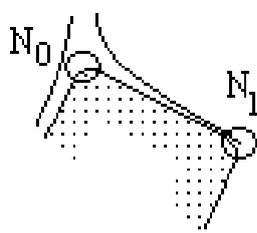
Истинное значение поверхностного тока можно было бы установить в результате строгого решения дифракционных задач. Чаще всего это является невозможным, поэтому прибегают к приближенным методам. В частности, метод краевых волн позволяет определить неравномерную часть поверхностного тока в случае, если на металлическом рассматриваемом теле имеются изломы и ребра. Распределение тока на малом элементе поверхности вблизи ее излома можно считать приближенно таким же, как на идеально

проводящем металлическом клине, образованном плоскостями, касательными к поверхности тела в рассматриваемой точке.



Модель в виде идеально проводящего клина используется потому, что для него существует строгое решение задачи. Впервые эту задачу решил Уфимцев. Он получил и исследовал решение задачи и установил, что неравномерная часть поверхностного тока в этом случае имеет вид краевых волн, распространяющихся от ребра (излома) и быстро затухающих с удалением от излома.

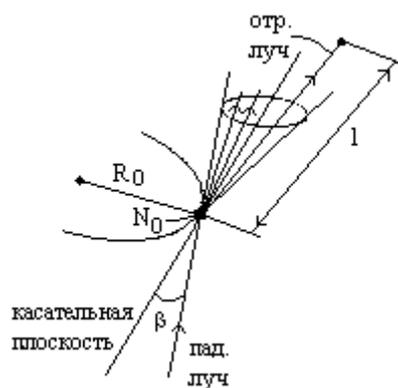
Определив указанным выше способом неравномерную часть поверхностного тока, т.е. определив в начальной точке плотность полного тока, можно найти поле рассеиваемое телом в каждой точке пространства.



Полученное решение в этом случае является более точным по сравнению с решением, полученным методом Гюйгенса-Кирхгофа. Метод краевых волн позволяет учесть в задачах дифракции взаимное влияние изломов. В этом случае волна, соответствующая неравномерной части, распространяясь от начального излома в сторону, к соседнему, испытывает на нем дифракцию, возбуждая вторичную волну неравномерного поверхностного тока, т.е. этот метод позволяет уточнить решения задачи дифракции на теле с множественными изломами.

11.6. Геометрическая теория дифракции

Геометрическая теория дифракции рассматривается как наиболее эффективный метод асимптотического решения задач дифракции на телах сложной конфигурации. Метод предложен Кельверан и является обобщающим и развитием метода геометрической оптики. Геометрическая теория дифракции базируется на том предположении, что энергия распространяется вдоль лучей. Но в отличие от метода геометрической оптики, помимо падающего, отраженного и преломленного лучей вводят понятие дифрагированных лучей. В случае идеально проводящих тел дифрагированные лучи возникают при падении луча на ребро или острую вершину на поверхности тела, а также при распространении луча по касательной к плавно изогнутой поверхности тела. Если падающий луч падает на ребро, то возникает система дифрагированных лучей.

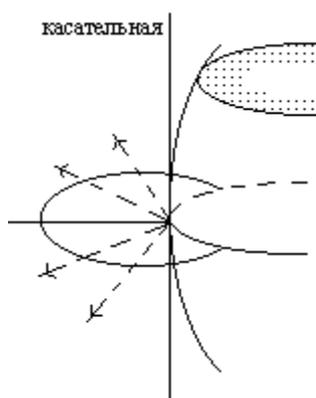
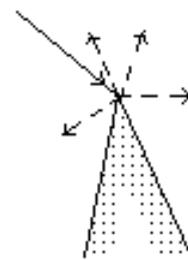


R_0 — радиус кривизны сечения ребра

β — угол расхода конуса

l — расстояние от точки наблюдения до точки N_0

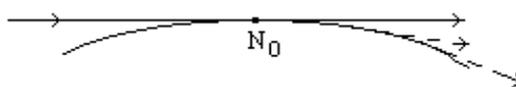
Если падающий луч попадает на ребро, то возникает система дифрагированных лучей, образующих как бы поверхность конуса вращения с вершиной в точке соприкосновения падающего луча с ребром и осью, совпадающей с касательной к поверхности ребра в точке дифракции. При этом угол раскрытия конуса 2β равен удвоенному углу между падающим лучом и этой касательной.



В тех случаях, когда падающий луч перпендикулярен касательной к ребру, коническая поверхность разворачивается в плоскость.

Если падающий луч падает на острие вершины рассеивающего тела, то в этом случае дифрагированные лучи расходятся во все стороны как от точечного источника.

Если падающий луч распространяется по касательной к плавно изогнутой поверхности тела, то в точке касания он расщепляется на два луча, один из которых продолжает распространяться в направлении касательной, а второй образует новый, распространяющийся вдоль плавно изогнутой поверхности тела. Причем, в каждой точке поверхностного луча испускается дифрагированный луч, распространяясь по касательной к данной точке.



Таким образом во всех случаях, когда возникают дифрагированные лучи, наблюдается характерная особенность. Один луч вызывает появление бесчисленного множества дифрагированных лучей. Дифрагированные лучи проникают в область тени, создают в ней некоторое поле (в методе геометрической и физической оптики мы предполагаем, что поле отсутствует). Кроме того, дифрагированные лучи изменяют поле в освещенной области. Для определения полей в какой-либо точке пространства на основе геометрической теории дифракции нужно найти все лучи, проходящие через данную точку пространства. Затем вычисляем поля, соответствующие каждому лучу и результирующее поле находим как сумму полей. Иными словами, в некоторой точке пространства N электрическое поле можно представить

$$\dot{\vec{E}}(N) = \underbrace{\dot{\vec{E}}_0(N)}_{\text{отраженного}} + \dot{\vec{E}}_{\text{отр}}(N) + \underbrace{\dot{\vec{E}}_d(N)}_{\text{преломленного луча}}$$

В точке наблюдения напряжение электрического поля, соответствующего падающим и отраженным лучам, вычисляется соответственно методу геометрической оптики. Третья компонента, соответствующая дифракционному лучу, вычисляется с использованием метода геометрической теории дифракции. В точке дифракции напряженность поля, соответствующая каждому дифрагированному лучу пропорциональна напряженности поля падающего луча. Коэффициенты пропорциональности, как правило, устанавливаются с использованием справочного пособия по геометрической теории дифракции.

Обычно предполагается в задачах дифракции, что фаза вектора напряженности, соответствующая дифрагированному лучу, линейно меняется вдоль луча, а амплитуда дифрагированного луча устанавливается из условия постоянства потока энергии вдоль соответствующей энергетической трубки.

Геометрическая теория дифракции обладает одним существенным недостатком:

она не позволяет определить поле на границе геометрической тени, на фронтальных линиях и на поверхности рассеивающего тела. В таких областях, которые называются каустиками, для определения электромагнитного поля используются специальные методы.

11.7 Поверхностное сопротивление проводника

Так как касательная составляющая напряженности электрического поля на поверхности металла $\dot{\vec{E}}_0$ и вектора плотности поверхностного тока $\dot{\vec{J}}$ направлены одинаково, то можно записать:

$$\dot{\vec{E}}_0 = z_s \dot{\vec{J}} \quad \mathbf{1.}$$

Коэффициент пропорциональности z_s принято называть поверхностным сопротивлением проводника. Учитывая формулу $\dot{\vec{J}} = \left[\dot{\vec{1}}_n \dot{H}_0 \right]$ и граничное условие Щукина-Леонтовича $\dot{H}_{1r} = z_{c2} \left[\dot{\vec{1}}_n \dot{H}_1 \right]$, где z_{c2} - характеристическое сопротивление, получаем:

$$z_s = (1 + j) / (\sigma d) \quad 2.$$

Тогда активная часть z_s : $R_s = 1 / (\sigma d)$ 3.

Из (7.10.3) следует, что проводник, заполняющий все полупространство, имеет в результате поверхностного эффекта такое же сопротивление, как и слой проводника толщиной d без учета поверхностного эффекта .

$$\dot{P}_n = \oint_s \dot{P} d\bar{S} = \frac{1+j}{2\sigma d} \oint_s |H_{0m}|^2 dS; \quad \dot{P}_n = \frac{1}{2} \oint_s Z_s |\dot{J}|^2 dS \quad 4.$$

Направляющие системы и направляемые электромагнитные волны.

12.1 Направляющие системы.

Направляемые волны, в отличие от свободно распространяющихся в пространстве, могут существовать только при наличии направляющих элементов. Совокупность направляющих элементов образуют направляющую систему. Направляющие системы называют также линиями передачи энергии .

Все линии передачи можно разделить на два больших класса: линии передачи открытого типа и линии передачи закрытого типа. В линиях передачи закрытого типа вся энергия сосредоточена в пространстве, экранированном от внешнего металлической оболочкой. В линиях передачи открытого типа ЭМП, строго говоря, распределено во всем пространстве, окружающем линию. Однако открытые линии выполнены обычно т.о., что подавляющая часть энергии ЭМП сосредотачивается в непосредственной близости от линии.

12.2 Классификация направляемых волн

Направляемые волны делятся: на *поперечные*, *электрические*, *магнитные* и *смешанные*. *Поперечными* или волнами типа **T** называются волны, у которых в продольном направлении /в направлении распространения энергии/ отсутствуют составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей. Векторы \dot{E} и \dot{H} лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. *Электрическими* или волнами типа **E** называются волны, у которых вектор электрического поля помимо поперечных составляющих, имеет продольную составляющую. Продольная составляющая вектора магнитного поля равна нулю. *Магнитными* или волнами типа **H** называются волны, у которых вектор магнитного поля, помимо поперечных

составляющих, имеет продольную составляющую. Продольная составляющая вектора электрического поля равна нулю. *Смешанными* (гибридными) называются волны, у которых векторы электрического и магнитного полей имеют как продольную, так и поперечную составляющую.

12.3. Связь между продольными и поперечными составляющими полей в регулярной направляющей системе

Рассмотрим произвольную бесконечно длинную направляющую систему, ориентированную вдоль оси Z . Будем полагать, что направляющая система не вносит потерь и однородна, т.е.:

- форма конечного сечения не зависит от координаты Z ;
- параметры среды, в которой распространяется ЭМП, и граничные условия, которым удовлетворяет поле, не зависят от координаты Z .

При отсутствии сторонних источников $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ должны удовлетворять однородным уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}} + \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a \dot{\vec{E}} = 0 \qquad \nabla^2 \dot{\vec{H}} + \omega^2 \tilde{\epsilon}_e \mu_e \dot{\vec{H}} = 0$$

Зависимость $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ от координаты Z описывается множителем $e^{\pm jhz}$,

где h - постоянная распространения / или фазовая постоянная / в ЛП.

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} e^{-jhz} \quad Z \quad \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}(\xi, \eta) e^{\pm jhz} = \dot{\vec{E}}_s e^{\pm jhz} \qquad \mathbf{1},$$

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}(\xi, \eta) e^{\pm jhz} = \dot{\vec{H}}_s e^{\pm jhz} \qquad \mathbf{2},$$

$$\longleftarrow e^{jhz} \qquad \xi \text{ и } \eta - \text{координаты полезного сечения ЛП.}$$

Подставляя (1) и (2) в однородные уравнения Гельмгольца при $\tilde{\mu}_a = \mu_a$ и $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$ получим:

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{E}} + (\omega^2 \epsilon_a \mu_a - h^2) \dot{\vec{E}} = 0 \qquad \mathbf{3},$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\vec{H}} + (\omega^2 \epsilon_a \mu_a - h^2) \dot{\vec{H}} = 0 \qquad \mathbf{4},$$

Обозначение: $g^2 = \omega^2 \mu_a \epsilon_a - h^2 \qquad \mathbf{5},$

где g - волновое число.

Каждое из уравнений (3) и (4) эквивалентно трем скалярным уравнениям для продольной и двух поперечных составляющих. Поперечные составляющие можно выразить через продольные с помощью соотношений, вытекающих из дифференциальных уравнений Максвелла.

Согласно (1) и (2) дифференцирование по Z эквивалентно умножению вектора на множитель $(-jh)$. Преобразуем однородные уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \varepsilon_a \dot{\mathbf{E}} \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + jh \dot{H}_y &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x \\
 -jh \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_y
 \end{aligned} \right\} \mathbf{6} \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + jh \dot{E}_y &= j\omega \mu_a \dot{H}_x \\
 -jh \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_y
 \end{aligned} \right\} \\
 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}
 \end{aligned}$$

Решая систему (6) относительно \dot{E}_x и \dot{H}_y , получаем:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \frac{jh}{j\omega \mu_a} \left(jh \dot{E}_x + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right) &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x \\
 -\frac{jh}{j\omega \varepsilon_a} \left(jh \dot{H}_y + \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_y \\
 j\omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - h^2 \dot{E}_x + jh \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -\omega^2 \varepsilon_a \dot{E}_x \\
 -jh \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + h^2 \dot{H}_y - j\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \dot{H}_y
 \end{aligned}$$

$$\boxed{-g^2 \dot{E}_x = jh \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + j\omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}} \quad \mathbf{8},$$

$$\boxed{-g^2 \dot{H}_y = jh \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + j\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}} \quad \mathbf{9},$$

Аналогично, из (8) \dot{E}_y и \dot{H}_x :

$$\boxed{-g^2 \dot{E}_y = jh \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - j\omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}} \quad \mathbf{10},$$

$$\boxed{-g^2 \dot{H}_x = jh \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} - j\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}} \quad \mathbf{11,}$$

Система уравнений (8) - (11) связывает поперечные и продольные составляющие поля в декартовой системе координат. Для выражения этой связи в произвольной системе координат перейдем к векторной форме уравнений. Введем вектор $\dot{\vec{E}}_{\perp} = \bar{I}_x \dot{E}_x + \bar{I}_y \dot{E}_y$. Подставляя в это выражение вместо \dot{E}_x и \dot{E}_y их значения из (8) - (11), получим:

$$\begin{aligned} -g^2(\bar{I}_x \dot{E}_x + \bar{I}_y \dot{E}_y) &= (jh \partial \dot{E}_z / \partial x + j\omega \mu_a \partial \dot{H}_z / \partial y) \bar{I}_x + (jh \partial \dot{E}_z / \partial y - j\omega \mu_a \partial \dot{H}_z / \partial x) \bar{I}_y \\ -g^2(\bar{I}_x \dot{E}_x + \bar{I}_y \dot{E}_y) &= jh(\bar{I}_x \partial \dot{H}_z / \partial x + \bar{I}_y \partial \dot{E}_z / \partial y) - j\omega \mu_a (-\bar{I}_x \partial \dot{H}_z / \partial y + \bar{I}_y \partial \dot{H}_z / \partial x). \end{aligned}$$

Введя обозначение $grad_{\perp} = \bar{I}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{I}_y \frac{\partial}{\partial y}$

и учитывая, что $[\bar{I}_z grad_{\perp}] = \bar{I}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{I}_y \frac{\partial}{\partial y}$

получим: $-g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = jh grad_{\perp} \dot{E}_z - j\omega \mu_a [\bar{I}_z grad_{\perp} \dot{H}_z]$ **12,**

Аналогично, получается равенство:

$$-g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = jh grad_{\perp} \dot{H}_z + j\omega \varepsilon_a [\bar{I}_z grad_{\perp} \dot{E}_z] \quad \mathbf{13,}$$

Т.о. для нахождения структуры полного поля необходимо решить с учетом граничных условий два дифференциальных уравнения:

$$\nabla^2 \dot{E}_z + g^2 \dot{E}_z = 0 \quad \mathbf{14,}$$

$$\nabla^2 \dot{H}_z + g^2 \dot{H}_z = 0 \quad \mathbf{15.}$$

и воспользоваться равенствами (12) и (13) для определения поперечных составляющих.

12.4. Критическая частота. Критическая длина волны.

$$g^2 = \omega \mu_a \varepsilon_a - h^2$$

h, является вещественной величиной, если $g \leq \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} = 2\pi f \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ **1,**

и мнимой величиной, если $g > 2\pi f \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ **2,**

В первом случае фаза изменяется вдоль оси Z по линейному закону, что является признаком распространения волны с постоянной фазовой скоростью

воль этой оси . Во втором случае вдоль оси Z фаза остается постоянной , а амплитуда убывает по экспоненте , что является признаком отсутствия переноса энергии вдоль направляющей системы .

Частота определяется из условия $g = 2\pi f_{кр} \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ **3,**

называется критической . $f_{кр} = g / 2\pi \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}$ **4,**

Соответствующая этой частоте критическая длина волны равна:

$$\lambda_{кр} = V_0 / f_{кр} = 2\pi / g \quad \mathbf{5,}$$

Тогда $h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - (2\pi / \lambda_{кр})^2} = \kappa \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}$ **6,**

где $\kappa = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} = 2\pi / \lambda$ - волновое число,

а $\lambda = V_0 / f$ - длина волны в среде с параметрами μ_a и ε_a .

