

O'ZBEKISTON OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
O'RTA MAXSUS KASB-HUNAR TA'LIM BOSHQARMASI

E. MARDONOV, Q. OSTONOV, O'. OCHILOV, A.ERGASHEV

GEOMETRIYA

Kasb-hunar kollejlari uchun uslubiy qo'llanma

*Samarqand viloyati o'rta-maxsus kasb-hunar
ta'limi boshqarmasi tassarufidagi ta'lim
muassalarining o'quv ishlari bo'yicha
direktor o'rinbosarlari bilan 2015 yil
11 iyunda o'tkazilgan ishchi yig'ilishi
bayoni bilan nashrga tavsiya etilgan.*

Samarqand- 2015

E. Mardonov, Q. Ostonov, O'. Ochilov, A.Ergashev. Geometriya. Uslubiy qo'llanma.- Samarqand: Samarqand san'at kolleji nashri, 2015, 91 bet.

Mazkur uslubiy qo'llanmada kasb-hunar kollejlarida geometriya o'qitishning usullari, ularni amalda joriy etish bo'yicha uslubiy tavsiya hamda xulosalar keltirilgan. Unda geometriya bo'yicha asosiy tushunchalar va mavzularni o'qitish uslubiyatining muhim xususiyat va jihatlari bayon etilgan.

Mas'ul muharrir: pedagogika fanlari nomzodi, dotsent **Nazarov X.E.**

Taqrizchilar : SamDU «Algebra va geometriya» kafedrası katta o'qituvchisi, fizika-matematika fanlari nomzodi **Imomqulov N.**

H.A.Abdurasulov nomidagi san'at kolleji o'qituvchisi **O. Umarov**

KIRISH

Jamiyatimiz buyuk o'zgarishlar sari yuz tutgan bugungi davrda Respublikamiz Prezidenti I. A. Karimov [1,2] ta'kidlaganidek, ta'lim sohasini tubdan isloh qilish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasidagi yuksak ma'naviyatli, erkin fikrlovchi barkamol yetuk shaxsni tarbiyalash hamda ta'lim-tarbiya jarayonini takomillashtirish orqali ta'lim samaradorligini oshirish talab qilinmoqda.

O'zbekistonda bu borada so'nggi yillarda anchagina diqqatga sazovor ishlar amalga oshirildi. Eng avvalo "Ta'lim to'g'risida"gi qonun va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" qabul qilindi. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi ta'lim tizimining asosiy g'oyalarini o'zida mujassamlashtiradi.

Mamlakatimizda Kadrlar tayyorlash milliy dasturiga muvofiq kasb-hunar ta'limida talabalarning muntazam bilim olishi, ularda mustaqil ijodiy fikrlash, kasb tanlashga va atrof-muhitga ongli munosabatni hosil qilish, milliy va umumbashariy qadriyatlarni hurmat qilish o'z Vataniga, xalqiga sadoqat, mehr-muhabbat ruhida tarbiyalash tamoyillari aks ettirilgan. Shu bilan birga har tomonlama kamol topgan, ta'lim va kasb-hunar dasturlarini ongli ravishda puxta o'zlashtirgan, jamiyat, davlat va oila oldidagi o'z javobgarligini his etadigan fuqarolarni tarbiyalashni nazarda tutgan pedagogik g'oyalar belgilangan. Ushbu pedagogik g'oya ta'lim tizimi oldiga:

- ta'lim va kadrlar tayyorlash tizimini jamiyatda amalga oshirilayotgan yangilanish, rivojlangan huquqiy demokratik davlat qurilishi jarayonlariga moslash;

- kadrlar tayyorlash tizimi va mazmunini mamlakatning ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyoti istiqbollaridan jamiyat ehtiyojlaridan, fan, madaniyat, texnika va texnologiyaning zamonaviy yutuqlaridan kelib chiqqan holda qayta qurish;

- ta'lim oluvchilarni ma'naviy-axloqiy tarbiyalashning samarali shakllari va uslublarini ishlab chiqish hamda joriy etish vazifalarini ko'ndalang qilib qo'ydi.

Kasb-hunar ta'limida mutaxassislik yo'nalishida chuqur tabaqalashtirilganligi bois bu bilim maskanida matematika kengroq va mukammalroq o'qitiladi, talabalarning mustaqil o'rganishlari uchun keng imkoniyatlar yaratiladi. Biror bir kasb yoki ixtisoslikni egallashga yo'naltirilgan matematika fanini o'qitish ko'proq amaliy asosda tashkil etiladi, ya'ni talabalarning mutaxasssisihi hisobga olgan holda ularga, ayniqsa, qishloq xo'jaligi sanoat tarmoqlari: o'rmonchilik, gidrologiya, gidrometereologiya, ekologiya, muhandislik kabi yo'nalishlar bilan bog'liq hamda xalq xo'jaligining boshqa sohalarida matematikaning tutgan o'rni va ahamiyatiga ko'proq e'tibor qaratiladi. Shuningdek, kasb-hunar kollejlari ixtisosliklariga bog'liq holda qishloq xo'jaligi sanoat korxonalari, ishlab chiqarish muassasalari va boshqa obyektlarga ekskursiyalar uyushtirilib,

ularning kasbga bo'lgan qiziqishini oshirish va atrof-muhitni muhofaza qilishga o'rgatib borish lozim.

Bugungi kunda ta'lim tizimi oldida turgan ta'lim-tarbiya samaradorligini oshirish jahon ta'lim standartlari darajasida bilim berish orqali har tomonlama etuk ijodkor ma'naviy boy, kasb-hunarli, milliy va umuminsoniy qadriyatlar, milliy istiqloq g'oyasi ruhida tarbiyalangan, o'z mustaqil fikriga ega barkamol shaxsni kamolga yetkazish kabi vazifalarni hal etishda oliy ta'lim muassasalarining pedagogik jamoasi, xususan har bir fan o'qituvchisi o'z pedagogik faoliyatini tubdan o'zgartirishi lozim.

Zamon talabiga muvofiq holda har bir fan o'qituvchisi o'zining mutaxassisligini chuqur o'zlashtirgan, pedagogik-psixologik hamda metodik bilim, ko'nikma va malakalarni puxta egallagan, ta'lim-tarbiya jarayonini samaradorligini oshiradigan zamonaviy pedagogik va axborot texnologiyalaridan xabardor va ularni ta'lim jarayonida qo'llay olish malakasiga ega bo'lishi lozim.

Ma'lumki, hozirgi davrda kasb-hunar kollejlari o'quv jarayoniga yangi pedagogik texnologiyalar kirib kelmoqda. Ularni amalda tadbiq etish va qo'llash o'qituvchilarning asosiy vazifalaridan biridir. Shularni hisobga olib mazkur uslubiy qo'llanmada kasb-hunar kollejlari geometriya o'qitishda bu ishni amalga oshirish muammolari atroflicha muhokama etilib, ularni qo'llashga doir zaruriy xulosa va misollar keltirilgan.

Geometriya o'qitish jarayonida talabalarga asosiy tushunchalarni to'g'ri tushuntirish, uning tadbiqlarini ular ongiga yetkaza olish, ularning fazoviy tasavvurlarini rivojlantirish matematika o'qitish muvaffaqiyatini ta'minlabgina qolmay, balki talabalarning bilish va tafakkur qobiliyatlarini rivojlantirish uchun ham xizmat qiladi. Bu hol esa yangi zamonaviy texnologiyalarga tayangan holda geometriya darslarini o'tishni talab etadi. Shu sababli uslubiy qo'llanmada geometriya o'rganishning nazariy asoslari bilan birga ko'rgazmali va noan'anaviy usullarni qo'llash xususiyatlari hamda zarur dars ishlanmalari hamda masalalar yyechish bo'yicha imkoniyatlari batafsil bayon etilgan.

Uslubiy qo'llanma kasb-hunar kollejlari o'qituvchilari uchun mo'ljallangan bo'lib, geometriya o'qitish jarayonining dolzarb muammolari, amaliy va nazariy ahamiyatga molik masalalarini hal qilishda o'z hissassini qo'shadi, deb umid qilamiz.

1-§. GEOMETRIYA AKSIOMALAR SISTEMASI VA GEOMETRIYA TARIXI

Reja:

1. Dastlabki geometriya aksiomalar sistemasi.
2. Evklidning "Negizlar" asari va uning geometriya rivojida tutgan o'rni.
3. Evklidning 5-postulati va uni isbotlashga urinishlar tarixi.
4. Lobachevskiy N.I. yangi geometriyaning kashfiyotchisi sifatida.
5. Vengr matematigi Ya.Bol'yay va nemis matematigi Gaussning noevklid geometriyalarini yaratish bo'yicha ishlari.
6. Riman geometriyasi va boshqa noevklid geometriyalar tavsifini bergan olimlar va ularning ishlari.

Tayanch iboralar: *geometriya, noevklid geometriya, tarixiy ma'lumotlar, aksioma, geometriya asoslari.*



1. Geometriyani mustaqil fan sifatida asoslashda qadimgi yunon olimlari dastlabki harakatlarni amalga oshirganlar. Masalan, Gippokrat Xiosskiy geometriya asoslari haqidagi dastlabki tasavvurlarini bayon etgan. Bu soha bo'yicha asosiy ishlarni buyuk yunon olimi Evklid (eramizgacha 356-300-yillar) amalga oshirgan. Uning asosiy asari "Negizlar" planimetriya, stereometriya va sonlar nazariyasi ba'zi masalalarini, shuningdek, algebra, nisbatlar umumiy nazariyasi, yuz va hajmlarni hisoblash usuli hamda limitlar nazariyasi elementlarni o'z ichiga oladi. "Negizlar" da Evklid qadimgi yunon matematikasining barcha yutuqlarini jamladi va uning rivoji uchun asos yaratdi.

"Negizlar" 13 kitobdan iborat bo'lib, golland matematigi Van-Der-Vardenning (1903-yilda tug'ilgan) hisoblashicha, "bu asar eramizgacha bo'lgan V- IV asrlar yunon matematiklari asarlari qayta ishlanmasidan iborat".

-1-4-kitoblar (planimetriya)- Gippokrat Xiosskiy "Negizlar"ining qayta ishlanmasi;

-5-kitob-(geometrik miqdorlarning proportsiyalar nazariyasi), 6-kitob (o'xshashlik nazariyasi) va 12-kitob (doiraviy jismlar) Evdoks Knidskiy (eramizgacha 408 - 355-yillar) asari ishlanmasi;

-7-8-kitoblar (sonlar nazariyasi va sonli proportsiyalar);

-11-kitob (stereometriya asoslari)- Arxitey Tarentskiy asari ishlanmasi;



-13-kitob (muntazam ko'pyoqlar) va 10-kitob (irratsional miqdorlar nazariyasi) -Teetet Afinskiy asari ishlanmasi.

By qomusiy asar qo'lyozma holida XVI asrgacha o'quv qo'llanma sifatida qo'llanilib keldi, 1482-yilda birinchi marta chop etildi. Asarda 23 ta ta'rif, 5 ta postulat va 9 ta aksioma berilgan. "Negizlar"ning tarixiy ahamiyati shundan iboratki, unda birinchi bo'lib aksiomatika asosida geometriyaning mantiqiy tuzilishini ishlab chiqishga harakat qilingan. Hozirgi zamon matematikasida qo'llanilayotgan aksiomatik usul ham shu asardan boshlab foydalanila boshlangan.

Asarda to'g'ri to'rtburchakka, kvadratga, aylanaga to'g'ri ta'riflar berilgan. Nuqtaga quyidagicha ta'rif beriladi: "Nuqta deb shunday, narsaga aytiladiki, u qismlarga ega emas". Chiziq esa quyidagicha ta'riflanadi: "Chiziq deb eni yo'q uzunlikka aytiladi".

Geometrik yasashlarni amalga oshirish mumkinligini bayon etuvchi matematik mulohazalar (postulat)dan quyidagi beshtasi bayon qilingan:

1. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.
2. To'g'ri chiziq kesmasini cheksiz davom ettirish mumkin.
3. Har qanday markazdan ixtiyoriy masofada aylana yasash mumkin.
4. Hamma to'g'ri burchaklar o'zaro teng.

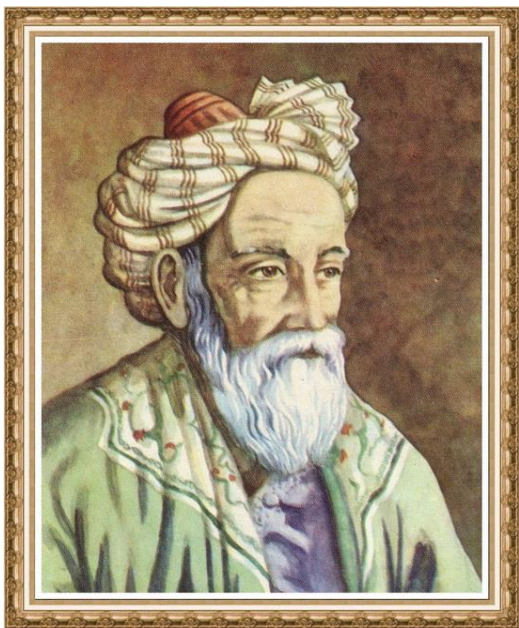
5. Bir tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesib, bir tomonli ichki burchaklar hosil qilsa va burchaklar yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lsa, mazkur to'g'ri chiziqlar davom ettirilganda ular yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik burchaklar tomonida kesishadi.

"Negizlar"da 9 ta aksioma - isbotsiz qabul qilinadigan mulohazalar bayon etilgan:

1. Biror narsaga teng bo'lgan miqdorlar o'zaro teng.
2. Agar teng miqdorlarga tengni qo'shsak, yana teng miqdorlar hosil bo'ladi va h. k.

Mazkur asar ulkan va uzoq shuhratga ega bo'lib, 1482-yildan boshlab barcha jahon tillarida 500 martadan ziyod nashr qilindi. Ayniqsa, V postulat katta ilmiy munozaralarga sabab bo'ldi. Agar V postulatdagi ichki almashinuvchi burchaklarni α va β desak, to'g'ri chiziqlar a va b bo'lsa, u holda postulat mazmuniga ko'ra $\alpha + \beta < 2d$ bo'lsa, a va b to'g'ri chiziqlar kesishadi.

Nima uchun ko'p asrlar davomida matematiklar bu postulatga asosiy e'tiborni qaratganlar. Avvalo shuni aytish kerakki, Evklid aksiomatikasida beshinchi postulatga ehtiyoj keyinchalik seziladi. "Negizlar"ning katta qismi unga bog'liq emas. Shunday qilib, Evklidning buyuk kashfiyotini shartli ravishda ikki qismga ajratish mumkin. Birinchi qismga isbotlarida mazkur postulat qo'llanilmaydigan mulohazalar kiradi. So'ngra postulat bayon etiladi va keyingi barcha mulohazalar unga tayanadi. Bundan "Negizlar"ni beshinchi potulatsiz ham yaratish mumkin degan fikr paydo bo'lishi tabiiy. Shuning uchun uni isbotlash ishtiyoqi tug'iladi. Matematiklar postulatni isbotlashga urina boshladilar. Bu muammoni hal etishga yuzlab olimlar harakat qildilar.



Ularning isbotlarida yoki qo'pol xatolar, yoki bir qarashda ilg'ab bo'lmaydigan chuqur noaniqliklar uchrar edi.

Postulatni isbotlash yo'lida unga teng kuchli bir qator mulohazalar paydo bo'ldi. Masalan, ingliz matematigi Yan Pleyfer (1748-1819)ning parallellik aksiomasi shular jumlasidandir: tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Bu aksiomani u 1795-yilda chop etilgan "Geometriya asoslari" kitobida bayon etgan.

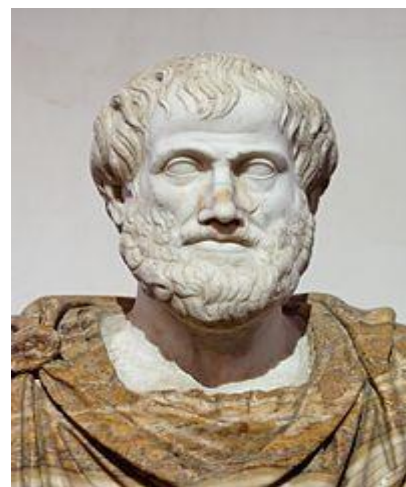
Endi beshinchi postulatni isbotlashga urinishlarning ba'zilarini ko'rib o'taylik.

Qadimgi yunon olimi Posidoniylar (Poseydoniy) (eramizgacha 135–51-yillar) hamma nuqtalari berilgan to'g'ri chiziqdan o'zgarmas masofada uzoqlashgan to'g'ri chiziqni parallel to'g'ri chiziq deb atashni taklif etdi va bunda beshinchi postulat oson isbotlandi. Posiydoniyning xatosi postulatda kiritilgan, yangi ta'rifdir: tekislikda berilgan to'g'ri chiziqdan o'zgarmas masofada joylashgan nuqtalar to'plami to'g'ri chiziq deb ataladi.

Markaziy Osiyolik matematik va astronom, al-Xorazmiyning zamondosh va maslakdoshi al-Jovhariy (IX asr) o'z isbotida agar ichki kesishuvchi burchaklar bir kesuvchi uchun teng bo'lsa, ular boshqalari uchun ham teng degan farazdan foydalangan.

Arab matematigi Ibn qorra Abul-Hasan Sobitas Sabiyal - Xarrani (836- 901) "Negizlar"ni arab tiliga tarjima qildi, unga sharhlar yozdi hamda V postulatni isbotlashga urinib, "oddiy" harakat (ilgarilanma, barcha traektoriyalari to'g'ri chiziqdan iborat) mavjudligini faraz qildi. U holda ikkita ixtiyoriy traektoriya bir xil uzoqlashgan to'g'ri chiziqlardir va bundan parallellik postulati isbotlanadi.

O'zbek matematigi, shoiri, astronom va faylasuf Umar G'iyosiddin Abul Faxt ibn Ibrohim Hayyom, (15.05.1048-14.12.1131) arab matematigi Ibn Al-Xaysam al-Basriy (Al'gazen) (965-1039) (uning to'rtta noyob matematik va astronomi ishlari qo'lyozmasi Samara oblasti kutubxonasida saqlanmoqda)ning isbotini (u Sabit ibn qorra isbotini takrorlagan edi) sharhlab, "oddiy" harakat mavjud degan farazni rad etdi.



U Yunon olimi Aristotel' (384-322-yillar) ishlariga tayangan holda yangi postulat bayon etadi: tekislikda ikkita "yaqinlashuvchi" to'g'ri chiziq

kesishadi, ya'ni ikkita kesishmaydigan to'g'ri chiziqda yaqinlashish uzoqlashishga aylanishi mumkin emas.

Ingliz matematigi Jon Vallis (1616-1703) beshinchi postulatga teng kuchli mulohazalarni (ularning mualliflarini ko'rsatib) sanab o'tdi va o'xshash (lekin teng emas) uchburchaklar mavjud degan mulohazani bayon etdi. Vallis o'zining barcha ko'p sonli va muhim natijalarining to'la isbotini bermagan, ular keyinchalik isbotlangan. Uning yuqoridagi mulohazasining isboti quyidagicha:

(AA') va (BB') -AB to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsin, AC nur esa (AB)- bilan o'tkir burchak tashkil etadi. AC nurning ixtiyoriy N_1 nuqtasidan AB ga perpendikulyar N_1B_1 ni tushiramiz va AB_1N uchburchakka o'xshash to'g'ri burchakli uchburchak ABN ni qaraymiz. Buning uchun AN_1 ni davom ettirib, unda N nuqtani shunday olamizki, $\frac{|AN|}{|AN_1|} = \frac{|AB|}{|AB_1|}$ tenglik bajariladi.

$\widehat{ABN} = \widehat{AB_1N} = d$. Demak, N nuqta BB' to'g'ri chiziqda yotadi, bundan perpendikulyar va og'maning kesishishligi kelib chiqadi, bu bilan beshinchi postulat isbotlandi

Italyan matematigi Jovanni Jirolamo Sakkeri (1667-1733) "Barcha tug'ma dog'lardan xalos etilgan Evklid" (1733-yilda Milanda chop etilgan) asarida V postulatni teskarisidan faraz qilingan yo'l bilan isbotlashga urindi. Bunda u "Hayyom to'rtburchagi"ni o'rganishga tayandi.

AC va BD tomonlar teng. U holda $\angle A = \angle B = \alpha$ burchak kattaligi haqida uchta faraz mavjud:

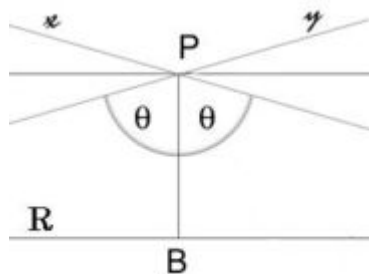
- 1) α - burchak o'tkir, ya'ni $\alpha < \frac{\pi}{2}$ - (o'tkir burchak farazi);
- 2) α - o'tmas burchak, ya'ni $\alpha > \frac{\pi}{2}$ - (o'tmas burchak farazi);
- 3) α - to'g'ri burchak, ya'ni, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ - (to'g'ri burchak farazi).

Umar Hayyom Aristotel postulatidan 1 va 2-hollarning bo'lishi mumkin emasligini ko'rsatadi, shu orqali uchinchi farazning to'g'riligi isbotlanadi. Sakkeri esa o'tmas burchak farazini qarama-qarshilikka olib keladi, so'ngra uning fikricha, mulohazalar yordamida o'tkir burchak farazi ham qarama-qarshilikka uchraydi. Natijada, uchinchi farazning to'g'riligi kelib chiqadi, bu bilan postulat isbotlanadi. Lekin Sakkeri mulohazalarda xatoga yo'l qo'yib, yagona mumkin bo'lgan geometriya - Evklid geometriyasi degan xulosaga keladi, bu bilan beshinchi postulatning xaqiqatligi "isbotlandi". O'tmas burchak farazidan kelib chiqsak Sakkeri mulohazalari umuman olganda Lobachevskiy geometriyasining birinchi teoremlaridan iborat deb hisoblash mumkin. Ularni keyinchalik qaytadan fransuz matematigi Adrien Mari Lejandr (1752-1833) topgan.

Lejandr 1794-yilda yozgan elementar geometriya bo'yicha o'quv qo'llanmasi "Geometriya asoslari"da Evklid postulatini isbotlashga bir qator urinishlar qilgan.

U uchburchak burchaklari yig'indisi π dan katta bo'lmasligini isbotladi. Lekin u π undan kichik ham bo'lmasligini isbotlayotganda AOB o'tkir burchak ichida, yotuvchi M nuqtadan burchakning OA va OB tomonlarini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqni hamma vaqt ham o'tkazish mumkin degan farazga tayandi. Agar bu faraz bo'lmaganda edi, Evklid postulati isbot qilingan deb hisoblanar edi. Haqiqatan, agar uchburchakning burchaklari yig'indisi π dan katta va kichik bo'lmasa, u holda uchinchi mumkin bo'lgan faraz: uchburchak ichki burchaklari yig'indisi π ga teng ekanligi kelib chiqar edi. Bundan esa Evklid postulatining isboti kelib chiqadi.

Nemis matematigi Iogann Genrix Lambert (1728-1777) ham bu postulatni isbotlashga urindi. U quyidagicha yasashlarni bajardi. AB kesmaning uchlaridan ikkita perpendikulyar va teng kesmalar AA₁ va BB₁ni ajratdi. So'ngra AA₁ kesmaning oxiridan A₁ nuqtaga yana bitta perpendikulyar tushirdi, uchta to'g'ri burchakli to'rtburchak hosil bo'ldi. Sakkeriga o'xshab u ham to'rtinchi burchak, o'tkir va o'tmas burchak farazlarini ilgari surdi. So'ngra to'g'ri burchak farazi beshinchi postulatga teng kuchliligini hamda o'tmas burchak farazi qarama-qarshilikka uchrashini isbotladi. Lambert keyinchalik, o'tkir burchak farazidan kelib chiqadigan fikrlarni rivojlantirishga harakat qildi, lekin bunda qarama-qarshilikni uchrata olmadi. Shunday qilib, 5-postulatni isbot qilish mumkin emas degan fikrga keldi. Bu bilan XIX asr boshigacha beshinchi postulat muammosi hal qilinmay qoldi.



Bu muammoning yechimini buyuk rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiy (1792-1856) 1826-yil 23-fevral kuni Qozon universiteti fizika-matematika bo'limiga taqdim etgan "Geometriya asoslarining qisqacha bayoni parallellar to'g'risidagi teoremaning qat'iy isboti bilan" asari qo'lyozmasida topdi. Bu yangi geometriya to'g'risidagi birinchi axborot edi va tarixga bu kun noevklid geometriyasi yaratilgan kun bo'lib kirdi. Faqat uch yildan so'ng, 1829-1830-yillarda "Kazanskiy vestnik" jurnalida uning "Geometriya asoslari haqida" maqolasi bosilib, bu kashfiyot mazmuni bayon etildi. Lobachevskiy birinchi marta Evklidning beshinchi postulati geometriyaning boshqa aksiomalariga bog'liq emasligini isbotladi.



N. I. Lobachevsky

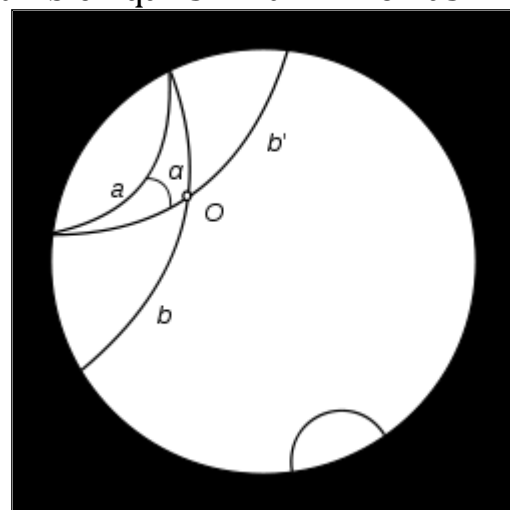
Lobachevskiy Evklid aksiomatikasida beshinchi postulatni quyidagi aksioma bilan almashtirdi: to'g'ri chiziqdan tashqarida tekislikda yotuvchi ular bilan kesishmaydigan ikkitadan kam bo'lmagan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Demak, Lobachevskiy aksiomasiga muvofiq A nuqtadan o'tuvchi a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlar b to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydi.

Lobachevskiy o'zi yaratgan geometriyani rivojlantira borib, uni "faraz qilinuvchi" geometriya deb atadi hamda qat'iy mantiqiy sistemani yaratdi.

Bu geometriya Evklid geometriyasidan tamoman farq qilar edi. Lekin u mantiqiy qarama-qarshilikka (ziddiyatlikka) duch kelishi lozim edi, chunki-ikkita geometriya-

ning bir vaqtda mavjud bo'lishligi mumkin emas edi. Shunga qaramay, Lobachevskiy yangi natijalar keltirib chiqara berdi, ular mantiqiy qarama - qarshiliklarga uchramadi. Lobachevskiy bu natijalarni 1835-yilda Qozon Universiteti ilmiy ishlarida "Faraz qilinadigan geometriya", 1835 - 38-yillarda e'lon qilingan "Parallel to'g'ri chiziqlar to'la nazariyasi va geometriyaning yangi asoslari" va 1885 -yilda yana Qozon Universiteti ilmiy ishlarida chop etilgan "Pangeometriya" asarlarida bayon etdi. Yangi geometriya va Evklid geometriyasida birinchi to'rtta guruh aksiomalar ustma-ust tushadi. Bu aksiomalar guruhlari va ularning natijalari absolyut geometriya deb atala boshladi.

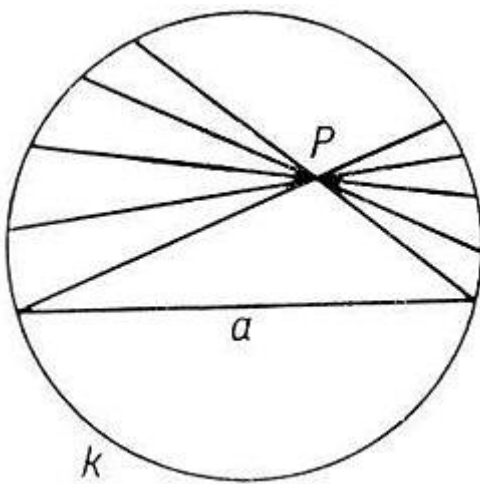
Lobachevskiy geometriyasida qarama-qarshilik yo'qligidan Evklidning beshinchi postulatini isbotlash mumkin emas degan natija kelib chiqadi. Nima uchun bu postulatni absolyut geometriyadan keltirib chiqarish mumkin emas. Mazkur savollarga javob berishga harakat qilib ko'raylik. Ma'lumki, absolyut geometriya bu ikkita geometriyaning umumiy qismidan tashkil topgan: agar absolyut geometriyaga Evklidning beshinchi postulatini qo'shsak, Evklid, geometriyasi; agarda absolyut geometriyaga Lobachevskiy aksiomasini qo'shsak, Lobachevskiy geometriyasi hosil bo'ladi. Shunday qilib, Evklidning beshinchi postulatini (yoki unga teng kuchli bo'lgan ixtiyoriy mulohazani) isbot qilish, ya'ni absolyut geometriyadan mantiqiy keltirib chiqarish mumkin emas. Lobachevskiy geometriyasi kabi Evklid reometriyasi qarama-qarshiliksizdir, chunki arifmetikada qarama-qarshilik yo'q. Demak, ikkala geometriya ham mavjud



bo'lish huquqiga ega. Lekin noevklid geometriyasi (Lobachevskiy geometriyasi) Evklid geometriyasidan jiddiy farq qiladi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yig'indisid π an kichik, unda o'xshash tengmas uchburchaklar mavjud emas, berilgan to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar to'plami to'g'ri chiziq emas, balki egri chiziq hisoblanadi va h. k.

Noevklid geometriyani yaratishga vengr matematigi Yanosh Bolyai (1802- - 1860) va nemis matematigi Karl Fridrix Gauss (1777-1855)lar katta hissa qo'shganlar. Ya. Bol'yai 1832-yilda chop etgan "Appendiks" asarida Lobachevskiy yaratgan geometriya sistemasi asoslarining qisqacha va izchil bayonini berdi. Bu asar juda ixchamligi va mantiqiyliigi bilan matematik adabiyotlar ichida eng mukammallaridan biri hisoblanadi (asar 1950-yilda rus tilida chop etilgan).

Gaussning noevklid geometriya bo'yicha tadqiqotlari uning vafotidan so'ng ma'lum bo'ldi. U Yanoshning otasiga (u ham matematik edi) yozgan xatida, bu geometriya sistemasiga juda avval uchraganligini (bu fikrga u 1818 yillarda kelgan), lekin, uni hayotligi davrida e'lon qilmaslikka qaror qilganligini (tushunmovchiliklarga sabab bo'lishidan xavfsirab) ta'kidlagan edi. Ichki qarshilik va unga bog'liq yangi geometriya mavjudligi haqidagi shubhalar Gaussning qat'iy fikrga kelishiga, bu sohada tadqiqotlar o'tkazishiga va ishlarini chop etishga xalaqit berdi. U N. I. Lobachevskiy ishlariga katta e'tibor bilan qaradi, uni Gettingen fanlar akademiyasiga muxbir-a'zo qilib saylash tashabbuskori edi; ammo bu kashfiyotga oid o'z fikrini e'lon qilmadi.



Lobachevskiy geometriyasi modelini mashhur fransuz matematigi Jyul Anri Puankare (1854-1912) 1882-yilda yaratdi. Evklid geometriyasini olamiz va unda gorizonta a to'g'ri chiziqni o'tkazamiz, u tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi. Yuqorigi yarim tekislik nuqtalarini noevklid nuqtalari (to'g'ri chiziq nuqtalari bunga kirmaydi) deb ataymiz. Noevklid to'g'ri chiziqlar deb esa markazlari a to'g'ri chiziqda

yotuvchi yarim aylanalarni ataymiz. Noevklid to'g'ri chiziqlarga a to'g'ri chiziqqa perpendikulyar nurlarni ham kiritamiz.

Bundan oldinroq, 1871-yilda nemis matematigi Feliks Xristian Kleyn (1849-1925) proektiv metrika g'oyasi asosida Lobachevskiy geometriyasi tavsifini bergan edi. U o'zining geometrik tadqiqotlarini 1872-yilda nashr qilingan "Yangi geometrik tadqiqotlarga taqqoslama nazar" ("Erlangen dasturi") asarida har qanday geometriya almashtirishlar maxsus guruhining invariantlar nazariyasi bo'lib hisoblanishini ko'rsatdi. Guruhni kengaytirib yoki qisqartirib, bir turdagi geometriyadan ikkinchi turdagi geometriyaga

o'tish mumkin. Evklid geometriyasi - metrik guruhlarining invariantlari haqidagi fan, proektiv geometriya-proektiv guruhlarining invariantlari haqidagi fandır. Almashtirishlar guruhini sinflarga ajratib geometriyalarni sinflarga ajratishga olib keladi. Har bir guruhlarining algebraik va differensial invariantlari nazariyasi geometriyaning analitik tuzilishini beradi.

Keyinchalik Kleyn Evklid geometriyasining modelini proektiv metrika orqali tuzish mumkinligini ko'rsatdi. Bunda u ingliz matematigi Artur Keli (1821-1895) 1859 -yilda kiritgan proektiv metrika tushunchasiga asoslandi.

Lobachevskiy, agar real fazo evklid geometriyasi qonunlariga buysunmasa, u holda kosmosda uchburchak burchaklarining yig'indisidan kichik, deb faraz qildi. U fazoning noevklidligiga ishonar edi. Agar olam o'lchovlarining bizga ko'rinarli qismini qisqartirgan holda qarasak, u holda Lobachevskiy geometriyasi o'rinli bo'ladi.

1863-yilda italyan matematigi Eujenio Beltrami (1835-1900) va nemis matematigi Bernxard Riman (1826-1866) yangi geometriya tavsifi bo'yicha katta ishlar qildilar. Beltrami "Noevklid geometriyasini tavsiflash tajribasi" kitobida sirtida Lobachevskiy geometriyasi bajariladigan real jismlar mavjudligini ko'rsatdi. U o'zgarmas manfiy egrilikka ega bo'lgan sirtlarda (psevdosfera) noevklid geometriyasi bajarilishini isbotladi, shuningdek, Lobachevskiy geometriyasi mantiqiy qarama-qarshiliksiz ekanligini ko'rsatdi.

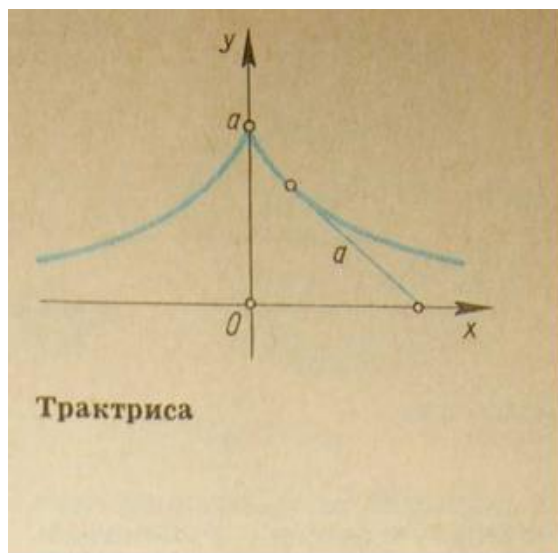
Evklid real fazosida noevklid xususiyatiga ega bo'lgan jismlardan birini quyidagicha yasash mumkin. Dastlab zanjir chiziq deb ataluvchi egri chiziqni olamiz (bunday deb atalishiga sabab ikki nuqtada biriktirib qo'yilgan og'ir zanjir shunday chiziq shaklini oladi).

Endi zanjir A nuqtada uzildi deylik, u holda zanjir uchlari traktrisa deb ataluvchi egri chiziqni chizadi

Matematika nuqtayi nazaridan traktrisaning quyidagi xossasini bayon etish mumkin: urinma uzunligi, ya'ni urinish nuqtasidan abstsissalar o'qigacha bo'lgan masofa o'zgarmas miqdordan iborat.

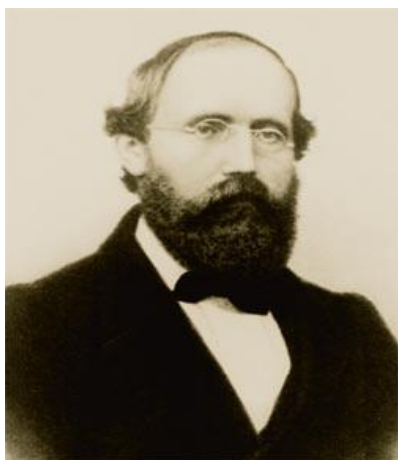
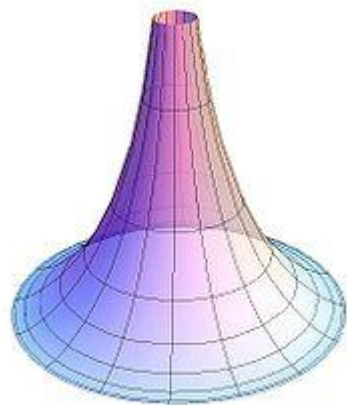
Traktrisaning abstsissalar o'qi atrofida aylantirib, psevdosfera deb ataluvchi sirtni hosil qilamiz. Bu sirtida to'g'ri chiziq deb "geodezik" chiziqni hisoblaymiz. Sirtida joylashgan nuqtalar orasidagi eng kichik masofani "to'g'ri chiziq deb ataymiz. Beltrami psevdosferasida Lobachevskiy geometriyasining bir qismi ro'yobga chiqadi.

b va c chiziqlar A nuqtadan o'tadi va a ga parallel psevdosfera o'zgarmas manfiy egrilikka ega bo'lgan sirt deb ham ataladi. Agar egri chiziqli uchburchak burchaklarining yig'indisi $2d$ dan kichik bo'lsa, sirt manfiy egrilikka ega bo'ladi. Agar Lobachevskiy tekisligida uchburchak



(pseudosferada) yasasak, uning burchaklari yig'indisi 2d dan kichik ekanligi ko'rinadi.

Musbat egrilikka ega bo'lgan sirtlar ham mavjud, ularning sirtida uchburchak burchaklarining yig'indisidan katta. Bunga misol sifatida shar sirtini olish mumkin. Sferada to'g'ri chiziq deb ixtiyoriy katta doira aylanasi hisoblash mumkin, ya'ni shar markazidan o'tuvchi tekislik bilan sfera kesishishidan hosil bo'lgan aylana. Sferada barcha to'g'ri chiziqlar kesishadi. Demak, sferada na Evklid geometriyasi, na Lobachevskiy geometriyasi amal qiladi. Bunda uchburchak burchaklarining yig'indisidan katta. Bazi hollarda u 3d ga ham



teng bo'lishi mumkin. Bulardan ko'rinadiki, Evklid tekisligi nol egrilikka ega.

1854-yil 10-iyunda Gyttingen universiteti falsafa fakultetida B. Riman "Geometriya asosida yotuvchi farazlar haqida" nomli mashhur ma'ruzasini o'qidi. Ammo bu ma'ruza faqatgina 1868-yilda chop etildi va matematiklar orasida katta shov-shuvga sabab bo'ldi.

Mazkur ma'ruzada Riman aksiomalar qatoriga quyidagi aksiomani qo'shdi: berilgan to'g'ri chiziq bilan bir tekislikda yotuvchi har qanday to'g'ri chiziq bu to'g'ri chiziq bilan kesishadi. Bu esa Riman geometriyasida parallel to'g'ri chiziqlar umuman yo'qligini, ixtiyoriy uchburchak burchaklarining yig'indisidan katta ekanini ko'rsatdi. Bu geometriya ham qarama-qarshiliksiz ekan. Bunda Lobachevskiy fazosi Riman fazolarining xususiy holi bo'lib qolar ekan. Shunday qilib, uchta mantiqiy puxta va teng kuchli geometrik sistemalarning vujudga kelishi olam geometriyasi va atom ichki dunyosi geometriyasi qanday tuzilishda ekanligini aniqlashni zarurat qilib qo'ydi. Bunga hozirgi zamon fani hanuzgacha bir yoqlama javob topa olganicha yo'q. Eynshteynning nisbiylik nazariyasidan fazo egrilanuvchanligi kelib chiqadi. Katta massaga ega bo'lgan jismlar fazosi geometriyasi noevklid geometriyasidan iborat, unda Nyuton mexanikasi qonunlari o'zgaradi.

Rus olimi Aleksandr Aleksandrovich Fridman (1888-1925) tomonidan tuzilgan olam modelida u bir jinsli, ya'ni hamma qismlari bir xil tuzilgan, degan faraz yotadi. Lekin nisbatan uncha katta bo'lmagan o'lchamlarda olam bir jinsli emas. Fridman agar olamda modda zichligi o'zgarmas miqdordan kichik bo'lsa, fazo egriligi manfiy, agar kritik zichlik

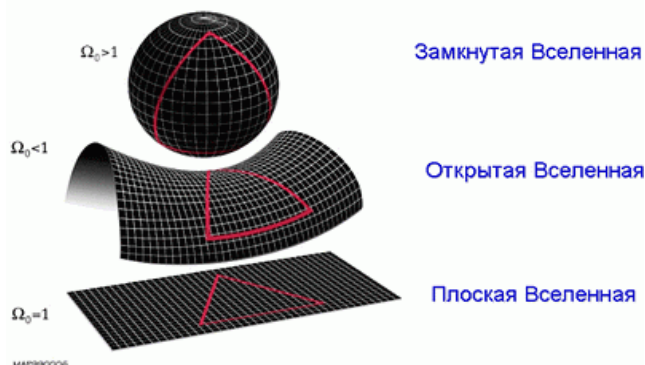


A. P. Friedman

o'shib ketsa, fazo musbat egrilikka ega bo'lishini ko'rsatdi. Agar zichlik kritik qiymatga teng bo'lsa, fazo egriligi nolga teng bo'ladi. Shunday qilib, ba'zi shartlarda olam geometriyasi manfiy egrilikka ega yoki u Lobachevskiy geometriyasidan iborat.

Olamning Fridman modeli tajribada amerikalik munajjim Edvin Xabbl (1889-1953) tomonidan tasdiqlandi. Hozirgi zamon fani Olam fazosi o'zgaruvchi egrilikka ega ekanligini ko'rsatmoqda. Demak, olam geometriyasi na Evklid geometriyasidan, na Lobachevskiy geometriyasidan iborat.

Замкнутая, открытая и плоская Вселенная



Evklid boshlab bergan aksiomatika ma'lum ma'noda nemis matematigi David Gil'bert (1862-1943) va rus matematigi Veniamin Fedorovich Kagan (1859-1953) ishlarida oxiriga etkazildi.

Gilbert 1899-yilda yozgan "Geometriya asoslari"da Evklid geometriyasining to'liq aksiomalar sistemasini berdi, ularni guruhlar bo'yicha sinflarga ajratdi va har bir aksiomalar guruhi chegaralarini aniqlashga harakat qildi, bunda u har bir aksiomaning natijasini alohida o'rganib qolmasdan,



balki bu aksiomalar olinganda yoki o'zgarganda hosil bo'lgan turli "geometriyalarni" tadqiq etdi. Kagan esa 1905-07-yillarda yozilgan "Geometriya asoslari"da Evklid fazosi aksiomatikasi aksiomalari qarama-qarshiliksiz va o'zaro bog'liqligini tahlili bilan bayon etdi. Kagan aksiomatikasi Gilbert aksiomatikasidan harakat guruhi bilan farq qiladi, u ma'nosiga ko'ra G. Riman varianti sifatida masofa tushunchasiga asoslanganligi, G. Gel'mgol'ts, va M.S. Li aksiomatikalariga yaqin hisoblanadi. Shunday qilib, bu ikkala,

matematikning ishlari Evklid geometriyasi aksiomatikasi qarama-qarshiliksizligini arifmetikaning qarama-qarshiliksizligiga olib kelish mumkinligini isbotladi. XIX asr oxiriga kelib aksiomalar sistemasiga qo'yiladigan asosiy talablar va aksiomatik usul prinsiplari ishlab chiqildi va keyingi davr matematiklari tomonidan yanada rivojlantirilmoqda.