Согласно (1) свободное распространение волны по направляющей системе имеет место лишь на частотах, превышающих критическую $f > f_{кр}(\lambda < \lambda_{кр})$.

Назовем длиной волны λ_B в направляющей системе минимальное расстояние между поперечными сечениями, соответствующими различным значениям координаты Z , в которых колебания сдвинуты по фазе на 2π . Так как зависимость составляющих поля от координаты Z описывается выражением: e^{-jhz} , то

$$\lambda_B = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2} \quad \mathbf{7.}$$

Поперечные электромагнитные волны

13.1. $(E_z=0, H_z=0)$ Критическая длина волны.

Полагая в соотношениях (12.3. 12) и (12.3. 13) $E_z = H_z = 0$, получаем

$$g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = 0, \quad g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = 0 \quad \mathbf{1}$$

что удовлетворяет при $E_{\perp} \neq 0$ и $H_{\perp} \neq 0$,

$$\text{если только} \quad g^2 = 0 \quad \mathbf{2}$$

Согласно (12.4. 4) , (12.4. 5) этим значениям g соответствуют $\lambda_{кр} = 0$ и $f_{кр} = 0$. Следовательно, в тех направляющих системах, где возможно распространение волн T , эти волны существуют на любой частоте.

13.2. Постоянная распространения. Фазовая скорость волны .

$$g^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - h^2 , \quad g^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \quad \mathbf{1,}$$

$$V_\phi = \omega / h = 1 / \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} = V_0 \quad \mathbf{2,}$$

Потенциальный характер поля.

Полагая в уравнениях $\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}} + g^2 \dot{\mathbf{E}} = 0$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}} + g^2 \dot{\mathbf{E}} = 0$$

$$g^2 = 0$$

$$E_z = H_z = 0$$

получаем:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \mathbf{3,}$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = 0$$

Уравнения (3) представляют собой двумерные уравнения Лапласа. Поле, удовлетворяющее уравнению Лапласа, является потенциальным . Это означает , что решение уравнений (3) могут быть выражены через градиент некоторых функций . Например :

$$\dot{\mathbf{E}}_{\perp} = \text{grad}_{\perp} \dot{U} \quad \mathbf{4,}$$

где \dot{U} - является скалярным потенциалом, также удовлетворяющем уравнению Лапласа

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{U} = 0.$$

Векторы $\dot{\mathbf{E}}_{\perp}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{\perp}$ выражаются друг через друга. Полагая в (12.3. 6) , (12.3. 7)

$$E_z = H_z = 0 ,$$

приходим к соотношениям: $\dot{H}_y = \frac{\omega \varepsilon_a}{h} \dot{E}_x , \dot{E}_y = - \frac{\omega \mu_a}{h} \dot{H}_x$

$$\dot{E}_x = \frac{\omega\mu_a}{h} \dot{H}_y, \dot{H}_x = -\frac{\omega\varepsilon_a}{h} \dot{E}_y,$$

которые можно записать в виде одного векторного равенства:

$$(\bar{1}_x \dot{H}_x + \bar{1}_y \dot{H}_y) = \frac{\omega\varepsilon_a}{h} [\bar{1}_z (\bar{1}_x \dot{E}_x + \bar{1}_y \dot{E}_y)] = \frac{\omega\varepsilon_a}{h} (-\bar{1}_x \dot{E}_y + \bar{1}_y \dot{E}_x)$$

$$\dot{H}_\perp = \frac{\omega\varepsilon_a}{h} [\bar{1}_z \dot{E}_\perp] \quad \mathbf{5},$$

из которого следует, что векторы \dot{E}_\perp и \dot{H}_\perp волны Т, взаимно перпендикулярны

13.3. Характеристическое сопротивление.

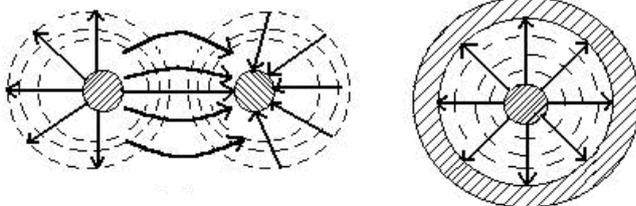
Подставляя (1) в (5), получаем:

$$\dot{H}_\perp = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} [\bar{1}_z \dot{E}_\perp] = (1/Z_c) [\bar{1}_z \dot{E}_\perp] \quad \mathbf{6},$$

где $Z_c = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ - характеристическое сопротивление волны Т.

Независимость структуры поля от частоты.

В уравнения (3) не входит частота. Из этого можно сделать вывод, что структура волны Т не зависит от частоты. В частности, распределение электрического поля волны Т в поперечном сечении линии совпадает с распределением статического электрического поля в той же системе. Аналогичное соответствие существует и в отношении магнитных полей. На этом рисунке показана структура электрических и магнитных полей в поперечном сечении двухпроводной и коаксиальной линии.



Такую же структуру поля будет иметь волна Т на любой частоте. Волна Т может распространяться только в тех направляющих системах, по которым возможна передача энергии постоянного тока. Такие

направляющие системы должны состоять не менее, чем из двух изолированных друг от друга проводников. У волны Т поля в поперечной плоскости не остаются неизменными во времени, как в статическом случае, а непрерывно

меняют свою амплитуду по синусоидальному закону, такая же зависимость от координаты Z .

При идеальной проводимости проводников ЭМП проникает в металл. В соответствии с граничными условиями Щукина - Леонтовича появляется отличная от нуля там составляющая электрического поля, параллельная оси Z , что делает невозможным существование волны T . Однако при высокой проводимости металла структура волны мало отличается от структуры поля волны T и этим отличием во многих случаях можно пренебречь.

Электрические волны

14.1. Связь между составляющими поля ($\dot{E}_z \neq 0$ и $\dot{H}_z = 0$).

Полагая в соотношениях:

$$-g^2 \dot{E}_\perp = jh \text{grad}_\perp \dot{E}_z - j\omega\mu_a [\bar{1}_z \text{grad}_\perp \dot{H}_z] ,$$

$$-g^2 \dot{H}_\perp = jh \text{grad}_\perp \dot{H}_z + j\omega\varepsilon_a [\bar{1}_z \text{grad}_\perp \dot{E}_z]$$

$$\dot{H}_z = 0, \text{ получим: } -g^2 \dot{E}_\perp = jh \text{grad}_\perp \dot{E}_z \quad \mathbf{1,}$$

$$-g^2 \dot{H}_\perp = j\omega\varepsilon_a [\bar{1}_z \text{grad}_\perp \dot{E}_z] \quad \mathbf{2,}$$

$$\dot{H}_\perp = \frac{\omega\varepsilon_a}{h} [\bar{1}_z \dot{E}_\perp] \quad \mathbf{3,}$$

То есть векторы \dot{E}_\perp и \dot{H}_\perp у волн E взаимно перпендикулярны.

14.2. Характеристическое сопротивление

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - (2\pi / \lambda_{hp})^2} = \omega c \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{hp})^2} \quad \mathbf{(12.4. 6)}$$

Согласно (3) характеристическое сопротивление можно записать в виде :

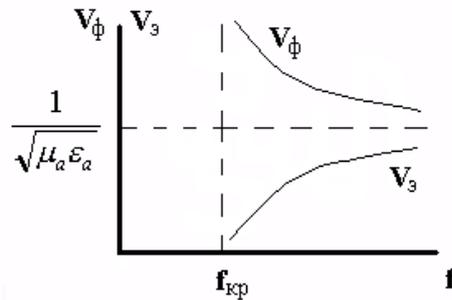
$$Z_c^E = \frac{h}{\omega\varepsilon_a} = Z_c \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{kp})^2} \quad \mathbf{4}$$

$$\lambda < \lambda_{kp} \rightarrow Z_c^E \leq Z_c^T, \lambda = \lambda_{kp} \rightarrow Z_c^E = 0$$

при $\lambda > \lambda_{кр} \rightarrow Z_c^E$ - мнимая величина. Это означает, что поперечные составляющие векторов электрического и магнитного полей сдвинуты по фазе на 90 градусов. Очевидно, что при этом вектор Пойтинга принимает чисто мнимые значения, и перенос активной энергии по ЛП отсутствует. Поэтому экспоненциальное убывание амплитуды полей в линии при $\lambda > \lambda_{кр}$ называется не потерями энергии в направляющей системе, а чисто реактивным характером ЭМП в линии.

14.3. Фазовая скорость. Дисперсия

$$V_\phi = \omega / h = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2} \quad (8.6.5), \quad V_\phi > V_0; \quad \lambda = \lambda_{кр} \rightarrow V_\phi = \infty$$



Зависимость фазовой скорости V_ϕ от частоты называется дисперсией, а волны, для которых дисперсия может иметь место, называются диспергирующими.

Раздел 15. Магнитные волны

($\dot{E}_z = 0$ и $\dot{H}_z \neq 0$) 15.1. Связь между составляющими поля.

Полагая в соотношениях:

$$-g^2 \dot{\vec{E}}_\perp = jh \text{grad}_\perp \dot{E}_z - j\omega\mu_a [\vec{1}_z \text{grad}_\perp \dot{H}_z], \quad 1,$$

$$-g^2 \dot{\vec{H}}_\perp = jh \text{grad}_\perp \dot{H}_z + j\omega\epsilon_a [\vec{1}_z \text{grad}_\perp \dot{E}_z]$$

$$\dot{E}_z = 0, \text{ получаем: } -g^2 \dot{\vec{H}}_\perp = jh \text{grad}_\perp \dot{H}_z \quad 1,$$

$$g^2 \dot{\vec{E}}_\perp = j\omega\epsilon_a [\vec{1}_z \text{grad}_\perp \dot{H}_z] \quad 2,$$

$$\dot{\vec{E}}_\perp = \frac{\omega\mu_a}{h} [\vec{1}_z \dot{\vec{H}}_\perp] \quad 3,$$

$$\begin{aligned} \left[\bar{l}_z \left[\bar{l}_z \dot{\bar{H}}_{\perp} \right] \right] &= \bar{l}_z (\bar{l}_z \dot{\bar{H}}_{\perp}) - \dot{\bar{H}}_{\perp} (\bar{l}_z \bar{l}_z) \\ \dot{\bar{H}}_{\perp} &= \frac{h}{\omega \mu_a} \left[\bar{l}_z \dot{\bar{E}}_{\perp} \right] \end{aligned} \quad \mathbf{4,}$$

Следовательно, у волн Н векторы $\dot{\bar{E}}_{\perp}$ и $\dot{\bar{H}}_{\perp}$ взаимно перпендикулярны.

Из равенства (2) вытекает граничное условие, которому удовлетворяет составляющая \dot{H}_z на металлических поверхностях:

$$\begin{aligned} g^2 \dot{H}_n &= -jh \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial n}, \dot{H}_{1n} = 0. (H_n = 0) \\ \partial \dot{H}_z / \partial n &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{5}$$

15.2. Характеристическое сопротивление . Фазовая скорость

Согласно (3) и (12.4.6) $h = K \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{kp})^2}$

$$Z_c^H = \frac{\omega \mu_a}{h} = Z_c \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{kp})^2} \quad \mathbf{6}$$

$Z_c^H \gg Z_c; \lambda \ll \lambda_{kp} \rightarrow Z_c^H$ - чисто мнимая величина, и перенос энергии по ЛП отсутствует: $V_{\phi} = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{kp})^2}$, следовательно, волны Н - диспергирующие.

15.3. Групповая скорость

Реальные электромагнитные сигналы, немонахроматичны, так как состоят из конечного, либо бесконечного числа монохроматических колебаний с различными частотами. В диспергирующих системах фазовая скорость зависит от частоты, то есть проходя один и тот же путь монохроматические волны получают различные по величине фазовые сдвиги.

Для характеристики перемещения немонахроматических сигналов вводят понятие групповой скорости, понимая под этим скорость перемещения огибающей группы монохроматических волн, близких по частоте .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_m(\omega) e^{j[\omega t - \beta(\omega)Z]} d\omega \quad \mathbf{1,}$$

где $\dot{A}_m(\omega)$ - амплитуда каждой из монохроматических волн; $\beta(\omega)$ - коэффициент распространения каждой их этих волн.

Если спектр сигнала достаточно узкий и заключен в интервале частот: $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega$, то $\dot{A}_m(\omega) = 0$ вне этого интервала. Поэтому,

$$\dot{E}(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) e^{j[\omega t - \beta(\omega)Z]} d\omega \quad 2,$$

Разложим $\beta(\omega)$ в ряд Тейлора

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \left. \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2!} \left. \left(\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2} \right) \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad 3,$$

где β_0 - коэффициент распространения на частоте ω_0 . Т.к. спектр узок, то:

$$\omega t - \beta(\omega)Z = \omega t - \beta_0 Z - \left. \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z$$

$$\omega t - \beta(\omega)Z = \omega t - \beta_0 Z - \left. \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z + (\omega - \omega_0)t - (\omega - \omega_0)t$$

$$\omega t - \beta(\omega)Z = \omega t - \omega t + \omega_0 t - \beta_0 Z + (\omega - \omega_0)t - \left. \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z$$

$$\omega t - \beta(\omega)Z = (\omega - \omega_0)t + (\omega_0 t - \beta_0 Z) - \left. \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)Z \quad 4,$$

$$\dot{E}(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) \exp \left\{ j \left[(\omega_0 t - \beta_0 Z) + (\omega - \omega_0) \left(t - \left. \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} Z \right) \right] \right\} d\omega$$

$$\dot{E}(z, t) = e^{j(\omega_0 t - \beta_0 Z)} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left[t - \left. \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} Z \right]} d\omega \quad 5,$$

Для простоты предположим, что $\dot{A}_m(\omega_0 + \Delta\omega) = \dot{A}_m(\omega_0 - \Delta\omega)$

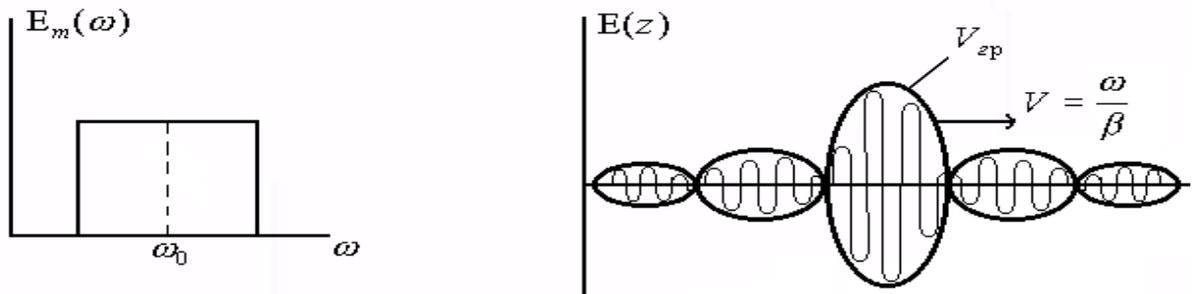
$$\dot{E}(z, t) = \left\{ 2 \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{A}_m(\omega) \left[(\omega - \omega_0) \left(t - \left. \left(\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right) \right|_{\omega=\omega_0} Z \right) \right] d\omega \right\} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 Z)} \quad 6,$$

Амплитуда сигнала (величина в фигурных скобках) достигает максимума, если $\cos\left[(\omega - \omega_0)\left(t - \frac{\partial\beta}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega_0} Z\right)\right] = 1$, т.е., когда $t - \frac{\partial\beta}{\partial\omega}\Big|_{\omega=\omega_0} Z = 0$.

Скорость перемещения максимума равна

$$: V_{gp} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\partial\beta / \partial\omega} \quad 7,$$

По определению эта величина - групповая скорость.



Условием применимости (7) является малая скорость изменения $\beta(\omega)$ вблизи ω_0 — узость спектра сигнала. При невыполнении этих условий влияние дисперсии становится весьма значительным, и сигнал в процессе распространения так сильно меняет свою форму, что само понятие групповой скорости теряет смысл.

Получим выражение для V_{gp} в ЛП:

$$V_{gp} = \frac{1}{\partial h / \partial\omega}, \quad h = K\sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}$$

$$V_{gp} = 1 / \left[\frac{\partial}{\partial\omega} (\sqrt{\mu_a \epsilon_a} \sqrt{1 - (\omega_{кр} / \omega)^2}) \right] = 1 / \left[\frac{\partial}{\partial\omega} (\sqrt{\mu_a \epsilon_a} \sqrt{\omega^2 - \omega_{кр}^2}) \right] = 1 / \left[\sqrt{\mu_a \epsilon_a} \frac{1}{2} (\omega^2 - \omega_{кр}^2)^{-1/2} \cdot 2\omega \right]$$

$$V_{gp} = \frac{(\omega^2 - \omega_{кр}^2)^{1/2}}{\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \frac{\omega \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}}{\omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = V_0 \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2} \quad 8,$$

То есть $V_{gp} < V_0$ для распространения волн Е, Н и $V_{gp} = V_0$ для волн Т.

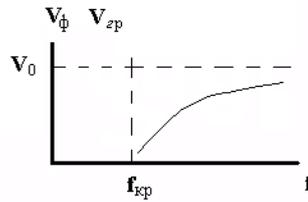
Сравнивая (8) и (12.6. 5) ($V_\phi = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}$), замечаем, что

$$V_{zп} \cdot V_{\phi} = V_0^2 = \left[1 / \sqrt{\mu_a \epsilon_a}\right]^2 \quad \mathbf{9,}$$

$$V_{\mathcal{O}} = \int_{\Delta S} \operatorname{Re} \dot{\Pi} d\bar{s} / \int_{\Delta S} \omega_{zп} ds = V_{zп} \quad \mathbf{10.}$$

$$V_{\mathcal{O}} = V_0^2 / V_{\phi} = V_0 \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}$$

Основная энергия волны сосредоточена вблизи максимума огибающей. Поэтому, говоря о $V_{zп}$, можно читать, что мы говорим о $V_{\mathcal{O}}$.



Т.о. $V_{\mathcal{O}} < V_{zп}$ для волн Е, Н и $V_{\mathcal{O}} = V_0$ для волн Т.

15.4. Мощность, переносимая электромагнитной волной по линии передачи

Средняя мощность, проходящая за период через элементарную площадку ds :

$$dP_{zп} = \operatorname{Re} \dot{\Pi}_z ds \quad \mathbf{1,}$$

где $\dot{\Pi}_z$ - продольная составляющая вектора Пойнтинга Π .

$$\dot{\Pi}_z = \frac{1}{2} \left(\bar{1}_z \left[\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}^* \right] \right) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{E}}_{\perp} \left[\bar{1}_z \dot{\mathbf{H}}_{\perp}^* \right] \right) \quad \mathbf{2,}$$

Из равенств $\dot{\mathbf{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z_c} \left[\bar{1}_z \dot{\mathbf{E}}_{\perp} \right], \quad \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z^E_c} \left[\bar{1}_z \dot{\mathbf{E}}_{\perp} \right], \quad \dot{\mathbf{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z^H_c} \left[\bar{1}_z \dot{\mathbf{E}}_{\perp} \right]$

следует, что для волн Е, Н,Т форма связи имеет одинаковый вид:

$$\dot{\mathbf{H}}_{\perp} = \frac{1}{Z_n} \left[\bar{1}_z \dot{\mathbf{E}}_{\perp} \right] \quad \mathbf{3,}$$

Подставляя (3) в (2), и учитывая, что продольные составляющие сдвинуты по фазе относительно поперечных на 90° , получаем:

$$\dot{\Pi}_z = -\frac{1}{2}(\dot{\vec{E}}_{\perp}[\vec{l}_z \dot{\vec{H}}_{\perp}^*]) = -\frac{1}{2}(\dot{\vec{E}}_{\perp}[\vec{l}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}^*]) \frac{1}{Z_n}; (\vec{l}_z[\vec{l}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}^*]) = \vec{l}_z[\vec{l}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}^*] - \dot{\vec{E}}_{\perp}^*[\vec{l}_z \vec{l}_z]$$

$$\dot{\Pi}_z = -\frac{1}{2Z_n}(-\dot{\vec{E}}_{\perp} \dot{\vec{E}}_{\perp}^*) = |\dot{\vec{E}}_{\perp}|^2 / 2Z_n$$

$$\text{Re} \dot{\Pi}_z = -|\dot{\vec{E}}_{\perp}|^2 / 2Z_n \quad \mathbf{4,}$$

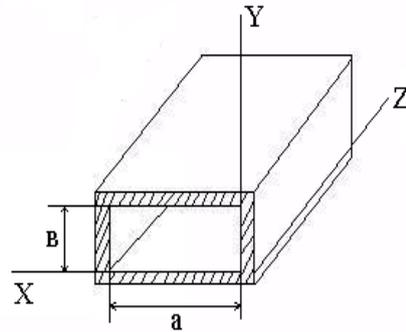
$$P_{cp} = \frac{1}{2Z_n} \int_{S_{\perp}} |\dot{\vec{E}}_{\perp}|^2 ds \quad \mathbf{5,}$$

$$P_{cp} = \frac{Z_n}{2} \int_{S_{\perp}} |\dot{\vec{H}}_{\perp}|^2 ds \quad \mathbf{6.}$$

Направляющие системы.

16.1. Прямоугольный волновод

Электрические волны ($\dot{E}_z \neq 0$ и $\dot{H}_z = 0$) тип волны E



$$-g^2 \dot{\vec{E}}_{\perp} = jh \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z$$

$$-g^2 \dot{\vec{H}}_{\perp} = j\omega \epsilon_a [\vec{l}_z \text{grad}_{\perp} \dot{E}_z]$$

$\nabla^2 \dot{E}_z + g^2 \dot{E}_z = 0$ (12.3. 14) имеет в декартовой системе координат вид :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + g^2 E_z = 0 \quad \mathbf{1,}$$

Решение (1) : $\dot{E}_z = X(x)Y(y)e^{-jhz} \quad \mathbf{2,}$

где $X(x)$ - функция только X , $Y(y)$ - функция только Y .

$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 x}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -g^2 \quad \mathbf{3,}$$

Выполнение (3) при произвольных значениях X и Y возможно, если

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -g_x^2, \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -g_y^2 \quad 4,$$

$$\text{где } g_x^2 + g_y^2 = g^2 \quad 5,$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + g_x^2 X = 0, \frac{d^2 Y}{dy^2} + g_y^2 Y = 0 \quad 6,$$

Решение (6) имеет вид:

$$X = A \cos g_x x + B \sin g_x x, Y = C \cos g_y y + D \sin g_y y \quad 7,$$

$$(7) \rightarrow (2) \Rightarrow \dot{E}_Z = (A \cos g_x x + B \sin g_x x)(C \cos g_y y + D \sin g_y y)e^{-jhz} \quad (*).$$

Так как стенки волновода предполагаются идеально проводящими, то, применяя граничное условие $\dot{E}_{tg}|_s = 0$: $\dot{E}_z = 0$ при $x=0, x=a$ и при $y=0, y=b$

$$A(C \cos g_y y + D \sin g_y y)e^{-jhz} = 0$$

$$(A \cos g_x a + B \sin g_x a)(C \cos g_y y + D \sin g_y y)e^{-jhz} = 0$$

$$\text{это возможно, если: } \begin{aligned} A = 0, B \sin g_x a = 0 \\ C = 0, D \sin g_y b = 0 \end{aligned}$$

$$g_x a = m\pi, m = 1, 2, 3, \dots$$

$$g_y b = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$$

для этого необходимо: $g_x = m\pi/a, g_y = n\pi/b, g = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$ 8,

$$\dot{E}_Z = \dot{E}_{0Z} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz}$$

где $\dot{E}_{0Z} = B \cdot D$ и имеет смысл амплитуды продольной составляющей \dot{E} .

(1) и (2) в декартовой системе координат имеют вид:

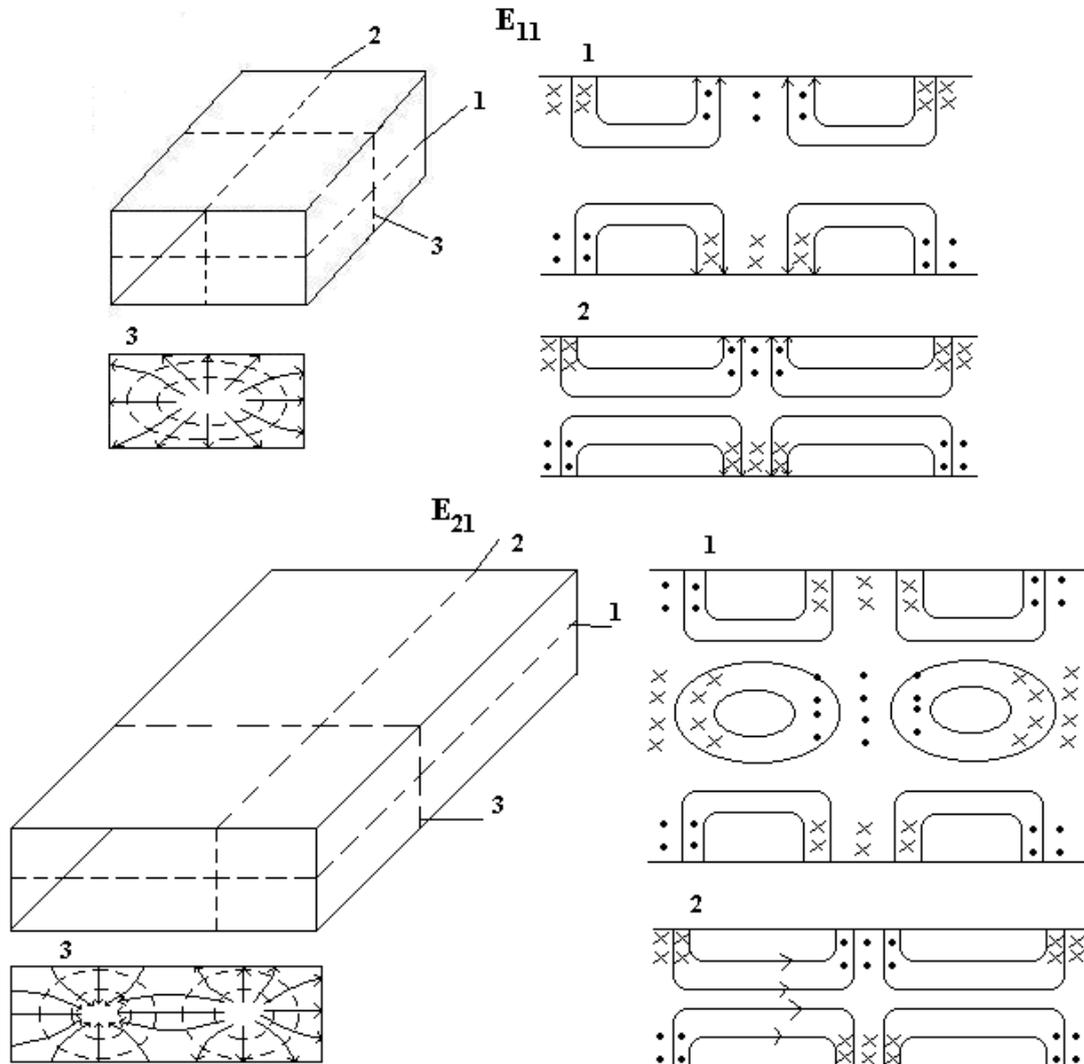
$$(\bar{1}_x \dot{E}_x + \bar{1}_y \dot{E}_y) = \frac{-jh}{g^2} \left(\bar{1}_x \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \bar{1}_y \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} \right)$$

$$(\bar{1}_x \dot{H}_x + \bar{1}_y \dot{H}_y) = \frac{-j\omega\epsilon_a}{g^2} \left(-\bar{1}_x \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + \bar{1}_y \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right)$$

Подставляя (8) получим:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \mathcal{E}_Z}{\partial x} = -\frac{jh}{g^2} g_x \dot{E}_{0z} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \\ \dot{E}_y &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \mathcal{E}_Z}{\partial y} = -\frac{jh}{g^2} g_y \dot{E}_{0z} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \\ \dot{H}_x &= \frac{j\omega \varepsilon_a}{g^2} \frac{\partial \mathcal{E}_Z}{\partial y} = \frac{j\omega \varepsilon_a}{g^2} g_y \dot{E}_{0z} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \\ \dot{H}_y &= -\frac{j\omega \varepsilon_a}{g^2} \frac{\partial \mathcal{E}_Z}{\partial x} = -\frac{j\omega \varepsilon_a}{g^2} g_x \dot{E}_{0z} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \end{aligned} \quad 9.$$

Как следует из (8), (9) структура поля волн типа E в плоскости поперечного сечения соответствуют структуре стоячих волн, причем m равно числу полувольт, укладываемых вдоль стенки длиной a, и n - число полувольт, укладываемых вдоль стенки длиной b. Каждой паре чисел m и n соответствует определенная структура ЭМП, обозначаемая E_{mn}



Отметим, что структуру волны E_{z1} можно получить повторением структуры волны E_{11} вдоль соответствующей координаты .

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} = 2\pi / \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} ,$$

$$h = K\sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2} ,$$

$$V_{\phi} = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}$$

$$V_{\Theta} = V^2_0 / V_{\phi} = V_0\sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2} ,$$

$$Z_C^E = Z_C\sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2} .$$

Низшим типом среди волн E_{mn} , обладающей наибольшей $\lambda_{кр}$, является волна E_{11} . Волны E_{mn} с различной структурой поля, которым соответствуют одинаковые значения g , имеющие равные коэффициенты распространения, фазовые скорости и скорости распространения энергии, называются *вырожденными*.

16.2. Магнитные волны ($\dot{E}_z = 0$ и $\dot{H}_z \neq 0$)

$$-g^2\dot{E}_{\perp} = -j\omega\mu_a[\bar{1}_z \text{grad}\dot{H}_z]$$

$$-g^2\dot{H}_{\perp} = jh\text{grad}\dot{H}_z$$

$\nabla^2\dot{H}_z + g^2\dot{H}_z = 0$ (12.3.15) имеет в декартовой системе координат вид:

$$\frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{H}_z}{\partial y^2} + g^2\dot{H}_z = 0 \quad 10,$$

$$(A\cos g_x x + B\sin g_x x)(C\cos g_y y + D\sin g_y y)e^{-jhz} = \dot{H}_z \quad 11,$$

На поверхности идеально проводящих стенок волновода должно выполняться граничное условие: $\partial\dot{H}_{\tau 1} / \partial n = 0$.

$$\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial\dot{H}_z}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0 \quad 12,$$

$$\frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial\dot{H}_z}{\partial y}\Big|_{y=b} = 0 \quad 13,$$

Подставляя (12), (13) в (11), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} e = 0 &\rightarrow A \sin g_x a = 0 \\ D = 0 &\rightarrow C \sin g_y b = 0 \end{aligned} \quad \mathbf{14,}$$

Как следует из (14), у волн Н, как и у волн Е,

$$g_x = \frac{m\pi}{a}, g_y = \frac{n\pi}{b},$$

т.е. волны Н и Е с равными индексами являются вырожденными.

Подставляя в (11) (14) и значения g_x, g_y , получим:

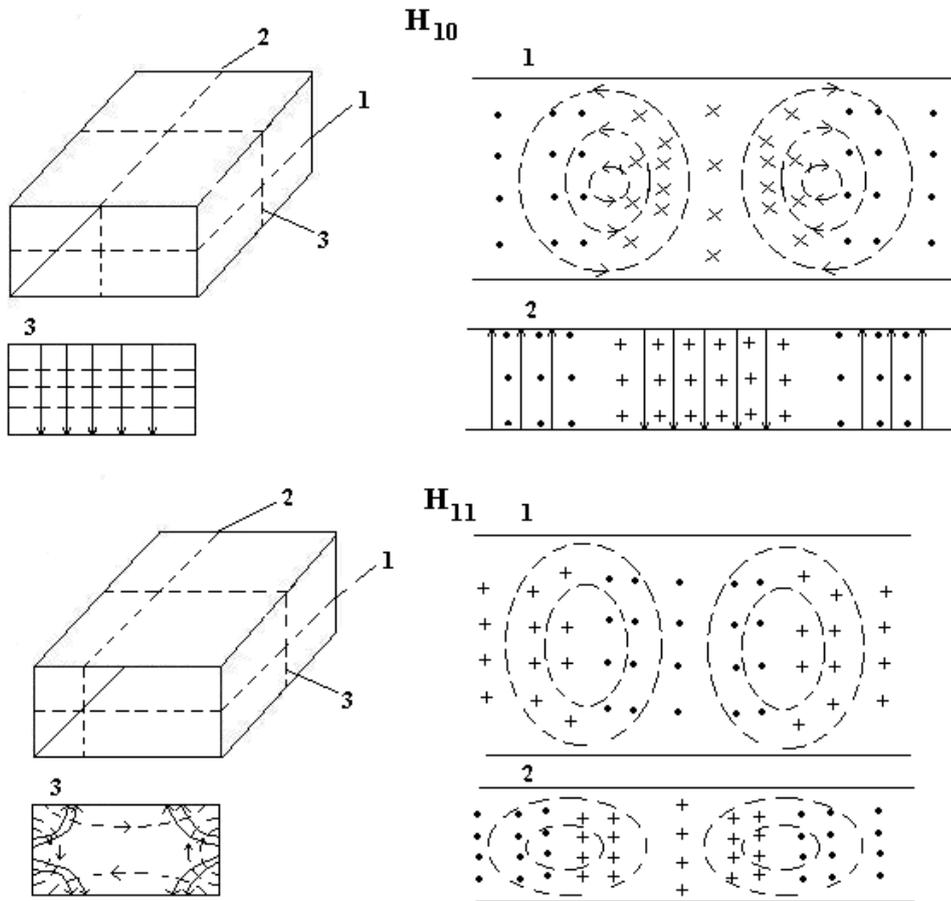
$$\dot{H}_z = \dot{H}_{0z} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \quad \mathbf{15,}$$

где $H_{0z} = AC$ - амплитуда продольной составляющей магнитного поля.