Takrorlash uchun savollar

1. Dastlabki geometriya aksiomalar sistemasini bayon etgan Evklid haqida nimalarni bilasiz?
2. Evklidning "Negizlar" asari va undagi ma'lumotlar haqida gapirib bering.
3. Evklidning 5-postulati nima haqda va uni nima uchun isbotlashga uringanlar?
4. Bu postulatni isbotlashga uringan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.
5. N.I. Lobachevskiy yangi geometriyani kashf etishda qanday faoliyat ko'rsatgan?
6. Vengr matematigi Ya.Bolyay va nemis matematigi Gauss bu borada qanday ishlarni amalga oshirganlar?
7. Noevklid geometriyalarni yaratish bo'yicha yana nima ishlar qilingan?
8. Riman geometriyasi haqida nimalarni bilasiz?
9. Noevklid geometriyalar tavsifini bergan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.

\

2-§. GEOMETRIK SHAKLLARNI O'RGANISH METODIKASI

Reja:

1. Uchburchaklarni o'rganishda talabalarni tadqiq etishga o'rgatish texnologiyasi haqida.
2. Geometrik masalalarni umumlashtirishda geometrik masalalar yyechishdan foydalanish uslubiyatu.
3. Planimetriyani o'qitishda talabalar fazoviy tasavvurlarini rivoj-lantirish yo'llari.

Tayanch iboralar: uchburchak, geometrik masala, tadqiq etish, fazoviy tasavvur, texnologiya, uslubiyat.

1. Ko'pgina tekis shakllarga doir masalalarni yyechishga o'rgatish algorimik usulda amalga oshiriladi. Masalan, uchburchaklarni yyechishga doir masalalarni yyechish bosqichli tadqiq etishni talab etadi.

1-bosqich. Masala shartlarini tahlil etish.

2-bosqich. Masala shartini geometrik tilga o'tkazib ifodalash.

3-bosqich. Uchburchak asosiy elementini topishga doir masalani yyechish va uning yechimini tekshirish.

4- bosqich. Natijani masalaning berilganlari bilan taqqoslash.

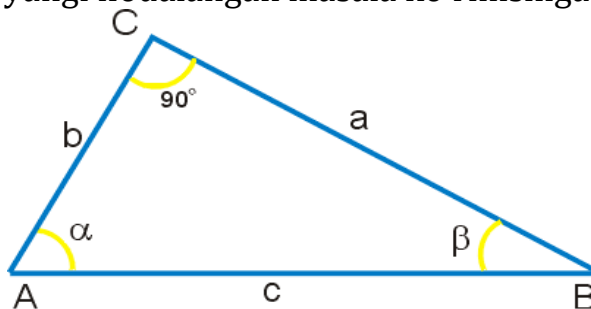
1 va 2-bosqichlarda talabalar masala shartlarini tahlil etib, topish lozim bo'lgan geometrik shakllar elementlari haqidagi ma'lumotlarni ajratadilar, mos geometrik masala bayon etiladi.

3-bosqichda talabalarining uchburchaklarini yyechishga doir ularning bilimlarini sistemalashtiriladi va quyidagi jadval tuzib chiqiladi:

Berilgan	Topish kerak			Tekshirish
1. $b, \angle A, \angle C$	$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B}$	$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad c = \frac{b \sin C}{\sin B}$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
2. $a, b, \angle C$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$ $\angle A = n^\circ$ $\angle A_1 = 180^\circ - n^\circ$	$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$ $\angle B = m^\circ$ $\angle B_1 = 180^\circ - m^\circ$	$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$

3. $a, b, \angle C$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ $\angle B = n^0$ $\angle B_1 = 180^0 - n^0$	$\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$ $\angle C_1 = 180^0 - (\angle A + \angle B_1)$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ $c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
4. a, b, c	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\angle A = n^0$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ $\angle B = m^0$ $\angle B_1 = 180^0 - m^0$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$
5. $a, b, \angle A$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ $\angle B = n^0$ $\angle B_1 = 180^0 - n^0$	$\angle C = 180^0 - (\angle A + \angle B)$ $\angle C_1 = 180^0 - (\angle A + \angle B_1)$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ $c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

2. Geometrik tushunchalarni umumlashtirishda geometrik masalalar yechish muhim ahamiyatga ega. *Umumlashtirishga* doir masalalarni yechishda har bir imkoniyatdan foydalanish zarur. Geometrik masalani umumlashtirishda baʼzida uning bitta yoki bir nechta shartlarini teng kuchli tasdiqlar bilan almashtirish orqali uni yangi ifodalangan masala ko'rinishiga keltirish mumkin.

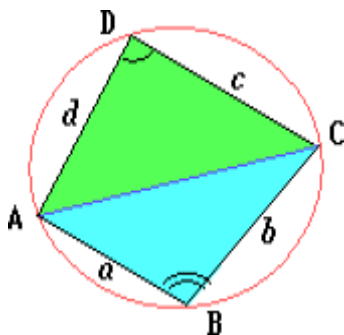


Masala. Uchburchakda to'g'ri burchak bissektrisasi gipotenuzani 3:4 nisbatda bo'ladi. Agar gipotenuzaga uzunligi 70 sm bo'lsa katetlarini toping.

Bu masalani quyidagicha ko'rinishlarda yangicha bayon qilish mumkin:

1. To'g'ri burchakli uchburchak katetlari 3:4 nisbatda. Agar mediana (gipotenuzaga o'tkazilgan) uzunligi 35 sm bo'lsa, ularni toping.

2. To'g'ri to'rtburchak tomonlari 3:4 nisbatda. Agar unga tashqi chizilgan aylana radiusi 35 sm bo'lsa, bu to'rtburchak yuzini toping.



Shuningdek, dastlabki berilgan masalani *umumlashmasi* sifatida quyidagi masalalarni qarash mumkin:

1) To'g'ri burchak bissektrisasi to'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasini 3:4 nisbatda bo'ladi. To'g'ri burchak uchidan tushirilgan balandligi gipotenuzani qanday nisbatda bo'ladi?

2) Balandlik to'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasini 9:16 nisbatda bo'ladi, agar gipotenuza 70 sm bo'lsa, uning yuzasini toping.

Bundan ko'rinadiki, masalani umumlashtirish orqali talabalarni yechimni tahlil qilish va xulosalar chiqarishiga o'rgatishda masalaning shart va talablarini o'zgartirish orqali zarur natijalar olishga erishiladi.

2. Geometrik masalalarni yyechishda talabalarga shuningdek, ba'zi matematik usullar, shu jumladan, nazariy isbotlashga o'rgatish va shu orqali ularni yangi natija va xulosalar olishga o'rgatish muhimdir. Shunday masalalar turlaridan biri *geometrik tengsizliklarni isbotlashga* doir masalalar hisoblanadi.

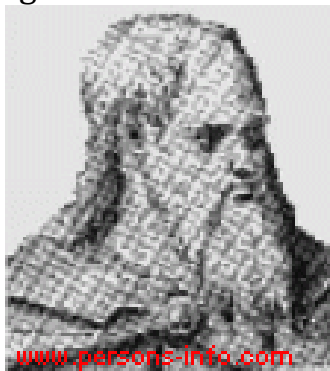
Geometrik tengsizlikni isbotlashda avvalo talabalarning oldingi bilimlariga tayanish, chizmani mos holda yasash va bunda qadamlar ketma-ketligi mantiqan to'g'ri bo'lishi ta'lab etiladi.

3. Talabalar ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirishda ba'zi formulalarni isbotlashga o'rgatish muhim ahamiyatga ega.

Masala. Ichki chizilgan to'rtburchakning yuzi

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

formula bilan topilishini isbotlang.



Bu *Braxmagupa* formulasi deb ham yuritiladi.

Isbot. ABCD to'rtburchakni (tomonlari a, b, c, d) AC diagonal bilan ikkita uchburchakka ajratamiz. Kosinuslar teoremasiga ko'ra

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$$

ABCD - ichki chizilgan to'rtburchak bo'lganligi uchun , $\angle D = 180^\circ - \angle B$, shuning uchun $\cos D = -\cos B$, $\sin D = \sin B$

Demak,

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos B \quad (1)$$

$$4S = 2(ab + cd) \sin B \quad (2)$$

bo'lganligidan (1) va (2) tengliklarni kvadratga ko'tarib, ularni qo'shib,

$$\cos^2 B + \sin^2 B = 1$$

ekanligini hisobga olamiz. U holda

$$16S^2 + (a^2 + e^2 - c^2 - d^2) = (2ab + 2cd)^2$$

Bundan

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (((c+d)^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - (c-d)^2) = \\ &= (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d) = \\ &= (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d) = 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \end{aligned}$$

Natijada ushbu $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ formula isbot bo'ldi.

Xuddi shunga o'xshash tekis shakllarga doir quyidagi formulalarni isbotlash talabalarning ijodiy tafakkurlarini o'stirishga xizmat qiladi:

1. Teng tomonli uchburchak yuzini topish formulasi.
2. Uchburchak medianalarini tomonlari orqali ifodalovchi formulalar.
3. Uchburchak tomonlarini medianalari orqali ifodalovchi formulalar.
4. Muntazam oltiburchakning yuzini topish formulasi va h.k..

3. Geometriya o'qitishda turli tekis shakllarning *fazoda joylashish hollarini* ko'rsatib borish maqsadga muvofiq. Masalan, "geometrik shakl" tushunchasini bayon qilishda talabalarga maktabda o'rganiladigan barcha geometrik shakllar modellari, chizmalari namoyish etiladi.

"Sirt" tushunchasini bayon qilishda esa talabalarga *kesimli geometrik shakllar modellari* va chizmalari namoyish etiladi, barcha tekis shakllar nomlari aniqlashtiriladi (uchburchak, doira, parallelogramm, trapetsiya va h.k.).

Quyidagi savollar beriladi:

1. Piramida sirti qaysi shakllardan tashkil topgan? Prizmaningchi? Konusniki-chi? Silindrniki-chi?

2. Chizmalarda tasvirlangan detallar sirtlari qaysi shakllardan iborat? (Chizmalarda turli detallar tasvirlangan).

3. Doira tushunchasini bayon qilishda sirtiga ixtiyoriy yopiq chiziq yasalgan shar modeli ko'rsatiladi. Bu egri chiziq shar markazidan bir xil uzoqlikda joylashsa ham u aylana emasligiga ishonch hosil qilinadi. So'ngra kesilgan shar modelida sharning tekislik bilan har qanday kesimi – doira ekanligi ko'rsatiladi. O'quvchilar bilan quyidagi savollar muhokama qilinadi:

- 1) Qanday geometrik shakllar sirti doiradan iborat bo'ladi?
- 2) Silindrni tekislik bilan qanday kesganda doira hosil bo'ladi?
- 3) Kesimda doira hosil bo'lishi uchun konusni qanday tekislik bilan kesish zarur?

Shu yerda aylana uzunligi va doira yuzi formulalarni berish maqsadga muvofiq. Quyidagi stereometrik mazmunli masalalar qaraladi:

1) Val asosi aylanasi uzunligi va doirasi yuzini toping (chizma namoyish etiladi).

2) Konus asosida yotgan aylana uzunligi va doira yuzini hisoblang (chizma beriladi).

3) Berilgan nuqtadan berilgan masofada yotuvchi nuqtalar to'plamini toping.

4) Berilgan nuqtadan berilgan masofada yotuvchi fazoning nuqtalar to'plamini toping.

5. A va B nuqtalar orasidagi masofa 6 sm. Tekislikning C nuqtasini shunday yasangki: a) u har bir nuqtadan 3 sm masofada; b) har bir nuqtadan 4 sm masofa; c) A nuqtadan 5 sm va B nuqtadan 4 sm masofa; d) A nuqtadan 3 sm masofa va B nuqtadan 6 sm masofada joylashgan bo'lsin.

II. Tekislikdagi masalalarni yechishda tekis bo'lmagan *fazoviy obrazlardan* foydalanish. Bu ham mos mashqlar sistemasi orqali amalga oshiriladi. Masalan, geometrik shakllar yuzalarini o'rganishda quyidagi stereometrik mazmunli mashqlar yechilishi mumkin:

1. Chizmada tasvirlangan to'g'ri burchakli paralelepipedning sirt yuzini hisoblang.

2. Asosi diametri 22 sm, balandligi 40 sm bo'lgan silindr o'q kesim yuzini hisoblang (chizma namoyish etiladi).

3. Agar bir kvadrat metr uchun 200 g bo'yoq talab qilinsa, asosi tomonlari uzunliklari 1,2 m va 1,5 m hamda balandligi 2 m bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli paralelepiped shakldagi bunkerni bo'yash uchun qancha bo'yoq kerak?

4. Chizmada to'rtburchakli prizma yoyilmasi berilgan. Zarur o'lchashlarni bajarib, prizmaning to'la sirti yuzasini hisoblang.

5. Balandligi 15 sm, asos radiusi 3,6 sm bo'lgan konus o'q kesimi yuzini toping.

6. Balandligi 7,8 sm, asos radiusi 3,6 sm bo'lgan konus asosiga parallel tekislik bilan uchidan 2,9 sm masofada tekislik bilan kesilgan. Konus kesimi aylanasi uzunligini toping.

7. Diametri 12 smli shar markazdan 5 sm masofada tekislik bilan kesilgan. Hosil bo'lgan shar kesimi aylanasi uzunligini toping (chizma namoyish etiladi).

III. Tekislikdagi turli nuqtalar to'plamini o'rganishda shunga o'xshash fazodagi *nuqtalar to'plamlarini* aytib o'tish maqsadga muvofiq:

a) Berilgan nuqtadan (tekislik nuqtasidan) berilgan masofada yotuvchi tekislik nuqtalar to'plamini toping.

b) Berilgan nuqtadan berilgan masofada yotuvchi fazoning nuqtalar to'plamini toping.

IV. Tekislikka tegishli berilgan *to'g'ri chiziqdan berilgan masofada* joylashgan tekislikning nuqtalar to'plamini toping.

a) Berilgan to'g'ri chiziqdan berilgan masofada joylashgan fazoning nuqtalar to'plamini toping.

b) Berilgan kesmadan berilgan masofada joylashgan tekislikning nuqtalar to'plamini toping.

c) Berilgan kesmadan berilgan masofada joylashgan fazoning nuqtalar to'plamini toping.

g) Berilgan kesma uchlaridan teng masofalarda joylashgan tekisliklarning nuqtalar to'plamini toping.

d) Berilgan kesma uchlaridan teng masofada joylashgan fazoning nuqtalar to'plamini toping.

j) Berilgan tekislikka tegishli berilgan burchak tomonlaridan teng masofalarda joylashgan tekislikning nuqtalar to'plamini toping.

i) Berilgan burchak tomonlaridan teng masofalarda joylashgan tekislikning nuqtalar to'plamini toping.

z) Berilgan tekislikdan berilgan masofaga uzoqlashgan fazoning nuqtalar to'plamini toping.

V. Ikki yoqli burchak yoqlaridan teng uzoqlashgan fazoning nuqtalar to'plamini toping.

VI. Tekislikda yotuvchi aylanadan berilgan masofa joylashgan tekislikning nuqtalar to'plamini toping.

VII. Sferadan berilgan masofada joylashgan fazoning nuqtalar to'plamini toping.

VIII. O'quvchilarga chizmalar, geometrik figuralar yoyilmalari va modellarini yasashga doir topshiriqlarni taklif etish lozim:

1. Muntazam uchburchakli piramida asosining tomoni 6 sm va balandligi 12 sm. Bunga ko'ra uning yoyilmasi va modelini yasang.

2. Chizmasiga ko'ra konus modelini yasang.

Takrorlash uchun savollar

1. Uchburchaklarni o'rganishda talabalarni tadqiq etishga o'rgatish texnologiyasi haqida nimalarni bilasiz?

2. Geometrik masalalarni umumlashtirishda geometrik masalalar yyechishdan foydalanish uslubiyati xususiyatlarini ayting.

3. Planimetriyani o'qitishda talabalar fazoviy tasavvurlarini rivojlantirishning qanday yo'llari mavjud?

3-§. KASB-HUNAR KOLLEJLARIDA GEOMETRIYA O'QITISHNING XUSUSIYATLARI

Reja:

1. *Umumta'lim maktablari geometriya kursini o'rganish bilan uzviy aloqadorlik.*

3. *Geometriya o'qitish jarayonida talabalar fikrlash faoliyatlarini rivojlantirish usullari.*

Tayanch Iboralar: *geometriya, planimetriya, to'g'ri chiziq, parallellik, masala, parallelogramm*

1. Geometriya kursi bo'yicha bilimlar berishning quyidagi *maqsadlari* amalga oshiriladi:

- talabalarni asosiy geometrik tushunchalar haqida ma'lumotlar bilan tanishtirish;

- talabalarni fazoviy tasavvurlarin shakllantirish;

- talabalarni mantiqiy tafakkurini rivojlantirish;

- talabalarni geometrik bilim, ko'nikma va malakalarini turmush va kasbiy faoliyatda qo'llay olishga o'rgatish.

Bunda quyidagi geometrik bilimlar mustahkamlanadi: geometrik shakllar va ularning xossalari haqidagi tasavvurlar chuqurlashtiriladi; geometrik miqdorlar o'rganiladi va tadbiqlari (aylana uzunligi, burchak kattaligi); shakllar orasidagi farqlar ko'rsatiladi (kesma uzunligi va kesma, burchak va burchak kattaligi); geometrik yasashlar va unda qo'llaniladigan asboblari ham ko'payadi (chizg'ich, sirkul, transportir), fazoviy jismlar, ularning xossalari va tadbiqlari o'rgatiladi. Geometriya kursi asosan deduktiv ravishda bayon etiladi. Bunda ko'pgina bilimlar o'lchash va yasashlarni umumlashtirish, modellashtirish yordamida bayon etiladi.

Talabalarning geometrik bilimlar saviyasi ma'lum darajada tekis hamda sistemali bo'lishiga bilimlarga boshlang'ich qadamlar qo'yishda erishiladi. Birinchi bosqichda, to'g'ri chiziq, tekislik, kesma, kesma uzunligi, perpendikulyar va parallel to'g'ri chiziqlar qaraladi. Ayniqsa, bunda atamalar kiritilishiga e'tiborni qaratish lozim: to'g'ri chiziqning o'z-o'ziga parallelligi, bir to'g'ri chiziqda yotgan kesmalar parallel. Geometrik yasashlarni bajarishga o'rgatishda yasash asboblari chizg'ich, sirkul, uchburchakli chizg'ich va transportirlardan foydalanishga o'rgatish mumkin. Sirkulni qo'llash chegaralangan bo'lib, aylana va doirani tasvirlash uchun qo'llaniladi.

Geometriya o'quv dasturida bu fanning hayot va amaliy faoliyat bilan mustahkam aloqasini o'rnatish uchun o'lchash va yasashlarga doir tushunchalarni shakllantirish, xususan, konus, shar, sirt yuzalarini hisoblash, piramida va aylanish jismlari hajmlarini hisoblash kiritilgan. O'quvchilar

fazoviy tasavvurlarini rivojlantirish va fazoviy konstruksiyalarda tahlil qilish ko'nikmalarini shakllantirishga bag'ishlangan.

Kasb-hunar kolejlarida planimetriya va stereometriyaning uzviy aloqada o'qitilishi ko'zda tutilgan. Bu kursda talabalarga deduktiv isbotlashlar haqida, geometrik mulohazalar orasidagi bog'lanishlar haqida tushunchalar beriladi. Masalan, mustahkamlash sifatida to'g'ri burchakli uchburchaklarda tomonlar bilan burchaklar orasidagi munosabatlar, trigonometrik munosabatlar geometrik masalalar yyechishning yangi usulini berish va amaliy qo'llanishlarda katta ahamiyatga egaligi masallalar yyechishda ko'rsatib o'tiladi.

Kasb-hunar kolejlarida geometriya o'qitishning quyidagi *xususiyatlari* mavjud:

1. Planimetriya o'qitishda qo'llanib kelingan ko'rgazmali geometriya usullaridan voz kechmaslik lozim. Avvalgidek, o'qituvchi ko'rgazmalilikni keng qo'llashi, talabalarni o'rganilayotgan shakllar xossalarini kuzatishga, bu xossalarni o'zlashtirishga yordam beruvchi amaliy ishlarga talabalarni jalb etishi talab etiladi.

2. Shu bilan birgalikda talabalar mantiqiy fikrlashlarini rivojlantirish bo'yicha ish olib borishlari zarur. Planimetriya tushunchalarini o'rganish bunga imkon beradi. So'ngra ularning orasidagi ichki bog'lanishlarni anglashga, bir xossalarning boshqalarga bog'liqligini bilib olishga imkon beradi. Har bir tushuncha va geometrik masalalar talabalar mantiqiy fikrlashlarini o'stirish uchun xizmat qilmog'i kerak.

3. Geometriyani o'rganish *amaliy mazmunli va ishlab chiqarish mazmunli* masalalar yyechish bilan qo'shib olib borilishi maqsadga muvofiq.

4. Qabul qilish va o'zlashtirish ongliligini oshirish uchun ularning fanga bo'lgan qiziqishlarini oshirish uchun har bir o'quv faoliyatini faollashtirish zarur. Buning uchun barcha talabalarni umumiy sinf ishiga, mustaqil ishlarni tashkil etishga jalb qilish talab etiladi.

3. Talabalarning geometriyani o'qitish jarayonida fikrlashlarini rivojlantirishda quyidagi *ikki usul* keng imkoniyatlar yaratadi:

a) izlanishga oid geometrik masalalar yyechish;

b) maqsadga yo'naltirilgan geometrik masala va mashqlar bajarish.

Buni o'qituvchilar ish tajribasi va ilmiy-uslubiy tadqiqotlar natijalar yaqqol ko'rsatmoqda. Quyida kasb-hunar kollejlari geometriya kursining ayrim mavzularini o'rganishda talabalarni *umumlashtirishlarga* o'rgatish uslublarini qo'llash texnologiyasi keltiriladi.

To'g'ri chiziqlar parallellik alomatlarini mutahkamlashda quyidagi *izlanishga doir* masalalarni yyechish orqali o'rganilishi kerak bo'lgan nazariy tushunchalarni talabalarga bayon etilishi mumkin va ular natijalarni umumlashtiradilar. Bunda quyidagi savollar majmuasi muhokama etiladi.:

1. $\angle ABC$ burchak 80° ga, $\angle BCD$ burchak 120° ga teng. AB va CD to'g'ri chiziqlar parallel bo'lishi mumkinmi? Javobni tushuntiring.

2. Hamma vaqt ham AB va CD to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladimi? Qaysi hollarni ko'rib chiqish lozim?

3. $\angle ABC$ burchak 80° ga, $\angle BCD$ burchak 100° ga teng. AB va CD to'g'ri chiziqlar parallel bo'lishi mumkinmi?

4. Ikki a va b to'g'ri chiziqlar va kesuvchi c to'g'ri chiziq bo'lganda ichki almashinuvchi burchaklar α va $180^\circ - \alpha$ ga teng. Bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladimi?

5. Ikki a va b to'g'ri chiziqlar va kesuvchi c to'g'ri chiziq bo'lganda ichki bir tomonli burchaklar α va $180^\circ - \alpha$ ga teng. Bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladimi?

6. Hamma vaqt ham a va b to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladimi?

7. Agar AB va CD to'g'ri chiziqlar parallel bo'lib, $\angle ABC$ burchak 80° ga teng. $\angle BCD$ burchak nimaga teng?

8. Agar AB va CD to'g'ri chiziqlar parallel bo'lib, $\angle ABC$ burchak α ga teng. $\angle BCD$ burchak nimaga teng?

Bundan ko'rinib turibdiki, har bir topshiriqning barcha hollari qaralib, ular uchun umumiy xulosa chiqariladi, ya'ni masalalar ketma-ketligi mantiqan nazariy tushunchani umumlashtirishni ko'zda tutadi.

Geometriya darslarida *maqsadga yo'naltirilgan* geometrik masalalar yordamida qanday qilib talabalar bilimlarini umumlashtirishga to'xtalib o'tamiz.

Parallelogramm tushunchasini takrorlashda uning quyidagi xossalari murakkablashgan holda masalalar yechish orqali o'rganiladi:

1. Parallelogramm diagonali uni teng ikkita uchburchakka ajratadi.

2. Parallelogramm diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

3. Parallelogrammda qarama-qarshi burchaklar va qarama-qarshi tomonlar teng.

4. Parallelogrammning bir tomoniga yopishgan burchaklari yig'indisi 180° ga teng.

5. Parallelogrammning ixtiyoriy burchagi bissektrisasi undan teng yonli uchburchakka ajratadi.

Bundan tashqari, parallelogramm ichki nuqtasidan uning tomonlari yotgan to'g'ri chiziqlargacha masofalar yig'indisi – bu parallelogramm uchun o'zgarmas miqdor bo'lishi, parallelogramm diagonallari kesishish nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq uni ikkita tengdosh uchburchakka ajratishi, parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari bissektrisalari parallel, bir tomonga yopishgan burchaklari bissektrisalari o'zaro perpendikulyar, katta burchak qarshisida katta diagonal yotishi, parallelogrammda o'tmas burchagi uchidan tushirilgan balandliklar orasidagi burchak parallelogrammning o'tkir burchagiga teng bo'lishi xossalari *maqsadga yo'naltirilgan* mashqlar va masalalar yordamida muvaffaqiyatli etiladi.

Parallelogramm alomatlarini ham misollar orqali ko'rib chiqish uning xossalari umumlashtirishda muhim ahamiyatga ega:

1. Agar to'rtburchakda diagonallar bir nuqtada kesishib teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak – parallelogramm.

2. Agar to'rtburchakda qarama-qarshi tomonlar jutf-juft teng va parallel bo'lsa, bu to'rtburchak – parallelogramm.

3. Agar to'rtburchakda qarama-qarshi yotgan tomonlar teng bo'lsa, bu to'rtburchak – parallelogramm.

4. Agar to'rtburchakda qarama-qarshi burchaklar teng bo'lsa, bu turtburchak – parallelogramm.

5. Agar to'rtburchakda har bir diagonal uni teng ikkita uchburchakka ajratsa, 6y to'rtburchak – parallelogramm.

Bularning har biriga doir mashqlar yyechish va ularni isbot qilish talabalarining parallelogramm umumiy xossalarini qo'llashlari uchun imkon beradi.

O'quvchilarga *umumlashtirish* ko'nikmalarini rivojlantirishda *kombinatorik mazmunli* geometrik masalalarni yyechish muhim ahamiyat kasb etadi. Bunda quyidagi mashqlarni taklif etish mumkin:

1. n ta to'g'ri chiziq kesishish nuqtalari eng katta sonini toping.

Javob: $n(n-1)/2$.

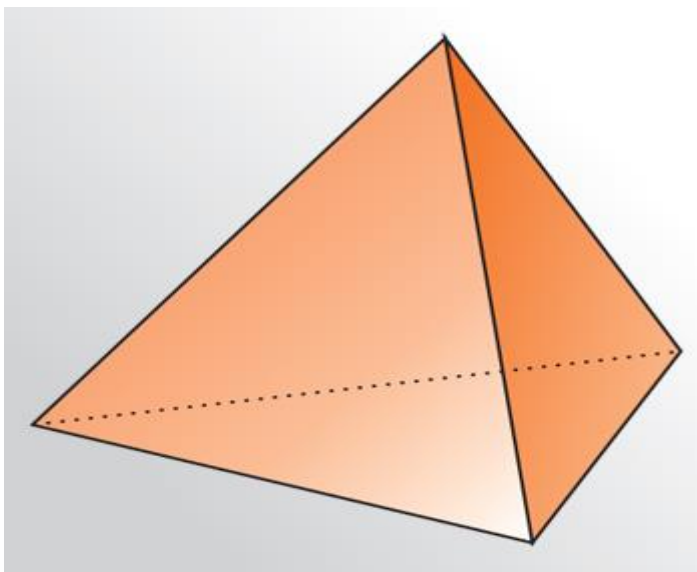
2. Tekislikda 7 ta nuqta joylashgan va ularning hech qaysisi bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Berilgan har ikki nuqta orqali to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Hammasi bo'lib nechta to'g'ri chizig' o'tkazilgan?

Javob: 21 ta.

3. 103 ta tomonga ega bo'lgan ko'pburchakda nechta diagonal o'tkazish mumkin?

Javob: $(103 \times 100) : 2 = 5150$ ta.

4. Agar ko'pburchakning diagonallari sonini tomonlari soniga nisbati r ga teng bo'lsa, u qancha tomonga ega bo'ladi? (Yyechish. n -burchak diagonallari soni $N = n(n-3)$. Demak, $r = (n-3):2$. Bundan $n = 2r+3$).



O'quvchilarning geometriya o'qitishda umumlashtirishga o'rgatishda masalalardagi turli aniqmasliklarni payqay olish va shunga mos hollarni qarash muhim ahamiyatga ega. Masalan, quyidagi masalani yyechishda shunday anqmasliklar ikkita holni tadqiq etishni talab etadi.

Masala. Tetraedrning yon yoqlari tekisliklari asos tekisligiga bir xil burchak ostida og'ishgan, uning asosida tomoni a ga teng muntazam uchburchak yotibdi. Tetraedr hajmini toping.

Bunda ikki hol mavjud:

1) Agar tetraedr uchi ichki chizilgan aylana markaziga proeksiyalansa, u holda

$$V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{24}$$

2) Agar tetraedr uchi tashqi ichki chizilgan aylana markaziga proeksiyalansa, u holda

$$V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{8}$$

Talabalar umumlashtirish ko'nikmalarini shakllantirishda ana shunday turli hollarni yyechishga doir, ya'ni aniqmasliklarni tekshirishga o'rgatish muhim ahamiyat kasb etadi. Ba'zi hollarda masala sharti turli geometrik vaziyatlarni qanoatlantiradi. Agar buni hisobga olmasak, masala yechimi to'liq bo'lmay qoladi. Shuning uchun bunday masalalarni tekshirish va natijalarni javobda aks ettirish zarur. Bunday ish talabalar bilimlarini chuqurlashtirishga, olingan natijalarni tadqiq qilish asosida umumlashtirishga o'rgatadi. Tekislikdagi masalalarda aniqmasliklarni umumlashtirish quyidagi turdagi masalalarni tadqiq etishga olib kelishi mumkin:

1) masala shartida burchakka bog'liq ravishda uchburchak turi ko'rsatilmagan holda (burchaklarga nisbatan) javoblar turlicha bo'lishiga olib keladi;

2) masala shartini qanoatlantiruvchi burchaklarni ixtiyoriy tanlaganda shart va masalaning yechimi bir qiymatli bo'lmasligini vujudga keltiradi;

3) masala sharti yoki yechimi aniqmasligi masala shartini qanoatlantiruvchi berilganlar yoki nuqtalarni ixtiyoriy tanlanishi bilan ham paydo bo'lishi mumkin.

4) masala shartini qanoatlantiruvchi bir xil ismli chiziqli elementlarning ixtiyoriy tanlanishida masala sharti va yechimi aniqmasligi paydo bo'ladi.

5) stereometrik masalalarda esa masala sharti va yechimi aniqmasligi masala shartini qanoatlantiruvchi tekisliklarning ixtiyoriy tanlanishidan vujudga keladi.

6) masala yechimi aniqmasligi berilgan shakl bir yoki bir nechta nuqtasini biror tekislikka ortogonal proeksiyasi turli holati bilan ham vujudga kelishi mumkin.

7) masala sharti va yechimi aniqmasligi bir yoki bir nechta (aylanalar, sferalar haqidagi masalalarda) markazlar vaziyati, ichki va tashqi urinish ham vujudga kelishi mumkin.

O'quvchilarning umumlashtirish ko'nikmalarini rivojlantirishda *og'zaki umumlashtirish* mazmuniga ega mashqlardan foydalanish ham yaxshi natijalar beradi. Bularga misollar keltiramiz:

1. Teskaridan faraz qilish yo'li bilan ikkita ixtiyoriy nuqtalar orasidagi masofa ularning uchinchi nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisidan kichik bo'lsa, uchta nuqta bir to'g'ri chiziqda yotmasligini isbotlang.

2. Teskarisidan faraz qilish yo'li bilan ikki nuqta orasidagi masofa ularning uchinchi nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisiga teng bo'lsa, uch nuqta bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

3. Teng yonli uchburchakning asosi yon tomonidan ikki marta katta bo'lishi mumkinmi?

4. Uchburchakning ikki tomoni mos ravishda 10 sm va 12 sm ga teng. Uchinchi tomoni uzunligi x haqida nima deyish mumkin?

5. To'rtburchak tomonlari mos ravishda 1 sm, 2 sm, 3 sm va 6 sm ga teng bo'lishi mumkinmi?

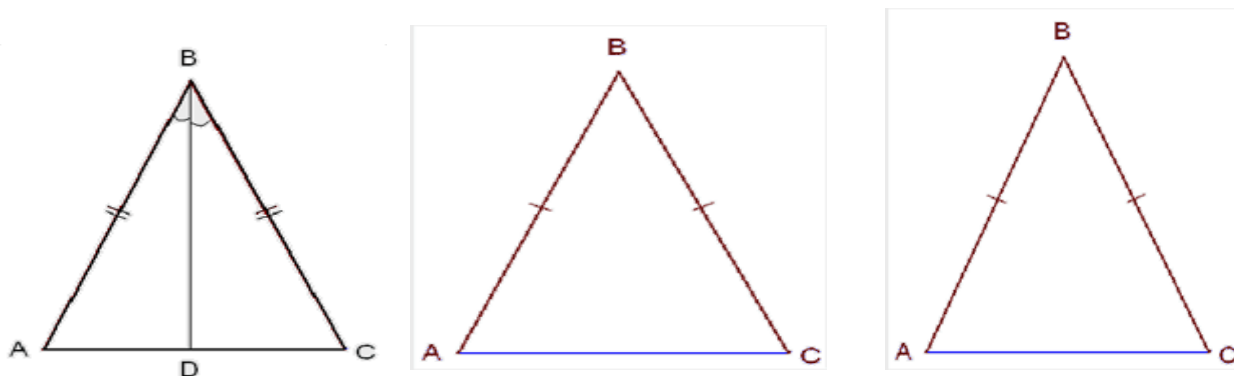
Shunday qilib, o'qituvchi har bir mavzuni o'rganishda talabalarga geometrik shakllar xossalarini umumlashtirish orqali ularning fikrlash ko'nikmalarini rivojlantirishga samarali ta'sir ko'rsatishi mumkin va bunda masalalar majmuasi va savollarni mavzu xususiyatlariga mos ravishda tanlab olishi talab etiladi.

Ma'lumki, talabalarni har tomonlama rivojlantirish va ularni ijodiy faoliyatga tayyorlashda masalalar yyechishning ahamiyati katta. Bunda masalalarning imkoniyatlaridan foydalanish yaxshi natijalar beradi. Har bir masala yyechish usuli mavjud, uning boshqa yyechish usullarini izlash va yyechish natijalarini tahlil etish, yangi masalalar tuzishga o'rgatish, masalalarni umumlashtirishga o'rgatish va hokazo faoliyat turlari orqali talabalarda na faqat matematik qobiliyatlarini rivojlantirish balki, ularning ijodiy ravishda bilimlarini qo'llay olishga o'rgatish mumkin.

Masalalarni qayta ishlab yangi masalalar tuzishga o'rgatish haqida fikr yuritamiz. Bunda talaba masalani yechib, uni turli o'zgartirishlar yordamida yangi masalalar tuza olishi zarur bo'ladi, ya'ni masala g'oyasini ijodiy rivojlantirishi talab etiladi.

O'quvchilarni masalalar tuzish va uning g'oyasini rivojlantirish, ijodiy xulosalar chiqarishga o'rgatishda quyidagi jihatlarga e'tibor berish lozim:

1. Masalaning bir qism berilganlarini uning shartini o'zgartirmasdan o'zgartirish, bunda talabalar masala tuzilishini yaxshi o'zlashtirib oladilar, berilganlar o'zaro aloqadorligini anglaydilar, masala matematik modelini tuzish usulini va unga doir tushunchalarni chuqur o'rganib olishlariga imkoniyat yaratiladi.



Masalan, berilganlari zid bo'lgan masalani to'g'ri qo'yilgan masalaga aylantirishni olish mumkin. Yoki geometrik masalalarni yyechishda quyidagicha almashtirishlar orqali turli masalalar hosil qilish mumkin:

Masala. Teng yonli uchburchakni uning uchta balandligi asoslari bo'yicha tiklang.

a) teng yonli uchburchakni yon tomonlariga balandliklari asoslari va uchburchak asosidagi nuqta orqali tiklang.

b) teng yonli uchburchakni ikkita balandligi asoslari va uchlaridan biri bo'yicha tiklang. (Buning o'zida ham turli hollar mavjud).

c) teng yonli uchburchakni balandliklaridan birining asosi va ikkita uchlari orqali tiklang.

d) teng yonli uchburchakni uning tomonlari o'rtalari bo'yicha tiklang.

e) teng yonli uchburchakni bissektisarlari asoslari bo'yicha tiklang.

Bunday masalalarni yyechishni muhokama etish orqali turli yyechish usullarini o'rganishlari va ularni umumlashtirish uchun imkoniyatlar yaratiladi.

2. Berilganlarni yoki izlanayotganlarni umumlashtirish berilgan masala rivojlanishini oxirgi natijalarini olish uchun xizmat qiladi. Bunda taqqoslashga doir masalalar yoki tadqiq etishga doir masalalar alohida o'rin tutadi. Masalan, tekislikdagi geometrik shakllar haqidagi ma'lumotlar fazoga ham umumlashtirilishi mumkin.



1. To'g'ri to'rtburchakning yuzi o'zgarmasga teng. Uning perimetri eng katta bo'lishi uchun to'rtburchak qanday bo'lishi lozim?

a) To'g'ri burchakli parallelepiped asosi kvadrat bo'lib o'zgarmas hajmga ega. Uning sirti yuzasi eng katta bo'lishi uchun parallelepiped qanday bo'lishi kerak?

b) Barcha doiraviy silindrlar orasida eng kichik to'la sirtga ega bo'lganini toping.

c) To'g'ri burchakli parallelepiped o'zgarmas hajmga ega. Sirti yuzi eng kichik bo'lishi uchun uning o'lchovlari qanday bo'lishi lozim?

3. Masalani maxsuslashtirish umumlashtirishga teskari masala bo'lib, yechilgan masalaning biror maxsus holini qarab chiqishni talab etadi. Masalan, yuqoridagi yasashga geometrik masala "Teng tomonli uchburchakni uchta balandligi asoslari bo'yicha tiklang" deb maxsuslashtirilishi mumkin.

4. Masalaning berilganlarini saqlagan holda yangi xulosalar chiqarishga olib keluvchi masalalar tuzishga o'rgatishda berilgan masalalar natijasi bo'lgan yangi xulosalarni chiqarish orqali yangi masalalarga kelish mumkinligiga imkon beradi.



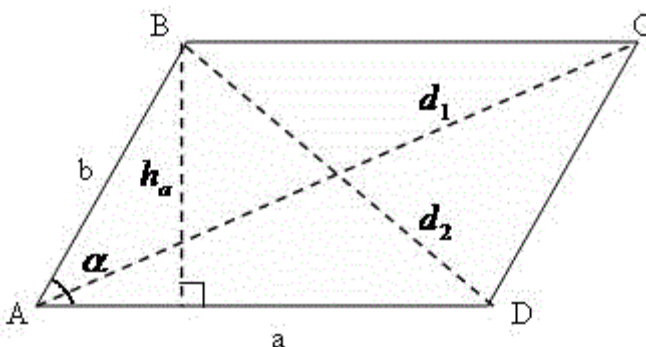
Masala. Har qanday trapetsiyada asoslari o'rtalari va trapetsiya yon tomonlari yotuvchi to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

a) Har qanday trapetsiyada asoslar o'rtalari va diagonalari kesishish nuqtasi bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

b) Har qanday trapetsiyada asoslari o'rtalari va asoslariga parallel bo'lgan yon tomonlari orasidan o'tuvchi har qanday kesma o'rtasi bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lishini isbotlang.

Buni yana davom ettirib, trapetsiya asoslari o'rtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq ba'zi xossalari haqida suhbat o'tkazish mumkin.

5. Masalani *teskarilash*, ya'ni berilganlar va noma'lumlar o'rnini almashtirish talabalarga matematik masalalar tuzilishini tushunishlariga, teskari teoremlarni bayon etish va isbotlashga o'rgatishga yordam beradi. Shuningdek, talabalarning zarur va yetarli shartlarni o'rganishlariga imkon beradi.



Masala. Parallelogrammda qarama-qarshi tomonlar teng.

a) Agar qavariq to'rtburchakda qarama-qarshi tomonlar juft-juft teng bo'lsa, bunday to'rtburchak - parallelogramm.

Bu yerda parallelogramm xossalari va belgilari haqida suhbat o'tkazib, parallelogrammga turlicha ta'riflar berish mumkinligini aytib o'tish mumkin.

Har bir belgini parallelogramm uchun ta'rif sifatida qabul qilish mumkinligini ta'kidlash lozim. Masalaning teskarisini ifodalashda talabalar bilimlari chegarasidan chiqib ketmaslikka alohida e'tibor qaratilishi lozim.

Shunday qilib, masalalar bilan ishlashda ko'rsatilgan har bir usullarni o'z o'rnida qo'llash talabalarning masalalar ustida ijodiy ishlashlariga ijodiy ta'sir ko'rsatadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Geometriya o'qitishning maqsad va vazifalari nimalardan iborat?
2. Geometriyaning rivojlanish tarixi va o'qitilishi haqida nimalarni bilasiz?
3. Geometriyani o'qitish mazmuni nimalarni o'z ichiga oladi?
4. Kasb-hunar kollejlari geometriya kursini o'qitishning mazmuni va xususiyatlari nimalardan iborat?

4-§. FAZODA TO'G'RI CHIZIQ VA TEKISLIKLARNING PARALLELIGI VA PERPENDIKULYARLIGI

Reja:

1. *Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning joylashishini o'rganish.*
2. *To'g'ri chiziqlarning paralleligi.*
3. *To'g'ri chiziq va tekisliklarning paralleligi.*
4. *Tekisliklarning paralleligi.*
5. *Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar.*
6. *Perpendikulyar tekisliklar.*

Tayanch iboralar: fazo, to'g'ri chiziq, tekislik, ularning o'zaro joylashishi, to'g'ri chiziq va tekisliklarning paralleligi, perpendikulyarligi, tekisliklarning o'zaro joylashishi.

1. *Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning joylashishini o'rganish.*

Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro joylashishi haqidagi tushunchalar o'rganilayotganida asosan ularning quyidagi holatlari qaratiladi: to'g'ri chiziq va tekislikning paralleligi va perpendikulyarlikligi, tekisliklarning o'zaro paralleligi va perpendikulyarligi.

Bu tushunchalarni o'rganish jarayonida talabalar fazoda to'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashish vaziyatlarini tahlil qilib, ularda fazoviy tasavvurlarning rivojlanish imkoniyatlari vujudga keladi.

Mazkur mavzuni o'rganishda quyidagi jihatlarga alohida e'tibor berish lozim: birinchidan, parallelizm va perpendikulyarlik alomatlarining qat'iy isbotlanishi, ikkinchidan, ko'rgazmalilik asosida asoslashga e'tibor berish; uchinchidan, qo'llashga doir fazoviy masalalarni yechish.

Bundan tashqari, bu mavzuning fazoviy jismlarning kesimlarini hosil qilishda, tasvirlashdagi ahamiyatini e'tiborga olib zarur mashqlar sistemasidan foydalanish talab etiladi.