Соотношения (8.7.1), (8.7.2) в декартовой системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} (\bar{I}_x \dot{E}_x + \bar{I}_y \dot{E}_y) &= \frac{j\omega\epsilon_a}{g^2} \left(-\bar{I}_x \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + \bar{I}_y \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) \\ (\bar{I}_x \dot{H}_x + \bar{I}_y \dot{H}_y) &= \frac{-jh}{g^2} \left(\bar{I}_x \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} + \bar{I}_y \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) \\ \dot{E}_x &= -\frac{j\omega\epsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = \frac{j\omega\epsilon_a}{g^2} g_y \dot{H}_{0z} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \\ \dot{E}_y &= \frac{j\omega\epsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\epsilon_a}{g^2} g_x \dot{H}_{0z} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \\ \dot{H}_x &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = \frac{jh}{g^2} g_x \dot{H}_{0z} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \\ \dot{H}_y &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = \frac{jh}{g^2} g_y \dot{H}_{0z} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-jhz} \end{aligned} \quad \mathbf{16}$$

Как следует из (15), (16), у волн типа Н, как и у волн типа Е, структура поля в плоскости поперечного сечения соответствует структуре стоячих волн.



Как следует из равенств (15), (16), у волн Н, в отличие от волн Е, обращение в нуль одного из индексов (m или n) не влечет за собой обращения в нуль всех составляющих поля. Поэтому, если полагать $a > b$, то низшим типом волн Н является волна H_{10} .

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} = 2\pi / \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$$\lambda^{H_{10}}_{кр} = 2a$$

Поскольку $\lambda^{H_{10}}_{кр} > \lambda^{E_{11}}_{кр}$, то волна H_{10} является низшим типом волны не только среди волн Н, но и среди всех возможных типов волн в прямоугольном волноводе. Это означает, что при $\lambda > 2a$ передача энергии по прямоугольному волноводу невозможна.

$$V_{\phi} = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2},$$

$$V_{\text{Э}} = V_0^2 / V_{\phi} = V_0 \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2},$$

$$Z_C^E = Z_C \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}.$$

16.3. Волна H₁₀

Волна H₁₀ имеет наибольшую критическую длину волны. Поэтому на заданной частоте размеры поперечного сечения волновода, при которых возможна передача энергии по волноводу, наименьшие для этой волны.

Полагая в (15), (16) m=1 и n=0, получим:

$$\dot{H}_z = \dot{H}_{0z} \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jhz} \quad 17,$$

$$\dot{E}_y = -\frac{j\omega\mu_0 a}{\pi} \dot{H}_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz} \quad 18,$$

$$\dot{H}_x = \frac{jha}{\pi} \dot{H}_{0z} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz} \quad 19,$$

$$\dot{E}_y = \dot{H}_y = 0 \quad 20$$

Остановимся на картине распространения поля волны H в плоскостях параллельных широкой стенке волновода.

В ЭМП волны H₁₀, магнитные силовые линии охватывают токи смещения, текущие между широкими стенками параллельно оси y.

Максимальная плотность тока смещения находится в центре замкнутых магнитных силовых линий, где напряженность электрического поля равна нулю

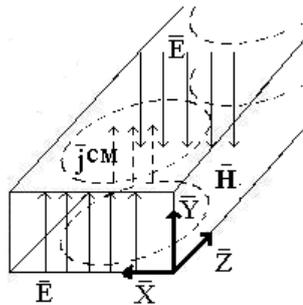
$$Z_C^{H_{10}} = Z_C \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}.$$

$$h^{H_{10}} = K \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2},$$

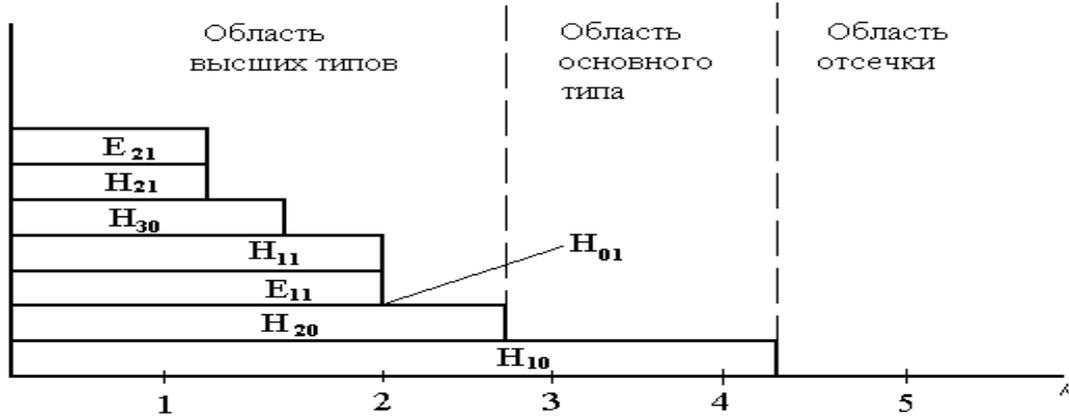
$$V^{H_{10}\phi} = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2},$$

$$V^{H_{10}\varepsilon} = V_0 / \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2},$$

$$\lambda_g = \lambda / \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}$$

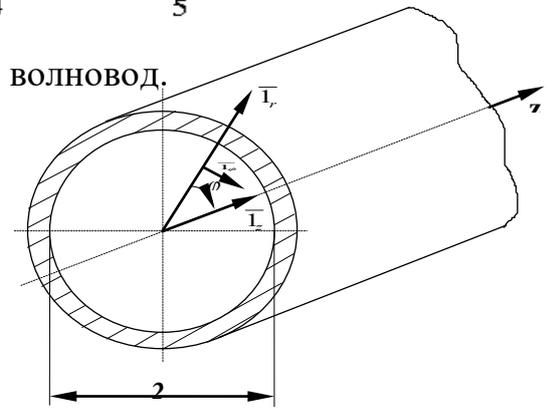


16.4. Диаграмма типов волн прямоугольного волновода



16.5. Круглый волновод.

В круглом волноводе возможно раздельное существование волн E и H и невозможно распространение волн T .



16.6. Электрические волны

При анализе воспользуемся цилиндрической системой координат, совместив ось с продольной осью волновода.

Ур-ние $\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_z + g^2 E_z = 0$ в полярной системе координат примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z = 0 \quad 1,$$

Решение (1): $E_z(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)e^{-jhz} = E_z(r, \varphi)e^{-jhz} \quad 2,$

Подставив (2) в (1), умножив обе части на r^2 , выполнив дифференцирование и разделив полученное уравнение на $R\Phi e^{-jhz}$, получим

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right)}{R} + g^2 r^2 = - \frac{d^2 \Phi(\varphi) / d\varphi^2}{\Phi} \quad 3,$$

Левая часть (3) зависит только от r , правая - только от φ . Переменные r и φ - независимые. Следовательно (3) - равенство двух независимых функций. Это возможно, если каждая из функций равна постоянной. Обозначая постоянную m^2 , приходим к двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad 4,$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(g^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad 5,$$

$$E_z(r, \varphi + 2\pi) = E_z(r, \varphi) \quad \mathbf{6},$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad \mathbf{7},$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = A \sin m\varphi + B \cos m\varphi,$$

где A и B - произвольные постоянные. Условие (7) выполняется, если $m=0,1,2,\dots$

Уравнение (5) является уравнением Бесселя. Его решение можно представить в виде

$$R(r) = C'J_m(gr) + D'N_m(gr) \quad \mathbf{9},$$

где $J_m(gr)$ и $N_m(gr)$ - функции Бесселя m -го порядка первого и второго рода, а C', D' - произвольные постоянные.

$$\Phi(\varphi) = A \sin m\varphi + B \cos m\varphi = A_1 \cos m(\varphi - \varphi_0) \quad \mathbf{10},$$

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{A}{B}$$

В отношении (9) функция Бесселя второго рода при $r \rightarrow \infty$ стремится к ∞ . Так как напряженность поля в любой точке волновода должна быть ограничена, то необходимо потребовать $D' = 0$. Тогда

$$\dot{E}_z = E_{0z} J_m(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \quad \mathbf{11},$$

где $E_{0z} = A, C'$ - амплитуда продольной составляющей электрического поля.

Подставим (11) в (12.6.1) и (12.6.2), учитывая, что $\text{grad}_\perp E_z = \bar{1}_r \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \bar{1}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{1}_r \dot{E}_r + \bar{1}_\varphi \dot{E}_\varphi &= -\frac{jh}{g^2} \left(\bar{1}_r \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \bar{1}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} \right) \\ \bar{1}_r \dot{H}_r + \bar{1}_\varphi \dot{H}_\varphi &= \frac{j\omega \epsilon_0}{g^2} \left(-\bar{1}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \bar{1}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} \right) \\ \dot{E}_r &= -\frac{jh}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = -\frac{jh}{g} E_{0z} J'_m(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \\ \dot{E}_\varphi &= -\frac{jh}{g^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} = \frac{jh}{g^2} \frac{m}{r} E_{0z} J_m(gr) \sin m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{j\omega \epsilon_0}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = -\frac{j\omega \epsilon_0}{g} E_{0z} J'_m(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \\ \dot{H}_r &= \frac{j\omega \epsilon_0}{g} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \varphi} = -\frac{jh}{g^2} \frac{m}{r} E_{0z} J_m(gr) \sin m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{12},$$

где штрих означает дифференцирование по всему аргументу функции Бесселя. Согласно граничному условию

$$E_{r0} = 0; E_z|_{r=a} = 0 \quad \mathbf{13},$$

Подставляя (11) в (13), получаем

$$J_m(ga) = 0 \quad \mathbf{14},$$

Имеется бесконечно большое число значений аргумента, при которых функция Бесселя равна нулю. Эти значения называются корнями функции Бесселя. Обозначая n -й корень функции Бесселя m -го порядка через v_{mn}^E , из (14)

$$\text{находим } v_{mn}^E = ga, \text{ откуда } g = v_{mn}^E / a \quad \mathbf{15}.$$

Нумерация E волн, отличающихся друг от друга по структуре поля в плоскости поперечного сечения волновода, осуществляется в соответствии с порядковым номером корня уравнения (14). При этом индекс m соответствует числу целых стоячих волн поля, укладываемых по окружности волновода, а индекс n характеризует распределение стоячих волн вдоль радиуса волновода.

Несколько первых корней функции Бесселя v_{mn}^E в порядке их возрастания и соответствующие им критические длины волн $\lambda_{кр}^{E_{mn}}$ представлены в таблице.

Тип волны	E_{01}	E_{11}	E_{21}	E	E	E	E	E
v_{mn}^E	2.405	3.832	5.135	5.520	6.379	7.016	7.586	8.407
$\lambda_{кр}^{E_{mn}}$	2.613	1.640	1.223	1.138	0.985	0.895	0.828	0.746

Низшим типом среди волн E в круглом волноводе является волна E_{01} .

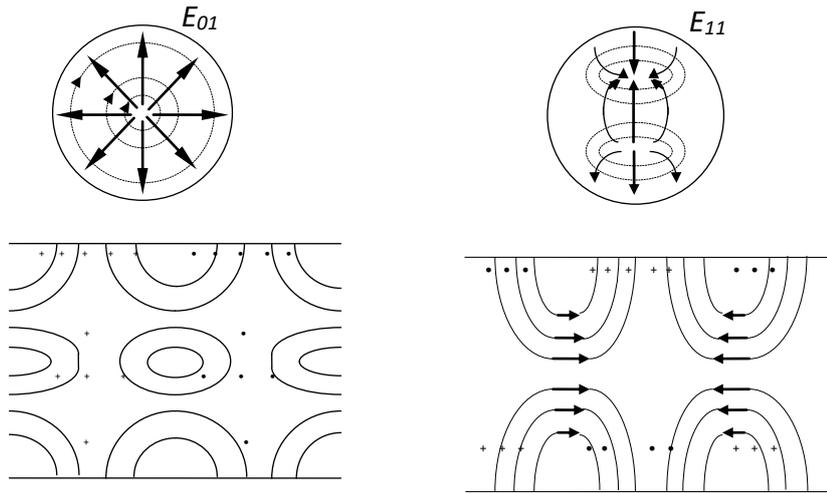
$$\lambda_{кр} = v_0 / f_{кр},$$

$$v_\phi = \frac{v_0}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}},$$

$$\lambda_s = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}},$$

$$v_z = v_0^2 / v_\phi = v_0 \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2},$$

$$Z_C^E = z_x \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}$$



16.7. Магнитные волны ($H_z \neq 0, E_z = 0$)

Будем рассуждать аналогично случаю с электрическими волнами

$$\nabla_\perp^2 \dot{H}_z + g^2 \dot{H}_z = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{H}_z = 0$$

$$\dot{H}_z = H_{0z} J_m(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz}$$

$$-g^2 \dot{E}_z = -j\omega\mu_a [\bar{1}_z \text{grad}_\perp \dot{H}_z]$$

$$-g^2 \dot{H}_z = jn \text{grad}_\perp \dot{H}_z$$

$$\text{grad}_\perp \dot{H}_z = \bar{1}_r \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \bar{1}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}
\bar{1}_r \dot{E}_r + \bar{1}_\varphi \dot{E}_\varphi &= \frac{j\omega\mu_a}{g^2} \left(-\bar{1}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} + \bar{1}_\varphi \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} \right) \\
\bar{1}_r \dot{H}_r + \bar{1}_\varphi \dot{H}_\varphi &= -\frac{jh}{g^2} \left(\bar{1}_r \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \bar{1}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} \right) \\
\dot{E}_r &= -\frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} = \frac{j\omega\mu_a m}{g^2 r} \dot{H}_{0z} \text{Jm}(gr) \sin m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \\
\dot{E}_\varphi &= \frac{j\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = \frac{j\omega\mu_a}{g} \dot{H}_{0z} \text{Jm}(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \\
\dot{H}_r &= -\frac{jh}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = -\frac{jh}{g^2} \dot{H}_{0z} \text{Jm}(gr) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \\
\dot{H}_\varphi &= -\frac{jh}{g^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} = \frac{jhm}{g^2 r} \dot{H}_{0z} \text{Jm}(gr) \sin m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz}
\end{aligned}
\tag{17}$$

Отметим, что при выполнении $J_m(ga)=0$ согласно $E_\varphi|_{r=a}=0$

$$g = v_{mn}^H / a \tag{18}$$

Несколько первых корней функции Бесселя V_{mn}^H в порядке их возрастания и соответствующие длины волн $\lambda_{\text{кр}}^{H_{mn}}$ представлены в таблице.

Тип волны	H_{11}	H_{21}	H_{01}	H_{31}	H_{41}	H_{12}	H_{51}	H_{21}	H_{02}
V_{mn}^H	1.84	3.05	3.83	4.20	5.32	5.33	6.42	6.71	7.02
$\lambda_{\text{кр}}^{H_{mn}}$	3.41	2.06	1.64	1.50	1.18	1.17	0.979	0.934	0.838

Низшим типом среди не только волн H , но и всех волн в круглом волноводе, как следует из сравнения двух таблиц, является волна H_{11} .

$$J'_m(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) \tag{19}$$

Поэтому уравнение $J'_m(ga) = 0$ эквивалентно уравнению

$$J_{m+1}(ga) = \frac{m}{ga} J_m(ga) \tag{20}$$

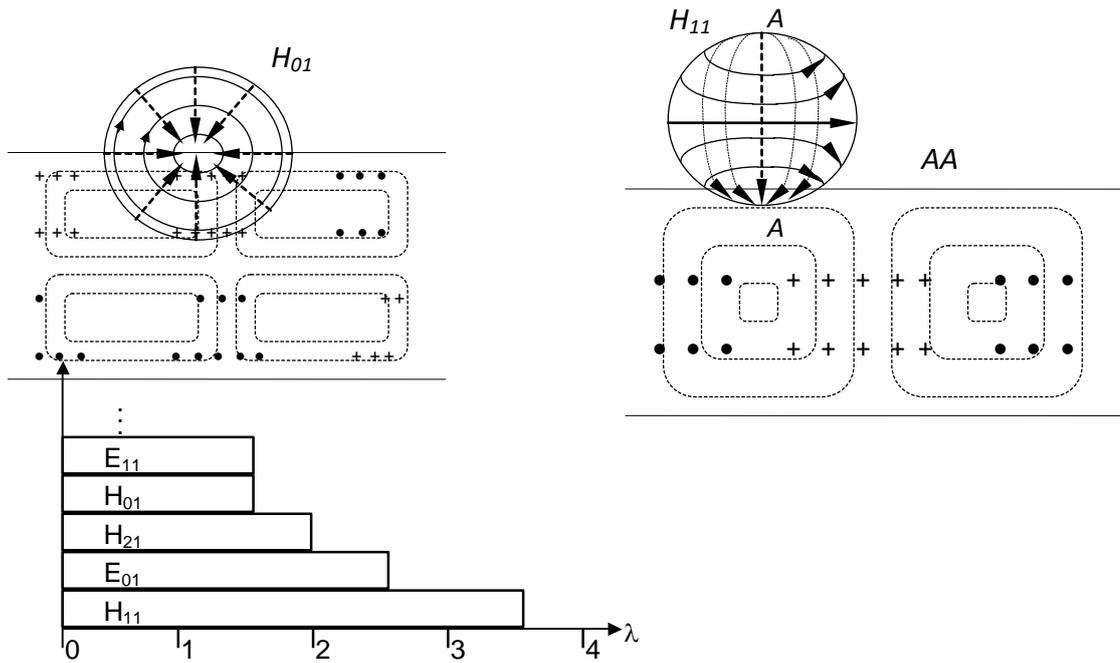
При $m=0$ уравнение (20) примет вид

$$J_{m+1}(ga) = 0 \tag{21}$$

Из сравнения (21) и (14) вытекает, что

$$V_{1n}^E = V_{0n}^H \tag{22}$$

т.е. $\lambda_{\text{кр}}^{E_{1n}} = \lambda_{\text{кр}}^{H_{0n}}$, и в круглом волноводе волны E_{1n} и H_{0n} являются вырожденными.



16.8. Токи на стенках прямоугольного и круглого волноводов.

Токи в прямоугольном волноводе при распространении волны H_{10}

Предположим, что стенки волновода являются идеально проводящими. В этом случае токи проводимости текут по поверхности стенок. Плотность поверхностного тока численно равна напряженности тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности проводника. Вектор плотности поверхностного тока направлен нормально к вектору напряженности магнитного поля.

$$[\bar{I}_n \bar{H}_\perp] = \bar{J}^\circ$$

Структура поля волны H_{10} изображена на рис. стр. 52. Согласно (1) и (19) плотность продольного тока на широкой стенке равна

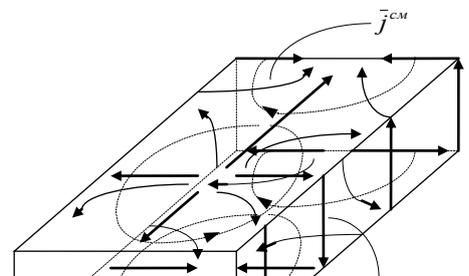
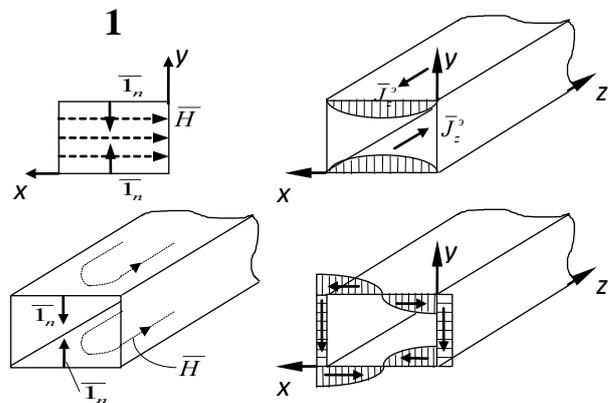
$$\bar{J}_z^\circ = -\frac{jha}{\pi} H_{0z} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz} \quad 2$$

Распределение \bar{J}_z° показано на рис. Продольные токи на нижней и верхней стенках противофазны.

Согласно (1) и (17) плотность поперечного поверхностного тока на широких стенках

$$\bar{J}_x^\circ = H_{0z} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz} \quad 3$$

Распределение \bar{J}_x° показано на рис. На узких стенках, параллельно оси y , поверхностный ток определяется только составляющей \dot{H}_z магнитного поля и, соответственно, имеет только составляющую J_y° .



Как следует из (17), H_z у узких стенок имеет постоянную амплитуду H_{0z} .

Плотность поверхностного тока на узких стенках равна

$$j_y^{\partial} = H_{0z} e^{-jhz} \quad 4$$

Модуль комплексной плотности тока в любой точке поверхности широких стенок волновода

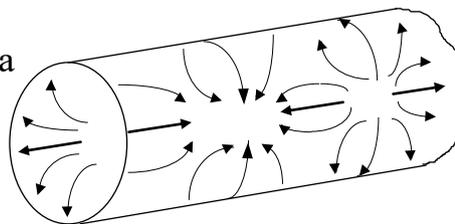
$$j_y^{\partial} = H_{0z} e^{-jhz} \quad 5$$

Распределение суммарной плотности тока показано на рис.

16.9. Токи в круглом волноводе при распространении волны H_{11}

Структура ЭМП волны H_{11} изображена на рис. стр. 56.

У поверхности волновода имеются две отличные от нуля составляющие вектора напряженности магнитного поля H_{φ} и H_z , которым, согласно (1), (где следует положить $j_y^{\partial} = H_{0z} e^{-jhz}$) соответствуют составляющие тока проводимости j_z, j_{φ} .

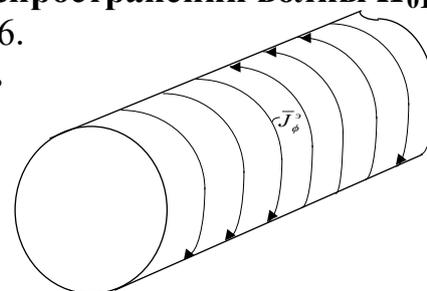


16.10. Токи в круглом волноводе при распространении волны H_{01}

Структура волны H_{01} изображена на рис. стр. 56.

У поверхности волновода отлична от нуля лишь продольная составляющая магнитного поля, которая согласно (2. 16) по всему периметру волновода равна

$$H_z = H_{0z} J_0(v_{01}^H) e^{-jhz} \quad 6.$$



В соответствии с (9.3.1) на стенках волновода существуют только поперечные j_{φ}^{∂} поверхностные токи (кольцевые токи). Плотность этих токов одинакова по всему периметру волновода и описывается выражением (6)

17.1. Волна Т. Волновое сопротивление коаксиальной линии

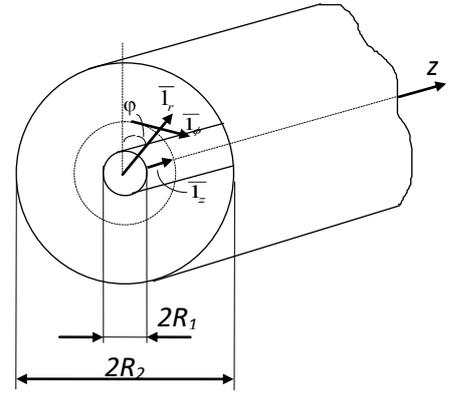
В коаксиальных линиях возможно существование волн T , E и H .

Так как у волны T $f_{\text{бр}} = 0$, то эта волна является низшим типом волны в коаксиальной линии.

$$\dot{\vec{E}} = -\text{grad}_{\perp} \psi \quad (*)$$

Уравнение Лапласа ($\nabla_{\perp}^2 \psi = 0$) в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \mathbf{1,}$$



Уравнению (1) соответствуют два решения:

$$\psi_1 = (Ar^m + Br^{-m}) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \quad \mathbf{2,}$$

$$\psi_2 = -D \ln r e^{-jhz}, \quad \mathbf{3,}$$

где m - целое число.

На поверхности внутреннего проводника и на внутренней поверхности внешнего проводника, которые полагаются идеально проводящими, касательная составляющая электрического поля должна обращаться в нуль

$$E_{\varphi}(R_1, \varphi) = E_{\varphi}(R_2, \varphi) = 0 \quad \mathbf{4,}$$

Следовательно, решение (2) при $A \neq 0$ и $B \neq 0$ не удовлетворяет граничному условию (4) и его следует отбросить. Для второго решения

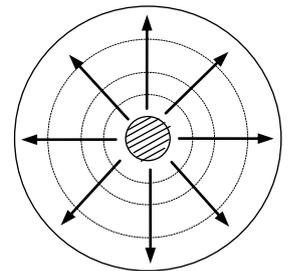
$$\dot{E}_{\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = 0,$$

т.е. граничное условие (4) выполняется тождественно при произвольном значении константы D и функция Ψ_2 является искомым решением.

Подставляя в (*) и в (8.5.8) ($\dot{H}_{\perp} = \frac{1}{Z_c} \bar{1}_z \dot{\vec{E}}_{\perp}$) функцию Ψ_2 , находим

$$\dot{E}_r = -\frac{\partial \Psi^2}{\partial r} = \frac{D}{r} e^{-jhz} \quad \mathbf{5,}$$

$$\dot{H}_{\varphi} = \frac{E_r}{Z_c} = \frac{D}{Z_c r} e^{-jhz} \quad \mathbf{6,}$$



$D = E_0 R_1$, где E_0 - модуль напряженности электрического поля у поверхности внутреннего проводника.

Структура поля, соответствующая (5), (6) изображена на рис.

$$V_{\phi}^T = V_{\vartheta}^T = V_0$$

Разность потенциалов между центральным и внешним проводниками равна

$$\dot{u} = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = E_0 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} e^{-jhz} \quad \mathbf{7,}$$

Ток, текущий по поверхности центрального проводника и по внутренней поверхности внешнего проводника, равен

$$I = \oint_r \bar{H} d\bar{l} = \int_0^{2\pi} R_1 \dot{H}_\varphi(R, \varphi) d\varphi = 2\pi R_1 (E_0/Z_c) e^{-jhz} \quad \mathbf{8},$$

Отношение напряжения u к току I в режиме бегущей волны называется волновым сопротивлением коаксиальной линии

$$Z_B = \frac{u}{I} = \frac{Z_c}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \mathbf{9},$$

17.2. Электрические и магнитные волны

Продольная составляющая E_z волны E является решением уравнения (1), которое согласно (9) имеет вид

$$\dot{E}_z = CJ_m(gR) + DN_m(gR_1) \cos m(\varphi - \varphi_0) e^{-jhz} \quad \mathbf{10},$$

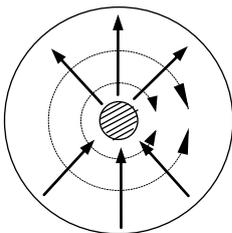
Так как E_z обращается в нуль у поверхности внутреннего и внешнего проводника, то

$$\begin{aligned} CJ_m(gR_1) + DN_m(gR_1) &= 0 \\ CJ_m(gR_2) + DN_m(gR_2) &= 0 \\ \frac{J_m(gR_1)}{J_m(gR_2)} &= \frac{N_m(gR_1)}{N_m(gR_2)} \end{aligned} \quad \mathbf{11},$$

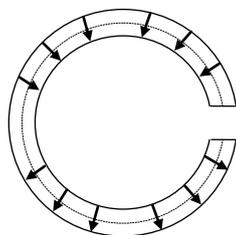
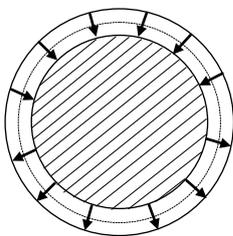
(11) - трансцендентное уравнение, из которого находится величина. Аналогично в случае магнитных волн: величина является корнем трансцендентного уравнения:

$$\frac{J'_m(gR_1)}{J'_m(gR_2)} = \frac{N'_m(gR_2)}{N'_m(gR_1)} \quad \mathbf{12},$$

Как показывает анализ уравнений (11) и (12), первым высшим типом волны в коаксиальной линии при любом диаметре внутреннего проводника является волна H_{11} .



Если $R_1 = 0$, то коаксиальная линия превращается в круглый волновод, низшим типом волны, в котором является волна H_{11} ; введение вдоль оси круглого волновода тонкого металлического стержня слабо влияет на распространение волны H_{11} ввиду отсутствия у нее продольных составляющих E . Поэтому при малом R_1



$$\lambda_{кр}^{H_{11}} = 3,41R_2 \quad \mathbf{13},$$

Рассмотрим другой предельный случай

$$R_1 \approx R_2$$

- структура поля волны H в прямоугольном волноводе, изогнутом в поперечной плоскости по дуге

$\lambda_{кр}$ у H_{11} равна размеру широкой стенки прямоугольного волновода, длину которой в изогнутом волноводе можно считать равной $\pi(R_1 + R_2)$.

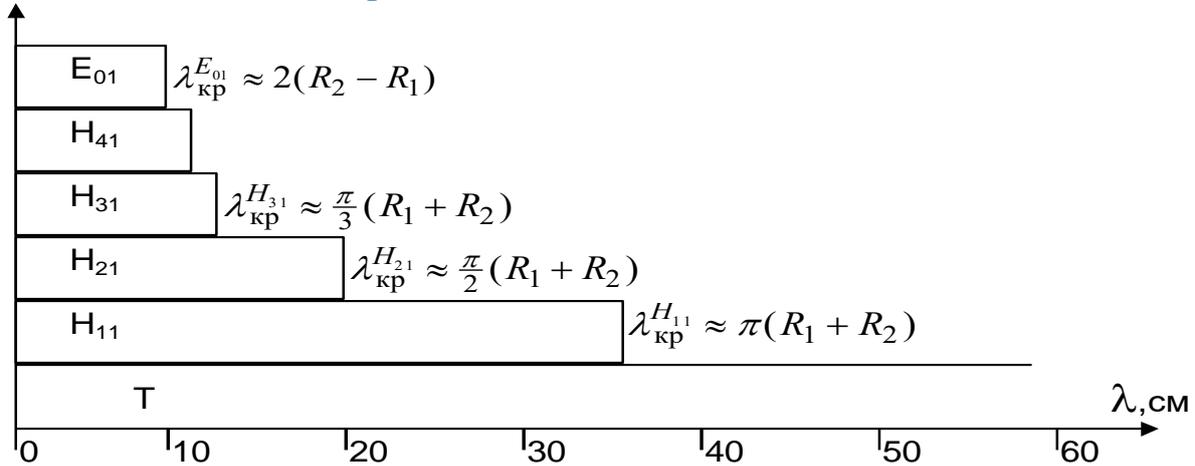
Следовательно, при $R_1 \rightarrow R_2$

$$\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} \approx \pi(R_1 + R_2) \approx 3,14R_2(1 + R_1/R_2) \quad \mathbf{14.}$$

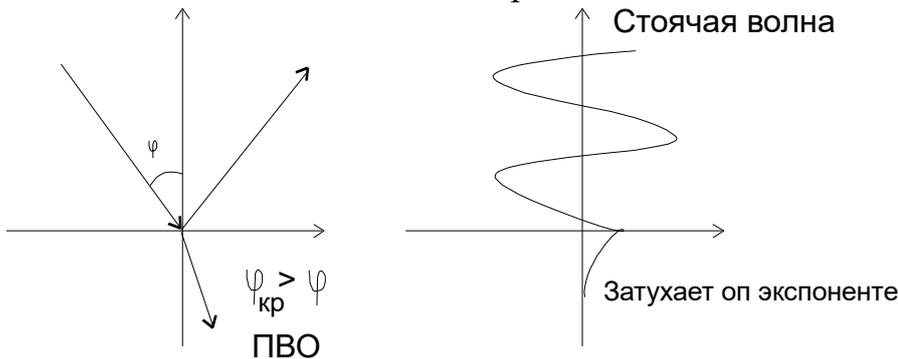
При $R_1 \ll R_2$ формула (14) дает значение $\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} = 3,14R_2$, что отличается менее чем на 10% от значения $\lambda_{\text{кр}}^{H_{11}} = 3,41R_2$ в формуле (13)

Таким образом, можно без большой погрешности пользоваться формулой (14) при произвольных значениях R_1 и R_2 .