To'g'ri chiziqlarning fazodagi vaziyati bilan tekislikdagi vaziyati orasidagi farq va o'xshashliklarni ochib berish ham talabalarning mazkur tushunchalarini yaxshi egallashlariga imkon beradi.

Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarligi

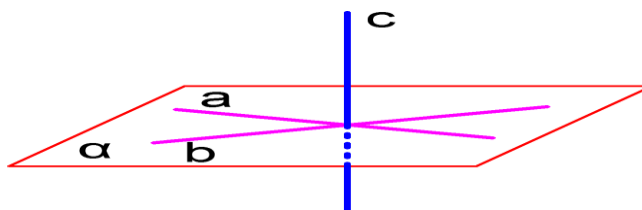
Bu mavzu uch qismga bo'lib o'rganiladi:

1. *Fazoda to'g'ri chiziqlar perpendikulyarligi.*
2. *To'g'ri chiziq va tekisliklar perpendikulyarligi.*
3. *Tekisliklar perpendikulyarligi.*

I qismni o'rganishda takrorlash amalga oshiriladi, bunda avvalo:

- 1) o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlarning ta'rifi o'rganiladi;
- 2) kesishuvchi va ayqash o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlar xossalari o'rganiladi;

3) ko'pyoqlar modellarida va atrofdagi predmetlardan ularni ko'rsatish orqali amalga oshiriladi.



II qismni o'rganishda quyidagi savol muhokama qilinadi: qanday paytda to'g'ri chiziq tekislikni kesib o'tib, unga perpendikulyar bo'ladi.

Tajribadan ko'rinadiki, agar to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, u bu tekislikdagi har qanday to'g'ri chiziqqa perpendikulyar. Bu modelda ko'rsatiladi. So'ngra to'g'ri chiziq va tekislik perpendikulyarligi ta'rifi bayon qilinadi. Maktabda to'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarligi ta'rifiga ularning kesishi talabini qo'shish lozim, buni qo'shmasak uni isbotlashga to'g'ri keladi.

Agar talabalar tayyor bo'lsa yangi ta'rif ham berish mumkin: agarda tekislikni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq tekislikda yotuvchi har bir to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, to'g'ri chiziq bu tekislikka perpendikulyar deyiladi.

To'g'ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarlik alomatini o'rgatishda ikki parallel to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa, ular tekislikka perpendikulyar bo'lmasligini ko'rsatish zarur.

Bu alomatning isboti uchburchaklar tengligidan keltirib chiqariladi, bu vektorlar skalyar ko'paytmasini o'rganishda kerak bo'ladi.

Bu mavzuni o'rganishda og'ma tushunchasi ham kiritiladi.

Tekisliklar perpendikulyarligini o'rganishda tekisliklarning o'zaro joylashishi qarab chiqiladi, chizmalar, moddellar va talabalarining tasavvurlari asosida ikkita perpendikulyar tekisliklar kesuvchi ekanligi keltirib chiqariladi.

Tekisliklar orasidagi burchak nima degan savol tug'iladi. Bunda ikki tekislik uchining tekislik kesib o'tganda hosil bo'lgan kesishish chizig'iga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak qaraladi.

Tekisliklar perpendikulyarligini o'rganishda ko'pyoqlarning modellari, predmetlar, stereometrik qutidandan foydalanish lozim.

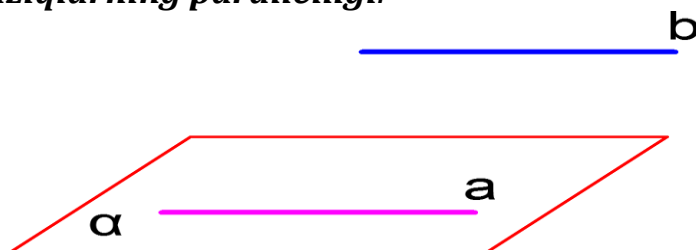
Bu mavzuni o'rganishda:

1) perpendikulyar tekislikning ta'rifi;

2) perpendikulyar tekislik yasash.

3. Masalalar yyechishning bosqichlari orqali o'rganilayotgan tushuncha mustahkamlanadi va umumlashtiriladi.

2.To'g'ri chiziqlarning parallelligi.



Ta'rifga asosan agarda fazoda ikki to'g'ri chiziq bir tekislikda yotsa va umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, ular parallel bo'ladi.

Ikkita asosiy belgisi bor:

1. " a va b to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotadi" $\Leftrightarrow (\exists \alpha)(a, b \subset \alpha)$;

2. " a va b to'g'ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega emas (ya'ni a va b to'g'ri chiziqlarga tegishli umumiy nuqta mavjud emas)" $(\exists A)(A \subset a, b)$

Umuman olganda,

$$(a \parallel b) \approx Df (\exists \alpha)(a, b \subseteq \alpha) \cup (\exists A)(A \subset a, b)$$

Har bir belgi parallellikning zaruriy sharti

$$[(a \parallel b) \Rightarrow (\exists \alpha)(a, b \subseteq \alpha)] \cup [(a \parallel b) \Rightarrow (\exists A)(A \subset a, b)]$$

Ularning kon'yunksiyasi yetarli shart hisoblanadi

$$(\exists \alpha)(a, b \subseteq \alpha) \wedge (\exists A)(A \subset a, b) \Rightarrow (a \parallel b)$$

To'g'ri chiziqlar qachon parallel emas? Bu shartlarning hech bo'lmaganda bittasi bajarilmaganda yoki bu to'g'ri chiziqlar tegishli bo'lgan tekislik mavjud emas yoki ular umumiy nuqtaga ega bo'lmasa:

$$\overline{(a \parallel b)} \approx \overline{(\exists \alpha)(a, b \subseteq \alpha) \wedge (\exists A)(A \subset a, b)}$$

$$(a \parallel b) \approx (\exists A)(A \subset a, b) \vee (\exists \alpha)(a, b \subseteq \alpha)$$

To'g'ri chiziqlar paralleligiga ikki xil yondashish mavjud, birinchisi, bir-biriga ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlar parallel. Ikkinchisi, bunga qo'shimcha belgi, ya'ni ular umumiy nuqtaga ega bo'lmaslik belgisi qoraladi.

To'g'ri chiziqlar paralleligi *refleksivlik* xossasiga ega:

$$(a \parallel b) \approx (\exists A)(A \subset a, b) \vee (\exists \alpha)(a, b \subseteq \alpha)$$

Tranzitivlik xossasi ham o'rinli:

$$(a \parallel b) \vee (b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c)$$

Birinchi yondashishda ustma-ust tushish inkor etiladi, ya'ni to'g'ri chiziqlar paralleligi refleksivlik xossasiga ega emas. Bir tekislikda yotmaydigan ikki to'g'ri chiziq mavjudligi aksiomalaridan keltirib chiqariladi:

$$(\exists A)(A, B, C, D \subset \alpha) \vee \overline{C \subset AB, D \subset ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AB \subset ABC, CD \subset ABC} \vee (\exists \alpha) \cdot (AB, CD \subset \alpha)$$

Agar $(\exists A) \cdot (a, b \subset \alpha)$ bo'lsa, ayqash to'g'ri chiziqlar, kontrapozitsiyaga ko'ra

$$(\exists A) \cdot (a, b \subset \alpha) \Rightarrow (\exists A) \cdot (A \subset a, b)$$

Bundan to'g'ri chiziqlar ayqash bo'lsa, ular umumiy nuqtaga ega bo'lmasligi kelib chiqadi.

Parallellik aksiomasini qo'llab (mavjudligini isbotlash mumkin):

$$(a \perp CD) \vee (b \perp CD) \Rightarrow (a \parallel b)$$

$$(a) \cdot (c) [\overline{C \subset a} \Rightarrow (\exists b \exists c) (C \subset b, c)]$$

$$\vee (b \parallel a) \vee (c \parallel a) \vee \overline{b \equiv c}$$

Savol tug'iladi: a to'g'ri chiziq va C nuqta orqali nechta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin: a) bitta (Evklid fazosida); b) bittadan ortiq (Lobachevskiy fazosida).

Fazoda ham xuddi shunday: to'g'ri chiziq bilan bir tekislikda yotadi.

Sinflash:

$$1) (\exists \alpha) \cdot (a \subset \alpha) \vee (b \subset \alpha) - (X) \quad 2) (\exists A) \cdot (A \subset \alpha) \vee (A \subset \alpha) - (Y)$$

Bir tekislikda yotadi

Bir tekislikda yotmaydi

Ustma-ust tushadi

Umumiy nuqtaga ega va kesishadi

Shunday qilib, fazodagi to'g'ri chiziqlar o'zaro joylashishida:

$$(a)(b) [(a \lambda b) \vee (a \times b) \vee (a \parallel b)]$$

parallellikda $(a \parallel b) \Rightarrow (b \parallel a)$;

kesishishda $(a \times b) \Rightarrow (b \times a)$;

ayqash bo'lganda $(a \lambda b) \Rightarrow (b \lambda a)$

Xarakterli xossalari ikkita teorema shaklida ifodalanadi:

1-teorema. Agar ikki to'g'ri chiziq parallel bo'lsa, u holda ularning birortasini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq boshqasini ham kesib o'tadi:

$$(a \parallel b) \Rightarrow (\alpha) [(\alpha \times a) \Rightarrow (\alpha \times b)] \text{ (zaruriy shart)}$$

$$(\overline{\alpha}) \cdot [(\alpha \times a) \Rightarrow (\alpha \times b)] \Rightarrow \overline{\alpha \parallel b}$$

$$(\exists \alpha) \cdot [(\alpha \times a) \Rightarrow (\alpha \times b)] \Rightarrow \overline{a \parallel b} \approx (\exists \alpha) \cdot [(\alpha \times a) \vee (\overline{\alpha \times b}) \Rightarrow \overline{a \parallel b}]$$

Teskari teorema. Agar har qanday tekislikdagi to'g'ri chiziqlardan birortasini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq ikkinchisini ham kesib o'tsa, bu to'g'ri chiziqlar parallel.

$$(\alpha) \cdot [(\alpha \times a)] \Rightarrow (\alpha \times b) \Rightarrow \alpha \parallel b$$

Asosiy teorema. Fazoda ikki to'g'ri chiziq parallel bo'lishi uchun tekislikdagi to'g'ri chiziqlardan birortasini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq ikkinchisini ham kesib o'tishi zarur va yetarli.

Shunday qilib, ta'rif berish mumkin:

$$(a \parallel b) \approx Df \cdot [(\alpha \times a) \Rightarrow (\alpha \times b)],$$

ya'ni:

$$1) (a \parallel b) \Rightarrow (\exists \alpha) \cdot (a, b \subset \alpha)$$

$$2) (a \parallel b) \Rightarrow (\overline{\exists A}) \cdot (A \subset a, b)$$

2-teorema. $(a \parallel b) \vee (b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c)$

Isbot:

$$(a \parallel b) \vee (\alpha \times a) \Rightarrow (\alpha \times b)$$

$$(a \parallel b) \vee (\alpha \times a) \Rightarrow (\alpha \times b)$$

$$(a \parallel b) \vee (\alpha \times a) \Rightarrow (\alpha \times b)$$

3-teorema. $(a \parallel b) \Rightarrow (\overline{\exists A}) \cdot (A \subset a, b)$

Ikki ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak uning tanlanishiga bog'liq emas, ya'ni

$$(c \perp a) \vee (a \parallel b) \Rightarrow (c \perp b)$$

Teskari teorema. $(c \perp a) \vee (c \perp b) \Rightarrow (a \parallel b)$

fazoda o'rinli emas, to'g'ri chiziqlar ayqash ham bo'lishi mumkin.

3. To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallelligi

Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklar uchun quyidagi hollar mavjud:

$$(a, \alpha)$$

Umumiy nuqtaga ega emas $a \parallel \alpha$

Umumiy nuqtaga ega

Bitta umumiy nuqtaga ega $a \times \alpha$.

Bittadan ko'p umumiy nuqtaga ega $a \subset \alpha$

$$(a) \cdot (\alpha) \cdot [(a \parallel \alpha) \vee (a \times \alpha) \vee (a \subseteq \alpha)]$$

Kesib o'tmaslik shartidan

$$(a \parallel \alpha) \approx Df (\overline{\exists A}) \cdot (A \subset a, \alpha)$$

Mavjudligi: to'g'ri chiziq va tekislik parallel bo'lishi uchun u tekislikdan tashqarida unga parallel bo'lgan hamda bu tekislikka tegishli birorta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$(a)(b)(\alpha)[\overline{a \subset \alpha \vee (a \parallel b) \vee (b \subset \alpha)}] \Leftrightarrow (a \parallel \alpha)$$

1. Agar to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'lsa, u holda berilgan to'g'ri chiziqqa parallel har qanday to'g'ri chiziq bu tekislikka tegishli bo'ladi.

$$2. (a \parallel \alpha) \Rightarrow (b)[(b \parallel) \cup (\overline{b \subset \alpha})] \Rightarrow (b \parallel \alpha)$$

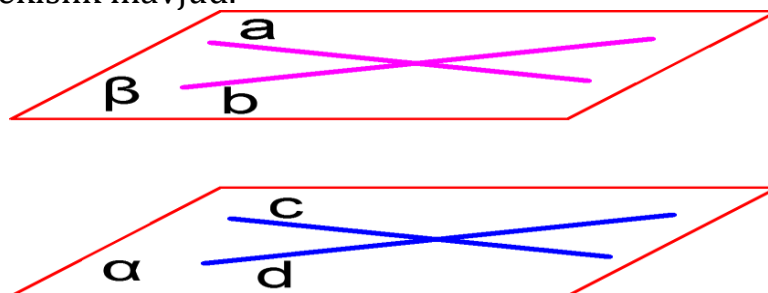
$$3. (a \parallel b) \Rightarrow (\exists \alpha)[(a \subset \alpha) \vee (b \parallel \alpha)] \vee (\beta)[(\alpha \subset \beta) \vee (b \parallel \beta)] \Rightarrow (\beta \equiv \alpha)$$

4. Tekisliklarning parallelligi.

Bunda quyidagi hollar mavjud: $(\exists A)(A \subset \alpha, \beta) - X(\alpha, \beta)$

$$1. (\alpha \parallel \beta) \Rightarrow (\beta \parallel \alpha) \quad 2. (\alpha \parallel \beta) \Rightarrow (a)[(a \subset \alpha) \Rightarrow (\alpha \parallel \beta)]$$

Mavjudligi: berilgan tekislikka tegishli bo'lgan nuqtadan va tekislikka parallel yagona tekislik mavjud.



Tekisliklarning parallellik alomati (yetarli shart):

1. Ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar boshqa tekislikdagi ikkita to'g'ri chiziqqa (kesishuvchi) parallel bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$(\alpha \parallel \beta) \vee (\beta \parallel \gamma) \Rightarrow (\alpha \parallel \gamma)$$

2. Ikki tekislik parallel bo'lsa, birortasini kesib o'tuvchi har qanday tekislik ikkinchisini ham kesib o'tadi.

$$(\alpha \parallel \beta) \Rightarrow (\gamma)[(\gamma \times \alpha) \Rightarrow (\gamma \times \beta)] \text{ (zarurligi)}$$

$$(\gamma)[(\gamma \times \alpha) \Rightarrow (\gamma \times \beta)] \Rightarrow (\alpha \parallel \beta) \text{ (yetarliligi)}$$

Ikki hol mavjud:

ikkitasi parallel $(\alpha \parallel \beta)$,

parallel emas $\alpha \times \beta, \gamma \times \beta, \gamma \times \alpha$, juft-jufti bilan kesishadi:

$$a) (a \subset \alpha, \beta) \vee (a \subset \beta, \gamma) \Rightarrow (a \subset \alpha, \gamma)$$

$$b) a \subset \beta, \gamma, b \subset \gamma, \alpha, c \subset \alpha, \beta$$

5. Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar.

Ta'rifga asosan

$$(a \perp \alpha) \approx Df(b)[(b \subset \alpha) \Rightarrow (a \perp b)]$$

Uning muhim belgilari

$$1. (a \perp \alpha) \Rightarrow (a \times \alpha)$$

Isbot. Kontrapozitsiya usuli bilan keltirib chiqariladi.

$$2. (b \parallel a) \vee (a \perp \alpha) \Rightarrow (b \perp \alpha)$$

$$3. (a \perp \alpha) \Rightarrow (\beta \parallel \alpha) \Rightarrow (a \perp \beta)$$

Mavjudligi: ikkita berilgan nuqtadan teng uzoqlashgan nuqtalarning geometrik o'rni bu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar.

Bunda analogiya o'rnatish mumkin: tekislikda to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriya fazoda tekislikka nisbatan simmetriya.

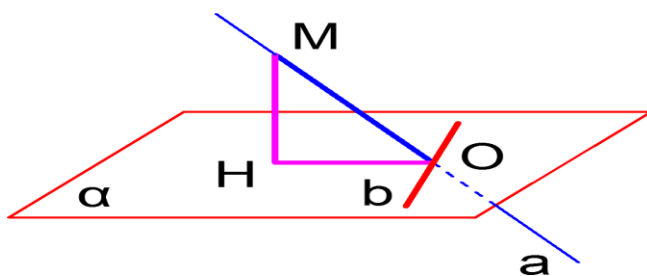
Quyidagi alomat mavjud: to'g'ri burchak tashkil etuvchi tekisliklarga tegishli ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq perpendikulyar bo'lsa, u holda bu tekisliklar perpendikulyar:

$$(m \times n) \vee (m, n \subset \alpha) \vee (l \perp m) \vee (l \perp n) \Rightarrow (l \perp \alpha)$$

Og'ma tushunchasi keyin kiritiladi:

$$(a \times \alpha) \vee (\overline{b})[(b \subset \alpha) \Rightarrow a \perp b] \approx (a \times \alpha) \vee (\overline{a \perp \alpha})$$

$$(a \subset \alpha) \vee (BC \equiv \Pi, (AC)) \vee (a, AC) \Rightarrow (a \perp BC)$$



Tekislikka parallellik va perpendikulyarlikning quyidagi xossalari o'rnatiladi:

- 1) Faqat bitta perpendikulyar o'tkaziladi.
- 2) Tekislikka parallel cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin.
- 3) Tekislikka cheksiz ko'p og'ma o'tkazish mumkin.

Bu to'g'ri chiziqlar haqidagi *uch perpendikulyar haqidagi teoremani* ham asoslashga olib keladi:

Tekislikka tegishli va og'maga perpendikulyar to'g'ri chiziq og'maning bu tekislikka og'maning proeksiyasiga ham perpendikulyar bo'ladi..

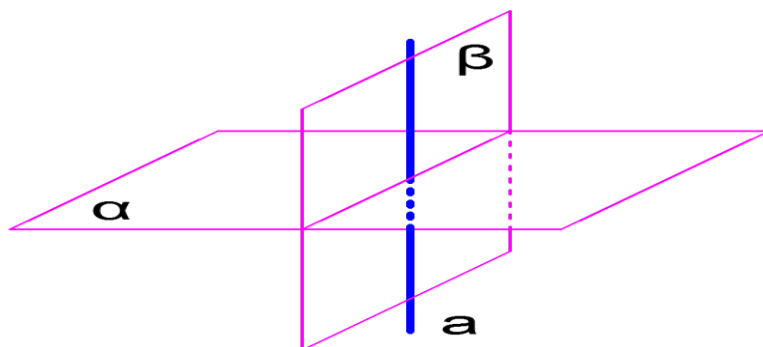
Teskari teorema ham o'rinli.

6. Perpendikulyar tekisliklar

Ta'rifga asosan bu tushuncha asosan quyidagi belgilarni o'z ichiga olishi kerak: ular to'g'ri ikki yoqli burchaklar hosil qiladi; bu ikki yoqli burchaklarga mos chiziqlar burchaklar ham to'g'ri bo'ladi.

Quyidagi alomat o'rnatiladi: ikki tekislik perpendikulyar bo'lishi uchun ularning bittasi boshqasiga perpendikulyar to'g'ri chiziqdan o'tishi zarur:

$$(\alpha \perp \beta) \Rightarrow (\exists l)(l \subset \alpha) \vee (l \perp \beta)$$



Takrorlash uchun savollar

1. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarni joylashini o'rganishning qanday usullari mavjud?
2. To'g'ri chiziqlarning parallellik alomatlarini ayting.
3. To'g'ri chiziq va tekisliklarning parallellik alomatlarini isbotlang.
4. Tekisliklarning parallelligining qanday xossalari bor?
5. Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar qanday o'rganiladi?
6. Perpendikulyar tekisliklarning xossalarini o'rganishning qanday usullari mavjud?

5-§. KO'PYOQLARNI O'RGANISH METODIKASI

Reja:

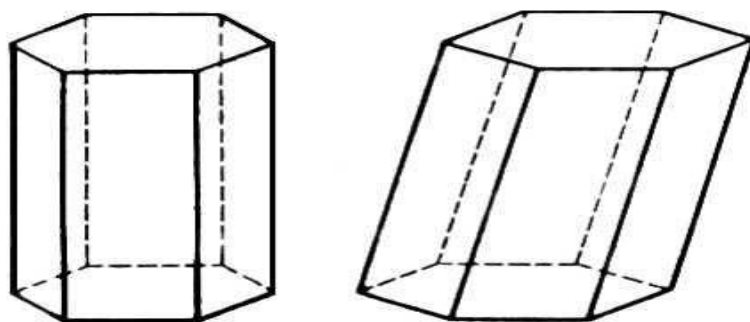
1. Ko'pyoqlarni o'rganish metodikasi.
2. Muntazam ko'pyoqlarni o'qitish mazmuni va xususiyatlari.
3. Talabalarni geometriya o'qitishda murakkab jismlarga oid masalalar yechishga o'rgatish.

Tayanch iboralar: ko'pyoq, muntazam ko'pyoq, prizma, piramida, murakka, jism.

1. Ko'pyoqlarni o'rganishni tekislikdagi ko'pburchak tushunchasi bilan bog'lab olib borish va ulardagi farqlarni ko'rsatishni tushuntirish bilan qo'shib olib borish zarur. Masalan, ko'pburchak – yopiq siniq chiziq bilan chegaralangan tekislikning nuqtalaridan iborat qism-tuplami bo'lsa, ko'pyoq – ko'pburchaklardan tuzilgan yopiq sirt bilan chegaralangan fazo nuqtalar to'plami qism-to'plamidan iborat. Ko'pburchak - ikki o'lchovli bo'lsa, ko'pyoq - uch ulchovli obraz.

Qavariqlikni o'rganishda ham qavariq ko'pburchak uning ixtiyoriy tomonini o'z ichiga oluvchi to'g'ri chiziqdan bir tomonda yotadi, qavariq ko'pyoq esa uning ixtiyoriy yoki yotgan tekislikdan bir tomonda yotadi.

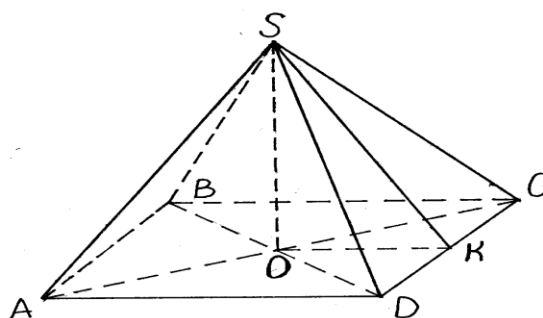
Ko'pyoqlarga turlicha ta'riflar beriladi. Masalan, prizma va piramidaga quyidagicha ta'riflar berish mumkin.



Prizma – qavariq ko'pyoq bo'lib, uning ikki yoki mos tomonlari parallel bo'lgan tengdosh ko'pburchaklardan, qolgan yoqlari juft-jufti bilan parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesishuvchi parallelogramlardan iborat.

Piramida esa bir yoki (asosi) ko'pburchak, qolgan yoqlari (yon yoqlari) umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan iborat qavariq ko'pyoq. Shuningdek, ko'pyoqlarni yasash nuqtayi nazardan ham ta'riflash mumkin.

O'quvchilarga ko'pyoqlar turlari orasidagi o'zaro munosabatlarni kursatish geometrik tushunchalarning kelib chiqish jarayonini ko'rsatish uchun imkon beradi. Masalan, kub – to'g'ri burchakli parallelepiped - to'g'ri parallelepiped - parallelepiped - prizma - ko'pyoq - geometrik jism - nuqtalar to'plami ketma-ketligini sxema orqali ko'rsatib, biri ikkinchisidan mantiqiy kelib chiqishi bayon etiladi. Yoki to'g'ri prizma, parallelepiped va kublar orasida qanday o'zaro munosabat mavjudligini aniqlashni topshirish mumkin.



2. **Muntazam ko'pyoqlar** ikki shartni qanoatlantirishi lozim: a) barcha yoqlari - muntazam va o'zaro tengdosh uchburchaklardan iborat; b) barcha ko'pyoqli burchaklari o'zaro teng.

Birinchi shartdan muntazam ko'pyoq yoqlari bir xil ismli ko'pburchaklardan iborat ekanligi kelib chiqadi.

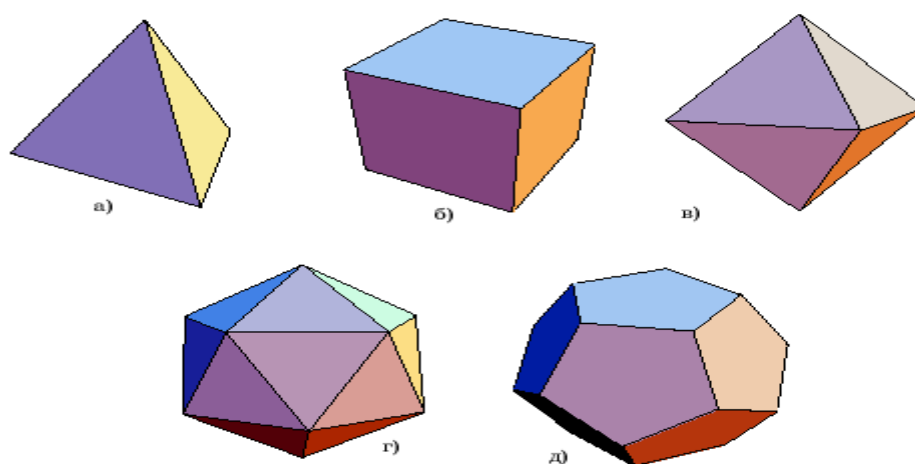


Рис. 1

Ikkinchisidan esa buning barcha ko'pyoqli burchaklari ham bir xil ismli bo'lishi ko'rinadi. Masalan, kubning barcha yoqlari, kvadratlar, barcha ko'pyoqli burchaklari - uch yoqli. Bunday shartlarni qanoatlantiruvchi nechta ko'pyoq mavjud degan savol tug'iladi. Javob: yoqlari tomonlari soni oltidan katta bo'lgan muntazam ko'pburchaklardan iborat ko'pyoq mavjud emasligi ta'kidlanadi.

Haqiqatdan, $n \geq 6$ da ko'pyoqning har qanday tekis burchagi $\varphi \geq 120^\circ$. Ko'pyoqning ko'pyoqli burchaklari uch yoqli bo'lsa, u holda tekis burchaklari yig'indisi $S \geq 360^\circ$. Bu esa ko'pyoqli burchaklar xossasiga zid.

Shunday qilib, muntazam ko'pyoqning yoqlari faqat muntazam uchburchak, to'rtburchak va besh burchakdan iborat bo'lishi mumkin.

1) $n = 3$ bo'lsa, yoqlari muntazam uchburchak bo'lgan uch xil muntazam ko'pyoq mavjud: uchyoqli, to'rtyoqli va beshyoqli burchakli ko'pyoqlar;

2) $n = 4$ bo'lsa, yoqlari kvadratlardan iborat va faqat uchyoqli burchakka ega muntazam ko'pyoq mavjud;

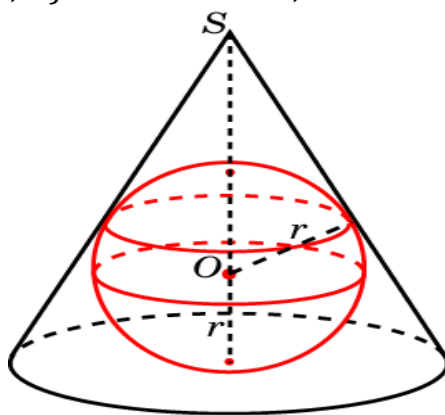
3) $n = 5$ bo'lsa, yoqlari -muntazam beshburchaklardan iborat va bitta uchyoqli burchaklarga ega muntazam ko'pyoq mavjud.

Shu asosda ko'pyoqlar uchun (uchlari, yoqlari va qirralari soni orasidagi munosabatni ifodalaydigan) Eyler teoremasini keltirib chiqarish mumkin. Bu teorema: ko'pyoqlar topologik xossasi bo'lib, geometrik almashtirishlar uchun invariant hisoblanadi; uni matematik induksiya usuli bilan isbotlash mumkin; muntazam ko'pyoqlar nazariyasini tuzishga imkon beradi.

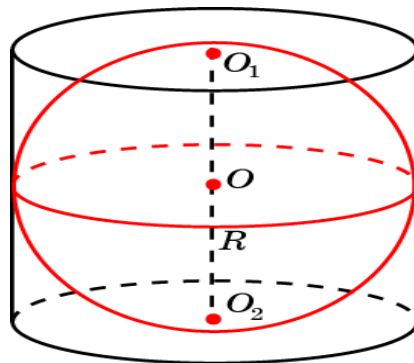
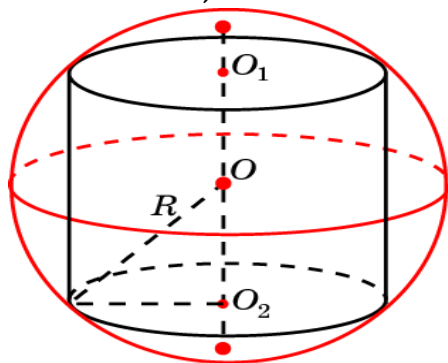
Agar ko'pyoqning uchlari sonini -U, yoqlari sonini-Y, qirralari sonini- Q deb belgilasak, dastlab konkret misollarda uchburchakli, to'rtburchakli va p-burchakli prizma va piramidalar uchun $U + Y - Q = 2$ (Eyler formulasi) munosabatni tekshirib ko'rish talab qilinadi.

3. Talabalarni murakkab jismlarga oid masalalar yechishga o'rgatish.

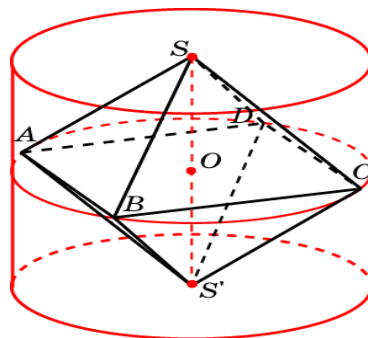
Bunday masalalardan kasb-hunar kollejlari matematika kursi bo'yicha ko'pyoqlar, silindr, konus va shardan tuzilgan 9 ta murakkab jism : 1) shar va piramida; 2) shar va prizma; 3) shar va konus;



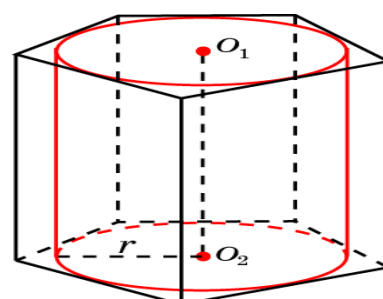
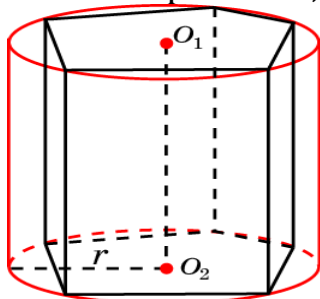
4) shar va silindr;



5) konus va piramida; 6) konus va prizma; 7) konus va silindr;



8) silindr va piramida;



9) silindr va prizmalarni o'rganish va ularga doir masalalar yyechish metodikasi bo'yicha quyidagicha nazariy ma'lumotlarni tahlil qilish taklif etilishi mumkin. Bunda talabalarga masalalarni yyechish uchun nafaqat u yoki bu ko'pyoqqa tashqi yoki ichki chizilgan sfera ta'rifini bilish, balki masalalar yyechish uchun zarur bo'lgan ichki va tashqi chizilgan sferalar bilan bog'liq ma'lumotlarni ham bayon etish foydalidir.

Shar va prizmadan tuzilgan murakkab jismlar. Agar prizмага shar ichki chizilgan bo'lsa, u holda:

1) prizma balandligi shar diametriga teng;

2) sharning yon yoqlari bilan urinish nuqtalari prizma balandligi o'rtasidan (shar markazi) o'tuvchi yon qirralariga perpendikulyar bo'lgan prizmani kesuvchi tekislikda yotadi. Bundan prizмага ichki chizilgan sharning yon qirralariga urinish nuqtalari bu sharning katta aylanasida yotadi.

3) Prizмага tashqi sharni yasash uchun; a) prizma to'g'ri bo'lishi; b) uning asosiga tashqi aylana yasash mumkin bo'lishi zarur va yetarlidir.

4) Agar prizмага tashqi chizilgan shar yasalgan bo'lsa, u holda shar markazi prizma asosiga tashqi chizilgan aylana markazidan o'tuvchi prizma balandligi o'rtasi hisoblanadi.

Shar va piramidadan tuzilgan murakkab jismlar. Bunga doir quyidagi teoremlar va ularning isbotlarini ko'rib chiqiladi va ularni o'rgatish metodikasini ishlab chiqish taklif etiladi.

1-teorema. Agar piramidaga shar ichki chizilgan bo'lsa, u holda uning markazi piramidaning barcha yon ikkiyoqli burchaklari bissektor tekisliklari kesishish nuqtasi hisoblanadi.

2-teorema. Agar piramidaga shar tashqi yasalgan bo'lsa, u holda uning markazi piramidaning qirralari o'rtalaridan ularga perpendikulyar o'tkazilgan barcha tekisliklar kesishish nuqtasi hisoblanadi.

3-teorema. Piramidaga tashqi chizilgan shar yasash uchun uning asosiga tashqi aylana yasash mumkin bo'lishi zarur va yetarlidir.

Talabalarga bu teoremlarni talabalar tushunib olishlari va tashqi shar yasash mumkin bo'lgan piramidalar misollar keltira olishlari ta'kidlanadi. Piramidaga tashqi chizilgan shar tushunchasini o'zlashtirib olishlari uchun darslarda quyidagi savollarni berish va muhokamasi uyutiriladi: a) hamma vaqt ham piramidaga tashqi chizilgan shar markazi piramida markazida bo'ladimi? b) qanday shartda piramidaga tashqi chizilgan shar markazi bu piramidaning balandligini o'z ichiga oluvchi to'g'ri chiziqli yotadimi?

Qaralayotgan $\S$ larda talabalarga piramidaga va konusga tashqi chizilgan shar berilgan masalalarni yyechishda piramida (konus) balandligini shar sirti bilan kesishguncha davom ettirib, to'g'ri burchakli uchburchak hosil qilishi, unda shar diametri gipotenuza bo'lishi, yon qirrasi esa (yoki konus yasovchisi) – katetlaridan biri bo'ladi va to'g'ri burchakli uchburchak to'g'ri burchagi uchidan tushirilgan balandlik xossasi haqidagi teoremdan foydalanish lozimligi aytib o'tiladi.

Dars ishlanmasi

Dars mavzusi: Ko'pyoqlar mavzusining umumiy sharhi (dars-ma'ruza va mustaqil ish).

Dars maqsadi: talabalarda ko'pyoqlar va ularning tadbirlari haqida bilim va ko'nikmalarni shakllantirish.

Dars jihozi: ko'pyoqlar modellari, prizma, piramidalar, ko'pyoqlar va prizmalar sinflari jadvali.

1. Ma'ruza mazmuni

Ko'pyoq – bu chekli sondagi tekis ko'pburchaklardan iborat jism, sirt. Ko'pyoq haqida tasavvurni quyidagi modellar beradi. Ko'pyoq chegarasi sirti deb ataladi. Qavariq va qavariq bo'lmagan ko'pyoqlar bor. Biz qavariq ko'pyoqlarni qaraymiz. Insonning ishlab chiqarish faoliyatida qavariq bo'lmagan ko'pyoqlar ham uchraydi.

Ko'pyoqning elementlari bo'lib, yoqlari, qirralari va uchlari hisoblanadi. Barcha ko'pyoqlar orasida ikkita katta guruhni ajratamiz: prizmalar va piramidalar(modellar ko'rsatiladi).

Prizma sirti ikki asosi (teng ko'pburchaklar) va yon yoqlari (parallelogrammlar)dan iborat.

Piramida sirti bitta asosdan (ko'pburchak) va uchburchaklardan tashkil topgan.

Agar " n -burchakli prizma(piramida)" deyilsa, bu ularning asoslari n -burchaklar (uchburchak, to'rtburchak, beshburchak va h.k.)lardan iborat ekanligi tushuniladi. Modellar ko'rsatiladi.

Asoslar uchlarini tutashtiruvchi prizma qirralari yon qirralar deyiladi. Shunga o'xshash piramidaning yon qirralari deb piramida uchini asos uchlari

bilan tutashtiruvchi qirralar tushuniladi. Prizmaning balandligi deb ularning asoslari tekisliklari orasidagi masofaga aytiladi. Piramida balandligi deb uchidan asos tekisligiga tushirilgan perpendikulyarga aytiladi.(Bular modellarda konkretlashtriladi).

Shundan so'ng o'qituvchi kiritilgan tushunchalar prizma uchun ham mos ravishda piramidalar uchun umumiy qonuniyatlarni o'rnatishga imkon berishini ta'kidlaydi.

Quyidagi savollar qaraladi (muhokamada barcha o'quvchilar qatnashadilar) :

a) Prizma minimal nechta yoqqa ega bo'lishi mumkin. Bunday prizmaning nechta uchi, nechta qirrasi va yon qirrasi bo'ladi?

b) 10, 12, 15 va 17 ta qirralarga ega bo'lgan prizma mavjudmi?

O'quvchilar n -burchakli prizmada qirralar umumiy soni $3n$ ga teng degan xulosaga keladilar.

c) Eng kam sondagi yoqlarga ega bo'lgan ko'pyoq qanday ataladi? Uning nechta qirrasi, uchi bor?

d) Beshyoqning yoqlari to'rtburchak, beshburchak bo'lishi mumkinmi?

(Javob: bo'lishi mumkin, mumkin emas)

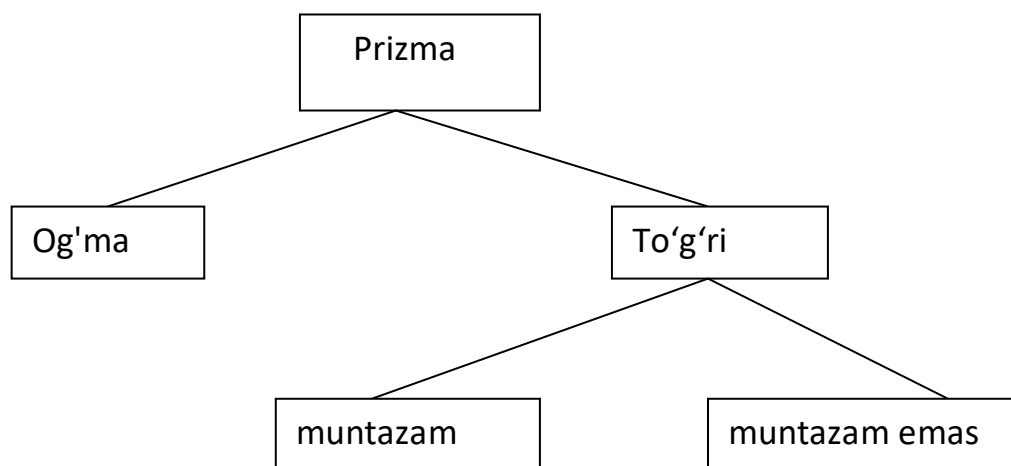
e) Ko'pyoqning bir yoqi oltiburchak. Bu ko'pyoq eng kami nechta qirraga ega bo'lishi mumkin?

(Javob: 12 ta).

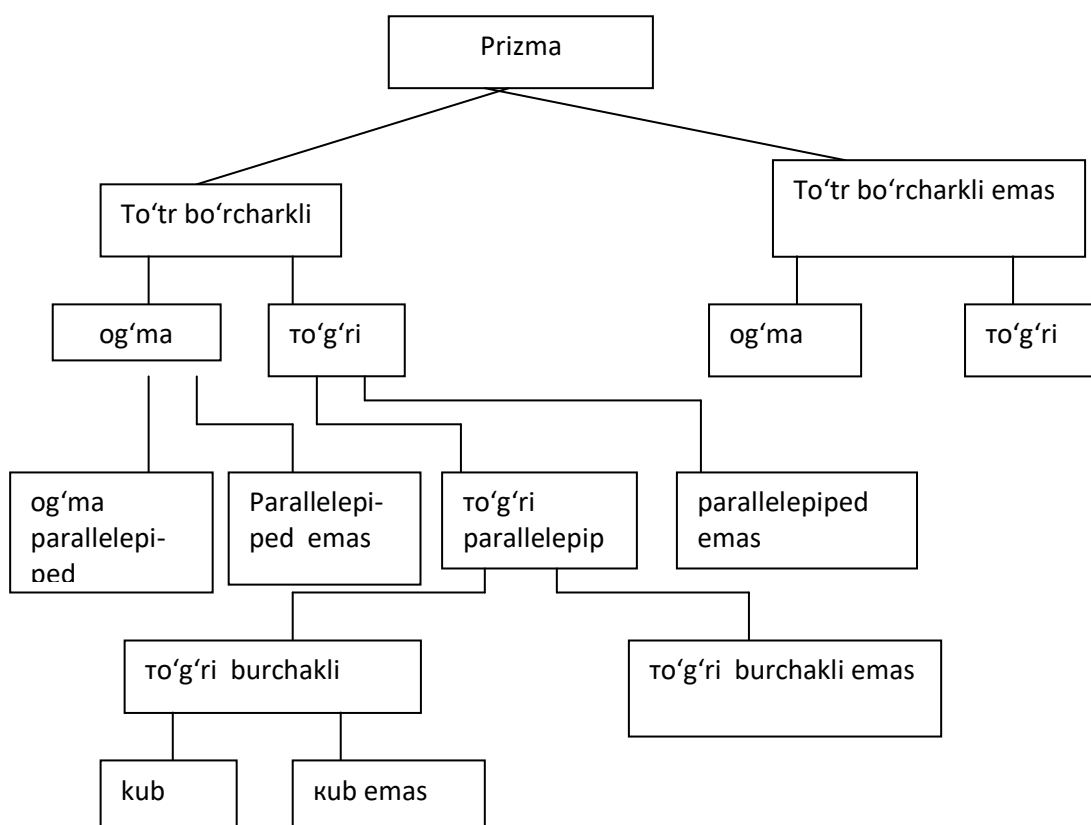
O'qituvchining keyingi tushuntirishi.

Prizmalar to'g'ri va og'ma prizmalarga bo'linadi. Prizma to'g'ri deyiladi, agar uning yon qirralari asosga perpendikulyar bo'lsa. Aks holda prizma og'ma deyiladi. To'g'ri prizma muntazam deyiladi, agar uning asosi muntazam ko'pburchakdan iborat bo'lsa(modellarda ko'rsatiladi).

Shunday qilib quyidagi sxemani tuzish mumkin:



Prizma tushunchasi asosiga to'rtburchakli va to'rtburchakli bo'lmagan xossalarni qo'yib, prizmalarning quyidagi sinflarini ko'rsatish mumkin:



Muntazam va muntazam emaslariga bo'lish piramidalariga ham qo'llaniladi. Piramida to'g'ri deyiladi, agar uning asosi muntazam ko'pburchak va balandligining asosi bu ko'pburchak markazi bilan ustma-ust tushsa. Asosi muntazam ko'pburchak bo'lmagan piramida muntazam bo'lmagan piramida deyiladi.

Ko'pyoqning alohida turi bo'lib kesik piramida hisoblanadi, ular muntazam va muntazam bo'lmasligi mumkin. Geometriyada asosi paralelogrammlar, to'rtburchaklardan iborat prizmalar maxsus o'rganiladi. Bunday prizmalar parallelepipedlar deyiladi. Parallelepipedlar og'ma va to'g'ri bo'ladi. To'g'ri parallelepipedning asosi to'g'ri to'rtburchak. To'g'ri parallelepiped to'g'ri burchakli parallelepiped deyiladi. Barcha qirralari teng bo'lgan to'g'riburchakli parallelepiped kub deb ataladi (modeli ko'rsatiladi)

Umumiy geometrik jism tushunchasi va xususiy tushuncha to'g'riburchakli parallelepiped orasida oraliq qanday tushunchani qo'yish mumkin (ko'pyoq. prizma, parallelepiped, to'g'ri parallelepiped).

Uyga vazifa:

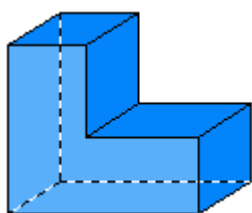
1. Sxemani tahlil qilib bera olish.

2. Muntazam uchburchakli prizma, asosi muntazam uchburchak, oltiburchak bo'lgan og'ma prizma, to'g'ri beshburchakli prizma, asosi teng yonli trapetsiyadan iborat to'g'ri to'rtburchakli prizmalarining modellarini yasash.

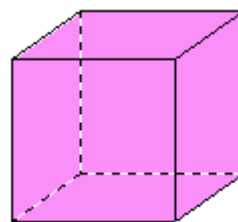
3. Turmushda va texnikada ko'pyoq ko'rinishdagi obyektlarga misollar keltirish.

Ko'pyoqlarni o'rganishni tekislikdagi ko'pburchak tushunchasi bilan bog'lab olib borish va ulardagi farqlarni ko'rsatishni tushuntirish bilan qo'shib olib borish zarur. Masalan, ko'pburchak – yopiq siniq chiziqli chegaralangan tekislikning nuqtalaridan iborat qism – to'plam bo'lsa, ko'pyoq – ko'pburchaklardan tuzilgan yopiq sirt bilan chegaralangan fazo nuqtalar to'plami qism – to'plamdan iborat. Ko'pburchak - ikki o'lchovli bo'lsa, ko'pyoq – uch o'lchovli obraz.

Qavariqlikni o'rganishda ham qavariq ko'pburchak uning ixtiyoriy tomonini o'z ichiga oluvchi to'g'ri chiziqli bir tomondan yotadi, qavariq ko'pyoq esa uning ixtiyoriy yoki yotgan tekislikdan bir tomondan yotadi.

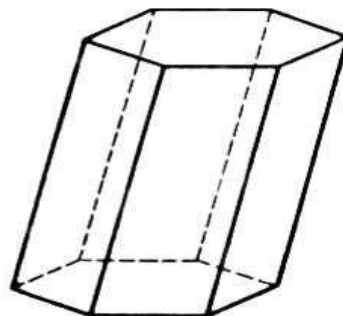
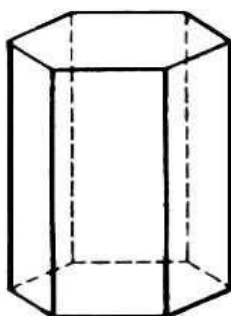


Noqavariq ko'pyoq

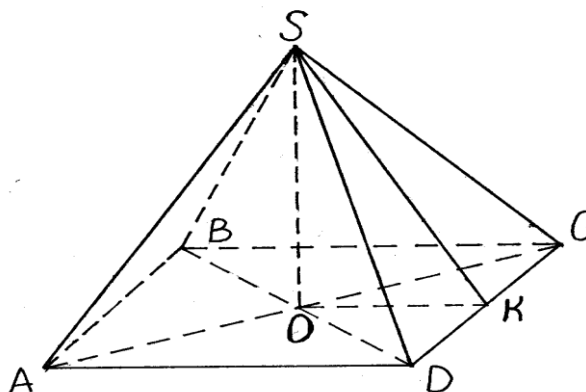


Qavariq ko'pyoq.

Ko'pyoqlarga turlicha ta'riflar beriladi. Masalan, prizma va piramidaga quyidagicha ta'riflar berish mumkin.



Prizma – qavariq ko'pyoq bo'lib, uning ikki yoki mos tomonlari parallel bo'lgan tengdosh ko'pburchaklardan, qolgan yoqlari juft-jufti bilan parallel to'g'ri chiziqlar buyicha kesishuvchi parallelogramlardan iborat,



Piramida esa bir yoki (asosi) ko'pburchak, qolgan yoqlari (yon yoqlari) umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan iborat qavariq ko'pyoq. Shuningdek, ko'pyoqlarni yasash nuqtaiy nazardan ham ta'riflash mumkin.

Ko'pyoqlar sinflari. Ko'pyoq– tekis ko'pburchaklar- yoqlari bilan chegaralangan fazoning qismi. YOqlarining tomonlari va uchlari ko'pyoq qirralari va uchlari deb ataladi. O'qlar ko'pyog'li sirtini tashkil etadi. Ko'pyoqli sirtga odatda quyidagi cheklashlar qo'yiladi.:

- 1) har bir qirra qo'shni yoqlar deb ataluvchi faqat ikkita yoqning umumiy tomoni bo'lishi lozim;
- 2) har bir ikkita yoqni ketma-ket zanjir qo'shni yoqlar bilan tutashtirish mumkin.;
- 3) har bir uchi uchun unga yopishgan yoqlar burchaklari biror ko'pyoqli burchakni chegaralagan bo'lishi lozim.

Geometrik jismlar

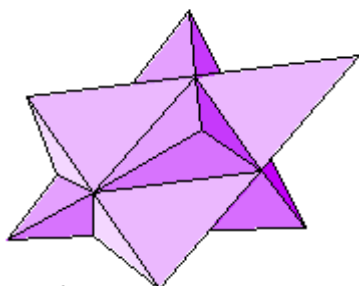


рис.1

Ko'pyoq

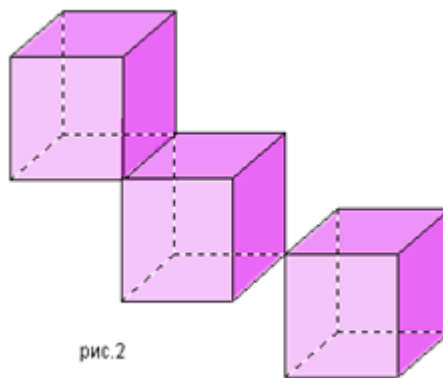


рис.2

Ko'pyoq emas

18 kvadratdan iborat jamlanma ko'yoq emas, chunki ko'yoqli sirtlarga qo'yiladigan shartlarni qanoatlantirmaydi.

Quyidagilar ko'pyoqlar hisoblanadi:

- ◇ **parallelepiped** –sirti oltita parallelogramm dan iborat ko'pyoq;
- ◇ **to'g'ri burchakli parallelepiped** – yoqlari-to'g'ri to'rtburchaklardan iborat parallelepiped;
- ◇ **kub** – sirti oltita kvadratdan iborat ko'pyoq;
- ◇ **prizma** – qavariq ko'pyoq bo'lib, uning ikki yoki mos tomonlari paralel bo'lgan tengdosh ko'pburchaklardan, qolgan yoqlari juft-jufti bilan paralel to'g'ri chiziqlar buyicha kesishuvchi parallelogramlardan iborat;
- ◇ **to'g'ri prizma** – yon o'qlari to'g'ri to'rtburchaklardan iborat prisma.;
- ◇ **muntazam prizma** – asoslari muntazam ko'pyoqlardan iborat prizma;
- ◇ **piramida** – bir yoki (asosi) ko'pburchak, qolgan yoqlari (yon yoqlari) umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan iborat qavariq ko'pyoq. Uchburchaklarning umumiy uchi piramida uchi deb ataladi.
- ◇ **muntazam piramida** – asosida muntazam ko'pburchak va barcha yon qirralari teng bo'lgan piramida,

◇ **kesik piramida** – yoqlari parallel tekisliklarda joylashgan (quyi va yuqori asos) va p – to‘rtburchaklardan (yon yoqlari) iborat ko‘pyoq

Talabalarga ko‘pyoqlar turlari orasidagi o‘zaro munosabatlarni kursatish geometrik tushunchalarning kelib chikish jarayonini ko‘rsatish uchun imkon beradi. Masalan, kub – to‘g‘ri burchakli parallelepiped – to‘g‘ri parallelepiped – parallelepiped – prizma – ko‘pyoq – geometrik jism – nuqtalar to‘plami ketma-ketligini sxema orqali ko‘rsatib, biri ikkinchisidan mantiqiy kelib chiqishi bayon etiladi. Yoki to‘g‘ri prizma, parallelepiped va kublar orasida qanday o‘zaro munosabat mavjudligini aniqlashni topshirish mumkin.

Muntazam ko‘pyoqlar. Muntazam ko‘pyoqlar ikki shartni qanoatlantirishi lozim: a) barcha yoqlari – muntazam va o‘zaro tengdosh uchburchaklardan iborat; b) barcha ko‘pyoqli burchaklari o‘zaro teng.

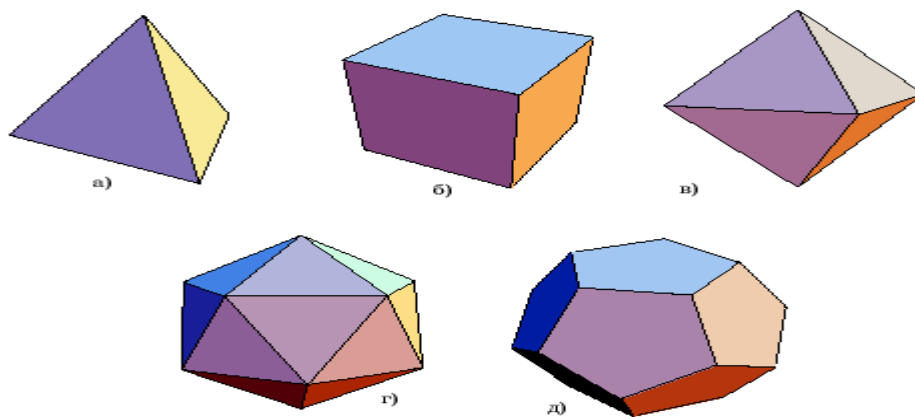


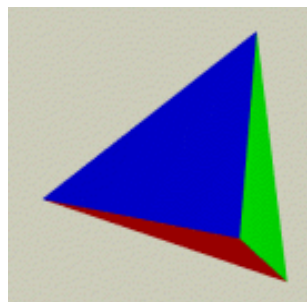
Рис. 1

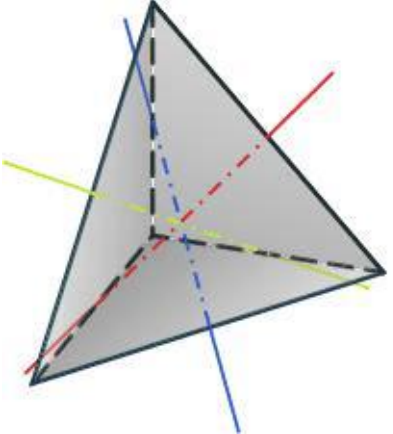
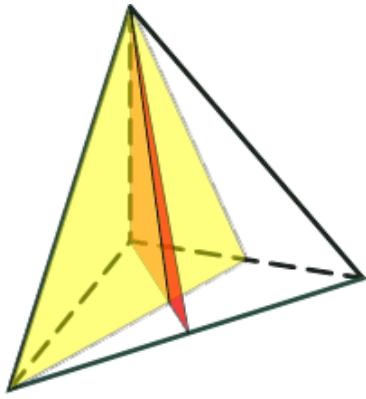
Agar ko‘pyoqning uchlari sonini –U, yoqlari sonini-YO, qirralari sonini- Q deb belgilasak, dastlab konkret misollarda uchburchakli, to‘rtburchakli va p-burchakli prizma va piramidalar uchun $U + YO - Q = 2$ (Eylar formulasi) munosabatni tekshirib ko‘rish talab qilinadi.

Ko‘pyoq muntazam deyiladi, agar:

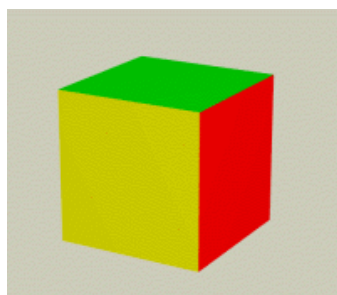
- u qavariq;
- uning barcha yoqlari tengdosh muntazam ko‘pburchaklardan iborat;
- har bir uchida bir xil sondagi yoqlar uchrashadi;
- uning barcha ikkiyoqli burchaklari teng bo‘lsa.

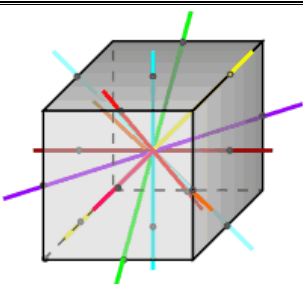
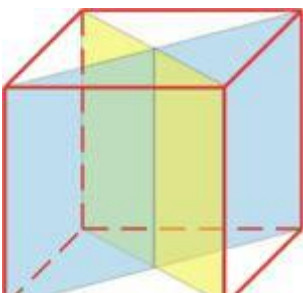
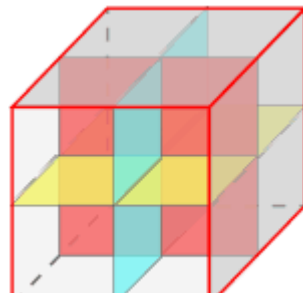
Tetraedr - (grekchadan tetra – to‘rt va hedra – yoq) – 4 ta teng tomonli uchburchakdan tuzilgan muntazam ko‘pyoq.



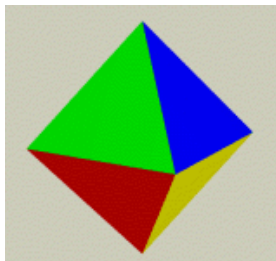
	Tetraedrning simmetriya elementlari Tetraedr uchta simmetriya o'qiga ega, ular ayqash qirralari o'rtalaridan o'tadi. Tetraedr 6 ta simmetriya tekisligiga ega, ularning har biri u bilan ayqash qirraga perpendikulyar tetraedr qirrasidan o'tadi.	
---	--	---

Kub yoki geksaedr (grekchadan hex — olti va hedra — yoq) 6 kvadratdan tuzilgan. Kubning 8 uchidan har biri 3 ta kvadratning uchi hisoblanadi, shuning uchun har bir uchidagi tekis burchaklar yig'indisi 270^0 ga teng.



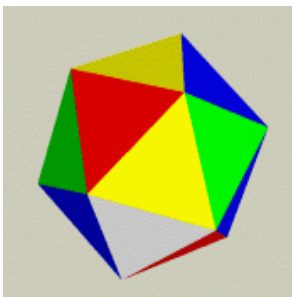
	Kubning simmetriya elementlari Kubning simmetriya o'qi yo bir yoqqa tegishli bo'lmagan parallel qirralar o'rtasidan, yoki qarama-qarshi yoqlar diagonallari kesishish nuqtasidan o'tadi. Kubning simmetriya markazi uning diagonallari kesishish nuqtasi bo'lib hisoblanadi.	
	Simmetriya markazi orqali 9 ta simmetriya o'qi o'tadi . Kubda simmetriya tekisliklari 9 ta va ular yo qarama-qarshi qirralar orqali(bunda tekisliklar 6 ta), yoki qarama-qarshi qirralar o'rtalaridan (bunday qirralar – 3 ta) o'tadi.	

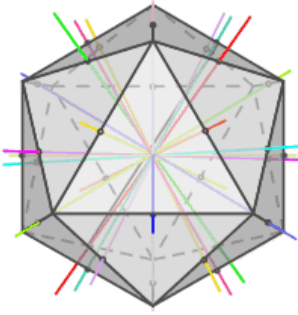
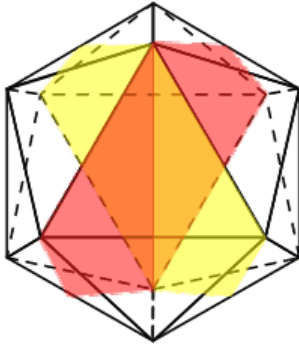
Oktaedr - (grekchadan okto – sakkiz va hedra – yoq) - 8 ta teng tomonli uchburchakdan tuzilgan muntazam ko‘pyoq. Oktaedr 6 ta uchga va 12 ta qirraga ega. Har bir uchda 4 ta uchburchak uchrashadi, shunday qilib, oktaedrning uchidagi tekis burchaklar yig‘indisi 240° ga teng.



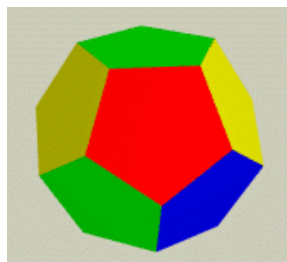
	Oktaedr simmetriya elementaria Oktaedr 9 ta simmetriya o‘qiga ega, ulardan uchta qarama-qarshi uchlardan, oltita – qirralar o‘rtalaridan o‘tadi. Simmetriya markazining simmetriya o‘qlari kesishish nuqtasidan iborat.	
	9 ta simmetriya tekisligidan uchta bir tekislikda yotuvchi oktaedrning har bir 4 ta uchidan o‘tadi.. 6 ta simmetriya tekisligi bir yoqqa tegishli bo‘lmagan ikkita uchi va qarama-qarshi qirralari o‘rtasidan o‘tadi.	

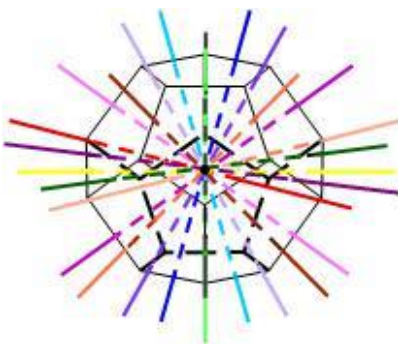
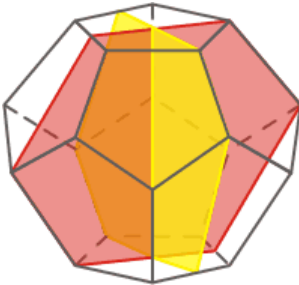
Ikosaedr – (grekchadan ico — olti va hedra – yoq) 20 ta teng tomonli uchburchakdan tuzilgan qavariq ko‘pyoq. Ikosaedrning 12 ta uchidan har biri 5 ta teng tomonli uchburchakning uchi hisoblanadi. Shuning uchun uchidagi burchaklari yig‘indi 300° ga teng.



	<i>Ikosaedrning simmetriya elementlari</i> Muntazam ikosaedr har bir qarama-qarshi parallel qirralar o'rtasidan o'tuvchi 15 ta simmetriya o'qiga ega. Barcha simmetriya o'qlari kesishish nuqtasi uning simmetriya markazi bo'ladi. Simmetriya tekisliklari ham 15 ta. 15 ta simmetriya tekisliklari bir tekislikda yotuvchi 4 ta uchi va qarama-qarshi yotgan parallel qirralar o'rtasidan o'tadi.	
---	--	---

Dodekaedr (grekchadan dodeka – o'n ikki va hedra – yoq) bu 12 ta teng tomonli beshburchakdan tuzilgan muntazam ko'pyoq Dodekaedr 20 ta uchga va 30 ta qirraga ega. Dodekaedrning uchi uchta beshburchakning uchi hisoblanadi, shuning uchun uchidagi burchaklari yig'indi 324° ga teng

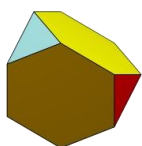


	<i>Dodekaedrning simmetriya elementlari</i> Dodekaedr simmetriya markaziga va 15 ta simmetriya o'qiga ega. O'qlarning har bir qarama-qargi yotgan parallel qirralar o'rtasidan o'tadi. Dodekaedr 15 ta simmetriya tekisligiga ega. Ularning ixtiyoriysi har bir yoqda uchidan va qaram-qarshi qirra o'rtasidan o'tadi.	
---	---	---

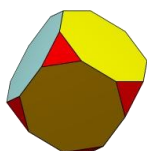
Lekin shunday ko'pyoqlar borki, ularning barcha ko'pyoqli burchaklari teng, yoqlari – muntazam, lekin turli nomdagi ko'pburchaklardan iborat. Bunday ko'pyoqlar yarimmuntazam ko'pyoqlar yoki arximed jismlari deb ataladi.

Arximed jismlari to'plamini 4 ta guruhga ajratish mumkin.

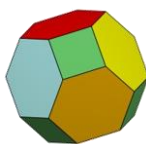
Birinchi guruhga beshta platon jismlaridan ularni kesishish orqali olinadigan beshta ko'pyoq kiradi.



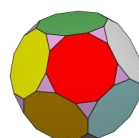
kesik tetraedr



kesik kub



kesik oktaedr

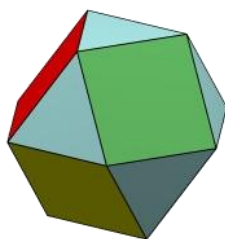


kesik ikosaedr

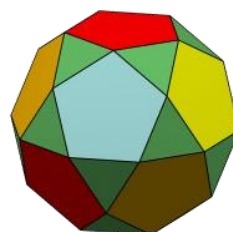


kesik dodekaedr

Ikkinchi guruhga *kvazimuntazam* ko'pyoqlar deb ataluvchi ikkita jism kiradi. Bu ko'pyoqning yoqlari ikkita tipdagi muntazam ko'pburchaklardan iborat, bunda bir tipdagi har bir yoq boshqa tipdagi yoqlar bilan o'ralgan bo'ladi. Bu ikki jism

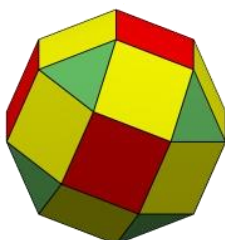


kuboktaedr

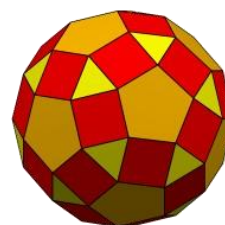


ikosododekaedr

Uchinchi guruhga rombokuboktaedr, ba'zida uni kichik rombokuboktaedr deb ataladi va romboikosododekaedr, yana kichik romboikosododekaedr deb ataluvchi jismlar kiradi.

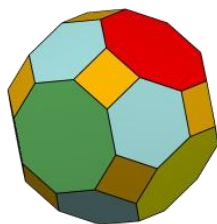


rombokuboktaedr

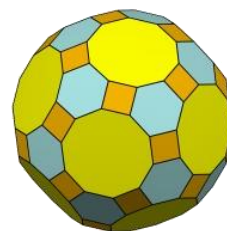


romboikosododekaedr

Bu guruhga yana rombokesik kuboktaedr, ba'zida uni katta rombokuboktaedr deb ham atashadi va rombokesik ikosododekaedr, yoki katta romboikosododekaedr deb ataluvchi jismlar kiradi, ular kuboktaedr va ikosododekaedrdan boshqacha kesish variantida hosil bo'ladi

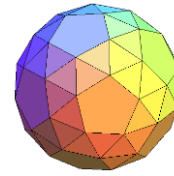
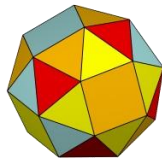


rombokesik kuboktaedr

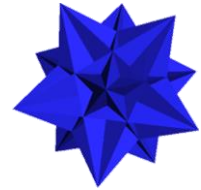
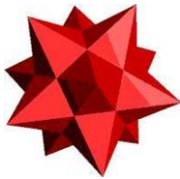


rombokesik ikosododekaedr

To'rtinchi guruhga ikkita puchuq jism - puchuq kub va puchuq dodekaedr.



Muntazam yulduzli ko'pyoqlar xam mavjud, ular Keplera-Puanso jismlari xam deb ataladi. Kepler kichik dodekaedr, uni tipratikan deb atadi va katta dodekaedrlarni kashf etdi. Puanso ikkita qo'ushma yulduzli ko'pyoqlarni topdi: katta yulduzli dodekaedr va katta ikosaedr.

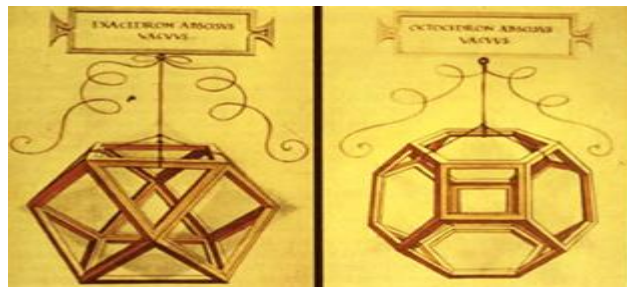


Kichik yulduzli
dodekaedr

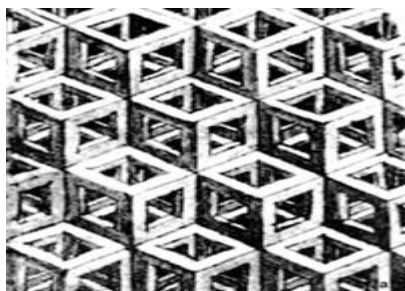
katta dodekaedr katta yulduzli
dodekaedr

katta ikosaedr

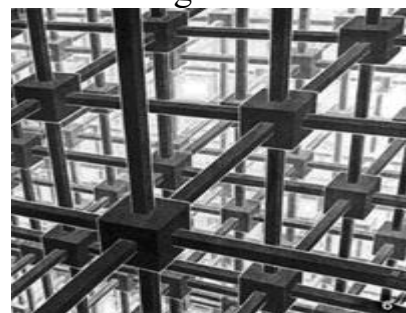
Ko'pyoqlarning me'morchilik va san'atda qo'llanilishi. Luki Pacholi «Ilohiy proporsiya» asarida Leonardoning 59 ta turli ko'pyoqlar tasvirlarini keltiradi, bu geometriya rivojiga katta ta'sir ko'rsatdi. Leonardoning kesik ikosaedr tasviri tushirilgan gravyurasini lotincha *Ycokedron Abscissus* (kesik ikosaedr) *Vacuus suzlari yozilgan...tushi*. Termin *Vacuus atamasia* ko'pyoq yoqlari «bo'sh» qalin chiziqlar bilan tasvirlanmaganligini bildiradi.



Leonardo da Vinci o'z usuli bilan kublarning jips joylashishini, bu bilan kristallarning davriy tuzilishini uch asr oldin bashorat qildi. Esherning bunga o'xshash ishi 1952 yilda chizilgan va u «Kubik fazoning kataklari» deb ataladi.

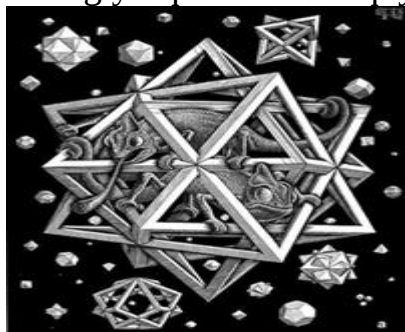


a)



b)

Rassom Mauritsa Esherning (1898-1972) ko'pyoqlarni badiiy tasvirlashning yorqin misollari quyidagi rasmlarda keltirilgan,



XIII-XVII asrlar ko'pyoqlar ko'pgina arxitektura inshootlarining asosi bo'lib xizmat qilgan. Ko'pyoq kublar, keyinchalik boshqa ko'pyoqlar, masalan, tetraedr qo'llanilgan.

Qurilishda piramidalar qadimdan foydalanib kelingan. Masalan, olamning birinchi mo'jizasi Xeops piramidasi eng ulkan qurilish inshooti mana besh ming yildan beri qad ko'tarib turibdi.



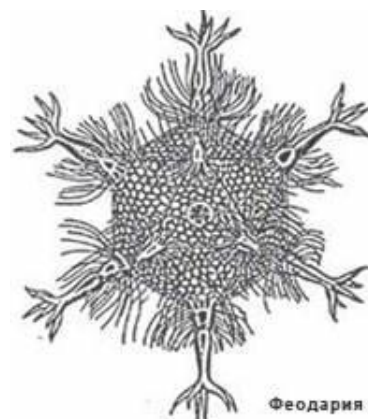
Dunyoning ettinchi mo'jizasi— Aleksandr mayog'i yoki Faros Aleksandriyskiy, eramizgacha 299 – 279 yillarda qurilgan balandligi 150 metr bo'lib, uchta minoradan iborat. Birinchisi parallelepiped shaklida, bu minorada kichikroq sakkiz yoqli spiral pandusli minora joylashgana.



Ko'pyoqlar tabiatda. Muntazam ko'pyoqlar eng qulay jism sifatida tabiatdan keng tarqalgan. Masalan, osh tuzi kristallari kub shaklida, muz va tog' billurining kristallari asoslariga oltiyokqi piramidalar quyilgan oltiyokli prizmalar shaklida.



Oltingugurt kristallari romb shaklida

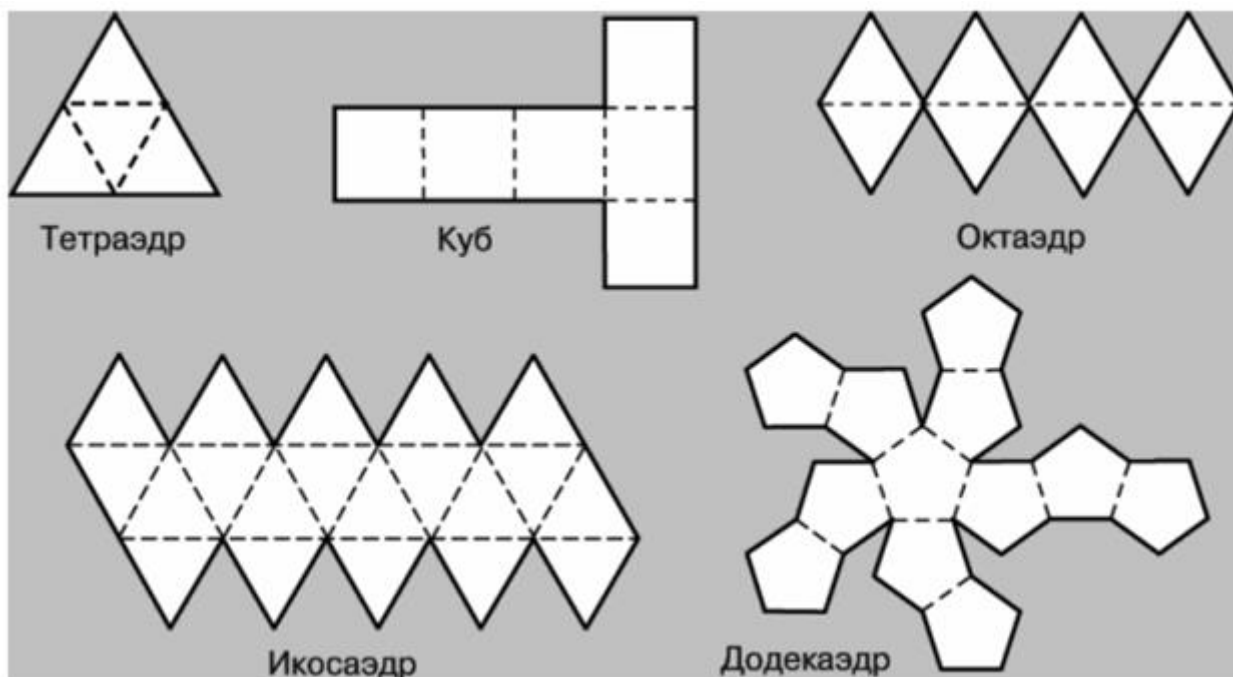


Olmos kristalarining yoshi 100 million yildan 2,5 milliard yilgacha etadi. Qirralangan olmos brilliant deb ataladi. Uning kristallari brilliant deb ataladi. Ular oktaedr shaklida bo'ladi.

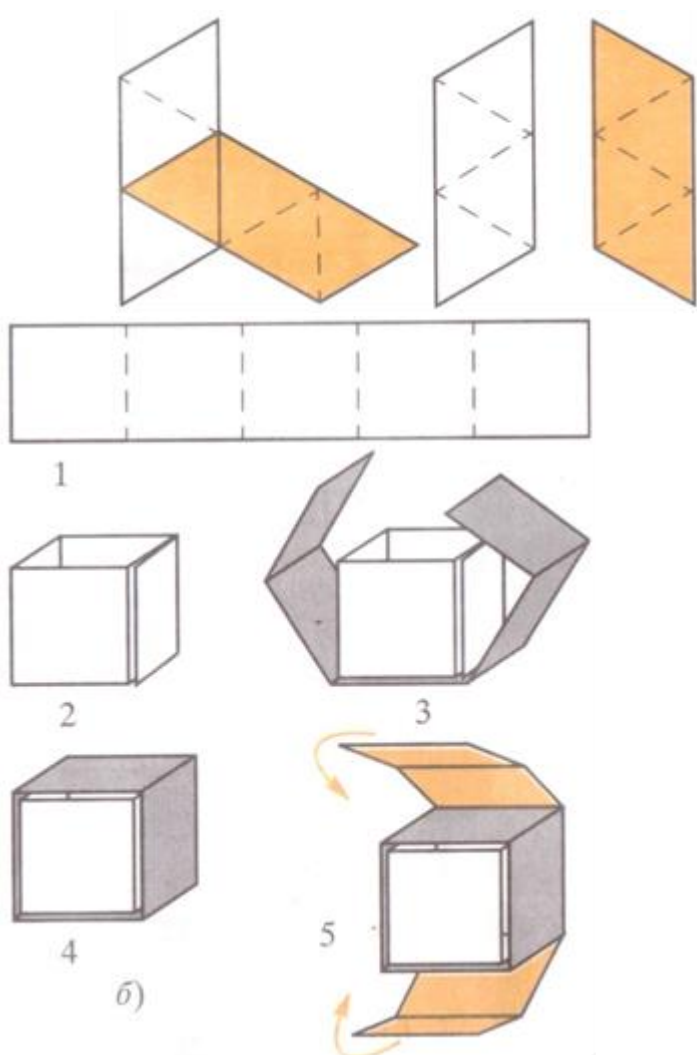
Muntazam ko'pyoqlar tirik tabiatda ham uchraydi. Masalan, bir xujayrali organizm feodarii skleti (Circjgjnica icosahedra) ikosaedrni eslatadi.

Ko'pyoqlarni yasash usullari.

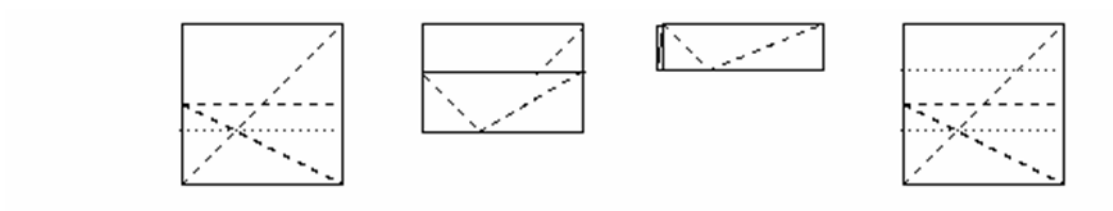
1- usul. Yoyilmalar yordamida.

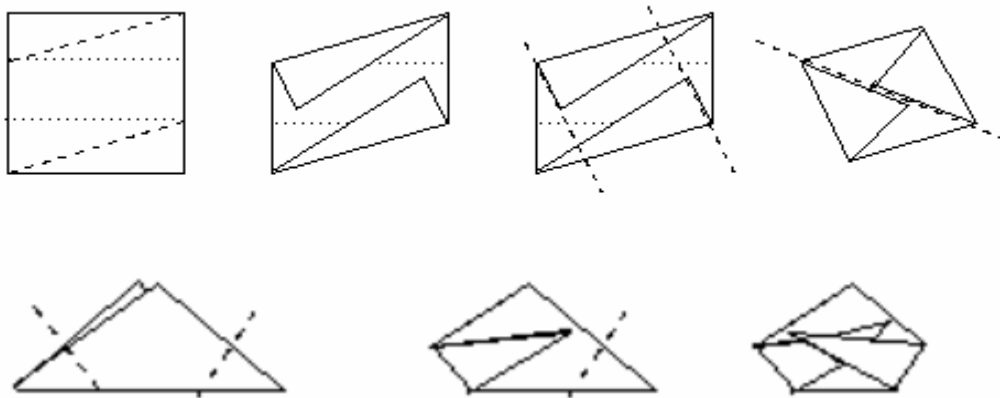


2 usul. «To‘qish» usuli

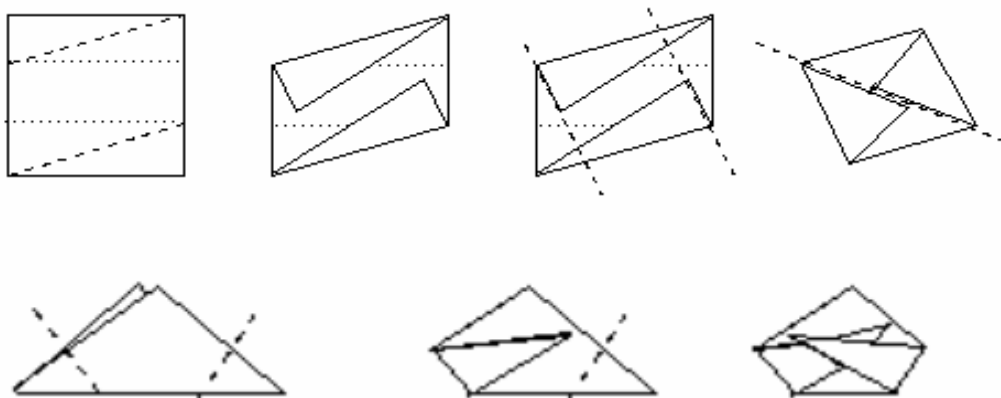
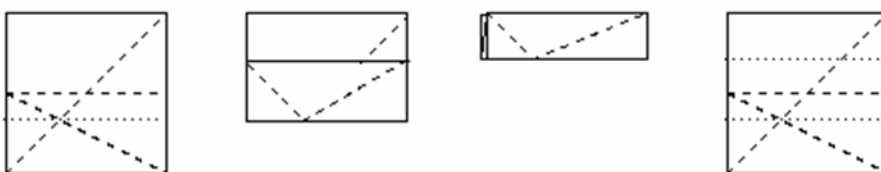
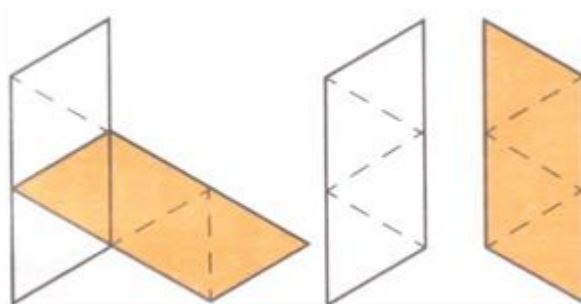


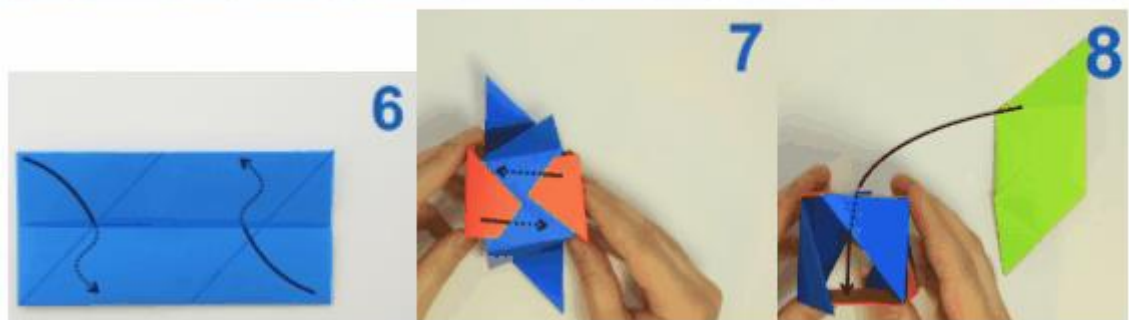
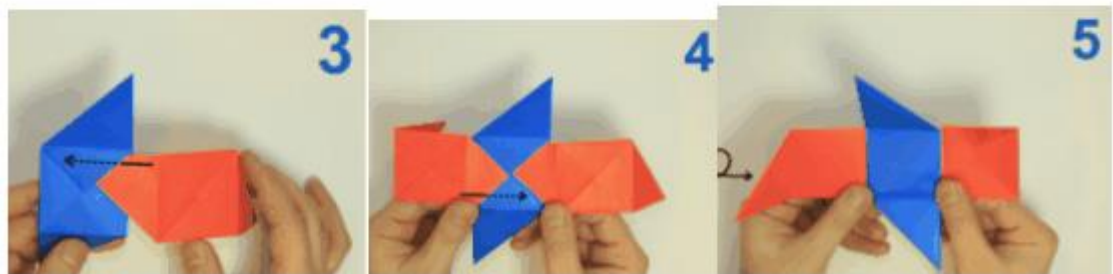
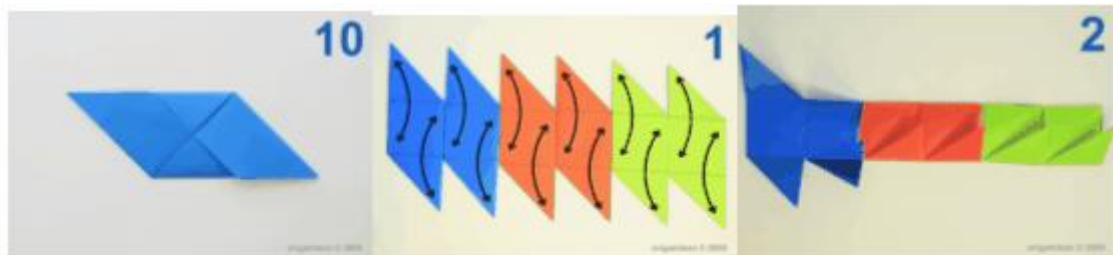
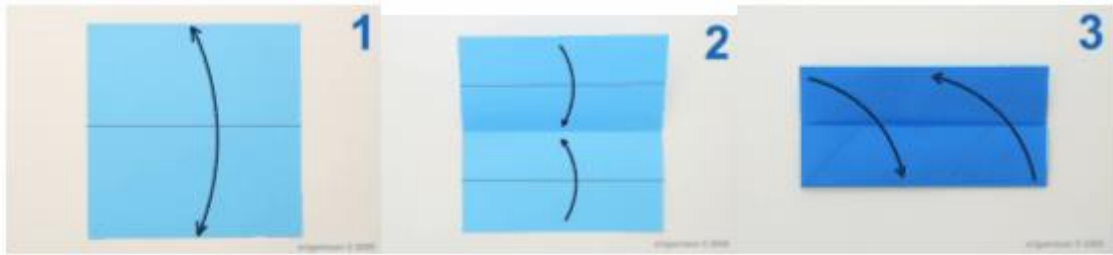
3-usul. Muntazam ko'pyoqlarini kvadrat shakldagi qog'ozdan yasash.





Ko'pyoqlarning ba'zi modellarini yasash sxemalari [youtube.com](https://www.youtube.com) saytida keltirilgan.