17.3. Диаграмма типов волн в коаксиальной линии



Линии поверхностной волны



В направлении x металлическую поверхность и слой диэлектрика будем считать однородными, в этом случае составляющие поля то x не зависят. Рассмотрим волну типа “E”. Например, волна амплитуда которой экспоненциально затухает в направлении перпендикулярном разделу сред. В соответствии с единым подходом :

$$\Delta^2_{\perp} E_z + gE_z = 0; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + g^2 E = 0;$$

$$\text{при } y \geq d: \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + g^2 E_z = 0 \quad \mathbf{3}, \quad g^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - h^2 \quad \mathbf{4},$$

$$\text{при } y \leq d: \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + g^2 E_z = 0 \quad \mathbf{3}, \quad g^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a - h^2 \quad \mathbf{4},$$

$$-g^2 \bar{E}_\perp = jh \cdot \text{grad}_\perp E$$

$$-g^2 \bar{H}_\perp = j\omega\varepsilon_a \cdot [\bar{1}_z \text{grad}_\perp E_z]$$

$$1: E_z^{(1)} = A \sin g_g y e^{-jhz} \quad 5,$$

$$3: E_z^{(2)} = B e^{-\beta y} e^{-jhz} \quad \alpha = jg = \sqrt{h^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}$$

Для определения полной структуры найдем поперечные компоненты:

$$(\bar{1}_x \bar{E}_x + \bar{1}_y \bar{E}_y) = \frac{-jh}{g^2} (\bar{1}_x \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} + \bar{1}_y \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y}) \quad E_y = \frac{-jh}{g^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$(\bar{1}_x \bar{H}_x + \bar{1}_y \bar{H}_y) = \frac{-j\omega\varepsilon_a}{g^2} (\bar{1}_x \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial E_y} + \bar{1}_y \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial y}) \quad H_x = \frac{-j\omega\varepsilon_a}{g^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$y \leq d : \dot{E}_y^{(1)} = \frac{-jh}{g_g} A \cos g_g y e^{-jhz} \quad \dot{H}_x^{(1)} = \frac{g\omega\varepsilon_a}{g_g} A \cos g_g y e^{-jhz} \quad 8,$$

$$y \geq d : \dot{E}_y^{(2)} = \frac{-jh}{\alpha} B e^{-\alpha y} e^{-jhz} \quad \dot{H}_x^{(2)} = \frac{j\omega\varepsilon_a}{\alpha} B e^{-\alpha y} e^{-jhz} \quad 8,$$

$$E_z^{(1)} \Big|_{y=d} = E_z^{(2)} \Big|_{y=d} \quad H_x^{(1)} \Big|_{y=d} = H_x^{(2)} \Big|_{y=d}$$

На границе раздела воздух-диэлектрик должна наблюдаться непрерывность тангенциальных составляющих.

$$\left. \begin{aligned} \frac{jh}{g_g} A \sin g_g d e^{jhz} &= B e^{-\alpha d} e^{-jhz} \\ \frac{j\omega\varepsilon_a}{g_g} A \cos g_g d e^{jhz} &= \frac{j\omega\varepsilon_a}{\alpha} B e^{-\alpha d} e^{-jhz} \end{aligned} \right\}$$

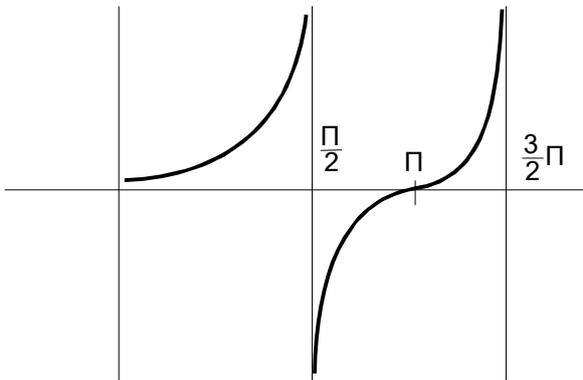
$$-\frac{B}{A} = \sin g_g d e^{\alpha d}; \quad \cos g_g d = \frac{\varepsilon_0 g_g}{\varepsilon_{a1} \alpha} (\sin g_g d e^{\alpha d}) e^{-\alpha d} \quad 11,$$

$$tg g_g = \frac{\varepsilon_{a1} \alpha}{\varepsilon_0 g_g}$$

Трансцендентное уравнение (11), и $\alpha = \sqrt{h^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a}$, представляют полную систему уравнений. Пока α , определяемая соотношением (7), остаётся и действительной величиной существует поверхностная волна, т.е. выполняется $\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - h^2 < 0$ 12,

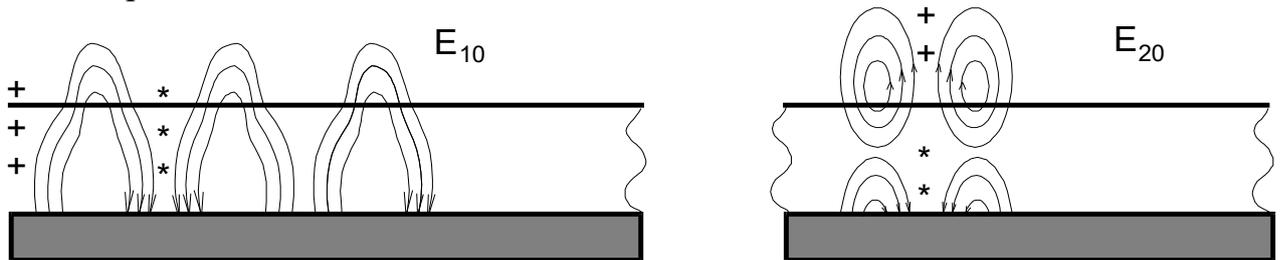
$$\omega_{kp} \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = h$$

Из анализа соотношения (11): $\lambda_{kp} = \frac{2\pi}{g}$; $f_{kp} = \frac{V_0}{\lambda_{kp}}$;



$0 < g_g d \leq \frac{\pi}{2}$ **14** Низшая волна эл. типа

может существовать на любых частотах более 0 Гц и при любой толщине диэлектрического слоя.

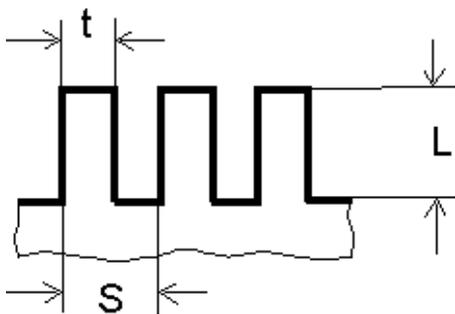


Одной из важнейших характеристик является поверхностное сопротивление на границе раздела сред диэлектрик-воздух.

$$\bar{I}_z = J_z^{\text{э}} = [\bar{I}_y \bar{I}_x] H_x = \bar{I}_z [-H_x]; \quad H_x = j \frac{\omega \epsilon_a}{\alpha} B e^{-\alpha y} e^{-jhz}; \quad E_z = B e^{-\alpha y} e^{-jhz};$$

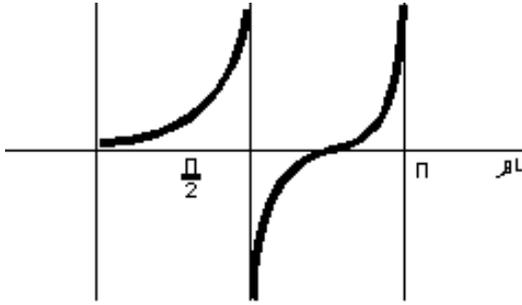
$$\bar{I}_z \bar{E}_z = z_c \bar{I}_z (-H_x); \quad z_c = -\frac{E_z}{H_y} \quad 15; \quad z_c = j \frac{\alpha}{\omega \epsilon_a}, \text{ при } \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - h^2 < 0, \text{ при } y=d \quad z_c -$$

чисто реактивное и имеет индукционный характер. При этом отсутствует поток активной мощности в направлении перпендикулярном границе раздела сред.



Каждый из пазов короткозамкнутый плоскопараллельный волновод. При глубине паза $< \frac{\lambda}{4}$ входное сопротивление чисто реактивное (носит чисто индуктивный характер). При $t+s \ll \lambda$ пренебрегая толщиной металлических ребер можно полагать что в любой точке на поверхности гребенчатой

структуры сопротивление реактивно (имеет индуктивный характер), следовательно условно существует поверхностная волна электрического типа.



Структура их схожа со структурой электрических волн, приведенных для диэлектрического слоя для металла.

$$z_{вх} = jz_0 - \lg \beta L$$

$$\beta L < \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{2\pi}{\lambda}; L < \frac{\lambda}{4}, z_{вх} = jX_L$$

Из условия существования поверхностных волн электрического типа

$$h > \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = k; V_\phi = \frac{\omega}{h}, V_\phi < c, \text{ такие волны называются замедленными.}$$

Аналогичен анализ для волн “Н” типа.

$$tg g_g d = \frac{-g_g}{\alpha}, z_c = \frac{j\omega\mu_0}{\alpha}; \text{ условие распространения } \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - h^2 < 0.$$

Рассмотрим поверхность при выполнении условия существования поверхностной волны. Поверхностное сопротивление в структуре является чисто реактивным и носит емкостной характер. Низшей волне магнитного типа

соответствуют корни: $\frac{\pi}{2} < g_g d < \pi$, $\omega_{kp} \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = h$ следовательно

$$\alpha = \sqrt{h^2 - \omega_{kp}^2 \mu_0 \epsilon_0} = 0, tg g_g d = \infty; g_g d = \frac{\pi}{2}. g_g^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_1 - h^2,$$

$$g_g^2 d^2 = \omega_{kp}^2 \mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_1 - 1) d^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, (2\pi)^2 \left(\frac{f_{kp}}{c}\right)^2 d^2 (\epsilon_1 - 1) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \lambda_{kp}^2 = 4d^2 (\epsilon_1 - 1),$$

$$\lambda_{kp} = 4d \sqrt{\epsilon_1 - 1} \quad \text{из этого} \quad d > \frac{\lambda}{4\sqrt{\epsilon_1 - 1}}.$$

Вывод: В направляющей структуре поверхностного типа низшим типом является волна типа “Е” с $f_{kp}=0$.

Расчет длины волны в замедляющей системе.

Полученное в предыдущем параграфе дисперсионное уравнение $tg g_g d = \frac{\epsilon_{d1} \alpha}{\epsilon_0 g_g}$;

$tg g_g d = -\frac{g_g}{\alpha}$ - позволяет рассчитать длину волны. Они должны быть дополнены

уравнениями определяющими поперечное волновое число в диэлектрике и уравнением определяющим α .

($g_g^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_1 - h^2$; $\alpha^2 = h^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$) $\cdot d^2$, просуммируем

$$g_g^2 d^2 + \alpha^2 d^2 = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_1 - h^2 + h^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0) d^2 = (kd)^2 (\epsilon_1 - 1) \quad k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

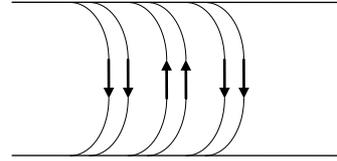
Для волны типа “Е” - $\frac{1}{\epsilon_1} g_g d \cdot tg g_g d = \alpha d$ и $g_g^2 d^2 + \alpha^2 d^2 = (kd)^2 (\epsilon_1 - 1)$

Для волны типа “Е” - $\alpha d tg g_g d = -g_g \alpha$ и $g_g^2 d^2 + \alpha^2 d^2 = (kd)^2 (\epsilon_1 - 1)$

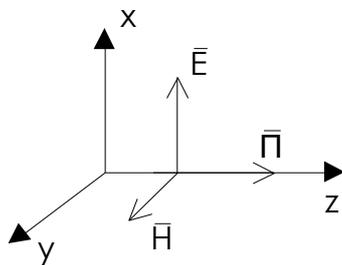
Каждая из этих систем позволяет рассчитать длину волны, в них есть трансцендентное уравнение и алгебраическое уравнение второго порядка. Каждое из этих уравнений формируется относительно безразмерных переменных g, d, ad . Совместное решение любой из этих систем возможно графическим или численным методом.

17.4. Затухание волн в полых волноводах.

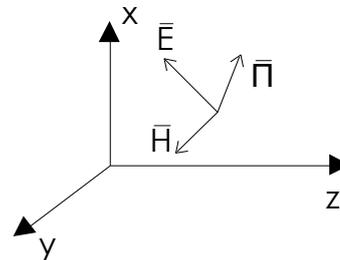
Источники потерь в волноводах.



Направляемые волны в любых линиях передачи, их структура и характеристики, можно получить используя концентрацию порционных плоских волн Г.



Энергия распространяется вдоль прямой.



Энергия распространяется по ломаной, но поступательно вдоль оси z.

Во втором случае обязательно наличие границы раздела сред.

17.5. Способы учета затухания в волноводе.

$$\dot{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{-ihz};$$

$$\dot{\vec{H}} = \vec{H}_0 e^{-ihz},$$

где $h = h - ih''$,

т.е. $\dot{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{-h'z} e^{-ih''z};$

$$\dot{\vec{H}} = \vec{H}_0 e^{-h'z} e^{-ih''z};$$

h'' - есть постоянная затухания, h' - фазовая постоянная.

Затухания в линиях передачи оценивают потерями в единицу времени.

Рассмотрим отрезок линии передачи единичной длины.

$h'' = \ln(E_{ex}/E_{вых})$ [Непп /метр] -характеристика изменения амплитуды в линиях передачи при прохождении волны в линии передачи 1 м.

$$h'' = \ln(E_{ex}/E_{вых}) [\text{Децибел/метр}]$$

$$h''_{дб} = 20 \lg(E_{ex}/E_{вых}) \quad [\text{Дб/м}]$$

На СВЧ обычно измеряют мощность сигнала, при этом постоянная затухания записывается следующим образом:

$$h_{дб} = 10 \lg(P_{ex}/P_{вых}) \quad [\text{Дб/м}], \quad \text{т.к.} \quad P \approx E^2$$

17.5. Коэффициент затухания.

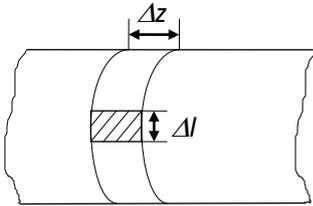
$$P_{cp} = P_{0cp} e^{-2h''z} \quad (P_{0cp} \rightarrow Z_0)$$

$$\Delta P_{n,cp} = P_{cp}(z) - P_{cp}(z + \Delta z)$$

$$P'_{n,cp} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_{cp}(z) - P_{cp}(z + \Delta z)}{\Delta z} = -\frac{\partial P_{cp}}{\partial z}$$

$$P'_{n,cp} = 2h''P_{0cp} e^{-2\alpha z} = 2h''P_{cp}; \quad h'' = \frac{P'_{n,cp}}{2P_{cp}} \quad \mathbf{1}$$

17.6. Затухание, вызываемое потерями в металлических проводниках линии передачи.



$$P_{n-p} = \text{Re } \dot{P}_{//} = \frac{1}{2\sigma d} \oint_S |\dot{H}_{0m}|^2 dS$$

$$\Delta P_{n,cp} = \frac{1}{2\sigma d} \int_0^{\Delta z} dz \oint_L |\dot{H}_{0m}|^2 dl = \frac{\Delta z}{2\sigma d} \oint_L |\dot{H}_{0m}|^2 dl$$

$$P'_{n,cp} = \frac{\Delta P_{n,cp}}{\Delta z} = \frac{1}{2\sigma d} \oint_L |\dot{H}_{0m}|^2 dl \quad \mathbf{2}$$

$$\mathbf{(2) \rightarrow (1):} \quad h''_H = \frac{1}{4\sigma d P_{n-p}} \oint_L |\dot{H}_{0m}|^2 dl = \frac{Rs}{4P_{n-p}} \oint_L |\dot{H}_{0m}|^2 dl$$

$$\mu_a = \mu_0; \quad Rs = \frac{1}{\sigma d} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_a}{\sigma}} \approx 1,987 \sqrt{\frac{f}{\sigma}} \cdot 10^{-3} \text{ Ом.}$$

d- глубина проникновения.

17.7. Затухание, вызванное потерями в среде, заполняющей место передачи. Передача энергии по коаксиальной линии.

Условие одноволновости выглядит следующим образом:

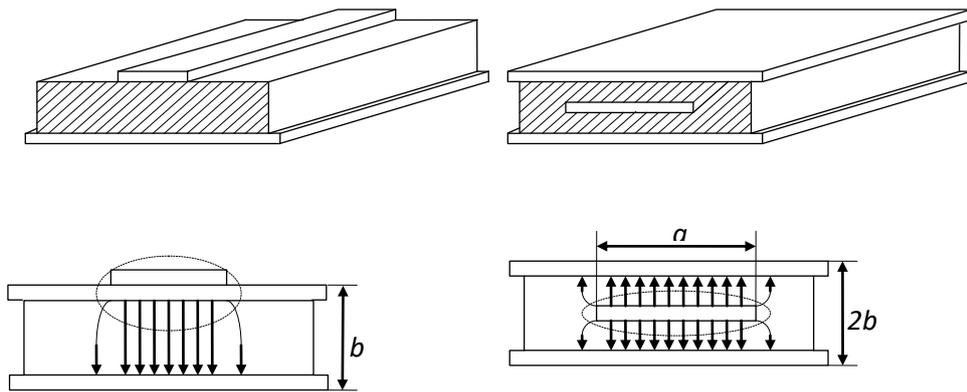
$$\lambda > \lambda_{кр}^H; \quad \frac{\lambda}{\pi} > R_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)$$

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a - g^2} \quad \tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - j\varepsilon''_a; \quad g = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}$$

$$h = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon'_a - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}} \right)^2 - j\omega^2 \mu_a \varepsilon_a} = h' - jh'' \quad h'\sqrt{2} = \sqrt{h_0^2 + \sqrt{h_0^4 + \omega^4 \mu_a \varepsilon'_a}}$$

$$h''\sqrt{2} = \sqrt{-h_0^2 + \sqrt{h_0^4 + \omega^4 \mu_a \varepsilon_a}} \quad h_0 = \sqrt{\omega^2 \mu_a \varepsilon'_a - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{кр}} \right)^2} = B \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_b} \right)^2}$$

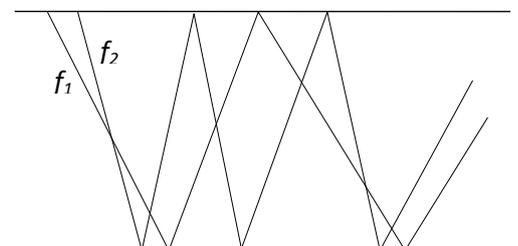
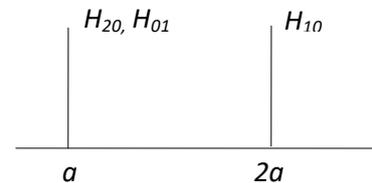
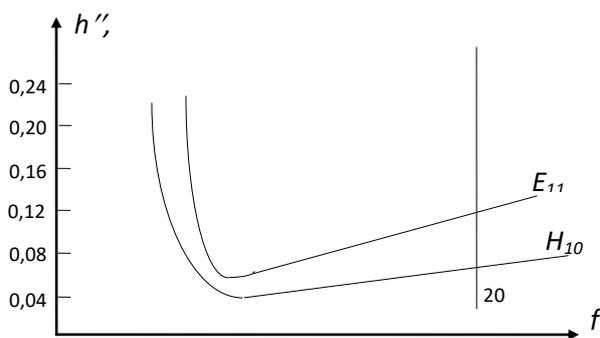
При $f < f_{кр}$ распределение без потерь невозможно.



$$a < \frac{\lambda}{2}$$

$$a \gg b$$

17.8. Передача энергии по прямоугольному волноводу.



$$f_{\text{кр}} \leftarrow f_2 < f_1 \quad f \uparrow \rightarrow R_s \uparrow \rightarrow h'' \uparrow \quad a < \lambda < 2a$$

$$h''_{H_{10}} = \frac{R_3}{bz_c} \frac{1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \quad \frac{\lambda}{2} < a < \lambda, \quad b < \frac{\lambda}{2}$$

$$23 \times 10 \quad \lambda = 3 \text{ см} \quad h''_{\partial B} = 0.1 \frac{\partial B}{M} \quad a \approx 0.75\lambda, \quad b = 0.5a$$

$$2,3 \times 1,0 \quad \lambda = 3 \text{ мм} \quad h''_M \uparrow \% 10^{3/2} \sim 3 \frac{\partial B}{M} \quad h''_{H_{10}} \approx 1.4 \frac{R_s}{\lambda} \cdot 10^{-2} \frac{H}{M}$$

$$C_u \rightarrow R_3 \approx \frac{0.05}{\sqrt{\lambda}} \quad h''_{H_{10}} \approx \frac{0.7}{\lambda \sqrt{\lambda}} \cdot 10^{-3} \frac{\partial B}{H}$$

17.9. Передача энергии по круглому волноводу.

$$E_{01} \quad H_{11}$$

$$2.61a < \lambda < 3.41a$$

$$\frac{\lambda}{3.41} < a < \frac{\lambda}{2.61}$$

$\xi = 1,3$ - диапазон перекрытий.

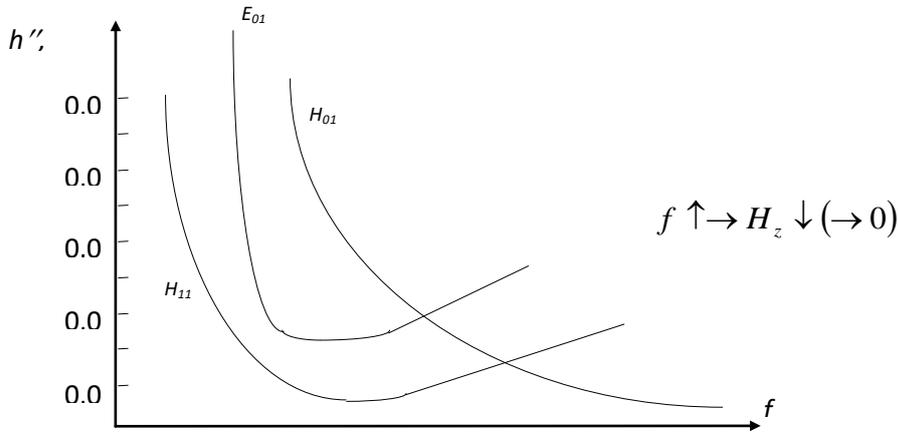
$$(h_m'') = \frac{R_s}{4P_{cp}} \int_l \left| \dot{\vec{H}}_{0m} \right|^2 dl$$

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \text{Re} \left[\dot{\vec{E}} \dot{\vec{H}}^* \right] d\vec{S}$$

$$(h_m'')^E = \frac{R_s}{aZ_C} \frac{\lambda_6}{\lambda}$$

$$(h_m'')^H = \frac{R_s}{aZ_C} \frac{\lambda_6}{\lambda} \left[\frac{m^2}{v_{\text{эм}}^H - m^2} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2 \right]$$

$$h^{H_{11}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_a}{\sigma}} \frac{1}{az_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3.41a}\right)^2}} \left[0.42 + \left(\frac{\lambda}{3.41a}\right)^2 \right]$$



$$h^{H_{01}} = \frac{R_s}{az_c} \frac{(\lambda/\lambda_{кр})^2}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}} \quad a/\lambda \geq 3 \div 4 \quad (\lambda = 1 \div 3 \text{ см}) \quad 1-2 \text{ дБ/км} \quad (100 \text{ типов})$$

Из анализа зависимостей следует, что потеря для волны H_{01} становится меньше, чем у волны основного типа H_{11} .

$$(h_m'')^{H_{01}} = \frac{R_s}{aZ_c} \frac{(\lambda/\lambda_{кр})^2}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}}$$

$$(h_m'')^{H_{01}} = (h_m'')^{H_{11}} \Rightarrow 2a \geq \lambda$$

Наиболее существенный выигрыш наступает при $a > 3 \div 4\lambda$. При этом в сантиметровом диапазоне $\lambda = 1 \div 3 \text{ см}$ постоянное затухание для волны H_{01} составляет 1...2 дБ на км. При этом в круглом волноводе до ста типов волн. Необходимо принять меры, обеспечивающие фильтрацию всех этих типов волн. Следующие рассуждения поясняют принципы реализации подобной фильтрации. Как уже отмечалось волны H_{0n} или H_{01} имеют только поперечные токи. В отличие от всех остальных типов волн, которые имеют обязательную составляющую продольную поперечного тока. Если волновод набран из металлических колец, разделенных диэлектрическими кольцами, то этим самым будет исключена возможность возбуждения типов волн, имеющих продольную составляющую. H_{01} будет распространяться в такой линии передач с малыми потерями.

Раздел 18. Колебательные системы СВЧ. Объемные резонаторы.

18.1. Эволюция электромагнитных колебательных систем.

Самым распространённым элементом радиотехнических схем, является колебательный контур, образованный параллельным соединением индуктивности и ёмкости.

Характерная особенность колебательных контуров, заключается в том, что размеры L и C , много меньше реальной длины волны.

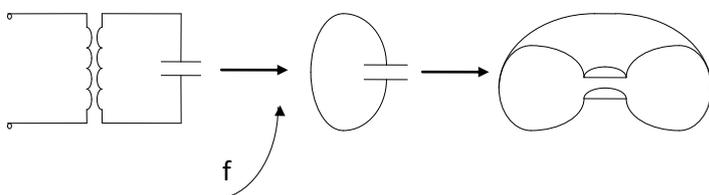


Рис.1

Рис.2

Рис.3

- (1) Недостаток контура низкая добротность, связанная с уменьшением энергии электромагнитного поля в такой системе с увеличением активных потерь обусловленных поверхностным эффектом и с потерями на излучение.
- (2) Возрастает запасенная энергия, уменьшаются потери. В таких объемных резонаторах сохранены конструктивные особенности присущие системам с сосредоточенными параметрами (можно выделить L и C).

С ростом частоты, L и C уменьшаются, и в пределе получают контур как на Рис.2. Он вырождается в утилитарную конструкцию, в которой роль ёмкости играют две металлические пластины, а роль индуктивности – проводник соединяющий их. Это характерное преобразование для волн сантиметрового диапазона. Добротность таких контуров достаточно низка. Причина этого в следующем, малая величина LC элементов, приводит к снижению энергии, запасённой в таком контуре.

Вследствие поверхностного эффекта, увеличиваются потери в проводниках. $W_{cp} \downarrow, P_{ncp} \uparrow, P_{\Sigma cp} \uparrow$. Сильно возрастают потери на излучении.

Возможен следующий путь увеличения добротности на ВЧ. Как показано на Рис.2, вследствие параллельного соединения элементов, увеличивается резонансная частота.

$$\frac{1}{L_{\Sigma}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots, f_p \uparrow$$

Отсюда мы получим конструкцию как на Рис.3.

Получим локальный объём, ограниченный локальными стенками.

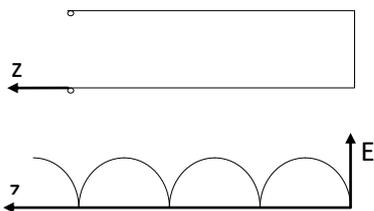
Колебательная система, ограничивающая себя проводящими, локальными стенками называют объёмным резонатором.

Этот подход обладает недостатками, которые присущи колебательным системам с сосредоточенными параметрами.

С ростом частоты, объём колебательной системы уменьшается $V \downarrow, W_{cp} \downarrow$, снижается добротность. С ростом частоты возрастают технологические трудности реализации подобных систем.

Рассмотрим более прогрессивный способ реализации подобных систем, с использованием структур с распределёнными параметрами. Рассмотрим реализацию колебательной системы из отрезков линии передач.

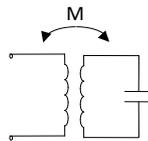
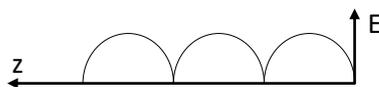
Рассмотрим КЗ двухпроводную линию.



В такой линии режим КЗ.

Режим КЗ, будет повторяться в точках, которым удовлетворяют следующие соотношения.

$$E|_{z=0} = 0, \quad z = p \frac{\lambda}{2}, \quad p = 1, 2, \dots$$



$$l = p \frac{\lambda}{2}$$

В частности, если взять линию КЗ с двух сторон, то как показано в курсе ОТЦ, в ней будет колебательный процесс. Причём, его частные параметры:

$$\lambda_p = \frac{2l}{p}$$

Характерная особенность таких колебательных систем, что они могут резонировать на множестве частот. Вдоль такой колебательной системы, должно укладываться целое число полуволн.

Мы рассмотрели колебательную систему на примере отрезка двухпроводной линии. Также, подобные системы могут быть реализованы на любых линиях передач, в том числе и на волноводах.

Характерные особенности, будут заключаться, в следующем:

Стоячая волна может возникать по всем трём координатам, внутри резонатора. Подобные резонаторы будут резонировать на кратных частотах, вследствие явления дисперсии.

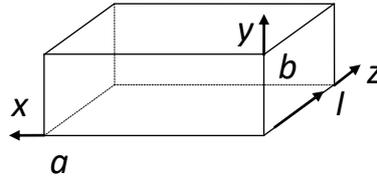
1. частотная дисперсия
2. стоячие волны 3-м координатам

18.2. Объемный резонатор из отрезка прямоугольного волновода

(частичная задача).

Берём стандартный, прямоугольный волновод, с волной H_{10} .

Рассмотрим прямоугольный волновод сечением $a \times b$.



Определим структуру поля и параметры электромагнитных колебаний, возникающих в таком резонаторе.

$$z=0, z=l$$

$$\underline{H}_{10}$$

$$E_y^{\Pi} = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-ihz}$$

$$E_y^{\Sigma} = E_y^{\Pi} + E_y^0$$

$$E_y^0 = RE_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{-ihz}$$

$$E_y^{\Sigma} \Big|_{z=0} = 0 \rightarrow R = -1$$

При наличии КЗ, в стенке появится отражённая волна.

$$E_y^{\Sigma} = -2iE_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin hz$$

По определению, продольно-волновое число h_p . Для его определения воспользуемся граничной задачей.

$$E_y^{\Sigma} \Big|_{z=l} = 0 \rightarrow hl = p\pi, p = 1, 2, \dots$$

$$h_{p_{PE3}} = \frac{p\pi}{l},$$

$$\lambda_{p_{PE3}} = \frac{2\pi}{h_{p_{PE3}}} = \frac{2l}{p}$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}; \text{ учитывая это, можно написать: } \frac{2l}{p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda p}{2a}\right)^2} = \lambda_p$$

$$\left(\frac{2l}{p}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda p}{2a}\right)^2\right] = \lambda_p^2 \quad \left(\frac{2l}{p}\right)^2 - \left(\frac{2l}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{2a}\right)^2 \lambda_p^2 = \lambda_p^2$$

$$\lambda_p^2 = \frac{(2l/p)^2}{1 + \left(\frac{2l}{p}\right)^2 \left(\frac{1}{2a}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{p}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2} = \frac{2^2}{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$\boxed{\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{p}{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2}}} - \text{длина волны резонансная, в свободном пространстве.}$$

Индекс “р”, имеет простой физический смысл. Он показывает, число стоячих полуволн, вдоль оси резонатора.

Рассматриваемый тип колебаний, имеет следующую аббревиатуру H_{10p} .

До образования резонатора, в волноводе, существовала волна H_{10} .

H_{101} - в таком резонаторе одна полуволна.

18.3. Тип колебаний: H_{10p} Структура поля: H_{101}

$E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l}$ - так обозначим “у” компоненту. $\text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{j}$

$$\begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \bar{1}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \bar{1}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \bar{1}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

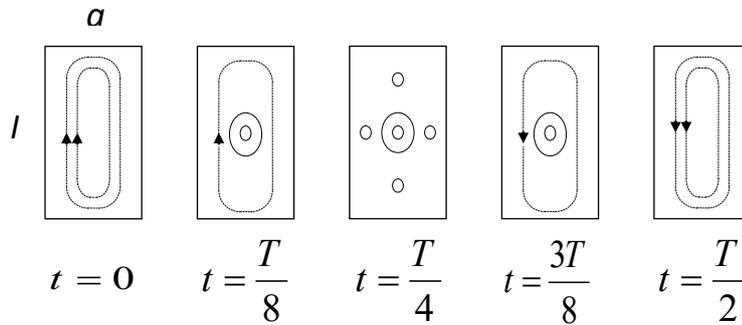
имеется только y составляющая.

$$H_z = -\frac{1}{i\omega\mu_a} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{i\pi}{\omega\mu_a a} E_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{l}$$

Магнитное

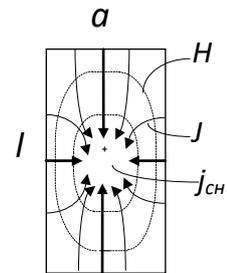
Магнитное
о

Магнитное



$$\Pi_{cp} = 0$$

Поверхностные токи:

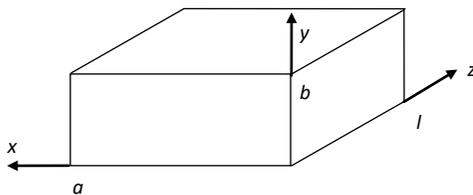


Из выражения для составляющих поля следует, что E и H отличаются на 90° , что свидетельствует о нулевом значении среднего за период вектора Пойнтинга и существование в резонаторе колебательного процесса.