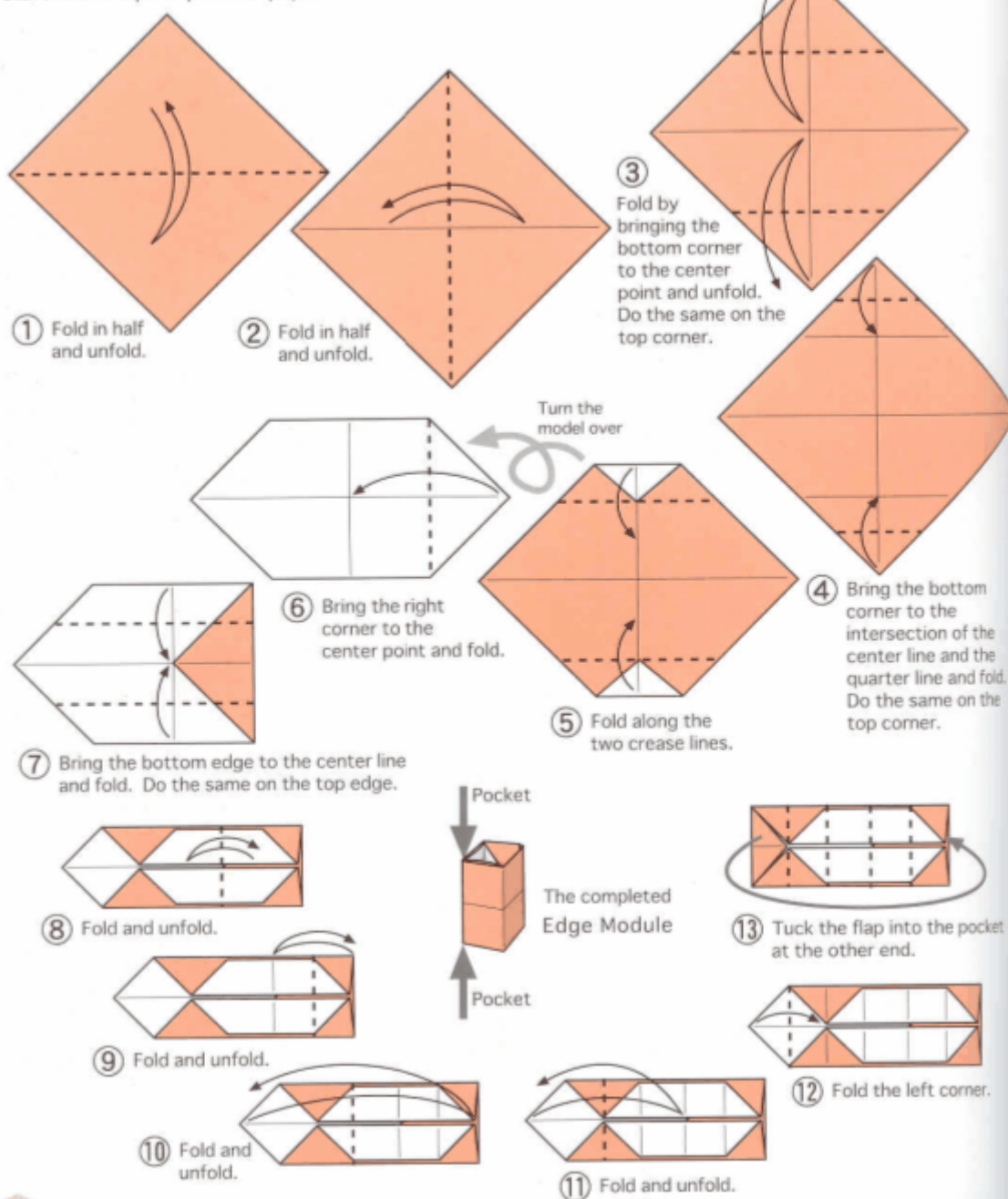




POLYHEDRA KIT: EDGE MODULE

ためんたいきつ と へん ふひん
多面体キット: 辺の部品
TA-MEN-TAI KIT - TO HEN NO BU-IN

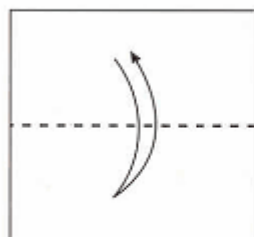
Start with a square piece of paper.



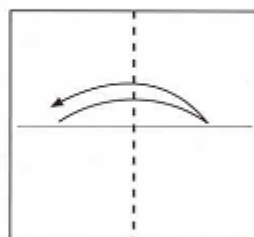
RIGHT CORNER 2

ちやうかくこーなーに
直角コーナー2
CHOK-KAKU KO - O - NA - A NI

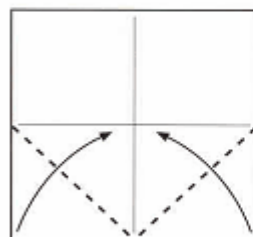
Start with a square piece of paper.



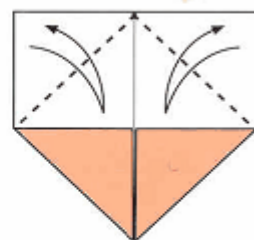
① Fold in half and unfold.



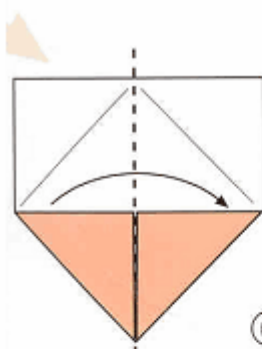
② Fold in half and unfold.



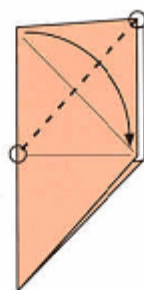
③ Bring the lower right corner to the center point and fold. Do the same on the left side.



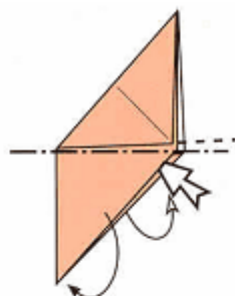
④ Fold by bringing each corner to the center point and unfold.



⑤ Fold in half.



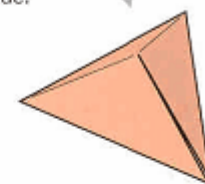
⑥ Fold the top point down along the line connecting the two points marked ○.



⑦ Spread the inside open and flatten the top.

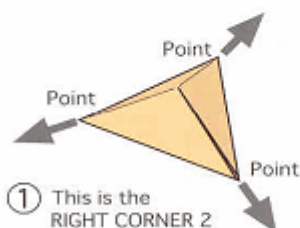


⑧ Fold inside.

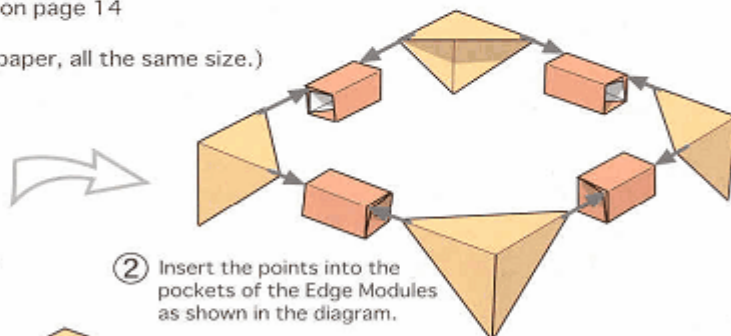


The completed
RIGHT CORNER 2

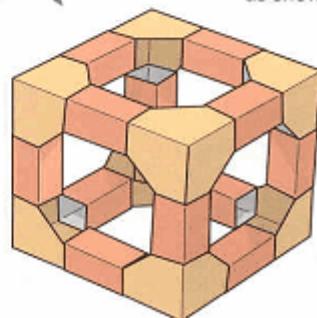
You need 8 RIGHT CORNER 2 units on page 14
and 12 Edge Modules on page 62.
(So you need 20 square pieces of paper, all the same size.)



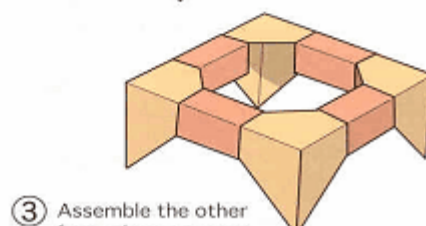
① This is the
RIGHT CORNER 2



② Insert the points into the
pockets of the Edge Modules
as shown in the diagram.

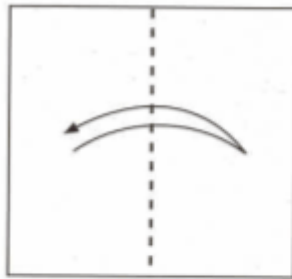


The completed
CUBE

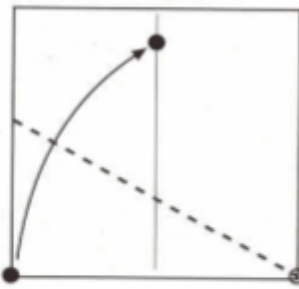


③ Assemble the other
faces the same way.

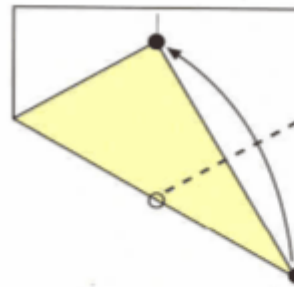
You need 10 of the same size, square pieces of paper.



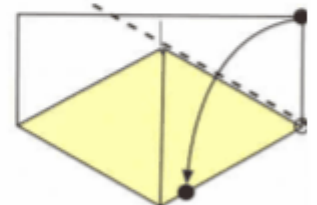
① Fold in half and unfold.



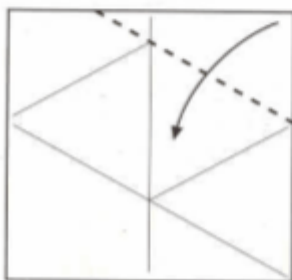
② Bring the lower left corner to the center line and fold. Make sure the fold goes through the lower right corner.



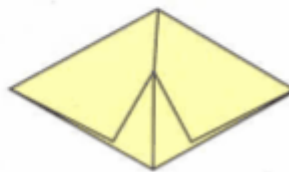
③ Bring the two points marked ● together and fold.



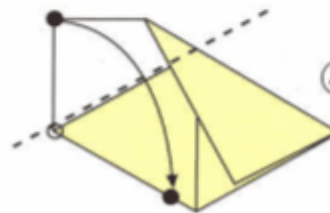
④ Fold along the edge.



⑦ Fold along the existing crease line.



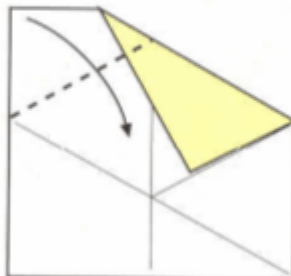
⑥ Unfold back to a square.



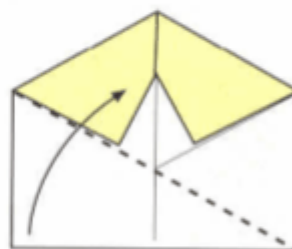
⑤ Fold along the edge.



⑫ Fold in half and tuck the flap under the top layer.



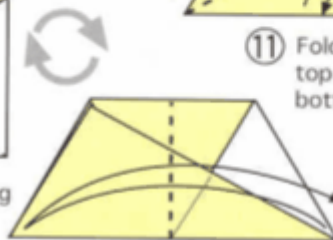
⑧ Fold along the existing crease line.



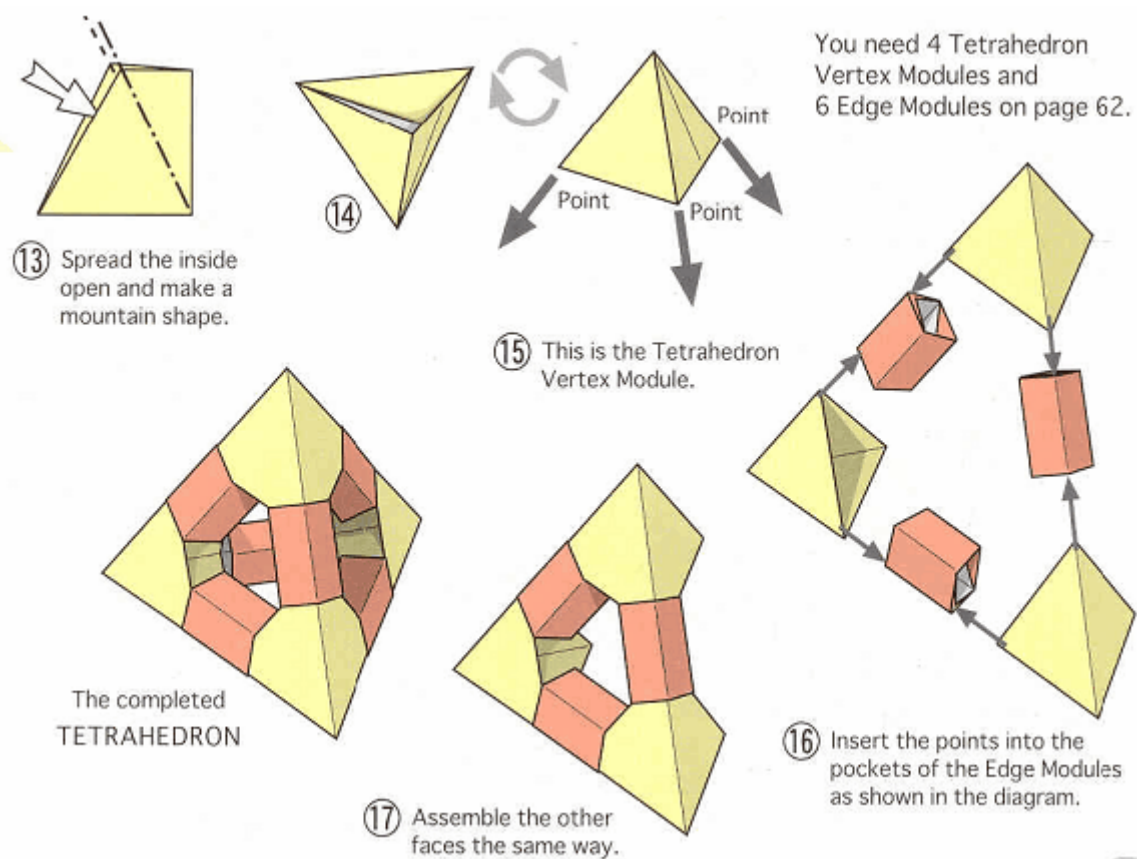
⑨ Fold along the existing crease line.



⑪ Fold the left edge of the top layer down to the bottom edge and unfold.



⑩ Fold in half and unfold.



Takrorlash uchun savollar

1. Ko'pyoqlarni o'rganish metodikasi haqida nimalarni bilasiz?
2. Muntazam ko'pyoqlarni o'qitishning mazmuni va xususiyatlari nimalarni o'z ichiga oladi?
3. Talabalarni geometriya o'qitishda murakkab jismlarga oid masalalar yyechishga o'rgatish usullarini ayting.

6-§. AYLANISH JISMLARINI O'RGANISH METODIKASI

Reja:

1. *Aylanish jismlarini o'rganishning uslubiy xususiyatlari.*
2. *Silindrni o'rganish metodikasi.*
3. *Konusni o'rganish metodikasi.*
4. *Sharni o'rganish metodikasi.*

Tayanch iboralar: *aylanish jismlari, konus, yog'och, silindr, sfera tenglamasi, sirt yuzasi, aylanish jismlari hajmlari, stereometriya, simmetriya.*

1. Aylanish jismlarini o'rganishning ahamiyati juda katta. Bunga birinchi sabab talabalarni amaliy hayotga, mehnat faoliyatiga tayyorlashda bu jismlarni o'rganish muhim rol o'ynaydi. Bunda o'qituvchi aylanish jismlari shaklida juda ko'p mashinalarning detallari, priborlar ega ekanligini ta'kidlashi lozim. Tokarlik stanogida metall yoki yog'ochni qayta ishlashda sanoatda juda ham tez va yuqori aniqlik darajasida silindr, konus va shar shaklidagi detallar tayyorlanadi. Aylanish jismlari ko'rinishidan kulolchilik ishlab chiqarishda ham keng qo'llaniladi, masalan, kulol loyning bir qismini aylanayotgan ishchi stoli o'rtasiga qo'yadi va unga yog'och yoki metall shablonni qisib, bu loy bo'lagiga zarur shakl beradi.

Aylanish jismlari haqidagi mavzu hajmi bo'yicha unchalik katta bo'lmaydi. Lekin bu yerda juda ko'p tushunchalar kiritiladi, ularni kiritish, o'rganish usullari turlicha. Mavzularni rejalashtirish

Mavzu: "Silindr. Konus. Shar. " - 19 soat

Maqsadlari: talabalarga asosiy aylanish jismlari haqida, ularning sirt yuzalarini hisoblash haqida ma'lumotlarni berish.

- 1-2. Silindr tushunchasi, sirt yuzasi.
- 3-5. Konus tushunchasi, sirt yuzasi. Kesik konus.
- 6-9 Sfera. Sfera tenglamasi. Sfera va tekislikning o'zaro joylashishi. Sferaga urinma tekislik. Sferaning yuzi.
- 10-12. Masalalar yyechish – praktikumlar.
- 13-15. Ko'pyoqlar, silindr, konus, sharga doir turli masalalar.
16. 1-nazorat ishi.
- 17-19. Masalalar yyechish.

Mavzu: "Jismlar hajmlari" - 16 soat

Maqsadlari: aylanish jismlari hajmlarini hisoblashga doir masalalarni yyechish jarayonida davom ettirish.

- 20-21. Hajm tushunchasi.
- 22-23. Silindr hajmi.
- 24-25. Jismlar hajmlarini aniq integral yordamida hisoblash.
- 26-27. Konus hajmi.
- 28-30. Shar, uning qismlari hajmi. Sfera yuzasi.

30-32. Masalalar yyechish bo'yicha praktikum.

33. 2-Nazorat ish

34-35. Loyihalar taqdimotlari.

Aylanish jismlarini o'rganishda chizmaning ahamiyati katta. Chizma talabaning fazoviy tasavvurini rivojlantirish uchun asosiy vosita hisoblanadi. Bunda doskada sekin-asta paydo bo'ladigan va o'qituvchi izohlashlari bilan ko'rsatiladigan chizma katta pedagogik ahamiyatga ega. O'qituvchi talabalarga tafsilotlarga berilmasdan aylanish jismlarini, u yoki bu kesimini tekislikda qanday tasvirlash kerakligini ko'rsatishi lozim. Aylanish jismlarining har birini, ularning alohida elementlarini, kesimlarini tasvirlash uchun talabalarga aylanani tasvirlash usulini eslatib o'tishi zarur (bu haqda talabalar chizmachilik kursidan ma'lumotga egalar).

Ba'zi masalalar yyechish jarayonida planimetrik masalani yyechish zarurati paydo bo'ladi. Bir nechta, maxsus tanlangan masalalarda o'qituvchi aylanish jismini qator hollarda butunlay tasvirini yasash kerak emasligini, faqat uning o'q kesimini tasvirlash muhim ekanligiga ishonch hosil qildiradi. Boshqa hollarda planimetrik chizma aylanish jismining tasvirini to'ldiradi.

Masala. Silindrga muntazam olti burchakli prizma ichki chizilgan. Agar asosining radiusi silindr balandligiga teng bo'lsa, prizma yon yoqi diagonal bilan silindr o'qi orasidagi burchakni toping.

Masala MN va OO_1 kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topishga olib kelinadi. AA_1D_1D o'q kesimning qarashga o'tish foydali. To'g'ri yasalgan chizma ($AO = OO_1$) $\alpha = 45^\circ$ ekanligini ko'rsatadi, bunda ONM uchburchakni qarash bilan ishonch hosil qilish mumkin.

O'qituvchining ishiga aylanish jismlari yoki ularning qismlari – ellipslar, ovalarni tasvirlash uchun turli xil shablonlar, shtamplar va h.k.lardan foydalanish mumkin. Ular talabalarining mustaqil ishlariga materiallarni tez tayyorlashda qulay bo'lib hisoblanadi.

O'qituvchi aylanish jismlari haqida talabalar qanday tasavvurlarga ega ekanligini yaxshi bilishi lozim. Takrorlashni tashkil etishda u kerakli hajmda tegishli materialni darsga kiritadi, oldindan takrorlashning shakl va usllarini rejalashtiradi.

Aylanish jismlarini o'rganishda tekislikda asosiy shakllar to'g'risidagi olingan bilimlar, ayniqsa, aylana, doira, ko'pburchak, ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar va ularning xossalari mustahkamlanadi va rivojlantiriladi.

"Aylanish jismlari" mavzusi talabalar tomonidan yomon o'zlashtirilmaydi. Lekin talabalarining bilimlar holatining tahlili shuni ko'rsatadiki, xususan stereometrik masalalarni yyechish bo'yicha malakalar yetarlicha shakllanmaganligi, topshiriqning grafik qismining bajarilishida kamchilik va xatolar mavjudligi ko'rinadi (qaralayotgan aylanish jismini tasvirlay olmasligi) va yyechishning alohida bosqichlarini nazariy asoslay olmasliklari, hammavaqt ham nazariy materialni to'g'ri foydalana olmasliklari, puxta bajarilmagan yozuvlarning mavjudligi kabilardir. Ishni bajarish natijalariga ularda mustahkam hisoblash malakalarining yo'qligi, planimetriya kursi

bo'yicha asosiy bilim va ko'nikmalarning esdan chiqarganligi ham salbiy ta'sir ko'rsatadi. Bularning hammasi o'qituvchidan silindr, konus va sharni o'rganishda sistemali takrorlashni amalga oshirishga, masalalar yyechishda hisoblashlarni tashkil etishga va h.k.larga katta e'tibor berishni talab etadi (vaholanki bu geometriya kursining yakunlovchi mavzularidan biri hamdir)

Silindr, konus, shar haqida kundalik faoliyatda, matematika o'qitishning oldingi bosqichlarida, boshqa fanlarni o'rganishda olingan ayrim ma'lumotlar sintezlanadi, mantiqiy rasmiylashtiriladi, sistemalashtiriladi.

Qaralayotgan bo'limga kiritilgan masalalar talabalarga olingan natijalarni ko'p uchraydigan amaliy masalalarni yyechishda qo'llanilishini ko'rsatishga imkon beradi.

"Aylanish jismlari" mavzusi bo'yicha qaraladigan masalalarni shartli ravishda ikki guruhga ajratish mumkin.

1) Silindr va konus:

a) ta'rif, sirt, simmetriya, urinma tekislik, o'q kesim va o'qqa perpendikulyar kesim, ichki va tashqi chizilgan ko'pyoqlar;

b) hajm;

v) yon sirti yuzi.

2) Shar va sfera:

a) ta'rif, simmetriya, kesim, urinma tekislik;

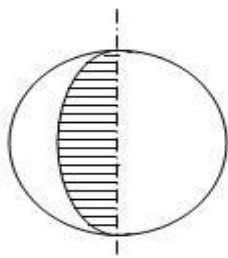
b) shar hajmi;

v) sfera yuzi.

Rejalashtirishda silindr va konusni yagona reja bo'yicha o'rganilishini ko'zda tutish lozim va asosiy tushunchalarni qarashda umumiy yondashuv bir xil ekanligiga e'tibor berish lozim. Silindr va konusning xossalari umumiylik va farqlarni ta'kidlab, o'qituvchi talabalarining ongli ravishda materialni o'zlashtirishlariga erishadi.

Odatda silindr, konus, shar va sfera stereometriya kursida ko'pyoqlardan keyin o'rganiladi. Bunda "jism", "sirt", "chegaralangan" va h.k. tushunchalar "Ko'pyoqlar" mavzusida kiritiladi. Aylanish jismining bayoni (jism yoki sirt) ko'pyoq qanday tushunilishi bilan mos keladi. L. S. Atanasyan va boshqalarning, kitobida silindr – bu jism, ko'pyoq esa – sirt, vaholanki mualliflar "...ko'pyoqli sirt bilan chegaralangan jism ko'pincha ko'pyoq deb ataladi," deb ta'kidlaydilar. Aylanish jismlarini o'rganish ketma-ketligi: silindr, konus, shar – odatda ko'pyoqlarning quyidagi o'rganish ketma-ketligiga mos keladi: prizma, piramida, muntazam ko'pyoqlar. Silindr (silindrik sirt) va prizma (prizma sirti) juda ko'p umumiy xossalarga ega. Xuddi shunga o'xshash mulohazani piramida va konus tushunchalariga nisbatan ham aytish mumkin. Ko'pgina darsliklarda sharning sirti – sfera alohida o'rganiladi. Silindrik sirt faqat L.S. Atanasyan va boshqalarning darsligida qaraladi.

O'quv materialini tashkil etish bo'yicha, qaralayotgan tushunchalar ketma-ketligini tanlashda va ayrim masalarni o'rganish usullari bo'yicha nazariyani bayon qilishning boshqa variantlar ham mavjud



Geometriya kurslarida silindr (konus)ning bayon qilinishini taqqoslasak, ko'rinadiki:

1) silindr (konus)ning qat'iy ta'rifi yo'q, faqat uning tavsifi berilgan;

2) silindr (konus) deganda geometrik jism, ya'ni chegaraga ega chegaralangan fazoviy soha tushuniladi.

Bunda silindr (konus)tushunchasiga uchta uslubiy yondashuvni ko'rish mumkin.

A.V. Pogorelovning darsligida silindr ikki parallel tekisliklarning orasida joylashgan va ularning birida doirani kesib o'tuvchi barcha parallel to'g'ri chiziqlar kesmalar bilan hosil qilingan jism deb ta'riflanadi.

L.S. Atanasyan va boshqalarning kitobida dastlab chegara – silindrik sirt va bu sirtga nisbatan ma'lum tarzda joylashgan ikkita doira – fazoviy soha bilan chegaralangan sirt kiritiladi. So'ngra, silindr qaralgan sirt bilan chegaralanga jism deb kiritiladi.

Har bir yondashuv o'z afzalliklariga ega: birinchisi ko'rgazmali ikkinchisi "ishchi" shu ma'nodaki keyinchalik yon sirt tushunchasi keng foydalaniladi. Silindrning aylanish jism sifatidagi ta'riflanishi albatta mavzuning har qanday bayon qilinishida qaralishi lozim. Bu yo'l nazariya va amaliyotning aloqalarni ko'rsatish uchun keng imkoniyatlar beradi.

Agar silindr va konus yagona sxema bo'yicha o'rganilsa, shar (sfera) aylanish jismlari ichida alohida o'rinni egallaydi. Shar va uning sirtini o'rganishda talabalarning planimetriya va boshqa fanlardan olingan doira va aylana haqidagi bilimlaridan to'liq foydalaniladi. Shuning uchun o'quv jarayonini tashkil etishda talabalarning o'zlari zarur tasdiqlarni mustaqil ifodalashlariga erishish lozim.

Silindr va konusdan farqli shar va sfera tushunchalari doira va aylananing fazoviy analoglari sifatida bayon etiladi. Shar berilgan nuqtadan berilgandan oshmaydigan masofada joylashgan fazoning barcha nuqtalaridan iborat jism sifatida talqin etiladi. Sfera esa sharning sirti sifatida kiritiladi.

Silindr va uning xossalari

1. Silindr asoslari teng, chunki parallel ko'chirish – harakat.
2. Silindrda asoslar parallel tekisliklarda yotadi, chunki parallel ko'chirishda tekislik parallel tekislikka o'tadi.
3. Silindrda yasovchilar parallel va teng, chunki parallel ko'chirishda nuqtalar parallel to'g'ri chiziqlar bo'ylab bir xil masofaga siljiydi.

Shar

Shar deb berilgan nuqtadan berilgandan katta bo'lmagan masofada joylashgan fazoning barcha nuqtalaridan iborat jismga aytiladi. Bu nuqta shar markazi, berilgan masofa esa shar radiusi deb ataladi.

Shar chegarasi shar sirti yoki sfera deb ataladi. Shunday qilib, sferaning nuqtalari markazdan radiusga teng masofadan uzoqlashgan sharning barcha

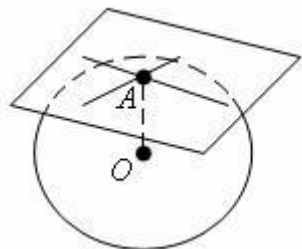
nuqtalaridan iborat. Shar markazini shar sirti nuqtasi bilan tutashtiruvchi ixtiyoriy kesma radius deb ataladi.

Shar sirti ikki nuqtasini tutashtiruvchi va shar markazidan o'tuvchi kesma diametr deb ataladi.

Shar bilan tekislikning kesimi

1-teorema. Shar bilan tekislikning har qanday kesimi doiradan iborat. Bu doiraning markazi shar markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosidan iborat.

Isbot. Q - kesuvchi tekislik va O - shar markazi bo'lsin. Shar markazidan Q tekislikka perpendikulyar tushiramiz va uni O' bilan belgilaymiz, u bu perpendikulyar asosi bo'ladi. X - Q tekislikka tegishli sharning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Pifagor teoremasiga ko'ra

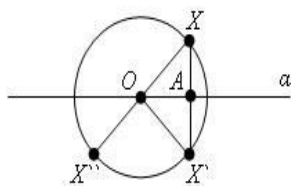


$$OX^2 = OO'^2 + O'X^2$$

R shar radiusidan katta bo'lmagan uchun

$$O'X \leq \sqrt{R^2 - OO'^2}$$

ya'ni Q tekislik bilan sharning kesimining ixtiyoriy nuqtasi O' nuqtadan



$$\sqrt{R^2 - OO'^2}$$

katta bo'lmagan masofada joylashadi, demak, O' markazi va

$$\sqrt{R^2 - OO'^2}$$

radiusli doiraga tegishli bo'ladi. Aksincha: bu doiraning ixtiyoriy X nuqtasi sharga tegishli bo'ladi. Demak, sharning Q tekislik bilan kesimi markazi O' nuqtada bo'lgan doiradan iborat. Teorema isbotlandi.

Shar simmetriyasi

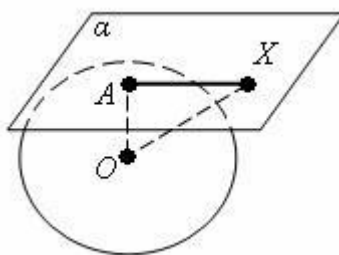
2-teorema. Sharning ixtiyoriy diametral tekisligi uning tekisligi hisoblanadi. Sharning markazi uning simmetriya markazidan iborat.

Isbot. α - diametral tekislik va X - sharning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. XX' kesmaga nisbatan X nuqtaga simmetrik va u bilan uning o'rtasida kesishadigan X' nuqtani yasaymiz. OAX va OAX' to'g'ri burchakli uchburchaklar tengligidan $OX' = OX$ kelib chiqadi. $OX \leq R$ bo'lgani uchun, u holda $OX' \leq R$ bo'ladi, ya'ni X nuqtaga simmetrik nuqta, sharga tegishli bo'ladi. Teoremaning birinchi tasdig'i isbot bo'ldi. X'' - X nuqtaga shar markaziga nisbatan simetrik nuqta bo'lsin. U holda. $OX'' = OX \leq R$, ya'ni X'' nuqta sharga tegishli bo'ladi. Teorema to'la isbotlandi.

Sharga urinma tekislik

Shar sirtining A nuqtasidan o'tuvchi va A nuqtadan o'tkazilgan radiusga perpendikulyar tekislik urinma tekislik deb ataladi. A nuqta urinishi nuqtasi deb ataladi.

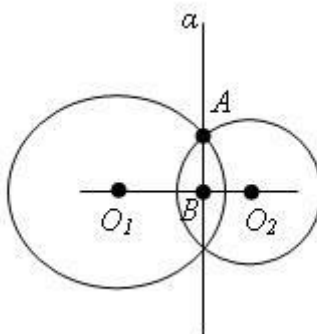
3-teorema. Urinma tekislik shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga – urinish nuqtasiga ega.



Isbot. α - sharga urinma tekislik va A - urinish nuqtasi bo'lsin. q tekislikning A nuqtadan farqli ixtiyoriy A nuqtasini olamiz. OA - perpendikulyar, OX - og'ma bo'lganligi uchun, u holda $OX > OA = R$ o'rinli bo'ladi. Demak, X nuqta sharga tegishli emas. Teorema isbotlandi.

Ikkita sferaning kesishishi

4-teorema. Ikkita sferaning kesishish chizig'i aylanadan iborat.



Isbot. O_1 va O_2 sferalar markazlari va A - ularning kesishish nuqtasi bo'lsin. A nuqta orqali O_1, O_2 to'g'ri chiziqqa perpendikulyar α tekislikni o'tkazamiz.

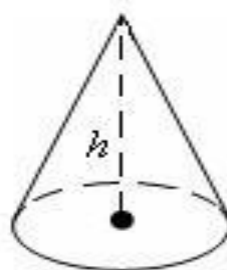
B orqali α tekislikning to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini belgilaymiz. Sharining tekislik bilan kesimi haqidagi teoremaga ko'ra ikkala sferani α tekislik A nuqtadan o'tuvchi markazi B da bo'lgan K aylana bo'ylab kesishadi. Shunday qilib, K aylana sferalar kesishishiga tegishli bo'ladi. Sferalar K aylananing nuqtalaridan boshqa kesishish nuqtalariga ega emasligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, sferalar kesishish nuqtasi X K aylanada yotmasin. X nuqta va O_1, O_2 to'g'ri chiziq orqali tekislik o'tkazamiz. U sferalarni markazlari O_1 va O_2 nuqtalarda bo'lgan aylanalar bo'ylab kesib o'tadi. Bu aylanalar K aylanishga tegishli ikki nuqtada, yana X nuqtada kesishadi. Lekin ikki aylana ikkitadan ko'p bo'lmagan kesishish nuqtasiga ega. Demak, sferalar kesishmasi aylanadan iborat. Teorema isbotlandi.

Konus

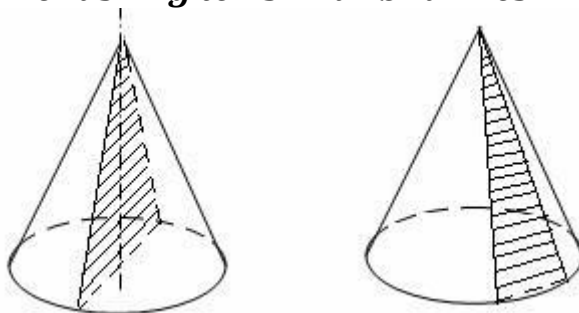
Konus deb doiradan- konus asosi, bu doiraga tekisligida yotmagan nuqta-konus uchi va konus uchini asos nuqtalari bilan tutashtiruvchi barcha kesmalardan iborat jismga aytiladi. Konus uchini asosi aylanasini nuqtalari bilan

tutashtiruvchi kesmalar konus yasovchilari deyiladi. Konus to'g'ri deyiladi, konus uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi to'g'ri chiziqli asos tekisligiga perpendikulyar bo'lsa.



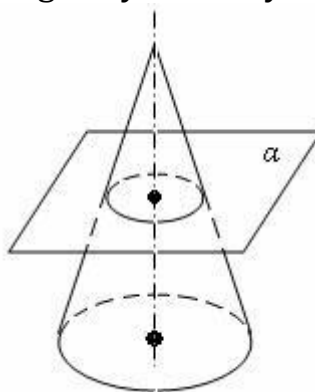
Konus balandligi deb uning uchidan asos tekisligiga tushirilgan perpendikulyarga aytiladi.

Konusning tekisliklar bilan kesimi



Konusning uchidan o'tuvchi uning tekislik bilan kesimi yon tomonlari konusning yasovchilaridan iborat teng yonli uchburchakdan iborat. Xususan, konusning o'q kesimi teng yonli uchburchakdan iborat.

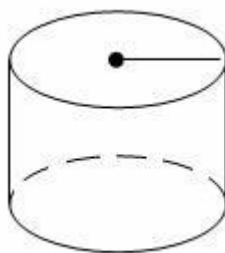
1-teorema. Konus asosiga parallel tekislik konusni doira bo'yicha, yon sirtini - markazi konus o'qida bo'lgan aylana bo'ylab kesib o'tadi.



Isbot. α -konus asos tekisligiga prarallel tekislik va konusni kesib o'tuvchi tekislik bo'lsin. q tekislikni va asos tekislik bilan ustma-ust tushiruvchi konus uchiga nisbatan gomotetiya almashtirish konusning tekislik bilan kesimini konus asosi bilan ustma- ust tushiradi. Demak. konusning tekislik bilan kesimi doira, yon sirtining kesimi- markazi konus o'qida bo'lgan aylanadan iborat. Teorema isbotlandi.

Konus asosiga parallel va konusni kesib o'tuvchi tekslik undan kichik bo'lakka ajratadi. Qolgan qismi kesik konus deb ataladi.

Silindr

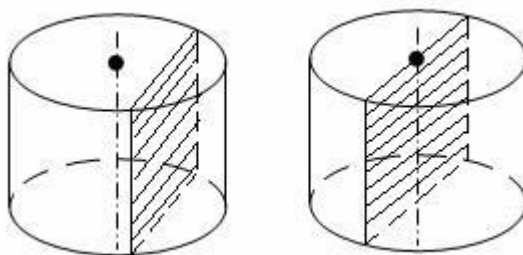


Silindr deb bir tekislikda yotmagan va parallel ko'chirish bilan ustma-ust tushadigan ikkita doira va bu doiralarning mos nuqtalarini tutashtiruvchi barcha kesmalardan iborat jismga aytiladi. Doiralari silindr asoslari, doiralari aylanalarining mos nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalar – silindr yasovchilari deb ataladi.

Agar uning yasovchilari asoslar tekisligiga perpendikulyar bo'lsa, silindr to'g'ri deb ataladi.

Silindr radiusi deb uning asosiy radiusiga aytiladi. Silindr balandligi deb uning asoslari tekisliklari orasidagi masofaga aytiladi. Silindr o'qi deb asoslar markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa aytiladi. U yasovchilariga parallel.

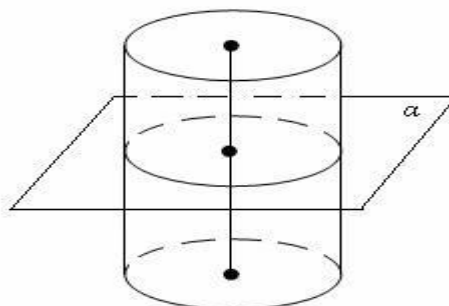
Silindrning tekislik bilan kesimi



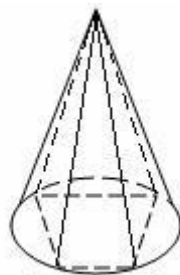
Silindrning uning o'qiga parallel tekislik bilan kesimi to'g'ri to'rtburchakdan iborat. O'q kesim deb silindr o'qidan o'tuvchi kesimga aytiladi.

Teorema. Silindr asosiga parallel tekislik uning yon sirtini asos aylanasi bilan teng aylana bo'ylab kesib o'tadi.

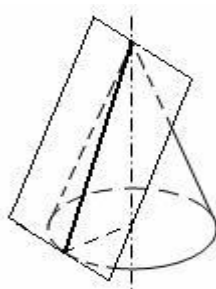
Isbot. α -silindr asosi tekisligiga parallel tekislik. Silindr o'qi yo'nalishida parallel ko'chirish yon sirtning tekislik bilan kesimini asos aylanasi bilan ustma-ust tushiradi. Teorema isbotlandi.



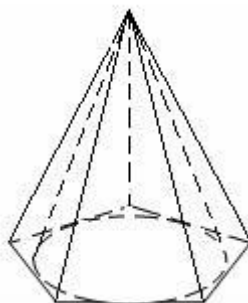
Ichki va tashqi chizilgan piramidalar



Konusga ichki chizilgan piramida deb asosi aylanasi ichki chizilgan ko'pburchakdan, uchi esa konus uchidan iborat bo'lgan piramidaga aytiladi. Konusga ichki chizilgan piramida yon qirralari konusning yasovchilaridan iborat.

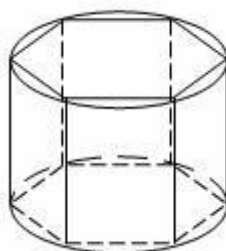


Konusga urinma tekislik deb konus yasovchisidan o'tuvchi va bu yasovchini o'z ichiga olgan o'q kesim tekisligiga perpendikulyar tekislikka aytiladi.

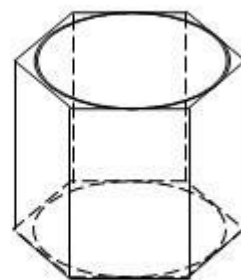
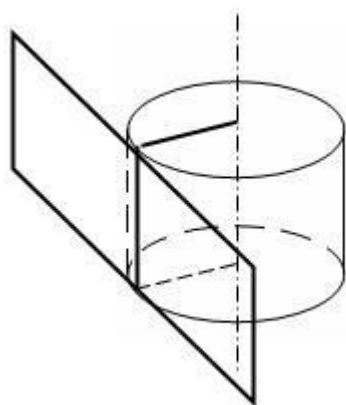


Konusga tashqi chizilgan konus deb, asosi asosi aylanasi tashqi chizilgan ko'pburchakdan, uchi esa konus uchidan iborat bo'lgan piramidaga aytiladi. Tashqi chizilgan piramida yon yoqlari tekisliklari konusning urinma tekisliklari bo'ladi.

Ichki va tashqi chizilgan prizmalar



Silindrga ichki chizilgan prizma deb asoslari tekisliklari silindr asoslari tekisliklaridan, yon qirralari – silindr yasovchilaridan iborat prizmaga aytiladi.



Silindrga urinma tekislik silindr yasovchisidan o'tuvchi va bu yasovchini o'z ichiga olgan o'q kesimi tekisligiga perpendikulyar tekislikka aytiladi.

Silindrga tashqi chizilgan prizma deb, asoslari tekisliklari silindr asoslari tekisliklaridan, yon yoqlari silindrga urinuvchi prizмага aytiladi.

Ichki va tashqi chizilgan ko'pyoqlar

Ko'pyoq sharga ichki chizilgan deyiladi, agar uning barcha uchlari shar sirtida yotsa.

Ko'pyoq sharga tashqi chizilgan deyiladi, agar uning barcha yoqlari yoqlari shar sirtiga urinsa.

Aylanish jismlari. Asosiy formulalar.

Belgilashlar:

V - hajm;

S_{poln} - to'la sirt yuzi;

S_{bok} - yon sirti yuzasi;

l - yasovchisi;

R - radius;

D, d - diametr;

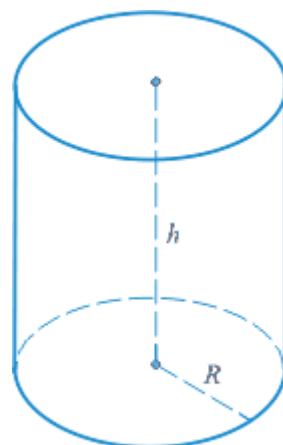
h - balandlik.

Silindr

$$S_{\text{bok}} = 2\pi R \cdot h$$

$$S_{\text{to'la}} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot h$$

$$V = \pi R^2 h$$

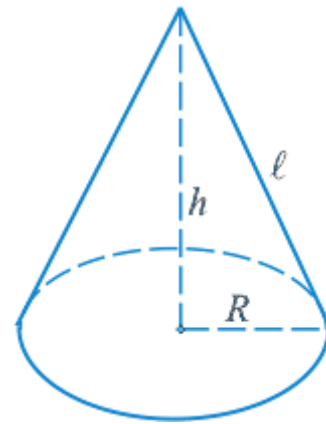


Konus

$$S_{\text{бок}} = \pi R \cdot \ell = \frac{1}{2} \pi \cdot d \cdot \ell$$

$$S_{\text{полн}} = \pi R(R + \ell)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

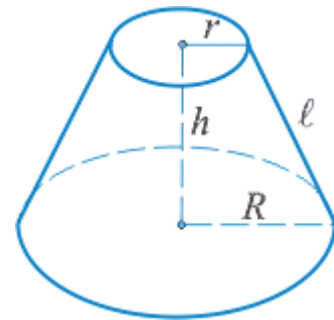


Kesik konus

$$S_{\text{бок}} = \pi \cdot \ell \cdot (R + r) = \frac{1}{2} \pi (D + d) \ell$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + \pi(R^2 + r^2)$$

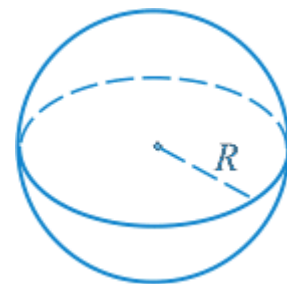
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot h (R^2 + Rr + r^2)$$



Shar

$$S_{\text{полн}} = 4\pi \cdot R^2 = \pi \cdot d^2$$

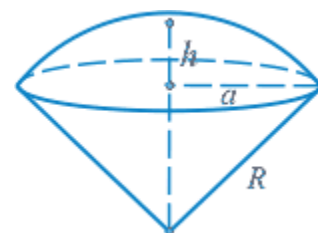
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$$



Shar sektori

$$S_{\text{полн}} = \pi R(2h + a)$$

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h$$



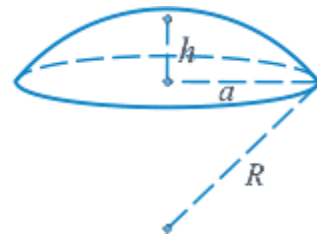
Shar segmenti

$$a^2 = h(2R - h)$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(2Rh + a^2) = \pi(h^2 + 2a^2)$$

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right) = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3a^2)$$



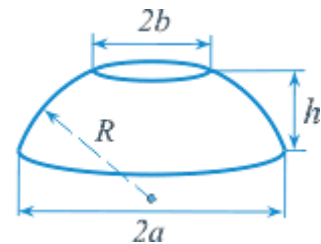
Shar qatlami

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2h} \right)^2$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(2Rh + a^2 + b^2)$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$$



1. Aylanish jismlarini o'rganish extiyoji zarurligi bu jismlar qo'llaniladigan hayotiy misollarni bayon etish jarayonida amalga oshiriladi. Aylanish jismlarini o'rganishda dastlab aylana, doira va ko'pburchak haqidagi talabalar bilimlari mustahkamlanadi. Aylanish jismlarini o'rganish uchun faqatgina stereometrik masalalarni yyechish yetarli emas, yana buning uchun planimetriyadan zarur ma'lumotlarni takrorlash, masalalar yyechish jarayonida hisoblashlarni puxta tashkil etish talab etiladi. Mavzuni o'rganish ikkita mantiqiy qismga ajratiladi.

1. *Silindr, konus*: a) ta'rif, sirtlar, simmetriya, urinma tekislik, o'q kesimi, unga perpendikulyar o'q kesimi, ichki va tashqi chizilgan ko'pyoqlar; b) hajmi; v) yon sirt yuzi.

2. *Shar va sfera*: a) ta'rif, simmetriya, kesim, urinma tekislik; b) sharning hajmi; v) sfera sirti yuzasi.

2. **Silindrni** o'rganishda paralel tekisliklar orasida joylashgan parallel to'g'ri chiziqlar teng kesmalari bilan hosil qilingan jism kabi bayon qilinadi. Uning elementlari modellarda ko'rsatiladi. So'ngra silindr tasviri quyidagicha yasalishi ko'rsatiladi: ellipslar yasaladi (yuqori va quyi asoslar ellipslardan iborat); A va B nuqtalarda ellipslarga urinuvchi ikki paralel urinmalar yasaladi; bu urinmalarda ikkita teng AA₁ va BB₁ kesmalarni ajratamiz; AA₁ va BB₁ kesmalarga urinuvchi birinchisiga teng ellips yasaladi.

Bunda quyidagi mazmunli topshiriqlar berilishi maqsadga muvofiq: silindrni tasvirlash, silindrning ixtiyoriy uchta yasovchisini o'tkazish; silindrning balandligini ko'rsatish. O'q kesimi xossalari masalalarda

qo'llanilishi ko'rsatiladi. Bunda ikki hol bo'ladi: o'q kesimi – to'g'ri to'rtburchak, ixtiyoriy o'q kesimlari o'zaro teng. Turli hollarni modellarda ko'rsatish zarur.

Silindrga **urinma tekislik** aylanaga urinma ta'rifi asosida ta'riflanadi.

3. **Konusni** o'rganish uning ta'rifini berishdan boshlanadi, to'g'ri burchakli uchburchakning o'zining birorta kateti atrofida aylanishidan hosil bo'lgan geometrik jism sifatida ta'riflanadi. Konusning tasviri quyidagi ketma-ketlikda bajariladi: ellips yasaladi, nuqta belgilanadi, bu nuqtadan ellipsga ikkita urinmalar o'tkazish, kesik konus holida uning chetki yasovchilariga urinuvchi konus uchiga nisbatan birinchi ellipsga gomotetik ellips yasaladi.

Konus elementlardan: yasovchi, uchi, asosi, balandligi o'rganiladi. Quyidagi xossalarga ega konus kesimlari qaralashi mumkin: 1) konus uchidan o'tuvchi kesuvchi tekislik xossasi; 2) konus asosiga parallel tekislik.

Konus o'q **kesimi** o'z xossalariga ega. Konus kesimi – doira bo'lgan hol uchun quyidagi munosabat o'rinli: radiuslar nisbatlari balandliklar nisbatlariga tengligi isbotlanadi.

4. **Sharni** o'rganishda uning quyidagi elementlari qaraladi: markaz, radius, diametr, diametral qarama-qarshi nuqtalar. Sharining kesimlari haqida talabalar quyidagilarni bilishlari talab etiladi:

1) $R=0$ da kesimda shar radiusiga teng radiusli doira hosil bo'ladi;

2) Agar balandliklar teng bo'lsa va shar radiusidan kichik bo'lsa, u holda shar radius kvadratidan mos ravishda balandliklar kvadratlarning ayirmalariga teng bo'ladi.

3) Agar balandlik shar radiusiga teng bo'lsa, u holda sharga urinma tekislik hosil bo'ladi.

Bu barcha xossalar talabalar oldiga qo'yilgan o'quv masalalarni hal etish jarayonida isbotlanishi kerak.

Aylanish jismlarini o'rganishda quyidagi jihatlarga e'tibor berish talab etiladi:

- har bir jism biror o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'ladi;

- aylanish jismlari kesimlari o'rganishda tekis geometrik shakllar xossalarini bilish va tadbiq etish;

- aylanish jismlari geometrik miqdorlari sirti, hajmi aniqlashda aylana va doira tushunchalari geometrik ulchovlari xaqida tushunchalarni takrorlash;

- aylanish jismlari bilan ko'pyoklar orasidagi o'xshashlik va tafovutlarni aniqlash, murakkab ichki va tashqi chizilgan jismlar xossalarini o'rnatish;

- bu jismlarning turmushda qo'llanilishiga doir amaliy mazmunli masala va mashqlardan foydalanish;

- nihoyat, aylanish jismlari geometrik tasvirini yasash va yasashga doir masalalarni yyechish talabalarining fazoviy tasavvurlarini shakllantirish uchun muhim asos bo'lib xizmat qiladi.

Shuningdek, aylanish jismlarini o'rganish orqali sferik geometriya elementlari haqida ma'lumotlar berish iqtidorli talabalar bilan muhokama etilishi mumkin.

Bu jismlar orasida shar va uning qismlarini urganish ma'lum ahamiyatga ega, chunki uning turmushda keng qo'llanilishi va tatbiqlari bunga keng imkoniyatlar yaratadi.

Sharga doir masalalarni o'rganishda tekislikdagi doira xossalariga analogik xossalarini keltirib chiqarish va umumlashtirish ham talabalarning shar va doira bog'lanishlarini chuqur o'rganib olishlariga samarali ta'sir ko'rsatadi.

Bundan tashqari aylanish jismlari xossalarini o'rnatishda nafaqat tekislikdagi, balki talabalarning fazoviy chizmalarni yasash va kesimlarni yasay olish ko'nikmalarini shakllantirishi muhim ahamiyatga ega. Bunda tadqiqotga doir hamda isbotlashga doir mashqlardan foydalanish talab etiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Aylanish jismlariga qanday ta'riflar beriladi?
2. Silindr va konusning qanday elementlari mavjud va ularning tasvirlash qanday usulda amalga oshiriladi?
3. Shar va sfera qanday tartibda o'rganiladi?
4. Aylanish jismlarining sirti va hajmini topish masalalari qanday o'rganiladi?

7-§. VEKTORLARNI O'RGANISH USLUBIYATI

Reja:

1. *Vektor tushunchasi va uning hozirgi fanda tutgan o'rni.*
2. *Vektor usulini o'rganish maqsadlari.*
3. *Vektorlar ustida amallar.*
4. *Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.*
5. *Vektorlarning masalalar yechishgi va teoremlarni isbotlashga qo'llash.*

Tayanch iboralar: *vektor, vektor tengliklar, vektorlarni qo'shish, ayirish, skalyar ko'paytma, tatbiqlari, masalalar yechish.*

Vektor tushunchasini elementar geometriyada qanday darajada o'qitish maqsadga muvofiq? Bu tushunchani o'rta maktabga kiritish qanday darajada maqsadga muvofiq? Avvalo talabalarni hozirgi zamon matematika fanlari asoslari bilan tanishtirish asosiy vazifa hisoblanadi, shuning uchun uning eng muhim tushunchasi – vektor ham talabalar o'zlashtiradigan tushunchalar qatoriga kiritilishi lozim. Ikkinchi tomondan, vektor amallar ko'rgazmaliligi va bundan kelib chiqadigan xossa va qonuniyatlarning asoslash osonligi bu masalalarni bayon qilishda uslubiy qiyinchiliklarga olib kelmaydi. Bundan tashqari, bir qator teoremlarning murakkab va uzun isbotlarini vektorlar

xossalariga qarab oddiy va qulay isbotlar bilan almashtirish imkoniyati tug'iladi. Masalan, uchburchaklar medianalari kesishishi haqidagi teoremani, kosinuslar teoremasini, parallelogramm diagonallari kvadratlari yig'indisi haqidagi teorema va h.k. larni isbotlashda vektorlar usuli yaxshi natijalar beradi.

KHKlarda vektor usulning o'rganilishidan maqsad:

- geometrik masalalar yyechish va teoremlar isbotlashning samarali usulini berish;

- vektor apparatining bilimning boshqa sohalarida keng qo'llanilishini ko'rsatish;

- vektor usulini masalalar yyechishda umumlashtirish maqsadida foydalanish:

- talabalarda tafakkurning maqsadga yo'nalganlik, qulaylik, puxtalik kabi xislatlarini tarkib toptirish.

2. Masalalar yyechishda vektor usulining asosiy elementlari quyidagilar:

1) masala shartini vektorlar tiliga o'tkazish, jumladan:

- vektorlarni kiritish;

- agar zarur bo'lsa, koordinatalar sistemasini tanlash;

- bazis vektorlarni tanlash;

- barcha kiritilgan vektorlarni bazis vektorlar orqali yoyish;

2) vektor tengliklar sistemasini tuzish;

3) vektor tengliklarni soddalashtirish;

4) vektor tengliklarni algebraik tenglamalar bilan almashtirish va ularni yyechish;

5) sistemaning olingan yechimining geometrik ma'nosini tushuntirish.

3. Masalalarni vektor usuli bilan yyechishga o'rgatish uchun talabalar egallashi lozim bo'lgan tushuncha va ko'nikmalar:

- **asosiy tushunchalar:** vektor, vektor boshi, vektor oxiri, bir xil va qarama-qarshi yo'nalgan vektorlar, vektor moduli, teng vektorlar, nol vektorlar, vektor koordinatalari, vektor proeksiyasi, kollinear vektorlar, nokollinear vektorlar, birlik vektor, skalyar ko'paytma ko'paytma, nol bo'lmagan vektorlar orasidagi burchak;

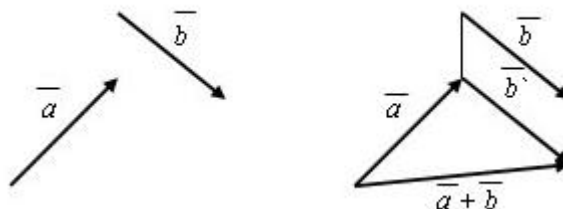
- **asosiy amallar:** vektorlarni qo'shish, vektorlarni ayirish, vektorlarni songa ko'paytirish, vektorni ikkita vektor yig'indisi, ayirmasi shaklida yoyish, vektorni parallel ko'chirish yordamida unga teng bo'lgan vektor bilan almashtirish;

- **geometrik atamalarni** vektorlar tiliga o'tkazish, teskari masalalarni yyechish, masala shartini vektorlar tiliga o'tkazish va hokazo.

Vektorlar algebrasi elementlari bilan talabalarni tanishtirishda shunday obyektlarni va ular ustida shunday amallar mavjudki, ular elementar algebradagi amallar va obyektlardan mohiyatan farq qilishini, lekin shu bilan birgalikda odatdagi algebraik amallar bilan ajoyib o'xshashliklarga ega ekanligini aytib o'tish lozim. Masalan, vektorlarni qo'shish amali sonlarni arifmetik qo'shish amalidan farq qiladi. Birinchi holda ma'lum geometrik

yasash bajaramiz, ikkinchisida – sanaymiz. Lekin u ham amal ham o'rin almashtirish va taqsimot (guruhlash) xossalari bo'ysunadi, ikkala amalda ham nol element mavjud, ikkalasida ham yig'indi va ikkita qo'shiluvchi birortasi bo'yicha ikkinchisi bir qiymatli aniqlanadi. Bular geometrik almashtirishlar kompozitsiyasi ma'lum xossalari bilan birgalikda umumiy holda grupp tushunchasi bilan tushuntirishga imkon beradi. Shuningdek, vektorlar xossalari o'rganish bilan bir vaqtda talabalarning diqqatini bu xossalarning fizikadan turli masalalarini yyechishga qo'llanilishini ko'rsatish maqsadga muvofiq.

Vektorning ta'ri va ular ustida amallar dastlab parallel ko'chirishni o'rganishda beriladi. Vektor tushunchasini to'g'ri shakllantirish uchun qator fizik miqdorlar ham uning yordamida aniqlanishini ko'rsatish zarur. Bularga tezlik, tezlanish, kuch va h.k. kabilar kiradi.



Vektorni belgilash uchun $\overrightarrow{AB}, \vec{m}, \vec{r}$ (mos harfning ustiga belgini $\rightarrow$ qo'yish)larni ishlatish maqsadga muvofiq.

Vektor yo'naltirilgan kesma sifatida aniqlanadi, ya'ni uning qaysi uchlari boshlang'ich va qaysi oxiri ekanligi ko'rsatilgan. Shuning uchun vektor: a) uning kattaligini; b) uning yo'nalishini bilishimiz lozim. Absolyut miqdori yoki moduli deb berilgan vektor uzunligini ifodalovchi haqiqiy nomanfiy songa aytiladi. Yo'nalishini aniqlash uchun ikki nuqtasidan qaysi biri boshlang'ich va oxiri ekanligini ko'rsatish yetarli.

Agar ikki vektorga tegishli bo'lgan va ularning yo'nalishi bilan bir xil bo'lgan o'qlar parallel bo'lsa, u holda bu ikki vektor kollinear bo'ladi.

Demak, agarda ikki kollinear vektor: a) umumiy o'qqa ega bo'lsa; b) ularning boshlang'ich nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa nisbatan bitta yarim tekislikda yotsa ular bir xil yo'nalgan deyiladi.

Agarda ikki vektor bir xil yo'nalgan va ularning absolyut qiymatlari teng bo'lsa, bu vektorlar teng deyiladi.

Bundan berilgan vektor boshlang'ich nuqtasi sifatida fazoning ixtiyoriy nuqtasini tanlash mumkinligi, bunda uning yo'nalishi va absolyut kattaligi saqlanishi lozimligi kelib chiqadi. Bunday vektorlar ozod vektorlar deb ham ataladi.

Vektorlar tengligining muhim xossasi – bu ekvivalent munosabatdir:

1) agar $\vec{a} = \vec{b}$ bo'lsa, $\vec{b} = \vec{a}$ (simmetriklik)

2) $\vec{b} = \vec{a}$ (refleksivlik).

3) Agar, $\vec{a} = \vec{b}, \vec{b} = \vec{c}$ bo'lsa, $\vec{a} = \vec{c}$ bo'ladi (tranzitivlik).

Vektorlarni qo'shishda

$\vec{a} = \overrightarrow{a}, \vec{b} = \overrightarrow{b'}$ bo'lsa, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a'} + \vec{b'}$ ekanligini ko'rsatish mumkin. Uning muhim natijasi sifatida quyidagi mulohaza bayon etilishi mumkin: agar A, B, S – uchta ixtiyoriy nuqta bo'lsa, u holda $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (uch nuqta qoidasi) tenglik o'rinli.

Qo'shishning assotsiativligi bu qoida bilan oson isbotlanadi:

Agar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$ bo'lsa, u holda

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

Qo'shishning o'rin almashtirish xossasini isbotlashda markaziy simmetriyaning vektorni qarama-qarshisiga almashtirish xossasini qo'llash mumkin:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \vec{c}$$

Simmetriya markazi sifatida O nuqtani olamiz, u holda

$$O(A) = A', O(B) = B', O(C) = C'$$

Vektorlar $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'} = \vec{0}$ va vektorlar qarama-qarshi bo'lsin. Demak,

$$\vec{a} = \overrightarrow{A'B'}, \vec{b} = \overrightarrow{B'C'}, \vec{c} = \overrightarrow{A'C'}$$

Shuning uchun ikkita

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{C'A'} = \vec{c}.$$

Ikkita qarama-qarshi vektorlar yig'indisi nol - vektor - nuqta $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

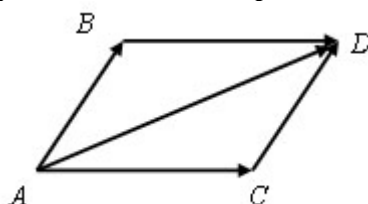
Vektorlarni ayirish berilgan vektorni ayriluvchiga qarama-qarshi vektorni qo'shish bilan aniqlanadi. Agar $-\vec{b}, \vec{b}$ ga qarama-qarshi vektor bo'lsa, u holda

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Bundan vektorlar uchun $\vec{a} - \vec{b} + \vec{b} = \vec{a}$ formula o'rinliligi kelib chiqadi. Shuning uchun $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ va $\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$ tengliklar biri ikkinchisidan natijasi hisoblanadi.

Qoida: tenglik bir tomondan qo'shiluvchi bo'lgan vektor ikkinchi tomoniga ayriluvchi sifatida o'tkazilishi mumkin va aksincha.

Vektorlarni qo'shish va ayirish ta'rifidan parallelogramm qoidasini



olish mumkin.

Agar ikkita kollinear bo'lmagan vektor umumiy uchga ega va ularning har biri oxiridan ikkinchisiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazsak, u holda hosil bo'lgan parallelogrammda umumiy uchdan chiquvchi diagonal vektorlar yig'indisini ularning uchlarini tutashtiruvchi diagonal ular ayirmasini aniqlaydi, bunda u ayriluvchidan kamayuvchiga yo'nalgan. Vektorni songa ko'paytirish amali gomotetiyaning o'rganishda qaratiladi. Bu amal taqsimot qonunlariga bo'ysunadi:

$$(p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

3. **Vektorlar skalyar ko'paytmasiga** quyidagicha ta'rif beriladi: Ikki vektor skalyar ko'paytmasi deb bu vektorlar modullarining ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga aytiladi $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi$

Xossalari:

1) Agar vektorlar bir xil yo'nalgan ($\varphi = 0, \cos \varphi = 1$) bo'lsa, u holda skalyar ko'paytma ularning modullarining ko'paytmasiga aytiladi.

2) Agar vektorlar orasidagi burchak o'tkir bo'lsa, skalyar ko'paytma musbat bo'ladi.

3) Agar vektorlar perpendikulyar ($\cos \frac{\pi}{2} = 0$) bo'lsa, ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng. Skalyar miqdorlardan farqi: ko'paytma ko'paytuvchilarining birortasi ham nolga teng bo'lmasa ham nolga teng bo'lishi mumkin.

4) Agar vektorlar orasidagi burchak o'tmas bo'lsa, skalyar ko'paytma manfiy bo'ladi.

5) Agar vektorlar qarama-qarshi $\varphi = \pi$ yo'nalgan bo'lsa, skalyar ko'paytma manfiy va absolyut qiymati bo'yicha ularning modullari ko'paytmasiga teng.

Bulardan vektorlarning perpendikulyarlik sharti kelib chiqadi: ikkita nol bo'lmagan vektor o'zaro perpendikulyar bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Xossalari:

1. Kommutativlik xossasi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\text{Isbot. } \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \varphi, \vec{b} \cdot \vec{a} = a \cdot b \cdot \cos(-\varphi)$$

$$b \cdot a = a \cdot b \Rightarrow \cos \varphi = \cos(-\varphi)$$

Kosinus - juft funktsiya. Demak $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. Distributivlik xossasi

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{m} = \vec{m} \cdot \vec{a} + \vec{m} \cdot \vec{b}$$

Endi vektorlar skalyar ko'paytmasi xossalariining geometriyada qo'llanilishiga misollar ko'rib o'tamiz.

1. Kosinuslar teoremasi.

Berilgan: ABC uchburchak va uning elementlari

$$\angle BAC = \alpha, \angle CBA = \beta, \angle ACB = \gamma$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AB} = \vec{c}$$

Bundan $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$. Tenglikning ikkala tomonini o'z-o'ziga skalyar ko'paytiramiz. U holda

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{b} - \vec{c})^2 = (\vec{b})^2 - 2\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2$$

Bundan

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

tenglik kelib chiqadi. Xuddi shunday

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2bc \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$$

formulalar ham olinadi.

O'quvchilarga bu formulalar bir-biridan ketma-ket hosil qilinishi mumkinligini tushunib olishlari lozim. Mohiyati bir vaqtda a harfni b harfiga, b harfni c harfi bilan c harfni a harfi bilan almashtiriladi. Bir vaqtda shuningdek $\alpha - \beta$ ga, $\beta - \gamma$ ga, $\gamma - \alpha$ ga almashtiriladi. $\gamma = 90^\circ$ da kosinuslar teoremasi Pifagor teoremasini beradi:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Kosinuslar teoremasidan

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{a^2}$$

formula ham kelib chiqadi. Bundan

$$1 + \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a) \cdot (b+c-a)}{2bc}$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c) \cdot (a+b-c)}{2bc}$$

almashtirishlarni kiritib,

$$1 + \cos \alpha = \frac{2p(p-a)}{bc}, \quad 1 - \cos \alpha = \frac{2(p-b)(p-c)}{2bc}$$

larni olamiz. Bu tengliklardan ko'paytirib

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2 c^2}$$

Bundan

$$\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Agar ildiz son qiymatini s deb olsak va siklik almashtirish qoidasini qo'llasak

$$\sin \alpha = \frac{2S}{bc}, \quad \sin \beta = \frac{2S}{ca}, \quad \sin \gamma = \frac{2S}{ab} \quad *$$

Bu formulalardan burchaklar sinuslari nisbatini topib olish mumkin:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$$

Bundan sinuslar teoremasi kelib chiqadi

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

yoki

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Bu tengliklardan uchburchakning yuzini topish uchun quyidagi formulalarni keltirib chiqarish mumkin

$$S_{\Delta} = \frac{bh_b}{2}, \quad S_{\Delta} = \frac{ch_c}{2}$$

$\triangle ABH$ dan

$$h_b = c \cdot \sin \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{2S}{bc}.$$

Demak,

$$S_{\Delta} = \frac{2S}{bc}, \quad S_{\Delta} = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

2. Geron formulasi

Quyidagi ma'lum formulalarning

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2p(p-a)}{bc}$$

birinchisini ikkinchisiga bo'lib

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

tenglikni yoki

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{p-a} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

tenglikni hosil qilish mumkin.

Bu formulalar to'rt holda uchburchak elementlarini hisoblashga imkon beradi:

$$a) \ a, \beta, \gamma; \ b) \ a, b, c; \ c) \ b, c, \gamma; \ d) \ a, b, \alpha.$$

Vektorlarni ba'zi tekis shakllarning elementlarini hisoblashga tatbiq etish mumkin.

Teorema. Parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi uning barcha tomonlari kvadratlari yig'indisiga teng. Haqiqatdan,

$$\overrightarrow{OC} = \vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{n} = \vec{b} - \vec{a}$$

vektorlarni o'z-o'ziga skalyar ko'paytirib

$$\vec{m}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{n}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

qo'shsak

$$\vec{m}^2 + \vec{n}^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2$$

tenglik kelib chiqadi.

3. Styuart teoremasi

Teorema. Quyidagi vektorlar berilgan bo'lsa,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{AB} = \vec{m} \\ \overrightarrow{BC} &= \vec{n}, \overrightarrow{AC} = \vec{p} = \vec{m} + \vec{n}\end{aligned}$$

u holda bu vektorlar uchun

$$a^2 n + c^2 m - b^2 p = m \cdot n \cdot p$$

tenglik o'rinli.

Isbot. Bu vektorlar uchun quyidagi tengliklar

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + m^2 + 2bm \cos \varphi \mid n \\ c^2 &= b^2 + n^2 - 2bn \cos \varphi \mid m\end{aligned}$$

ni olib va ularni mos ravishda n va m va larga ko'paytirib

$$\begin{aligned}a^2 n &= n(b^2 + m^2 + 2bm \cos \varphi) \\ c^2 m &= m(b^2 + n^2 - 2bn \cos \varphi)\end{aligned}$$

qo'shib

$$a^2 n + c^2 m = b^2 (m + n) + mp(m + n)$$

tenglikni hosil qilamiz. B nuqta A va C nuqtalar o'rtasida yotgani uchun

$$m + n = p$$

ekanligini hisobga olsak izlangan formula hosil bo'ladi.

Hosil qilingan formulani uchburchak medianasi yoki bissek-trisasini uning tomonlari orqali hisoblashga qo'llash mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Vektor tushunchasi va uning hozirgi fanda tutgan o'rni haqida nimalarni bilasiz?
2. Vektor usulini o'rganishning maqsadlari nimalardan iborat?
3. Vektorlar ustida qanday amallar bajarish mumkin?
4. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi tushunchasini o'rganish usulini tavsiflab bering.
5. Vektorlarning masalalar yyechishga va teoremlarni isbotlashga qo'llash uslubiyatini bayon qiling.

8-§. KASB-HUNAR KOLLEJLARI GEOMETRIYA KURSI MASALALARINI YYECHISH USLUBIYATI

Reja:

1. *Geometrik masalalar yyechishning maqsad va vazifalari.*
2. *Geometrik masalalar turlari.*
3. *Geometrik masalalar yyechishning uslubiy xususiyatlari.*

Tayanch iboralar: *geometrik masala, isbotlash, tadqiqotga doir, yasashga doir va hisoblash mazmunli, yyechish usullari.*

1. Masalalarni yyechish orqali ta'limiy vazifalar bilan birga talabalarni rivojlantiruvchi vazifalar ham amalga oshiriladi. Bulardan asosiylari geometrik masalalar talabalar fazoviy tasavvurlarni shakllantirishi va ularning mantiqiy fikrlashlarini o'stirish uchun keng imkoniyat ochadi. Bundan tashqari, har bir geometrik masala o'ziga xos xususiyatga ega bo'lib, talabadan ijodiy yondashishni va nostandart usulini qo'llashni talab etadi. Bundan geometrik masalalarning talabalar ijodiy qobiliyatlarni rivojlantirish uchun asosiy vosita ekanligi kelib chiqadi.

Geometrik masalalarni noma'lumlarni topishga ko'ra: a) hisoblashga; b) isbotlashga; c) yasashga; d) tadqiqotga doir masalalarga ajratish mumkin.

Hisoblashga doir masalalarda noma'lum nuqtalarni (kesma uzunligi, burchak kattaligi, yuza hajmlar) yoki ularning nisbatlarini ma'lum parametrlar bilan topish maqsadni ko'zda tutiladi.

Agar parametrlar umumiy holda berilsa, natija harflarda olinadi, agar shart parametrlar aniq qiymatlarni o'z ichiga olsa, u holda javob sonli qiymatdan iborat bo'ladi.

Ba'zida shart shundayki, avvalo masalani umumiy holda yyechish, so'ngra hosil qilingan ifodaga parametrlar qiymatlarini qo'yish lozim. Lekin ba'zida shart talablaridan qat'iy nazar masalani umumiy holda yyechish maqsadga muvofiq. Shunday qilib, "harflar", "sonlar"da yyechish bir-biriga qarama-qarshi qo'yilmaydi, balki ular faqat noma'lum miqdorni ma'lum miqdorlar orqali ifodalashning ikki shakli hisoblanadi.

Isbotlashga doir masalalar qaralayotgan figura elementlari, orasida ma'lum munosabatlar mavjudligi o'rnatishga qaratilgan bo'ladi. Masalan, kesmalar, burchaklar, tengligi yoki tengsizligi, to'g'ri chiziqlar, tekisliklar parallelligi yoki perpendikulyarligi va hokazo munosabatlarni o'rnatish shular jumlasiga kiradi. Ularni hisoblashga doir masalalar sifatida ifodalash mumkin. Masalan, birorta burchakning 45° tengligini isbotlash yoki birorta figuraning hajmi boshqa figuraning hajmidan ma'lum marta katta ekanligini isbotlash va hokazo shaklida ifodalash mumkin.

Tadqiqotlarga doir masalalarda natija oldidan e'lon qilinmaydi, tekshirish talab etiladi, masalan, birorta nuqta berilgan to'g'ri chiziq (tekislik)da etish yotmasligi, yoki berilgan aylanalar kesishishi yoki kesishmasligi, berilgan to'g'ri chiziqlar parallel yoki parallel emasligini tekshirish masalasi qo'yiladi. Bunday

masalalarga aniqlash, o'rnatish va yasash kabi talablar qo'yilishi mumkin. Masalan, berilgan kesmalardan qaysi kateti berilgan nuqtasi uchburchak qaysi tomoniga yaqinroq bo'lishini aniqlash, shartda sanab o'tilgan figuraning elementlari orasidagi bog'lanishni o'rnatish, berilganlar asosida birorta figurani yasash kabilar shular jumlasiga kiradi.

Yasashga doir masalalardan noma'lum miqdorlar qator geometrik yasashlar natijasida aniqlanadi (va bu mumkin bo'lgan geometrik isbot asosida yoki shartlangan proeksiyada). Bunda ba'zida geometrik figura haqida biror ma'lumot bo'yicha yasashni amalga oshirish mumkin.

I. Hisoblash mazmunli geometrik masalalar

1-masala. ABC uchburchakning AE, BF va DC balandliklari M nuqtada kesishadi. Agar $AB=10, AD=3, AM=4$ bo'lsa, AE ni toping.

Yechish. Avvalo chizmani yaxshilab chizib olish zarur.

Berilgan: $AB=10, AD=10, AM=4$

Topish kerak: $AE=?$

$\triangle ABE$ ba $\triangle AMD$ uchburchaklar o'xshashligidan

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = \frac{AB}{AM} \cdot AD = \frac{10}{4} \cdot 3 = \frac{30}{4}$$

Bu masalaning asosiy mohiyati to'g'ri burchakli uchburchaklar o'xshashligidan foydalanish bo'lib, bunda bu uchburchaklar mos tomonlarini topish hamda izlanayotgan AEni qanday qilib osonroq, topilishiga e'tibor berishlari zarur. Demak, bunday masalalar nafaqat nazariy bilimni, balki uni konkret holatda qo'llay olishni talab etishi ko'rinib turibdi.

2-masala. ABC uchburchakda $\angle A = \frac{4}{9}d = 40^\circ$ qolgan ikki burchagini teng bo'luvchi to'g'ri chiziqlar kesishishidan M nuqta hosil bo'ladi. $\angle BMC$ burchakni toping.

Yechish: $\angle B = \alpha, \angle C = \beta$ deb olsak $\alpha + \beta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Ikkinchi tomondan $\angle BMC = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Javob: 110° .

Bu masalada asosiy qoida uchburchaklar ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng ekanligi hamda uni ikki marta qo'llash orqali natija keltirib chiqarildi.

3-masala. Uchburchakning tomonlari uzunliklari 12, 14 va 10 sm. Uning har bir uchidan markaz qilib bittadan aylanani shunday yasash kerakki, hosil qilingan har bir aylana bir-biriga urinsin.

Yechish. Izlanayotgan aylanalar radiuslarini mos ravishda x, y, z deb belgilasak, u holda quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x + y = AB = 12 \\ x + z = AC = 10 \\ y + z = BC = 14 \end{cases}$$

Bulardan $x = 4, y = 8, z = 6$ ekanligi kelib chiqadi.

2. Isbotlashga doir masalalar

Isbotlashga doir geometrik masalalar talabalardan fikrlashni va geometrik qoida va tushunchalarni qo'llay olishni talab etadi.

1-masala. M nuqta ABC uchburchak ichida joylashgan. $\angle BAC$ va $\angle ADC$ burchaklardan qaysi biri katta?

Yechish. $\angle BMC > \angle BDC$ va $\angle BDC > \angle BAC$ (tashqi burchak qo'shni bo'lmagan ichki burchakdan katta). Bulardan $\angle BMC > \angle BAC$ ekanligi kelib chiqadi.

2-masala. Ixtiyoriy to'g'ri burchakli uchburchak uchun $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$ tengsizlik o'rinli ekanligini isbotlang, bunda r - ichki chizilgan aylana radiusi, h - gipotenuzaga tushirilgan balandlik.

Isbot. Uchburchak katetlarini a va b , gipotenuzani c deb belgilaymiz.

Uchburchak yuzasi $S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$ yoki $S = \frac{hc}{2}$ bundan $\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$

($a+b > c$) bo'lgani uchun

$$\frac{r}{h} < \frac{c}{c+c} = 0,5 \quad (1)$$

Endi $a^2 + b^2 \geq 2ab$ tengsizlikni $c^2 = a^2 + b^2$ tenglik bilan hadma-had qo'shib $(a^2 + b^2) + c^2 \geq (a+b)^2$ tengsizlikni yoki $2c^2 \geq (a+b)^2$ ni hosil qilamiz. Bundan

$$(a+b) \leq c\sqrt{2}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} \geq \frac{c}{c\sqrt{2}+c} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \approx 0,41 > 0,4 \quad (2)$$

(1) va (2) larga ko'ra $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$ kelib chiqadi.

3-masala. Tomoni 1 ga teng bo'lgan kvadratga 81 nuqta joylashgan. Ularning qandaydir uchtasining radiusi $1/7$ ga teng bo'lgan doira bilan qoplash mumkinligini isbotlang.

Isbot. Berilgan kvadratning tomoni 0,2 ga teng 25 ta bir xil kvadratchalarga bo'lamiz. Ularning biriga kamida uchta nuqta kiradi. Tomoni 0,2ga teng bo'lgan

kvadratga tashqi chizilgan aylana radiusi $\frac{1}{5}\sqrt{2} < \frac{1}{7}$, shuning uchun uni $\frac{1}{7}$ radiusiga teng bo'lgan doira bilan qoplash mumkin.

3. Yasashga doir masalalar

Yasashga doir geometrik masalalar talabalarda konstruktiv ko'nikma va malakalarini rivojlantirish uchun keng qo'llaniladi. O'qituvchi bunday masalalarni yyechish usullarini qo'llashda asosan geometrik almashtirishlarga asoslanadi. Yasashga doir masalalar quyidagi bosqichlarda ko'rib chiqiladi: tahlil; yasash; isbotlash; tadqiq etish. Bu bosqichlarning har biri masalada qarab o'tilishi masalaning to'liq asoslanishini va yechilishini ta'minlaydi.

4. Tadqiqot mazmunli masalalar

1-masala. O'tkir burchakli ABS uchburchakda ikkita balandlik asoslari D va E bilan tutashtirilgan. DBE uchburchak berilgan uchburchakka o'xshash bo'ladimi?

Yyechish: ABE va DBS uchburchaklar o'xshash, chunki ularning ikkalasi ham to'g'ri burchakli, B burchak umumiy. Bu o'xshashlikdan tomonlar proporsionalligi $\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{DB}$ kelib chiqadi. ABS va DBE uchburchaklar ikkita mos tomoni proporsional va ular orasidagi burchak umumiy. Shuning uchun bu uchburchaklar o'xshash.

2-masala. Uchburchakning har bir tomoni 5 birlikka uzaytirilgan. Hosil qilingan kesmalardan yangi uchburchak yasalgan. U berilgan uchburchakka o'xshash bo'ladimi?

Yyechish. Berilgan uchburchak tomonlari a, b, c deb belgilasak, u holda yangi uchburchak tomonlari $a+5, b+5, c+5$. Uchburchaklar o'xshash bo'lgani uchun $\frac{a+5}{a} = \frac{b+5}{b} = \frac{c+5}{c}$ yoki $\frac{5}{a} = \frac{5}{b} = \frac{5}{c}$ bo'lishi lozim, bundan $a = b = c$. Bundan hosil bo'lgan uchburchak berilgan uchburchakka o'xshash bo'ladi, faqat va faqat shunday berilgan uchburchakka teng tomonli bo'lsa.

Takrorlash uchun savollar

1. Geometrik masalalar yyechishning maqsad va vazifalari nimalardan iborat?
2. Geometrik masalalarning qanday turlari bor va ularni tavsiflab bering.
3. Geometrik masalalar yyechishning uslubiy xususiyatlarini ayting va ulardan o'qitishda qanday foydalanish mumkin?

9-§. YASASHGA DOIR GEOMETRIK MASALALARNI YYECHISH USULLARI

Reja:

1. *Yasashga doir geometrik masalalarni yyechish usullari.*
2. *Konstruktiv masalalarni yyechish.*

Tayanch iboralar: *kesma, perpendikulyar, parallel, burchakka burish, pozitsion va pozitsion bo'lmagan, ko'pburchak, konstruktiv masalalar, bissektrisa, trapetsiya.*

1. **Yasashga doir geometrik masalalar** o'quv jarayonida muhim rol o'ynaydi. Ular o'quv materialini chuqur o'zlashtirishga, talabalar mantiqiy tafakkurini rivojlantirishga, grafik ko'nikmalarini shakllantirishga yordam beradi.

Yasashga doir masalalar boshlang'ich sinflardayoq yechiladi:

Masalan:

1. $\angle KCD$ burchakni yasang. Uning uchi va tomonlarini ayting
2. To'rtta kesmadan tashkil topgan yopiqmas chiziqni yasang.

Xuddi shunday masalalar yuqori sinflarda hamda kasb-hunar kollejlari geometriya kursida ham qaraladi:

1. Berilgan kesmaga teng kesmani yasash.
2. Berilgan burchakka teng burchakni yasash.
3. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish.
4. To'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazish.
5. Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq yasash.
6. Asosiy elementlari yordamida uchburchakni yasash.
7. Kesmani berilgan burchakka burish.
8. Kesmani berilgan masofaga unga parallel ko'chirish.
9. Berilgan o'qqa nisbatan berilgan kesmaga simmetrik kesmani yasash va hokazo.

Yasashga doir murakkab masalalar: pozitsion va pozitsion bo'lmagan masalalarga bo'linadi. Agar masalada yasaladigan shakl ega bo'lishi lozim bo'lgan elementlari berilgan yoki ularning tekislikdagi o'zaro joylashishi berilmagan bo'lsa, bunday masalalar pozitsion bo'lmagan masalalar deyiladi.

Masalan, uch tomoniga ko'ra uchburchak yasash, tomoni va burchagiga ko'ra romb yasash va hokazo.

Chizmada bunday masala shartlarida tasvirlay turib, uning faqat berilgan elementlari yasaladi, ularning tekislikda qanday joylashishi muhim emas.

Berilgan figuralar o'zaro joylashishi ham ko'rsatilgan masalalar pozitsion deb ataladi. Masalan, berilgan aylanaga urinuvchi va berilgan to'g'ri chiziqqa berilgan nuqtada urinuvchi aylaan yasang.

Bu masalada na faqat to'g'ri chiziq va aylana berilgan, balki ularning o'zaro joylashishi ko'rsatilgan. Bunday masala shartlari berilgan shakl elementlari biror tekislikning qismi sifatida tasvirlanadi.

Bu masalalar yechimlarini taqqoslash va yechimlar sonini o'rnatish uchun kerak bo'ladi. Pozitsion bo'lmagan masalalar uchun teng shakllar bitta yechim deb qaralsa, pozitsion bo'lganlari uchun esa turli xil yechim sifatida qaraladi.

Quyidagi masala ham pozitsion deb qaraladi:

Masala. Berilgan to'g'ri chiziq va berilgan aylanani kesib o'tuvchi berilgan radiusli aylana yasang. Turli xil aylana va to'g'ri chiziqning joylashishida masala turli sondagi yechimlarga ega.

Bu masala bir nechta yechimga bo'lishi mumkin. Bu yechimlar bir xil radiusli aylanalar uchun, lekin berilgan aylana va to'g'ri chiziq bir-biriga nisbatan turlicha joylashgan bo'lishi mumkin va bundagi yechimlar turlicha deb qaraladi.

Yasashga doir masalalar qanday asboblardan bilan bajarilayotganligiga bog'liq ravishda ham taqqoslanadi:

1. Aylanani sirkul bilan to'rtta teng qismga ajrating.
2. Aylanani sirkul va chizg'ich bilan to'rtta teng qismga ajrating.

Bu masalalarning turlicha yechimlari mavjud. Yechim nuqta, kesma, ko'pburchak va umuman nuqtalar to'plami bo'lishi mumkin.

Ba'zida yasashga doir planimetrik har bir masala bitta, ikkita, to'rtta, cheksiz ko'p yoki bitta yechimga ega bo'lmasligi mumkin degan fikr mavjud. Bu xato fikr, chunki yasashga doir masala boshqa sondagi ham yechimlarga ega bo'lishi mumkin: Masalan, muntazam oltiburchak tomonlarida shunday nuqtani topingki, undan bu oltiburchakka ichki chizilgan aylana 150 gradusli burchak ostida ko'rinsin.

Bu masala 12 ta yechimga ega. Ularni topish uchun oltiburchak uchlarini kesmalar o'rtalari bilan tutashtirish va bu kesmalarning aylana bilan kesishish nuqtasidan aylanaga urinma o'tkazish kerak. Berilgan oltiburchak tomonlari bilan urinmalar kesishish nuqtalari izlangan nuqtalar bo'ladi.

Tabiiyki, ko'pburchak tomonlari sonini va graduslar sonini o'zgartirib, bunga o'xshash yasashga doir masalalarni ifodalash mumkin, ular ko'p yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lishi mumkin.

O'quvchilar masala parametrlari miqdorlariga bog'liq ravishda turli xil yechimlarga ega bo'lishi mumkin (yoki tekislikdagi elementlar joylashishiga bog'liq, agar bu pozitsion masala bo'lsa). Buning hammasi tadqiqotda o'rnatiladi.

Masala. Asosini yon tomonlari va diagonali berilgan trapetsiyaning yasang.

Bu masalani yechish uchta berilgan tomoniga ko'ra ABC uchburchakni yechish bilan boshlanadi. C orqali $CD \perp AB$ ni o'tkazamiz, A nuqtadan berilgan radiusli uni markaz qilib aylana o'tkazamiz. Bu aylana DS ni D nuqtadan kesib o'tadi. U holda ABCD – izlangan trapetsiya.

Bu masala nechta yechimga bo'lishini aniqlash uchun tadqiqot o'tkazish talab qilinadi. Uchburchak hamma vaqt ham yasab bo'lmaydi, bunday masala hamma vaqt yechimga ega emasligi kelib chiqadi. Faraz qilaylik, a , b va d kesmalar shundayki, ulardan uchburchak yasash mumkin, ya'ni $a + b > d$ va $a - b < d$. u holda C bu uchburchakning h_a balandligidan kichik bo'lsa, u holda aylana CD bilan trapetsiya yasash mumkin emas.