В ходе этого процесса, дважды за период, энергия электрического поля преобразуется в магнитное и наоборот.

18.4. Общая задача о колебаниях в прямоугольном резонаторе.

Классификация типов волн.



$$\lambda_{\text{эф}} = \frac{2l}{p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Определить совокупность резонансных частот всех возможных типов колебаний, существующих в прямоугольном резонаторе с размерами a, b, l . Введём декартову систему координат, при этом пусть размер l совпадает с осью z .

Пусть в поперечном сечении с размерами $a \times b$ структура поля совпадает со структурой поля волны E_{mn} . Резонансная длина волны, связана с длиной волны в волноводе с размерами $a \times b$ дисперсионным уравнением.

$$\frac{1}{\lambda_p^2} = \frac{1}{\lambda_{gp}^2} + \frac{1}{\lambda_{кр}^2} \quad \lambda_p^{E_{mnp}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{w}{a}\right)^2 + \left(\frac{u}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$

Пологая если структура колебания в поперечном сечении резонатора, с размерами $a \times b$ совпадает с поперечной структурой волны H_{mn} в прямоугольном волноводе, то мы получим уравнение.

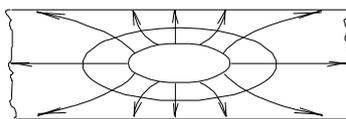
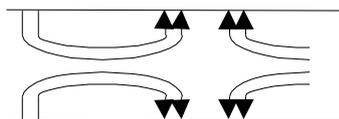
$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{w}{a}\right)^2 + \left(\frac{u}{b}\right)^2}}$$

$$\lambda_p^{E_{mnp}} = \lambda_p^{H_{mnp}}$$

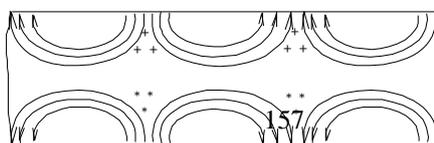
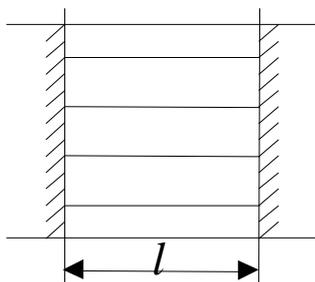
Из рассмотренных в предыдущих параграфах следует, что случай Н в прямоугольном волноводе по крайней мере 1-н может принимать.

Из h следует, что индексы mn входят в это соотношение совершенно равноправно. Рассмотрим возможность при которой индекс p соответствует нулевому значению.

$$p=0 \rightarrow E, H \neq f(Z)$$



$$\lambda < \lambda_{кр}$$



$$\lambda \rightarrow \lambda_{кр} \rightarrow \lambda_b \rightarrow \infty \rightarrow \vec{E} = \vec{1}_z E$$

$$\underline{E}_{110}$$

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

$$H \rightarrow \vec{E}_\perp \rightarrow H_{mnp} \rightarrow E; H \equiv 0$$

Если мы поставим две металлические плоскости на расстоянии l , ненулевые индексы m и n на этих плоскостях будут удовлетворяться механически. Структура поля остается неизменной (какой была в отсутствии плоскостей).

В случае H_{mn} один из индексов может быть не равен нулю. В случае H -волн имеется только поперечная составляющая эл. поля. Устремив длину волны к критической получим наличие продольной составляющей магнитного поля, относительно поперечных пластин эти составляющие ориентированы перпендикулярно, а поперечные составляющие эл. поля тангенциально.

Колебание E_{mn0} возможно, при этом резонансные явления наблюдаются в поперечной плоскости. В продольном направлении резонансные явления отсутствуют.

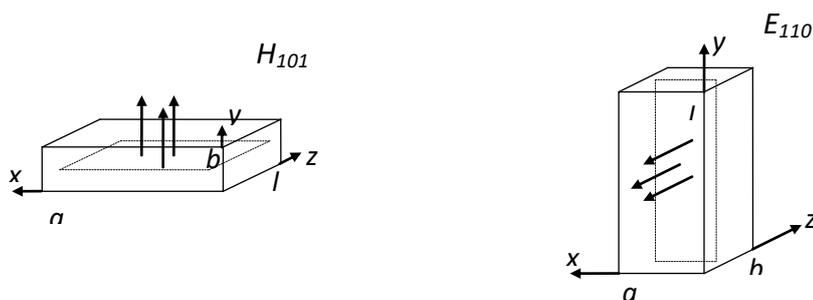
Колебания H_{mn0} – невозможны.

18.5. Классификация типов колебаний

Классификация неоднозначно зависит от выбора продольного размера резонатора и осуществляется следующим образом.

1. Один из размеров полагается продольным .
2. Определяем поперечную структуру и тип волны, порождающей колебания в эквивалентном прямоугольном волноводе с размерами $a \times b$.
 $a \times b$ отсюда следует E_{mn} .
3. Определяем индекс p , и на основании этого имеем E_{mnp}

Алгоритм классификации неоднозначно зависит от первоначального выбора объемного размера



1. l – продольный размер
2. $a \times b$ следует определить структуру
3. Определим индекс p . Индекс $p=1$, отсюда H_{101} .

Определим число стоячих полувольт E_{110} , отсюда число стоячих полувольт равно нулю. $\lambda_p^{H_{101}} = \lambda_p^{E_{110}}$

18.6. Цилиндрический объемный резонатор.

Определить совокупность резонансных частот в всевозможных типов колебаний цилиндрического резонатора длиной l и диаметром $2a$. Размер l считаем продольным, поперечное сечение соответствует E_{mn} в волноводе.

E_{010}

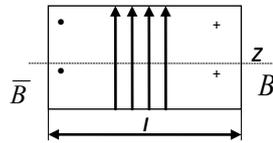
H_{011}

$$\frac{1}{\lambda_p^2} = \frac{1}{\lambda_{кр}^2} + \frac{1}{\lambda_{сп}^2}$$

$$\lambda_{сп} = \frac{2l}{p}; \quad \lambda_{кр}^E = \frac{2\pi a}{v_{mn}^E}; \quad \lambda_{кр}^H = \frac{2\pi a}{v_{mn}^H}$$

$$\lambda_p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{v_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}}$$

$$\lambda_p^{E_{010}} = \frac{2\pi a}{v_{01}^E} = \lambda_{кр}^{E_{01}}$$



Точно такими же рассуждениями, как в предыдущем параграфе показывается, что E_{mn0} – может существовать, и H_{mn0} – не может. Приведем структурные схемы некоторых характерных типов колебаний.

18.7. Способы возбуждения объемных резонаторов.

На практике резонаторы включают в качестве радиотехнической схемы. Представляют интерес элементы связи в резонаторе с внешними цепями. Различают электрического и магнитного типа возбуждающие устройства.

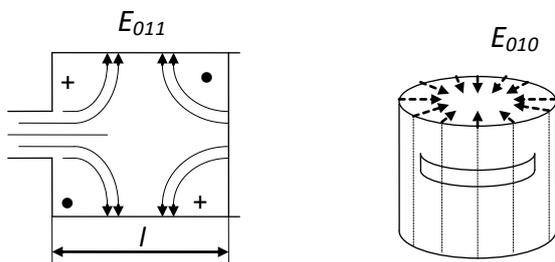
Для возбуждения колебаний в резонаторах используют возбуждающие устройства:

- 1) Эл. типа (элементарные электрические излучатели)
- 2) Магнитные возбуждающие устройства (элементарные магнитные излучатели).

Для наиболее интенсивного возбуждения заданного типа колебаний с помощью эл. колебательного устройства, которое представляет собой линейный проводник с током, он должен быть ориентирован параллельно линиям эл. поля и находиться в максимуме его интенсивности.

Возбуждающее устройство магнитного типа выполнено в виде петлевого проводника с переменным током, петля перпендикулярна линиям напряженности магнитного поля и находится в максимуме его интенсивности.

Покажем некоторые способы возбуждения.

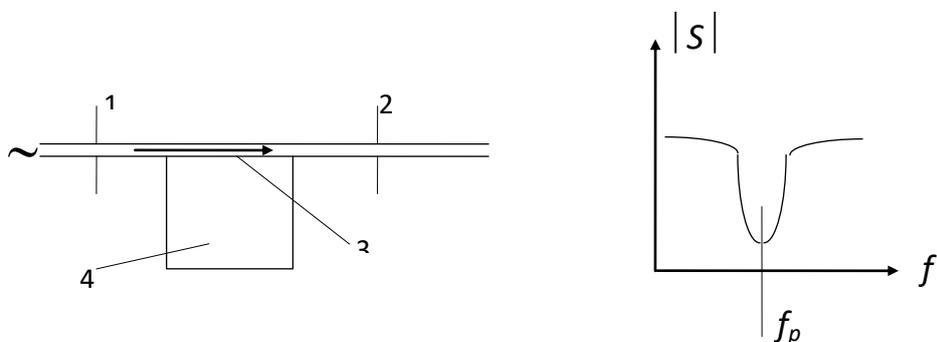


Существует два характерных способа включения резонаторов в общую радиотехническую схему.

Абсорбционный способ включения

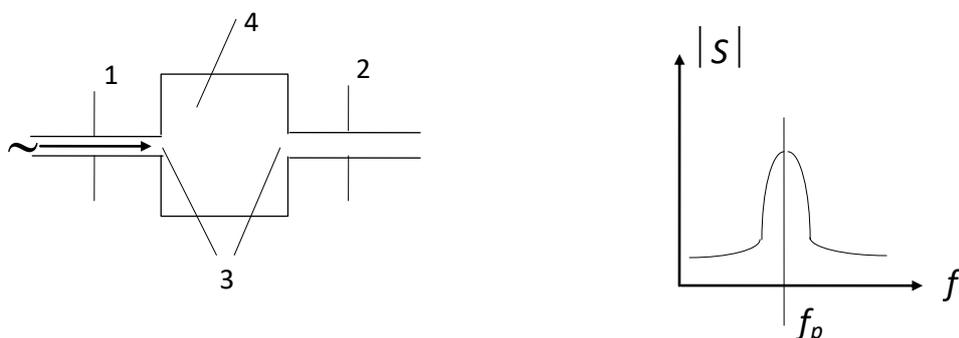
(параллельный)

Один элемент связи



Прогодной способ включения

Два элемента связи



Чем выше коэффициент связи, тем ниже добротность, следовательно, нужно достичь наименьшего коэффициента связи.

Электрический излучатель, представляет из себя, металлический, электрический проводник (штырь) с переменным электрическим током. Этот проводник должен находиться в максимуме электрического поля и должен быть параллелен силовым линиям вектора E .

Магнитный элемент связи – одна из разновидностей это петлевой элемент связи. Он должен находиться в максимуме напряженности магнитного поля,

возбуждения типа колебаний и поверхность петли должна быть перпендикулярна силовым линиям вектора H .

18.8. Добротность объемных резонаторов.

В разделе теоремы Пойнтинга рассматривалась задача об изолированной системе. Для нее энергетические отношения выглядели следующим образом.

$$Q = 2\pi \frac{W_{cp}}{\Delta W}$$

$$Q = \omega \frac{W_{cp}}{P_{ncp}}$$

$$W_{cp.} = \int_V \varepsilon_a \frac{|E|^2}{2} dV = \int_V \mu_a \frac{H^2}{2} dV$$

$$P_{ncp.} = \frac{R_s}{2} \oint_S |H_z|^2 dS$$

Мощность потерь $P_{ncp} = \frac{\Delta W}{T}$

$$Q = \frac{\omega \int_V \mu_a |H|^2 dV}{R_s \oint_S |H_z|^2 dS}$$

V - изолированная система

Для расчета конкретных значений добротности легко могут быть получены следующие соотношения.

$$P_a = P_{\Pi_{cp}} \quad P' = 2\omega(W_{M_{cp}} - W_{\mathcal{E}_{cp}})$$

$$W_{M_{cp}} = W_{\mathcal{E}_{cp}}$$

$$W_{-p} = W_{M_{-p}} + W_{\mathcal{E}_{-p}}$$

$$Q = \omega \frac{W_{cp}}{P_{\Pi_{cp}}}$$

$$W_{cp} = W_{\mathcal{E}_{max}} = W_{M_{max}}$$

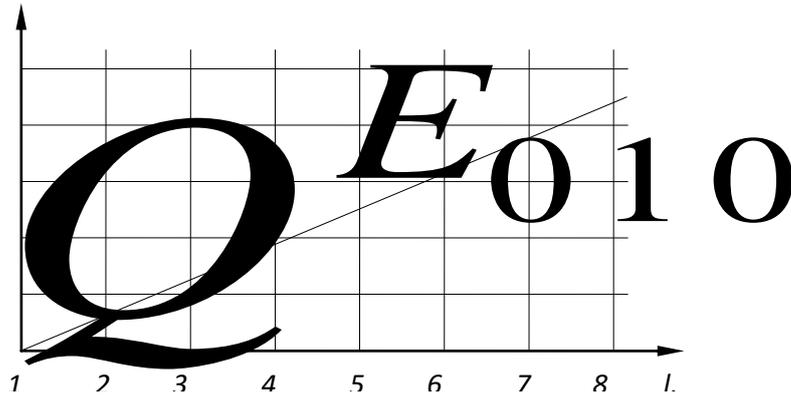
$$Q^{H_{101}} = Q^{E_{110}} = \pi \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega E_0}} \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a}\right) + \frac{1}{l^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{l}\right)}$$

$$Q^{E_{010}} = \sqrt{2\omega\mu_0\sigma} al/2(a+l)$$

$$W_{cp} \uparrow Q \uparrow$$

$$l \uparrow \rightarrow V \uparrow \rightarrow W_{cp} \uparrow$$

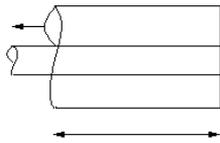
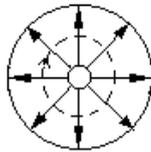
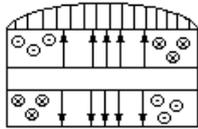
$$\text{быстрее} \quad S \uparrow \rightarrow P_{ncp} \uparrow$$



Все приведенные рассуждения касались собственной системы резонаторов, когда резонатор рассматривался как изолированная система, реально он связан с внешней схемой, которая вносит в резонатор внешние потери. Она оказывает шунтирующее действие. Чем сильнее связь с внешними цепями, тем меньше добротность. Добротность с учитываемыми внешними цепями называют нагруженной добротностью, в отличие от собственной добротности.

18.9. Другие типы объемных резонаторов

Коаксиальный резонатор



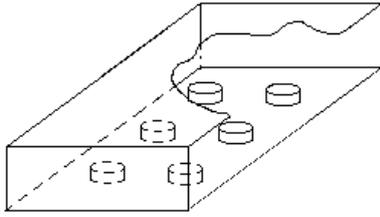
Учитывая, что в коаксиале с основным типом волн резонанс не существует, то для обозначение колебаний в резонаторе из коаксиальных линий используют следующие аббревиатуры: T001... Характерная особенность резонатора на коаксиальной линии, то что он резонирует на кратных частотах. $\lambda = \frac{2l}{p}$, $p=1,2,\dots$ $l = p \frac{\bar{\lambda}p}{2}$

Используют такие резонаторы в качестве волномера. По сравнению с цилиндрическим резонатором (из отрезка кругового волновода) коаксиальный резонатор имеет меньшую добротность из-за большей площади

(рис.2) поверхности внутри и меньшего объема.



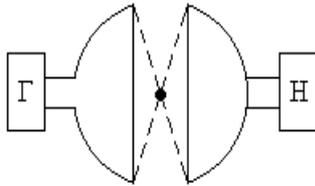
Очень распространены диэлектрические резонаторы(рис.2)



Возбуждаясь за счет эффекта ПВО, диэлектрические резонаторы не требуют специального возбуждения.

Как правило, диэлектрические резонаторы выполняют из искусственных материалов с большим коэффициентом диэлектрической проницаемости.

Существуют полуоткрытые резонаторы, образованные параболическими поверхностями.



Такие структуры используют для активных сред (плазмы), для которых непосредственный контакт невозможен.

Основной недостаток: существуют потери на излучение.