Agar $c = h_a$ bo'lsa, $\angle CAB < 90^\circ$ da bitta to'g'ri burchakli trapetsiyani va $\angle CAB \geq 90^\circ$ da bitta ham trapetsiya ham hosil qilolmaymiz.

Agar $c > h_a$ va $\angle CAB < 90^\circ$ bo'lsa, u holda $c < d$ da turli trapetsiyalar, $c > d$ da esa faqat bitta trapetsiyaga ega bo'lamiz.

Berilgan diagonal A uchidan chiqqan holni qaraymiz. Agar B uchidan chiqsa yana bitta yoki ikkita yechimga ega bo'lishi mumkin.

2. Konstruktiv masalalarni yyechishning eng muhim usullaridan biri geometrik o'rinlar usuli hisoblanadi. Maktabda esa geometrik almashtirishlar bilan bog'liq yasashga doir masalalar qo'llaniladi: parallel ko'chirish, simmetriya, burish, o'xshashlik almashtirishlar.

Yasashga doir masalalarning boshqa usullari: inversiya usuli, algebraik usuli qaralmaydi. Lekin, a, b va c lar berilgan kesmalar bo'lganda yasashga doir quyidagi masalalar qaraladi:

$$1) x = \sqrt{a \cdot b} \quad 2) x = \sqrt{2a \cdot b} \quad 3) x = \sqrt{\frac{1}{2} a \cdot b} \quad 4) x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$5) x = \sqrt{a^2 - b^2} \quad 6) x = \frac{a \cdot b}{c} \quad 7) x = \frac{a^2}{c} \quad 8) x = \frac{a \cdot b}{a + b}$$

Masala. Uchburchak tomonida uning boshqa ikki tomonidan teng uzoqlashgan nuqtani yasang.

Ba'zida izlanayotgan nuqta uchburchak tomonlarining unga qarama-qarshi yotgan burchak bissektrisasi kesishish nuqtasi hisoblanadi. Bu to'g'ri, faqat bu tomonga o'tmas burchak yopishgan bo'lishi kerak, chunki nuqtadan kesmagacha bo'lgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga teng emas. Agar $\angle B > 90^\circ$ bo'lsa, u holda izlangan nuqta MA burchak bissektrisasiga tegishli bo'lmaydi. Bu holda M nuqtani quyidagicha yasash mumkin:

$$(BH) \perp (AC), \angle HBK = \angle KBM, \quad (KM) \perp (AC), (KM) \cap (BC) = M$$

M izlangan nuqta, chunki $BM \perp MK$. Bunda yechim talabalar tushunishi uchun murakkab, shuning uchun quyidagich bayon qilish mumkin:

Masala. O'tmas burchakli uchburchak tomonida boshqa ikkita tomonidan teng uzoqlashgan nuqtani yasang.

Yasashga doir masalalar yyechishning umumiy sxemasi quyidagicha: tahlil-yasash-isbot-tadqiqot.

Tahlil masala yyechish rejasini tuzishga olib keladi. Ko'pincha u quyidagicha bajariladi. Izlanayotgan shakl yasalgan deb faraz qilib taxminiy chizma yasaladi, berilgan elementlari belgilanadi (boshqa rangda), yasashni

qanday bajarish mumkinligi aniqlanguncha berilgan va izlanayotgan elementlari borasidagi aloqalar qaraladi.

So'ngra yasash amalga oshiriladi, masala shartlariga mos keluvchi shakl ekanligini isbotlanadi va nihoyat tadqiqot amalga oshiriladi. Tadqiqotda masala qanday shartlarda yechimga ega bo'lishi, agar ular mavjud bo'lsa nechta bo'lishligi tekshiriladi.

Yechish bosqichlarining har biri to'la bajarilishini tavsiflash shart emas. Tahlil og'zaki bajariladi, yasash asbob-lari bilan bajariladi.

Agar masala bir nechta yechimga ega bo'lsa, talabalar ularning bir nechtasini topsalar, bu qanoatlanarli deb hisoblanmaydi. Ba'zida masalaning barcha yechimlarini topish uncha muhim emas yoki shundaʼy masalalar mavjudki, ularni yechish murakkab hisoblash yoki qiyin almashtirishlarni talab etadi. O'quvchilardan masala nechta yechim talab etish masala mazmuni va qaysi sinfda masala echilayotganligiga bog'liq.

1. Konstrukтив geometriya. Nuqtaning har qanday to'plami geometrik figura yoki geometrik obraz deb ataladi. Masalan, bitta nuqta (bir elementli figura), ikkita nuqta, kesma (unga tegishli hamma nuqtalar to'plami), nur to'g'ri chiziq, burchak, o'zaro parallel yoki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar, yoy, aylana va umuman tekislikning har qanday bo'lagi; shuningdek, kub, silindr, shar va shu kabilarning yoki ularning biror to'plami-figuradir.

Bir tekislikda yotgan nuqtalar to'plami tekis figura deb, bir tekislikka joylashgan nuqtalar to'plami fazoviy figura deb ataladi.

Bir yoki bir nechta yasash quroli (sirkul, chizg'ch, go'niya va boshqalar) yordamida talablarga javob beruvchi geometrik figura yasashni talab etgan masala yasashga doir geometrik masala yoki qisqacha, konstruktiv masala deyiladi.

Matematikaning yasashga doir geometrik masalalar yechish usullarini o'rgatuvchi qismi geometrik yasash nazariyasi yoki konstruktiv geometriya deb ataladi.

Konstruktiv geometriyada bu asosiy ishdan boshqa yana quyidagilar ham qaraladi:

1)konstruktiv masalalarni tiplarga ajratish, taqribiy yasash va ba'zi bo'laklari chizmada joylashmagan geometrik obrazlarni yasash; konstruktiv masalalar yechish uchun eng sodda yo'llarni topish va yechishdagi soddalik darajasini aniqlash; geometrik yasashlar vaqtida sodir bo'ladigan texnik xatolarni o'rganish.

2) geometrik yasashlarda foydalaniladigan qurollardan har birining yoki bir nechtasining birgalikga ishlatish sohasini aniqlash va yasash quollarining qaysilari bilan qanday masalalarni yechish mumkin emasligini isbotlash;

3)konstruktiv geometriya nazariyasining amaliy hayotda va boshqa qushni fanlar sohasida ishlatilishi.

2. Yasash qurollari haqidagi dastlabki tushunchalar. Tarixiy ma'lumotlarga qaraganda, o'tmishda to'g'ri chiziq uchun tarang tortilgan ip (ya'ni bir tomonli chizg'ich), aylana chizishda esa bir uchi qo'zg'almas qog'ozchaga

bog'langan tarang ip ishlatilgan. Hozirgi vaqtda ishlatiladigan sirkul-keyinchi asbobning takomillashgan ko'rinishidir.

3. Sirkul va chizg'ich aksiomalari. Yasashga doir geometrik masalalarni sirkul va chizg'ich yordamida yechishda quyidagi aksiomalar to'g'ri deb qabul qilinadi, ya'ni bu aksiomalarda ko'rsatilgan yasashlarni bajarish mumkin deb hisoblanadi:

1) Berilgan ikki nuqtadan to'g'ri chiziq o'tkazish yoki shu nuqtalarni tutashtiruvchi kesma chizish mumkin (chizg'ich yordamida).

2) Markazi va radiusi berilgan aylanani yoki markazi va ikki uchi berilgan yoy chizish mumkin (sirkul yordamida).

3) Berilgan ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini (agar ular kesishsa) toppish mumkin (chizg'ich yordamida).

4) Berilgan ikki aylananing kesishish nuqtalarini (agar bunday nuqtalar mavjud bo'lsa) toppish mumkin (sirkul yordamida).

5) Berilgan to'g'ri chiziq bilan berilgan aylananing kesishish nuqtalarini (agar bunday nuqtalar mavjud bo'lsa) toppish mumkin (chizg'ich va sirkul yordamida).

Shu besh aksioma geometrik yasashlarda ishlatiladigan qurollardan sirkul va chizg'ichning xossalarini abstrakt matematik formada ifodalaydi. YUqorida aytilgan besh aksiomani chekli sonda ishlatish yo'li bilan echiladigan masalalar chizg'ich va sirkul vositasida echiladigan masalalar deyiladi.

4. Yasashga doir masalalarni yechish usullari. Yyechish usullarida muayyan yo'l yoki qat'iy andaza degan ma'noni berish yaramaydi. Yechish usullari echuvchining ijodiy imkoniyatlarini kuchaytiruvchi zarur vositalardan biridir.

Yasashga doir geometrik masalalarni yechishda ilg'or o'qituvchilarning sinalgan tajribalari va uslubchilarning maslahatlari asosida vujudga kelgan hamda o'qitish ishlarida tobora takomillashib borayotgan usullar quyidagilardir:

1) to'g'rilash usuli; 2) nuqtalarning geometrik o'rinlarini topish usuli; 3) ma'lum geometrik o'rinlarni ishlatish usuli (geometrik o'rinlar usuli); 4) simmetriya usuli; 5) parallel ko'chirish usuli; 6) nuqta atrofida aylantirish usuli; 7) o'xshashlik yoki gomotetiya usuli; 8) inversiya usuli; 9) algebraik analiz usuli (algebraik usul).

Bu usullarning oldingi sakkiztasi geometrik usullar deyiladi, chunki bular yordamida masalalar yechishda asosan geometrik ma'lumotlarga tayanib muhokama yurgiziladi; bulardan 4-9-usullar- geometrik almashtirishlar usullari deyiladi, chunki bu usullar bilan masalalar yechishda geometrik almashtirish qoidalaridan foydalaniladi.

5. Yasashga doir masalalarning xususiyatlari. Geometriya darslarining dastlabkilaridanoq o'quvchining chizg'ich, sirkul, transpotir va boshqa asboblardan foydalanib turli yasashlarni bajaradilar. Geometrik yasashlar ularga figuralar xossalarini aniqlashga yordam beradi.

Yasashga doir masalalar deb, figuraning ba'zi konstruktiv berilgan elementlari (ya'ni chizmada yasalgan) va boshqa shartlari bo'yicha figuralarni yasash talab etiladigan masala tushuniladi.

Yasashga doir masalalarni yechish yasashda qanday asboblardan foydalanilishga bog'liq.

An'anaviy geometriya kurslarida shu paytgacha yasashga doir masala sifatida sirkul va chizg'ich yordamida bajariladigan qator oddiy amallardan iborat bo'lgan "klassik" masalalar tushuniladi:

- 1) Ikkita ma'lum (berilgan yoki yasalgan) nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqni yasang;
- 2) Markazi va radiusi ma'lum (berilgan yoki yasalgan) bo'lgan aylana yoki yoyni yasang;
- 3) Ikkita to'g'ri chiziq kesishish nuqtalarini toping;
- 4) To'g'ri chiziq va aylana kesishish nuqtalarini toping;
- 5) Ikkita aylana kesishish nuqtalarini toping.

Agar sirkul va chizg'ichga boshqa asboblarni qo'shsak, u holda asosiy amallar ro'yxati kengayadi. Masalan, ugolnikni qo'shsak, yana ikkita amalni beradi;

- 6) Berilgan nuqtadan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazish;
- 7) Berilgan nuqta orqali o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqni o'rkazish (berilgan yoki yasalgan).

Kesmalarga doir berilgan masalalarni yechishda o'quvchilarni ixtiyoriy olingan larni berilgan elementlardan farqlashni, masala xarakteriga ko'ra masalani yechish uchun asboblarni tanlashga o'rgatish lozim. Masalan, agar o'quvchilar konkret ma'lumotli masala echayotgan bo'lsa, masalan, "chiziqda tasvirlangan ikkita kesma yig'indisini yasang" deyilsa, u holda yoki masshtabli chizg'ich yoki sirkul va chizg'ichdan foydalaniladi.

Agar berilgan uzunliklarga ega ikkita kesma yig'indisi yasash talab qilinsa, u holda masshtabli chizg'ichdan, yoki masshtabli chizg'ichdan har xil o'lchagich bilan masalani olib, uni ixtiyoriy o'tkazilgan to'g'ri chiziqqa qo'yish mumkin. Agar masala umumiy holda qo'yilsa: «berilgan ikkita a va b kesmalar yig'indisiga teng kesmani yasang» ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda dastlab bu kesmalarni tasvirlash, so'ngra yasashni boshlash lozim.

Yasashlarni bajarishda ixtiyoriy elementlarni olishlariga to'g'ri keladi. O'quvchilar «ixtiyoriy» to'g'ri chiziqni olishlari, unda «ixtiyoriy» nuqtani belgilab olishlari zarur.

Hatto oddiy yasashlarni bajargandan so'ng ham ularning aniqlangan yoki aniqlanmaganligini (ikki nuqta orqali, bitta nuqta orqali to'g'ri chiziq o'tkazish) ta'kidlash, yasashni bajarish imkoniyatini aniqlash (berilgan yoki kesmani yasash) va h.k.

Yasashga doir masalarni yechishda o'quvchilar qabul qilingan postulatlar bilan nazariya asoslanadigan oddiy yasashlarni bajarish mumkinligiga ishonch hosil qiladilar.

O'quvchilarga bu imkoniyatni anglash uchun konkret savollar berilishi lozim. Masalan, aylanani yasashda, o'quvchi aylana markazi qaerda joylashganini, uning radiusi qancha ekanligini so'raydi. Keyinchalik aylanani yasashda o'quvchining o'zi uning markazi va radiusini ko'rsatadi.

6. Sirkul va chizg'ich yordamida yasashga doir masalalar.

Yasashga doir masalalarni faqat oddiy chizg'ich sirkul vositasida yechish qadimgi Yunonistonda san'at darajasiga etgan. Albatta hayotda geometrik yasash istalgan asbob bilan bajarilishi mumkin va qulay. Ammo oddiy chizg'ich vositasida masala yechish mantiqiy mushohada qobiliyatini o'stiradi.

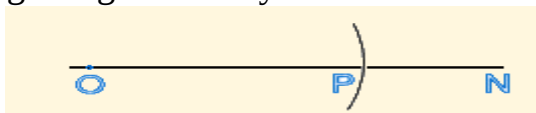
Shu paytgacha turli xil asboblarni yordamida har xil geometrik shakllarni yasab keldik. Masalan, chizg'ich yordamida to'g'ri chiziq, nur, kesma, uchburchak va boshqa shakllarni chizdik. Chizg'ich va transportir yordamida turli xil burchaklarni chizdik. Sirkul yordamida aylana va yo'lni tasvirladik. Ma'lum bo'lishicha, ko'plab geometrik shakllarni faqat bo'linmalarga ega bo'lgan, bir tomoni to'g'ri (burchak) chizg'ich va sirkul (2-rasm) yordamida yasash mumkin ekan.

Shu sababdan, geometriyada shu ikki asbob yordamida yasashga doir masalalar maxsus ajratib qaraladi.

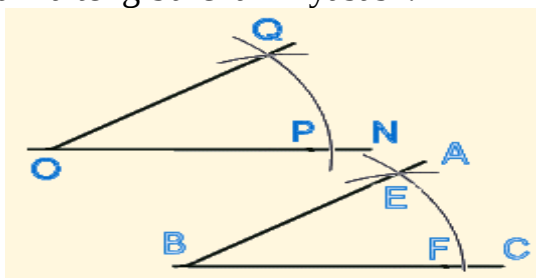
Bu ikki asbobdan foydalanishning maxsus qoidalari bor- ular faqat quyidagi ishlarni bajarishga ruxsat berilgan.

3. Asosiy oddiy yasash masalalari:

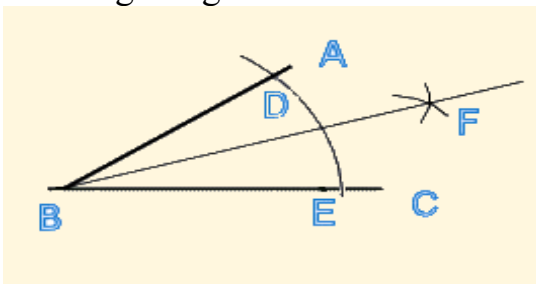
1. Berilgan kesmaga teng kesmani yasash.



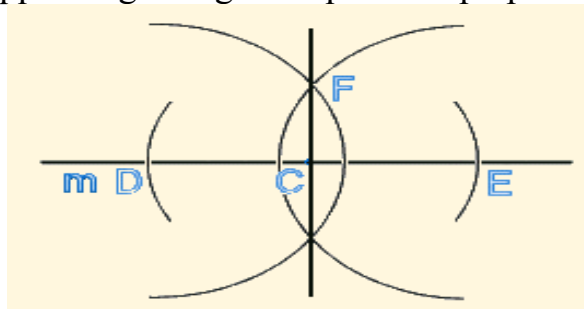
2. Berilgan burchakka teng burchakni yasash.



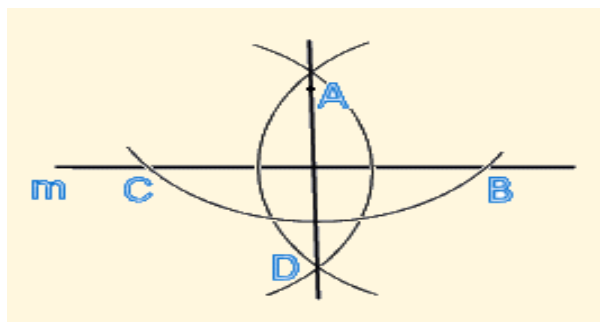
3. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish.



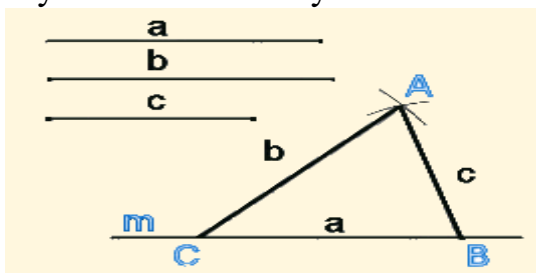
4. To'g'ri chiziqqa uning berilgan nuqtasidan perpendikulyar o'tkazish.



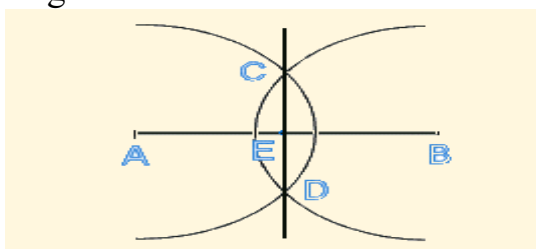
5. To'g'ri chiziqqa nuqtadan perpendikulyar o'tkazish.



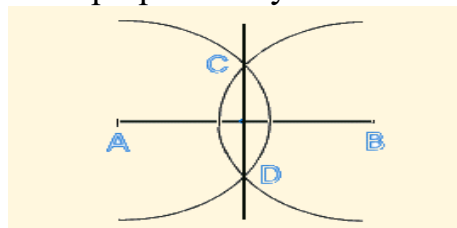
6. Uchta tomoni bo'yicha uchburchak yasash.



7. Kesmani teng ikkiga bo'lish.



8. Berilgan kesmaga o'rta perpendikulyar o'tkazish.



7. Yasashga doir masalalarni yechishdagi asosiy bosqichlari

7.1. Yechish bosqichlari haqida umumiy ma'lumot

Odatda yasashga doir geometrik masalalarni yechishni engillashtiruvchi va uning to'la echilishini ta'minlovchi turtta bosqichga rioya qiladi. Ular analiz, yasash, isbotlash va tekshirish bosqichlaridir; bu bosqichlar eramizdan to'rt asr muqaddam yunon olimlari tomonidan yaratilgan.

1. **Analiz** (analysis) grekcha so'z bo'lib, biror jism yoki hodisani bo'laklarga ajratib teshirish degan ma'noni anglatadi.

Yasashga doir masalalarni analiz qilish deb, bu masalani echilishi olidindan ma'lum bo'lgan masalalarga ajratish va ularni yechish tartibini aniqlashga aytiladi.

Analiz «izlangan figura topildi» deb faraz qilinib, uni masalani tartibiga mumkin qadar to'la javob beradigan tarzda taxminan chizib qo'yiladi. So'ngra bu taxminiy figura (ya'ni analiz chizmasi)da berilgan ma'lumotlarning bor-yo'qligini aniqlanadi va etishmaganlari masalaa shartiga muvofiq chizib qo'yiladi, bu figura

asosida izlangan figura bilan masalada berilganlar orasidagi bog'lanishlar aniqlanadi. So'ngra bu figuraning qaysi elementlarini qay tartibda yasash mumkinligi belgilanadi.

Bu esa izlanayotgan figurani yasash rejasining o'zginasi bo'ladi.

Analizda ko'pincha masalalar berilganlarga tayanib, shunday yordamchi figura topish nazarda tutiladiki, bu yordamchi figuradan izlangan figuraga o'ish mumkin bo'lsin.

Shuning uchun analiz- masala yechishning eng muhim (ijodiy) bosqich yoki tayyorgarlik bosqichi deb ataladi.

2. **Yasash**-masala yechishning amaliy bosqichir. Bu bosqichda analizda tuzilgan plan bo'yicha sirkul va chizg'ich yordamida izlangan figuraning ayrim elementlari va butun figuraning ustalik bilan chizish talab etiladi.

3. **Isbot (sintez)**. Bu bosqich masala yechishning sinash bosqichi bo'lib, unda masalani to'g'ri echilganligi, ya'ni yasalgan figuraning masala talablariga javob berishi isbot qilinadi. Yasashda bajarilgan ishlarga va tegishli teoremlarga tayanib isbotlanadi.

4. **Tekshirish**. Bu bosqich ham masala yechishning ijodiy bosqichi bo'lib, yasashga doir masalarni echilishi umuman shu bosqichda yakunlanishi kerak.

Bu bosqichda berilgan ma'lumotlarning o'zgarishi masala echimiga qanday ta'sir qilishi o'rganiladi, ya'ni qaysi hollarda echimning bo'lishi nechta bo'lishi, qanday hollarda echimning bo'lmasligi aniqlanadi.

Yechishga doir masalarni bosqichlab yechish, to'g'ri yechish garovidir. Lekin shuni esda tutish lozimki, har qanday masalani yechishda ham bu to'rtala bosqichga qat'iy rioya qilish shart emas. Masalananing og'ir-engiliga, soda-murakkabligiga qarab, bu bosqichlarning ba'zilarigagina to'xtalish mumkin. Masalan, yechish yo'li masala shartidan anglashilib tursa, analizga hojat qolmaydi, yechishning to'g'riligi analiz yasashdan ochiq ma'lum bo'lsa, isbot uchun ihtiyoj qolmaydi.

7. 2. Masalani bosqichlab yechishga oid ba'zi bir masalalar

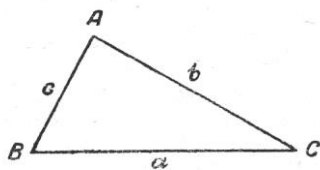
1-masala. Bir kateti va ikkinchi katetiga o'tkazilgan medianasi berilgan to'g'ri burchakli uchburchak yasang.

Analiz. Izlangan burchak topildi deb faraz qilib, uni taxminan chizib qo'yaylik: 1-chizmadagi $\triangle ABC$ –izlangan uchburchak va uning elementlari $BC = a$, $BD = m_b$, $\angle C = 90^\circ$ bo'lsin. Bu uchburchakni yasash uchun uning A , B va C uchlarini toppish kerak. $BC = a$ tomoni berilgani uchun uning B va C uchlari ma'lum. A uchi uchburchak AC va AB tomonlarining kesishish nuqtasi bo'lsa ham bu tomonlar noma'lum bo'lganligi uchun ular yordamida A nuqtani bevosita topib bo'lmaydi. Shuning uchun to'g'ri burchakli $\triangle ECD$ ni qaraymiz.

Uning BC kateti, BD gipotenuzasi va $\angle C = 90^\circ$ berilgani uchun uni yasash mumkin. Berilishiga ko'ra, BD kesma mediana bo'lgani uchun $AD = CD$. Shuning uchun $\triangle BCD$ ning CD kateti davomida unga teng kesma olib, A nuqtani topish mumkin. So'ngra A va B nuqtalarni tutashtirsak, $\triangle ABC$ hosil bo'ladi.

2-masala. Uch tomoni berilgan uchburchak yasang.

Analiz. Masala yechildi deb faraz qilib, izlangan uchburchakning taxminan chizib qo'yamiz (5-chizma).



8- I чизма.

5-chizma

Bunda $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Agar a kesma yasalsa, uning B va C uchlari ABC uchburchakning ikki uchi bo'ladi. Endi uchinchi A uchining qayerda yotishini aniqlash qoldi. Buning uchun A nuqtaning ikki xossasiga e'tibor qilamiz.

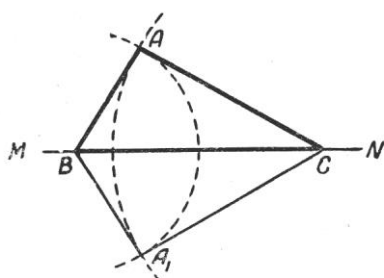
1) A nuqta B nuqtaga berilgan c masofada yotadi, demak, u B nuqtani markazi qilib c kesmaga teng radius bilan chizilgan aylanada yotar ekan.

2) Ikkinchi tomondan, shu A nuqta C nuqtadan berilgan b masofada yotadi, demak, u c markazdan b kesmaga teng radius bilan chizilgan aylanada yotar ekan.

Shunday qilib uchburchakning izlanayotgan A uchi bu ikki aylana yo'ylarining kesishish nuqtasi bo'ladi.

Yasash. Ixtiyoriy MN to'g'ri chiziqda berilgan tomonlardan biriga, masalan, a kesmaga teng qilib, BC kesma ajratamiz (6-chizma). Bu kesmaning B uchini markaz qilib c ga teng radius bilan va C uchini markaz qilib b ga teng radius bilan ikkita yoy chizamiz. Bu yoylar kesishgan A (yoki A_1) nuqtani B va C nuqtalar bilan tutashtirsak, talab qilingan ABC uchburchak hosil bo'ladi.

Isbot. Yasashga ko'ra, $BC = a$, $AC = b$ va $AB = c$ bo'lgani uchun ABC uchburchak masalaning talabiga javob beradi.



8- II чизма.

6-chizma

Tekshirish. Berilgan kesmalar $|b - c| < a < b + c$ munosabat bo'lgandagina uchburchak yasash mumkin.

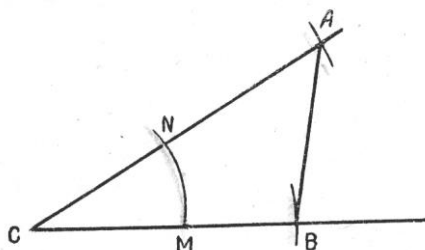
Yasash natijasida ikkita ABC va A_1BC uchburchak hosil bo'lsada, bular o'zaro teng bo'lganligi uchun masalani javobi sifatida bulardan bittasi olinadi.

3-masala. Ikkita tomoni va ular orasidagi burchagi berilgan uchburchakni yasang.

Izlangan ABC uchburchakda $BC = a$, $AC = b$ va $\angle C = \varphi$ berilgan bo'lsin.

Masalani echilishi uning shartidan ko'rinib turganligi uchun to'g'ridan-to'g'ri yasashga o'tamiz.

Yasash. Berilgan C burchakka teng burchak yasab uning bir tomoniga $BC = a$ va ikkinchi tomoniga $AC = b$ kesmalar qo'yiladi. (7-chizma)



10- чизма.

7-chizma

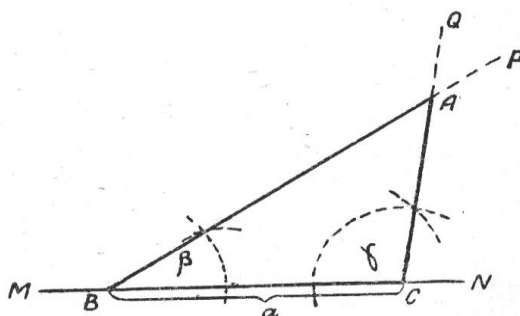
A va B nuqtalarni tutashtirsak, ABC uchburchak hosil bo'ladi.

Tekshirish. Yasalgan uchburchak masalaning talabiga javob beradi.

Izlanayotgan uchburchakning mavjud bo'lishi uchun berilgan burchak 180° dan kichik bo'lishi shart; masala bitta javobga ega.

4-masala. Bir tomoni va unga yopishgan burchagi berilgan uchburchak yasang.

Bu masalaning ham echilish yo'li ravshan, demak, analizga ehtiyoj yo'q.



11- чизма.

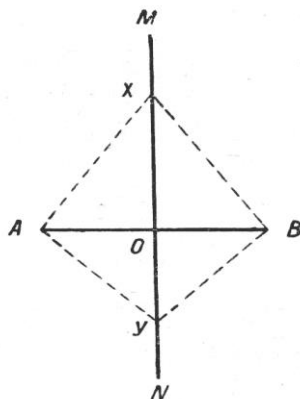
8-chizma

Yasash. Ixtiyoriy MN to'g'ri chiziqlarning biror B nuqtasidan boshlab, $BC = a$ kesma olamiz (8-chizma). Bu kesmaning bir tarafida $\angle NBP = \beta$ va $\angle MCQ = \gamma$ larni yasaymiz. BP va CQ to'g'ri chiziqlar biror A nuqtada kesishsa, ABC uchburchak izlangan uchburchak bo'ladi.

Bu uchburchakning masala talabiga javob berishi uning yasaliishidan ko'rinib turibdi.

Uchburchakni
burchagining yig'indisi
Masala birgina echimga

5-masala. Berilgan
kesmaga perpendikulyar



12- 1 чизма.

yasash uchun berilgan ikkita
 180° dan kichik bo'lish shart.
ega bo'ladi.
kesmaning o'rtasidan shu
to'g'ri chiziq o'tkazing.

9-chizma

Analiz. Masala echilgan va so'ralgan to'g'ri chiziq 9-chizmadagi MN to'g'ri chiziq deb faraz qilaylik. Berilgan AB kesmaning o'rtasini O harfi bilan belgilasak quyidagilar o'rinli bo'lishi kerak:

$$AO = OB, MN \perp AB \quad (1)$$

MN to'g'ri chiziq O nuqtadan o'tadi. Izlangan MN to'g'ri chiziqni chizish uchun, uning ixtiyoriy ikki nuqtasini topsak etadi. Buning uchun taxminiy chizilgan MN to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy ikki X va Y nuqtani olib, ularning shunday xossasini topaylikki, bu xossaga tayanib, X va Y nuqtalarni hamma vaqt yasash mumkin bo'lsin. Buning uchun X va Y nuqtalarni berilgan kesmaning uchlari bilan tutashtirib, hosil bo'lgan uchburchakni tekshiramiz:

(1) ga asosan:

$$AO = OB$$

$\angle AOX = \angle BOX$ va OX – umumiy katet.

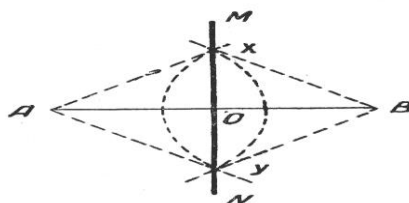
$$\text{Demak: } \triangle AOX = \triangle BOX \quad (2)$$

$$\text{Bundan: } AX = BX \quad (3)$$

$$\text{Xuddi shu yo'l bilan: } AY = BY \quad (4)$$

ekanini ham isbot qilish mumkin.

(3) tenglik X nuqtaning, (4) tenglik esa Y nuqtaning berilgan A va B nuqtalardan teng masofada yotishini ko'rsatadi. Demak, X nuqta (shuningdek, Y nuqta ham) berilgan A va B nuqtalarni markaz qilib, ixtiyoriy (lekin har gal teng) radius bilan chizilgan ikki yoyning kesishish nuqtasi sifatida aniqlanadi. Lekin, X va Y nuqtalarni (8-chizmadagidek), turli radiusli ikki juft yoyning kesishish nuqtalari sifatida emas, balki teng radiusli ikki yoyni AB kesmaning ikki tarafida kesishtirib topish qulayroq (10-chizma).



12- II чизма.

10-chizma

Yasash . Berilgan kesmaning A va B uchlarini markaz qilib ,bu kesmaning yarmidan uzunroq radius bilan ikkita yoy chizamiz. Bu yoylar kesishgan X va Y nuqtalardan izlangan MN to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

Isbot. Topilgan MN to'g'ri chiziq masala talabiga javob berishini isbot qilish, ya'ni: $AX = BX$ va $AY = BY$ tengliklarga tayanib, $MN \perp AB$ va $AO = OB$ munosabatlarni isbot qilish kerak. 10-chizmadagi AXY va BXY uchburchaklarda: $AX = BX$, $AY = BY$ va XY umumiy tomon bo'lgani uchun.

$$\triangle AXY = \triangle BXY \quad (5)$$

$$\text{Bundan: } \angle AXY = \angle BXY \quad (6)$$

$AX = BX$, $\angle AXY = \angle BXY$ hamda AOX va BOX uchburchaklarda OX -umumiy tomon bo'lgani uchun: $\triangle AOX = \triangle BOX$

Bu uchburchakda (mos elementlari sifatida): $AO = OB$, $\angle AOX = \angle BOX = 90^\circ$. Bu esa XY (yoki MN) to'g'ri chiziqning izlangan to'g'ri chiziq ekanini ko'rsatadi.

Kesmaning o'rtasidan unga perpendikulyar vaziyatda o'kazilgan to'g'ri chiziq *o'rta perpendikulyar* deyiladi.

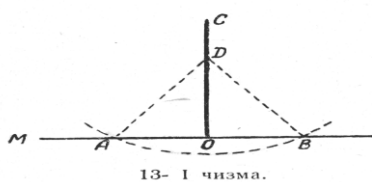
Yuqoridagi yasalgan X va Y nuqtalar orqali MN to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligi va chiziqning faqat bittaligi-berilgan masalaning echimi doim mavjudligini va uning yagonaligini ko'rsatilgan (1-aksioma).

6-masala. Berilgan to'g'ri chiziqqa shu to'g'ri chiziqda yotgan nuqtadan perpendikulyar o'tkazing.

Analiz. Perpendikulyar topildi deb faraz qilib, uni taxminan chizib qo'yaylik (11-chizma); bu farazga binoan, quyidagi tenglik to'g'ri deb hisoblaymiz: $\angle MOC = \angle NOC = 90^\circ$. OC perpendikulyarni chizish uchun uni berilgan O nuqtasidan yana boshqa biror nuqtasini topishimiz kerak; bu nuqtani yasash yo'lini topish uchun faraz qilib chizilgan OC perpendikulyarning ixtiyoriy D nuqtasini markaz hisoblab, shunday yoy chizaylikki, bu yoy MN to'g'ri chiziqni ikki nuqtada tesib o'tsin; kesishish nuqtalarini A va B bilan belgilaylik, bularni D nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan to'g'ri burchakli AOD va BOD uchburchaklarning gipotenuzalari teng va bir kateti umumiy bo'lgani uchun ular tengdir. SHuning uchun $AO = BO$.

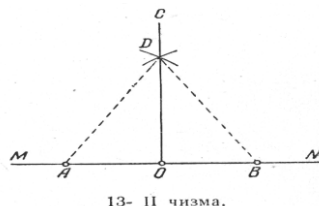
Bu A va B nuqtalardan teng radiusli ixtiyoriy yoylar chizilsa, bu yoylarning kesishgan D (yoki D') nuqtasi izlangan perpendikulyarning ikkinchi nuqtasi bo'ladi.

Yasash. MN to'g'ri chiziqning berilgan O nuqtasidan teng uzoqlikdagi A va B nuqtalaridan ixtiyoriy, lekin bir-biriga teng radiuslar bilan o'zaro kesishuvchi ikkita yoy chiziladi(12-chizma). Bu yoylarning kesishgan D (yoki D') nuqtasi O nuqta bilan tutashtiriladi. OD –izlangan perpendikulyar bo'ladi.



13- I чизма.

11-chizma



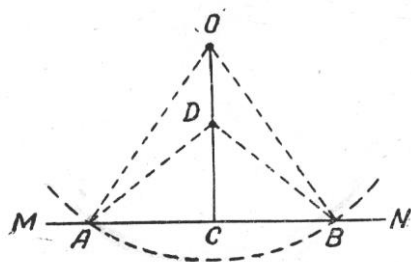
13- II чизма.

12-chizma

Isbot. Yasashga ko'ra $AO = BO$ va $AD = BD$ bo'ladi, DO -umumiy tomon bo'lgani uchun $\triangle AOD = \triangle BOD$. SHuning uchun bu uchburchaklarning mos burchaklari $\angle AOD$ va $\angle BOD$ bir-biriga teng va qo'shni burchaklar bo'lgani uchun to'g'ri burchaklardir, ya'ni $OD \perp MN$. Bu masala hamma vaqt echimga ega va u birgina bo'ladi.

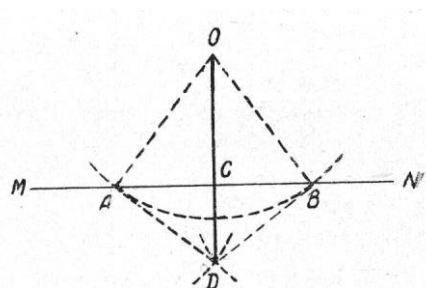
7-masala. Berilgan to'g'ri chiziqqa undan tashqarida yotgan nuqtadan perpendikulyar o'tkazing.

Analiz. $OD \perp MN$ yasaldi deb faraz qilib, uni taxminan chizib qo'yaylik (13- chizma). Bu farazga binoan, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi: $\angle MCO = \angle NCO = 90^\circ$. Izlangan OC perpendikulyarni chizish uchun uning berilgan nuqtasidan boshqa yana bir nuqtasini topish kifoya. Buning uchun berilgan O nuqtadan MN to'g'ri chiziqni ixtiyoriy A va B nuqtalarda kesib o'tuvchi bir yoy chizib, O nuqtani A va B nuqtalar bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan ACO va BCO uchburchaklar o'zaro tengdir, chunki ularning gipatenuzalari teng va bir kateti umumiy. SHuning uchun $AC = BC$. Bundan OC to'g'ri chiziqning AB kesmaga o'rta perpendikulyar ekanligi, undagi ixtiyoriy D nuqtaning A va B nuqtalardan teng masofada yotishi shubhasizdir.



14- I чизма.

13-chizma



14- II чизма.

14-chizma

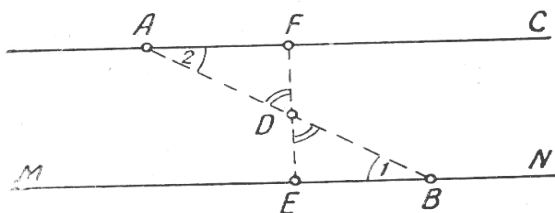
Demak, D nuqta izlangan yordamchi figura bo'lar ekan.

Yasash. Berilgan O nuqtani markaz qilib, MN to'g'ri chiziqni ikki nuqtada kesuvchi yoy chiziladi (14-chizma).

Bu yoyning MN to'g'ri chiziqni kesib o'tgan A va B nuqtalarni markaz qilib ixtiyoriy, lekin AO dan farqli teng radiuslar bilan o'zaro kesishuvchi yoy chizamiz. Bu yoylarning kesishgan D nuqtasidan va berilgan O nuqtadan OD to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

Isbot. $OD \perp MN$ ekanini quyidagicha isbotlash mumkin: yasalgan teng yonli AOB uchburchakda (14-chizma) OC kesma (C nuqta OD bilan MN to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi) O burchakning bissektrisasi. Bu AOD va BOD uchburchaklarning tengligidan kelib chiqadi, chunki ularning uch tomoni mos ravishda bir-biriga teng. Haqiqatan ham, yasashga ko'ra $AO = BO$ va $AD = BD$, OD - umumiy tomon. Bu masala ham hamma vaqt birgina echimga ega.

8-masala. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq chiziq o'tkazing.



15- чизма.

Yasash. Berilgan A nuqtani berilgan MN to'g'ri chiziqning ixtiyoriy B nuqtasi bilan tutashtiramiz(15-chizma); bundan $\angle ABM$ hosil bo'ladi. So'ngra ABO burchakka nisbatan ichki almashinuvchi va unga teng BAC burchak yasaymiz.

Isbot. AB kesmaning o'rtasi D nuqtadan MN to'g'ri chiziqqa DE perpendikulyar o'tkazaylik. Bu perpendikulyarning AC to'g'ri chiziq bilan kesish nuqtasi F bilan belgilab, hosil bo'lgan $\triangle ADF$ va $\triangle BDE$ larni tekshiramiz.

Yasashga ko'ra, bu uchburchaklar bir-biriga (bittadan tomoni va unga yopishgan ikkitadan burchaklar) tengligi uchun $\angle AFD = \angle BED$ dir. Yasalishicha $\angle BED$ to'g'ri burchak bo'lganligi sababli $\angle AFD$ ham to'g'ri burchak bo'ladi, ya'ni FE ekanligi aniqlanadi.

Bir to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan ikki to'g'ri chiziq bir-biriga parallel degan teoremaga asosan, $AC \parallel MN$

9-masala. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'ling, ya'ni burchakning bissektrisasini chizing.

Analiz. NOM burchakni teng bo'luvchi OP nur topildi deb faraz qilaylik(16-chizma)

Bu farazga binoan quyidagi tenglik o'rinli:

$$\angle MOP = \angle NOP = \frac{\angle NOM}{2} \quad (1)$$

OP nurning ixtiyoriy C nuqtasidan berilgan burchakning tomonlariga perpendikulyar o'tkazaylik(17-chizma).

$$CA \perp OM \text{ va } CB \perp ON \quad (2)$$

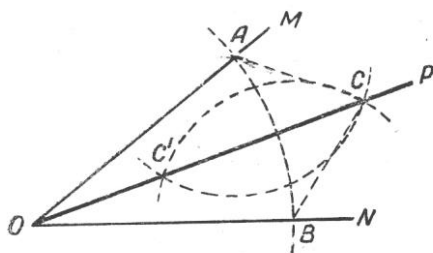
(A va B nuqtalar burchak tomonlari bilan perpendikulyarlarning kesish nuqtalari). Hosil bo'lgan ikki to'g'ri burchakli OAC va OBC uchburchaklar o'zaro teng, chunki ularda OC gipotenuza umumiy va farazimizga binoan bittadan o'tkir burchaklari teng ($\angle 1 = \angle 2$). Shuning uchun

$$OA = OB \text{ va } AC = BC \quad (3)$$

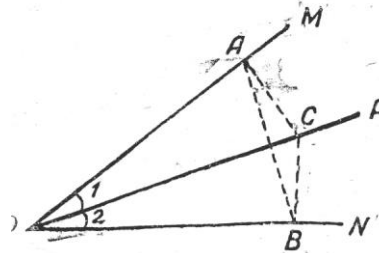
Demak, A va B nuqtalar berilgan burchakning O uchidan teng uzoqlikda, C nuqta esa AB kesmaning o'rta perpendikulyarida yotadi. C nuqtaning bu xossasidan OP nurni yasash yo'li ma'lum bo'ladi.

C nuqta OP nurning ixtiyoriy nuqtasi bo'lganligi uchun quyidagi xossaga kelamiz: burchakning bissektrisasidagi nuqta shu burchak tomonlaridan teng uzoqlikda yotadi (to'g'ri teorema).

теорема.



17- I чизма.



17- II чизма.

16-chizma

17-chizma

Yasash. 1) Berilgan burchak O uchini markaz qilib, ixtiyoriy radius bilan yoy chiziladi (17- chizma). Bu yoy burchak tomonlarini A va B nuqtalarda kesib o'tadi.

2) AB kesmani teng ikkiga bo'lish uchun uning o'rta perpendikulyarida yotuvchi C va C' nuqtalar topiladi.

3) C va C' nuqtalardan to'g'ri chiziqli o'tkaziladi.

Eslatma. Odatda bunday atalgan nuqtadan birini topib, uni berilgan burchakning O uchi bilan tutashtirib, izlangan bissektissa hosil qilinadi.

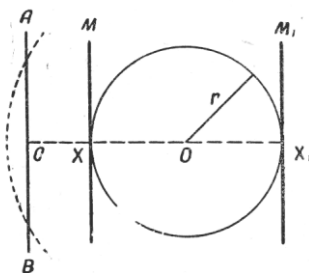
Isbot. Yasashga ko'ra (17- chizma) $OA = OB$ va $AC = BC$ bo'lib C umumiy bo'lganligi uchun AOC va BOC uchburchaklar o'zaro teng. SHuning uchun AOC va BOC uchburchaklar ham o'zaro teng.

Bu isbotni quyidagicha yakunlash mumkin: burchakning tamonlaridan teng uzoqlikdagi nuqta usha burchakning bissektisasida yotadi (teskari teorima). Bu teoremani to'g'riligini ko'rsatish uchun OCA va BOC uchburchaklarning C uchidan o'tkazilgan balandliklarni qarash kerak.

Masala hamma vaqt echimga ega va har burchakning bittadan bissektisasi bo'ladi.

10-masala. Berilgan aylanaga shunday urinma o'tkazingki, u berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin.

Analiz. Istalgan urinma 18-chizmadagi MX to'g'ri chiziqli bo'lsin, uning (O, r) aylanaga urinish nuqtasi X deb faraz qilaylik. Urinmani topish uchun uni urinish nuqtasini topish kerak. Urinish nuqtasini topish yo'lini aniqlash uchun berilgan



18- чизма.

O nuqtani X nuqta bilan tutashtirib, OX kesmani AB to'g'ri chiziqli bilan biror C nuqtada kesishguncha davom ettiraylik.

Farazimiz bo'yicha $MX \parallel AB$ va yasashga ko'ra, $OX \perp MX$ bolgani uchun $OC \perp AB$, to'g'ri chiziqlarning vaziyati ma'lum bo'lib qoladi.

Demak, izlangan X nuqtani (O, r) aylana bilan OC to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi sifatida topish mumkin.

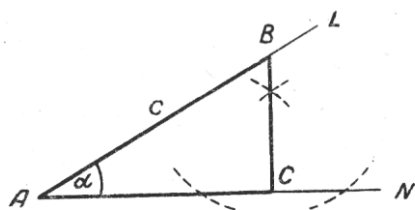
Yasash. O markazdan berilgan AB to'g'ri chiziqqa OC perpendikulyar o'tkazib, bu perpendikulyarning (O, r) aylana bilan kesishgan X nuqtasini topamiz. OC to'g'ri chiziqqa X nuqtasidan MX perpendikulyar o'tkazamiz (4-masala).

Isbot. Yasashga ko'ra, $OC \perp AB$ bo'lgani uchun $MX \perp OC$ bo'lib, MX to'g'ri chiziq OX ga uning X uchiga perpendikulyardir. Shuning uchun MX izlangan urinma bo'ladi.

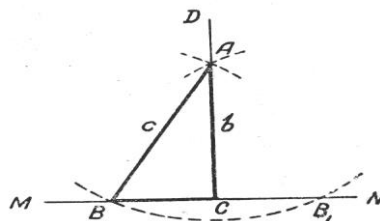
Masala hamma vaqt echiladi va umuman ikkita echimga ega bo'ladi. ($OC \neq r$ bo'lganda ikkita urinma hosil bo'lib, $OC = r$ bo'lganda urinmaning biri berilgan to'g'ri chiziqlarning o'zi, ikkinchisi esa diametrning ikkinchin uchidan o'tuvchi va shu to'g'ri chiziqqa parallel urinma bo'ladi).

11-masala. Gipotenuza va bir o'tkir burchagi berilgan to'g'ri burchakli uchburchak yasang.

Yasash. Berilgan α burchakka teng NAL burchak yasab (9-masala). Bu burchakning bir tomonida, masalan AL da, gipotenuzaga teng $AH = c$ kesma ajratamiz (19-chizma). AB kesmaning B uchidan AN to'g'ri chiziqqa BC perpendikulyar tushiramiz; bu perpendikulyarning AN to'g'ri chiziqdagi C bilan belgilasak, hosil bo'lgan ABC uchburchak izlangan uchburchak bo'ladi, chunki yasalishiga ko'ra $\angle A = \alpha$ va $AB = c$.



19- чизма.



20- чизма.

12-masala. Gipotenuzasi va bitta kateti berilgan to'g'ri burchakli uchburchak yasang.

c va b kesmalar ($c > b$) berilgan.

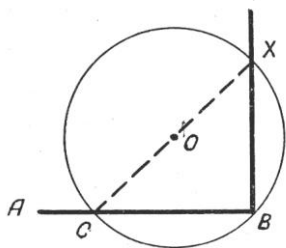
Yasash. Ixtiyoriy MN to'g'ri chiziqlarning (20-chizma) biror C nuqtasidan CD perpendikulyar chizamiz (4-masala); hosil bo'lgan to'g'ri burchakni bir tomonida, masalan CD tomonida, $CA = b$ kesma ajratamiz. So'ngra A nuqtani markaz qilib, c kesmaga teng radiusli yoy bilan MN to'g'ri chiziqni kesamiz: hosil bo'lgan B (yoki B_1) nuqtani A nuqta bilan tutashtiramiz. ABC (yoki AB_1C) uchburchak izlangan uchburchak bo'ladi, chunki yasashga ko'ra u to'g'ri burchakli. AC kateti berilgan b kesmaga va AB gipotenuzasi esa berilgan c kesmaga teng. $\triangle ABC = \triangle AB_1C$ bo'lgani uchun masalaning javobi sifatida bularning biri- $\triangle ABC$ olinadi.

Agar $b \geq c$ bo'lsa, masala echimga ega bo'lmaydi.

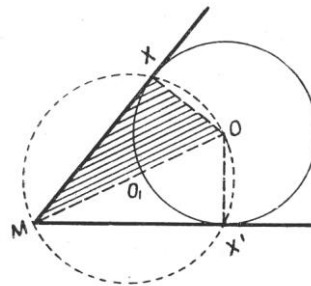
13-masala. Berilgan nur uchidan, uni davom ettirmay perpendikulyar o'tkazing.

Yasash. Berilgan BA nurdan tashqarida biror O nuqta olamiz. O ni markaz qilib, OB radiusli yoy chizamiz. Bu yoy BA nurni biror C nuqtada kesib o'tadigan bo'lsin (22-chizma).

So'ngra C va O nuqtalari tutashtirib, CO kesmani bu yoy bilan ikkinchi bir X nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. B va X nuqtalarni tutashtiruvchi BX to'g'ri chiziq izlangan perpendikulyar bo'ladi, chunki CX kesma aylanani diametri bo'lib, diametrga tirilgan ichki chizilgan burchak to'g'ri burchakdir. Demak $\angle CBX = 90^\circ$



22- chizma.



23- 1 chizma.

14-masala. Berilgan nuqtadan berilgan aylanaga urinma o'tkazing.

Bu masalani yechishda ikki holga kelimiz:

Birinchi (umumiy) hol. Berilgan nuqta berilgan aylanadan tashqarida yotadi.

Analiz. Izlangan urinma topildi deb faraz qilib, unga doir chizmani chizib qo'yaylik: 23- chizmadagi MX (MX') to'g'ri chiziq urinma va X (X') uning urinish nuqtasi bo'lsin.

Ko'ramizki, MX ni topish uchun uning X nuqtasini topish kifoya, X nuqtani O nuqta bilan va O nuqtani esa M nuqta bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan MXO uchburchak to'g'ri burchakli bo'lib, uning MO gipotenuzasi va OX kateti ma'lum, chunki MO berilgan M nuqta bilan berilgan aylana markazi orasidagi masofa va OX esa shu aylananing radiusi.

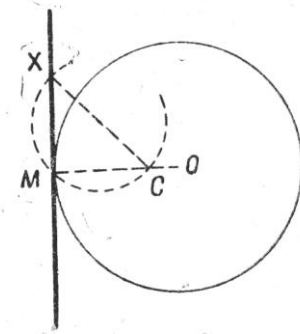
Demak, izlangan X nuqtani MXO uchburchak to'g'ri burchagining uchi sifatida topish mumkin.

Yasash. Berilgan M nuqtani berilgan aylananing O markazi bilan tutashtirib, MO diametrli aylana chizamiz. Chizilgan aylananing berilgan aylana bilan kesishgan nuqtalari X va X' bo'lsin. MX va MX' to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz.

Isbot. Yasashga binoan MXO to'g'ri burchakli uchburchak, ya'ni MX to'g'ri chiziq OX radiusiga uning aylana ustidagi X uchiga perpendikulyar. Demak, bu to'g'ri chiziq aylanaga urinadi.

Tekshirish. Yasashga binoan aylanalarning markazlari orasidagi masofa $OO_1 < R + r$ bo'lgani uchun bu ikki aylana ikkita urinma (MX va MX') o'tkazish mumkin.

Ikkinchi (xususiy) hol. Berilgan nuqta aylana ustida yotadi.



23- II чизма.

Berilgan M nuqtaning berilgan aylanada yotishi urinish nuqtasi shu M nuqta bo'lishini ko'satadi; bu holda esa birinchi holda bajarilgandek, urinish nuqtasini qidirishga ehtiyoj qolmaydi. Bu holda izlangan urinma berilgan aylananing OM radiusiga M nuqtada perpendikulyar bo'ladi(23-II chizma).

Demak, berilgan O nuqtani markaz bilan tutashtirib, bu radiusga uni M uchidan perpendikulyar o'tkazsak, izlangan urinma hosil bo'ladi.

15-masala. Berilgan ikki aylanaga umumiy urinma o'tkazing. (O, R) va (O_1, r) aylanalar berilgan. Bunda

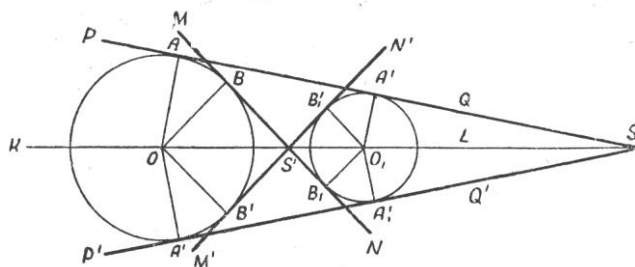
$$R > r, OO_1 > R + r$$

Masalaga kirishishdan oldin quyidagi ta'riflarni eslatib o'tamiz:

1-ta'rif. Ikki aylananing markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq bu aylanalarning *markazlar chizig'i* deb, bu chiziqning markazlar orasidagi kesma esa *markazlar masofasi* deb ataladi. Masalan, 24-1 chizmadagi ikki aylananing markazlar chizig'i KL to'g'ri chiziq bo'lib, uning OO_1 bo'lagi-markazlar masofasidir.

2-ta'rif. Ikki aylananing har biri bilan faqat bittadan umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq bu aylananing *umumiy urinmasi* deyiladi.

Umumiy urinmaning ba'zi xossalari. Umumiy urinmaning urinish nuqtalarini mos aylanalarning markazlari bilan tutashtiruvchi radiuslar o'zaro parallel bo'ladi(24-I chizma).



24- I чизма.

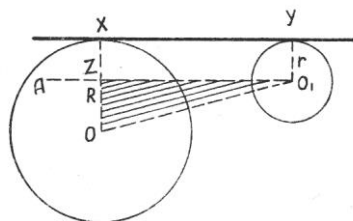
Agar umumiy urinmaning urinish nuqtalariga o'tkazilgan bir xil yunalishda bo'lsa, (ya'ni radiuslar markazlari chizig'Idan bir tarafda joylashgan bo'lsa), urinma *tashqi urinma* deyiladi: agar umumiy urinmaning urinish nuqtalariga utkazilgan radiuslar teskari yo'nalishda bo'lsalar (ya'ni radiuslar markazlari chizig'ining turli tarafida joylashgan bo'lsa), bunday urinma *ichki umumiy urinma* deyiladi. Masalan, 24-1- chizmadagi PQ va P'Q' urinmalar -tashqi umumiy urinmalar, MN va M'N' urinmalar esa ichki umumiy urinmalardir.

Aylanalarning umumiy ichki urinmalari markazlar chizig'ini markazlar orasida kesib o'tadi; umumiy tashqi urinmalari esa markazlar chizig'ini markazlar oralig'idan chetda kesib o'tadi.

Endi yuqorida berilgan masalani yechishga o'tamiz.

Berilgan ikki aylanaga umumiy urinma o'tkazing.

Analiz. So'ralgan tashqi umumiy urinma topildi deb faraz qilib, uni taxminan chizib qo'yaylik; u 24-2- chizmadagi XY to'g'ri chiziq bo'lib, Uning urinish nuqtalari X va Y bo'lsin. Ta'rifga asosan:



$$OX \perp XY, \quad O_1Y \perp XY$$

24- II чизма.

Bundan: $OX \parallel O_1Y$. (1)

Izlangan urinmani chizish uchun uning urinish nuqtalari topilsa kifoya. Bu nuqtalar $OX = R$ va $O_1Y = r$ radiuslar berilgan aylanadagi uchlaridir. Demak, bu ikki radiusning yo'nalishini aniqlasak, ularning X va Y uchlari ham aniqlanadi.

(1) ga binoan bu ikki radius o'zaro parallel bo'lgani uchun ulardan bittasini, masalan, OY ning yo'nalishini aniqlash kifoya. Buning uchun OX ning O nuqtasidan boshqa yana bitta nuqtasini topishimiz kerak. SHu maqsadda O_1 nuqtadan $O_1A \parallel YX$ to'g'ri chiziq o'tkazib, uni OX radius nuqtasi bilan kesishish nuqtasini Z bilan belgilaylik. Z nuqtani yordamchi figura bo'lishini ko'rsatamiz:

A) (1) ga ko'ra: $OX \perp XY$; yasashga ko'ra: $O_1A \parallel YX$. SHuning uchun

$$O_1A \perp OX \quad (2)$$

Bundan $OZ \perp O_1Y$ uchburchakning to'g'ri burchakli ekanligi va Z nuqta esa bu uchburchak to'g'ri burchagi uchi ekanligi ma'lum bo'ladi. Demak, Z nuqta bu uchburchakning OO_1 gipotenuzasini diametr qilib chizilgan aylana nuqtasi ekan.

Ikkinchi tomondan:

(1) ga asosan: $ZX \parallel O_1Y$; yasashga ko'ra: $O_1Z \parallel YX$.

SHuning uchun

$$ZX = O_1Y = r \quad (3)$$

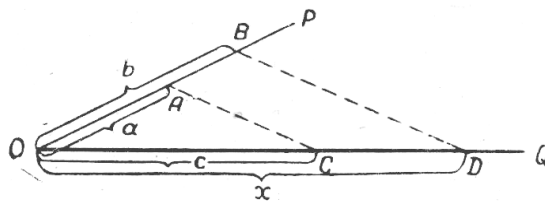
Endi (3) ga tayanib, OZ kesmaning uzunligini topa olamiz.

$$OZ = OX - ZX = OX - O_1Y = R - r \quad (4)$$

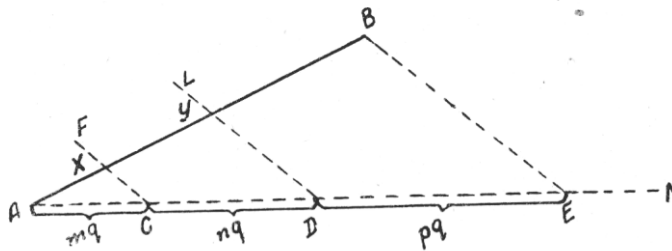
Bu esa izlangan Z nuqtaning O nuqtadan $OZ = R - r$ masofada yotishini, ya'ni uni O markazdan $R - r$ radius bilan chizilgan aylana nuqtasi ekanini ko'rsatadi.

Demak, Z nuqtani OO_1 diametrli aylana bilan $(O, R - r)$ aylananing kesishish nuqtasi sifatida topish mumkin.

B) Endi Z nuqta yordamida izlangan XY urinmani chizish yo'lini aniqlashimiz kerak; Z nuqtani O markaz bilan tutashtirib, OZ kesmani berilgan aylana bilan biror X nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. So'ngra kichik



26- I чизма.



25- чизма.

aylananing $O_1Y \parallel OX$ radiusini chizib, topilgan X va Y nuqtalardan to'g'ri chiziq-umumiy urinma o'tkazamiz.

16-masala. Berilgan kesmaning berilgan $m:n:p$ nisbatlarda uch bo'lakka bo'ling.

Yasash. 1) Berilgan AB kesmaning bir uchi A nuqtadan bu kesma bilan ixtiyoriy burchak hosil qiluvchi AN nur o'tkazamiz.(25-chizma)

2) Ixtiyoriy uzunlikdagi biror q kesma olib, AN nurda quyidagi kesmalarni ajratamiz:

$$AC = mq; CD = nq; DE = pq.$$

3) E nuqtani berilgan kesmaning ikkinchi uchi B nuqta bilan tutashtirilib, D va C nuqtalardan quyidagi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz:

$$DL \parallel CF \parallel EB$$

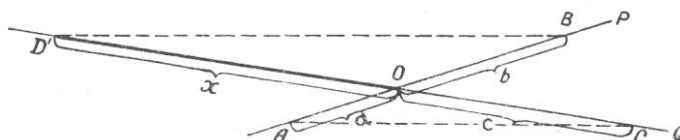
Bunda chizilgan CF va DL to'g'ri chiziqlar berilgan AB kesma bilan kesishib, izlangan X va Y nuqtlarni hosil qiladi.

17-masala. Berilgan a, b, c kesmalarga proporsional to'rtinchi kesmani yasang, ya'ni shunday x kesma topingki, u quyidagi proporsiyani qanoatlantirsin

$$a:b=c:x$$

Yasash. Ixtiyoriy POQ ixtiyoriy burchakning bir tomoniga(yoki uning burchak uchidan ikkinchi tomondagi davomiga)uning O uchidan boshlab berilgan birinchi nisbatning hadlari a va b kesmalar qo'yiladi(26-I,11 chizma). $OA = a$, $OB = b$ deb faraz qilaylik. Burchakning ikkinchi tomoniga uning O uchidan boshlab, $OC = c$ qo'yiladi.

So'ngra, A va C nuqtalarni tutashtirib, $BD \parallel AC$ to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu chiziq burchakning OQ tomonini D nuqtada (yoki uning O dan o'tkazilgan davomidagi biror D' nuqtada) kesadi. OD (yoki OD') so'ralgan kesma bo'ladi, ya'ni $OA:OB = OC:OD$ yoki $a:b=c:x$



26- II чизма.

chunki yasalishiga ko'ra, $AC \parallel BD$ bo'lgani uchun burchakning tomonlarida hosil bo'lgan kesmalar mos ravishda proporsional bo'ladi.

8. Bevosita echiladigan masalalar.

Elementar masalalar bilan tanishgan o'quvchi, maxsus usullar bilan masalalar yechishga o'rganishni boshlashdan oldin, u usullardan ishlatmasdan bevosita echiladigan masalalar bilan mumkin qadar mukammal tanishib chiqish kerak. Bu bir tomonda o'quvchining masalalar yechishda malaka o'ttirishini bir qadar tezlatlsa, ikkinchi tomondan, elementar masalalarni o'rinli ishlatishga o'rgatadi, natijada o'quvchi masalalarni maxsus usullar bilan echichni o'rganishga asosli tayyorlangan bo'ladi. SHu mulohazalarga rioya qilib, bu bobda bevosita echiladigan masalalarni o'rganamiz.

Ko'p masalalarda tegishli figurani yasash yo'li taxminiy chizilgan figuraning o'zidan va masala shartida berilgan ma'lumotlardan ravshsan ko'rinadi. SHuning bu xil masalalar bevosita echiladigan masalalar deyiladi. Bu bobda shu xildagi masalalar haqida qisqagina ko'rsatma berish bilan cheklanamiz.

1. To'g'rilash usulining mohiyati va uning tatbiq etilishi

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan kesmalarining, masalan, siniq chiziq bo'g'inlarining algebraik yig'indisiga teng kesma yasash, kesmalarni to'g'rilash deb ataladi.

To'g'rilash usuli bilan masala yechishda ham avval ko'rilgan bosqichlab yechishdan to'la foydalanamiz.

Yasashga doir masaladagi ma'lum elementlar qatorida izlangan figura chiziqli noma'lum elementlarining yig'indisi yoki ayirmasi berilgan bo'lsa, bunday masala to'g'rilash usuli bilan oson echiladi.

Misollar ko'raylik.

1-masala. Asosi, unga yopishgan bir burchagi va yon tomonlarining ayirmasi berilgan uchburchak yasang.

Bu masalani yechishda quyidagi ikki holni ko'zdan kechiramiz:

1. Asosidagi burchaklardan kichigi bo'lgan hol.
2. Asosidagi burchaklardan kattasi berilgan hol.

Birinchi hol. Analiz. Izlangan uchburchak 1-chizmadagi uchburchak deb faraz qilaylik.

Berilgan p kesmani (ayirmani) bu burchakda ko'rsatish uchun uning AC tomoni ustida (A uchidan boshlab) $AB = AD$ tomonini qo'yamiz, bundan $AC - AB = AC - AD = DC = p$ hosil bo'ladi.

D nuqtani B nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan BCD uchburchakning yordamchi figura bo'la olishini isbot qilamiz.

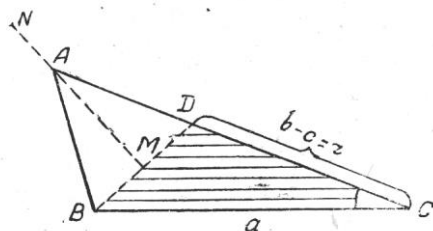
Berilgan $BC = a$, $CD = p$ tomonlar va ular orasidagi C burchak bo'yicha BCD uchburchak yasash mumkin.

Bu BCD uchburchak yordamida izlangan ABC uchburchakni yasash mumkin: buning uchun ABC uchburchakning A uchini topish kerak. A nuqta- ayni vaqtda teng yonli BAD uchburchakning uchidir. Bu uchburchakning uchini topish uchun BD kesmalar o'rta perpendikulyari MH ni chizib, uni CD ning davomi bilan

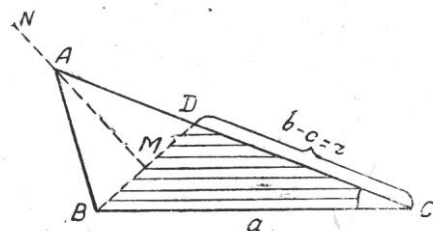
kesishtiramiz; topilgan A nuqtani B nuqta bilan tutashtirsak, izlangan ABC uchburchak hosil bo'ladi.

Yasash. Analizda tuzilgan plan bo'yicha yasasak, 2-chizmadagi ABC uchburchak hosil bo'ladi (yasash tartibi chizmada raqamlar bilan ko'rsatilgan).

Isbot. 2-chizmada yasalgan ABC uchburchak masalaning talabiga javob beradi,



41- I чизма.



41- I чизма.

chunki; yasalishicha, $BC = a$ bo'lib $\angle ACB = \angle C = \alpha$, $AB = AD$, ya'ni
 $AC - AB = AC - AD = DC = p$.

Tekshirish. Izlangan ABC uchburchakning mavjud bo'lishi-bo'lmasligi A uchining mavjud bo'lishiga bog'liqdir. A nuqtaning mavjudligi esa BD kesmaning o'rta perpendikulyari MH bilan CD (davomi)ning kesishish yoki kesishmasligiga bog'liq, bu esa ABC uchburchakning B uchidan AC tomoniga BH perpendikulyar tushirishdan hosil bo'lgan to'g'ri burchakli BHC uchburchakning CH kateti bilan $CD = p$ kesmaning hamda p bilan a kesmaning nisbiy qiymatlariga bog'liqdir. To'g'ri burchakli uchburchakdan $CH = a \cdot \cos C$ munosabatni yozib quyidagi hollarni qaraylik:

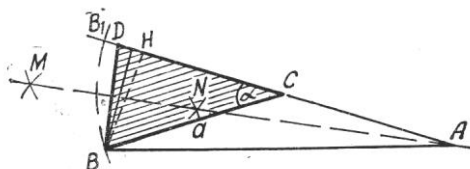
1) Agar 2-chizmadagi kabi $CD < CH$, ya'ni $r < a \cdot \cos C$ bo'lsa, MH o'rta perpendikulyar CD ning davomi bilan biror nuqtada kesishib, izlangan A nuqtani hosil qiladi; bu ikki to'g'ri chiziqlarning kesishuvini to'g'ri burchakli BHD uchburchakdagi BHD burchakning o'tkir burchak bo'lishi bilan asoslash mumkin.

Demak, bu holda masala echiladi va bitta uchburchak hosil bo'ladi.

2) Agar $CD = CH$, ya'ni $r = a \cdot \cos C$ bo'lsa, BD tomon BD perpendikulyar bilan ustma-ust tushib, D burchak to'g'ri burchak bo'ladi. SHuning uchun MH o'rta perpendikulyar bilan CD tomonning davoni o'zaro kesishmaydi, demak, bu holda masala echimga ega bo'lmaydi.

3) Agar 3-chizmadagi singari $CH < CD < CB$, ya'ni $a \cdot \cos C < r < a$ bo'lsa,

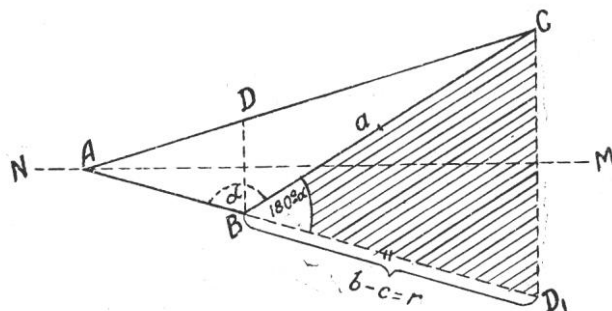
BD ning o'rta perpendikulyari bo'lgan MH to'g'ri chiziq CD kesmaning C uchidan nariga o'tkazilgan davomi bilan kesishib A nuqtani hosil qiladi. Lekin bu A nuqtani B nuqta bilan tutashtirgandan keyin hosil bo'ladigan ABC



41- III чизма.

uchburchakdagi $p = CD = AD - AC = AB - AC = c - b$ bo'lsada, $\angle ACB \neq \alpha$ dir, ya'ni masalaning bitta talabiga javob bersada, uning ikkinchi talabiga javob bera olmaydi. Shuning uchun bu holda ham masala echimga ega bo'lmaydi.

4) agar $r \geq a$ bo'lsa uchburchak hosil bo'lmaydi, chunki shart uchburchakning mavjudlik shartiga to'g'ri kelmaydi (uchburchakning ikki tomoni ayirmasi o'sha



42- I чизма.

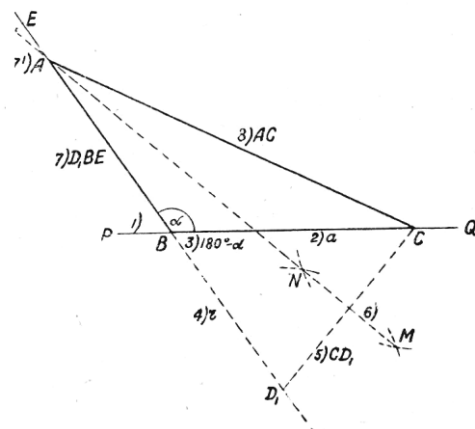
uchburchakning uchinchi tomonidan albatta katta bo'lish kerak).

Ikkinchi hol. Analiz. Izlangan uchburchak topildi deb faraz qilib, taxminan 42-1 chizmadagi ABC uchburchakni chizib qo'yaylik. Bunda berilganlardan $AC - AB = b - c = p$ kesmani chizmada ko'rsatish uchun (birinchi holdagi singari) AB tomonni AC tomon ustiga uning A uchidan boshlab quysak, $AC - AB = AC - AD = DC = p$ hosil bo'ladi.

Lekin, D nuqtani B nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo'ladigan BCD uchburchak yordamchi figura bo'la olmaydi, chunki uni faqat BC va CD tomonlar bo'yicha yasab bo'lmaydi. SHuning uchun p kesmani chizmada masalaning birinchi holidan boshqacharoq yo'l bilan ko'rsatishga majburbiz.

Uchburchakning AC (uzun) tomonini uning AB (qisqa) tomoni ustiga A nuqtadan boshlab qo'yamiz.

Bundan AB tomon davonida $BD_1 = AD_1 - AB = AC - AB = p$ kesma hosil bo'ladi; uning D_1 uchini C nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan BCD_1 uchburchakning yordamchi figura bo'lish yoki bo'lmashini aniqlaylik: $BC = a, BD_1 = p$ tomonlari va $\angle CBD_1 = 180^\circ - \alpha$ burchagi bo'yicha bu uchburchakni yasash mumkin; berilganlarga tayanib yasalishi mumkin bo'lgan keyingi uchburchakdan izlangan ABC uchburchakka o'tish ham mumkin. Haqiqatdan, izlangan uchburchakning A uchini teng yonli CAD_1 uchburchakning uchi sifatida topish



42- II чизма.

mumkin: A nuqta shu teng yonli uchburchakning asosi bo'lgan CD_1 ning MH o'rta perpendikulyarida yotadi. Ikkinchi tamondan, u D_1B tomon davomida yotadi. Demak, A nuqtani bu ikki ma'lum to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi sifatida topib, uni C nuqta bilan tutashtirgandan keyin ABC uchburchak hosil bo'ladi.

Yasash va isbotlashni birinchi holdagi kabi bajarib, izlangan uchburchakning hosil bo'lishi $p < a$ shartdan boshqa yana α burchakka ham bo'g'liq ekanini o'qdirib, quyidagi hollarni ko'zdan kechiramiz.

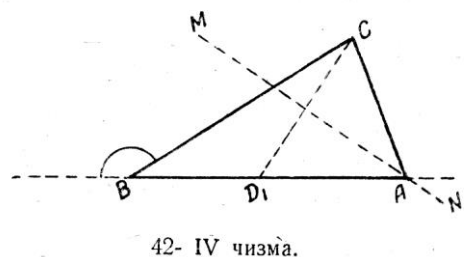
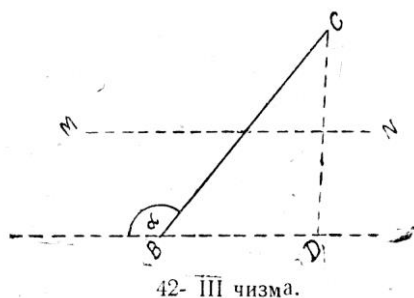
Tekshirish.

I. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ bo'lganda quyidagi uch holdan biri bo'lishi mumkin:

a) agar 42-2- chizmadagi singari yordamchi BCD_1 uchburchak to'g'ri burchakli bo'lmasa, MH o'rta perpendikulyar D_1B davomi bilan kesishib, masalaning talabiga javob beruvchi ABC uchburchak albatta hosil bo'ladi;

b) yordamchi BCD_1 uchburchak to'g'ri burchakli bo'lsa, MH o'rta perpendikulyar BD ga parallel bo'lib, izlangan A nuqtani hosil qilmaydi (6-chizma);

c) yordamchi BCD_1 uchburchakning CD_1B burchagi o'tmas burchak bo'lsa, MH o'rta perpendikulyar BD_1 kesmaning D_1 uchidan narigi o'tkazilgan davomi bilan biror A nuqta bilan kesishadi. Lekin bu A nuqtani C nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan ABC uchburchak masaladagi talablardan biriga javob bermaydi (7-chizma), chunki uning B burchagi berilgan α o'tmas burchakka teng emas.



Demak, masala echimga ega bo'lishi uchun berilgan α shunday o'tmas burchak bo'lishi kerakki, unga suyanib yordamchi BCD_1 uchburchakni yasaganda uning D_1 burchagi o'tkir bo'lsin.

2. $r < a$ va $\alpha = 90^\circ$ bo'lsa, masalaning talabiga javob beruvchi bitta (to'g'ri burchakli) uchburchak topish mumkinligi 8-chizmada ko'rsatilgan.

3. $r < a$ va $\alpha < 90^\circ$ bo'lsa, masalaning echilishi 9-chizmadagidek bo'ladi.

9. Nuqtalarning geometrik o'rinlari va ularni topishga doir masalalar.

9.1. Geometrik o'rinlarni o'rganishning ahamiyati.

Geometrik o'rin tushunchasi geometriyaning asosiy va etakchi tushunchalaridan biri bo'lib, uni o'rganish-zo'r ta'lim va tarbiyaviy ahamiyatga egadir.

Haqiqatan:

1. Geometrik o'rinlarni topishga doir masalalar yechish jarayonida har bir masalani yechishga yordam beradigan teoremlarni topish uchun hamma teoremlarni birma-bir xotirlab chiqish va ma'lum geometrik o'rinlarni masalalar yechishda tadbqiq etib turish-umuman geometrik bilimlarni chuqur va puxta o'zlashtirishni ta'minlaydigan omillardandir.

2. Masalada berilgan xossalarga ega bo'lgan nuqtalardan bir qanchasini amaliy ravishda yasab, ularning joylashishlaridagi qonuniyatni aniqlay olish va bu

qonuniyatning haqiqatan to'g'riligini deduktiv usulda isbotlab, izlangan geometrik o'rin haqida to'g'ri xulosalar chiqara borish-bir tomondan, o'quvchilarning masala yechishga qiziqishini kuchaytirsa, ikkinchi tomondan, ularni tabiat hodisalari ustida qilinadigan bir tipdagi tajribalarning beradigan natijalari qanday qonuniyatga bo'ysunishini aniqlashga o'rgatadi va bunday hodisalardan to'g'ri haqqoniy xulosalar chiqarishga malaka hosil qildiradi.

3. YAsalgan nuqtalardan har bittasining o'rni o'sha nuqtani yasashda qatnashgan geometrik miqdorlarga bog'liq bo'lishini tez-tez ko'rinib turish va masalaning shartida berilganlardan har bittasi o'zgarishining izlangan geometrik o'rniga ta'sir etishini sistemali ko'zatib borish-o'quvchilar ongida funksional munosabat va harakat tushunchalarining rivojlanishiga katta yordam beradi.

4. O'quvchilar yasashga doir geometrik masalalar yechishda ularga ma'lum bo'lgan geometrik o'rinlardan eng muvofiq'ini tanlab ishlatish maqsadida, geometrik o'rinlarni fikran tasavvur etgan holda birma-bir ko'z oldidan o'tkazib chiqadilar; bu esa o'quvchilarning fikran tasavvur etish qobiliyatini o'sdirishga-fazoviy tasavvurini rivojlantirishga yaxshi yordam beradi.

Demak, nuqtalar yoki boshqa figuralarning geometrik o'rinlarini o'rganish juda boy ma'naviy mazmunga ega bo'lib, u yosh avlodni dunyo qarashini tarbiyalashdagi muhim vositalardan biridir.

Shuning uchun har bir o'quvchi geometrik o'rinlar topish va ularni ishlatishga doir masalalar yechishni o'rgatishda bu ishning g'oyaviy-tarbiyaviy tomonig a ham etarli darajada e'tibor berib, yosh avlodni tarbiyalashdek muqaddas ishni mumkin qadar samarali bo'lishuvi kerak.

9.2. Geometrik o'rinning turlicha ta'rifi va geometrik o'rinlarni topish usuli.

Biz yuqorida geometrik figurani bunday ta'riflagan edik: nuqtaning har qanday to'plami geometrik figura yoki geometrik obraz deyiladi. Nuqtaning geometrik o'rni quyidagicha ta'riflanadi:

Bir xil xossaga ega bo'lgan hamma nuqtalar to'plami shu xossaga ega bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni deyiladi.

Kengroq ta'rifi quyidagicha:

1. Bir xil (a) xossaga ega bo'lgan nuqtalarning hammasidan tuzilgan, lekin boshqa xossali nuqtalarni o'z ichiga olgan figura shunday (a) xossali nuqtalarning geometrik o'rni deb ataladi.

2. Agar bir xil xossaga ega bo'lgan hamma nuqtalar biror F figurada yotib, bu figuraning har qanday nuqtasi ham shu xossaga ega bo'lsa, bunday figura ma'lum xossali nuqtalarning geometrik o'rni deb ataladi.

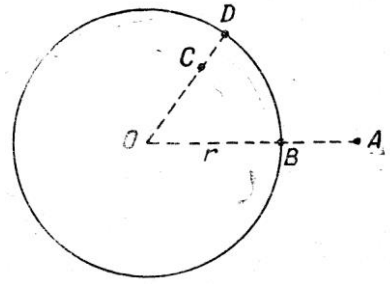
Bu ta'riflarga ko'ra muayyan xossalarga ega bo'lgan nuqtalardan ixtiyoriy bittasining biror figurada, masalan, F figurada yotishi ma'lum bo'lib, bu figuraning har qanday nuqtasi ham shu xossaga ega ekanligi aniqlansa, F figura shunday nuqtalarning geometrik o'rni bo'ladi.

Hamma nuqtalari bir tekislikda yotgan geometrik o'rin bir xil xossali nuqtalarning tekis geometrik o'rni yoki tekislikdagi geometrik o'rni deyilib, bir tekislikda joylashmagan nuqtalarning geometrik o'rni esa fazoviy geometrik o'rin deyiladi.

Biz bunda faqat tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rinlarini o'rganamiz.

1-masala(1-geometrik o‘rin). Berilgan nuqtada berilgan masofada yotgan nuqtalarning geometrik o‘rnini toping.

Izlangan geometrik o‘rin-berilgan O nuqtani markaz qilib berilgan r kesmaga teng radius bilan chizilgan aylana bo‘ladi, chunki ta’rifga ko‘ra, aylananing hamma nuqtalari bir nuqtadan bir xil masofada yotadi; aylanada yotmagan hech qaysi nuqta bu xossaga ega emas (43-chizma). Haqiqatan, (O, r) aylanadan tashqarida yotuvchi har qanday A nuqta uchun $OA = OB + BA = r + BA > r$ aylana ichida yotuvchi har qanday C nuqta uchun



43- chizma.

$$OC = OD - CD = r - CD < r$$

bo‘lib, A va C nuqtalar ko‘rsatilgan xossaga ega emas.

Shunday qilib, aylanani quyidagicha ta’riflash mumkin: Tekislikning biron O nuqtasidan ma’lum r uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrio o‘rni shu nuqtadan r radius bilan chizilgan aylana deb ataladi.

2-masala. (2-geometrik o‘rin). Berilgan to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda va undan berigan masofada yotuvchi nuqtalarning geometrik o‘rnini toping

Yechish. Berilgan MH to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $A_1, A_2, \dots, A_n$ nuqtalarni belgilaymiz, so‘ngra bu nuqtalardan MH ga perpendikulyar qilib ko‘rsatilgan tarafda to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz (44-1 chizma); nihoyat, bu perpendikulyarda r kesmaga teng kesmalarni ajratamiz:

$$A_1 X_1 = A_2 X_2 = \dots = A_n X_n = r \quad (1)$$

Natijada MH to‘g‘ri chiziqning berilgan tarafida

$$X_1, X_2, \dots, X_n \quad (2)$$

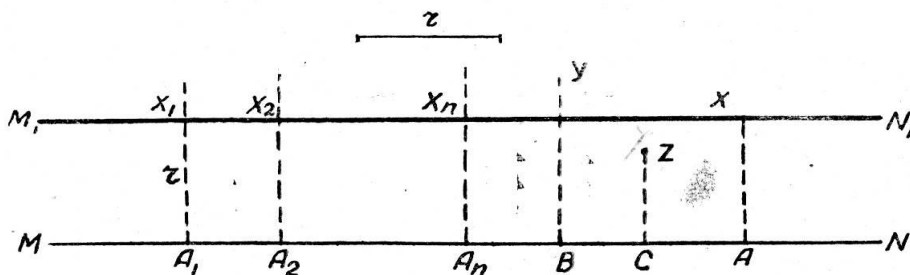
nuqtalar hosil bo‘ladi.

Bu nuqtalar yasalishiga ko‘ra, masalaning talabiga javob bersa ham, ular izlangan nuqtalarning hammasi emas; bunday nuqtalarni shu yo‘l bilan topib tugatib bo‘lmaydi.

Bizga hammasini o‘zichiga oluvchi (ya’ni, berilgan xossaga ega bo‘lgan hamma nuqtalar to‘plamidan iborat) geometrik figurani topish kerak. (2) nuqtalarning MH to‘g‘ri chiziqqa nisbattan joylanishlari ularning MH ga parallel bo‘lgan $M_1 H_1$ to‘g‘ri chiziqqa qarashli ekanligidan darak bersada, buni isbotlash talab qilinadi. Isbotni quyidagi yo‘l bilan bajarish mumkin.

MH to‘g‘ri chiziqning berilgan tarafidan (yuqorida aytilgan yo‘l bilan) X_1 va X_2 nuqtalarni topib, ularni to‘g‘ri chiziq orqali tutashtiramiz (44-1 chizma). Yasalishiga ko‘ra, $A_1 X_1 \parallel A_2 X_2$ va $A_1 X_1 = A_2 X_2 = r$, shu sababli $X_1 X_2 \parallel MH$ bo‘ladi. MH to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy A_n nuqtadan MH ga perpendikulyar o‘tkazib, bu perpendikulyar $A_n X_n = r$ kesma ajratamiz. Yasashga ko‘ra,

$$A_2 X_2 \parallel A_n X_n \text{ va } A_2 X_2 = A_n X_n = r \text{ shu sababli,}$$



44- I чизма.

$$X_2X_n \parallel MH$$

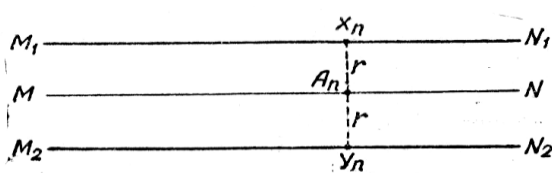
Bitta umumiy X_2 nuqtaga ega bo'lgan X_1X_2 va X_2X_n kesmalardan har biri MH to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgani uchun X_1, X_2, X_n nuqtalar MH to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan M_1H_1 to'g'ri chiziqda yotadi, chunki X_2 nuqtadan MH ga parallel qilib bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Demak, berilgan xossaga ega bo'lgan nuqtalar MH to'g'ri chiziqqa parallel va undan berilgan tomonda ma'lum masofada yotuvchi M_1H_1 to'g'ri chiziqda yotadi.

Endi, topilgan M_1H_1 to'g'ri chiziqning har qanday nuqtasi MN to'g'ri chiziqdan ma'lum r masofada yotishini isbot qilish kerak.

Buning uchun M_1H_1 to'g'ri chiziqning ixtiyoriy X nuqtasidan MH to'g'ri chiziqqa XA perpendikulyar tushirib, $XA = r$ ekanligini isbot qilish kifoya (5-chizma). Yasashga ko'ra, AX bilan A_1X_1 kesmalardan har biri MH to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgani uchun $AX \parallel A_1X_1$. Bundan tashqari, $M_1H_1 \parallel MH$ bo'lgani uchun parallel to'g'ri chiziqlar kesishmalarining tengligi haqidagi teorema asosan, $AX = A_1X_1 = r$ bo'ladi.

Xulosa. Berilgan to'g'ri chiziqdan bir tarafda va ma'lum masofada yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rni berilgan to'g'ri chiziqqa parallel va undan ma'lum masofada yotgan aniq bir to'g'ri chiziqdir.

Bundan quyidagi umumiyroq xulosa kelib chiqadi. Berilgan to'g'ri chiziqdan



44- II чизма.

ma'lum masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rni shu to'g'ri chiziqdan ikki tarafda unga parallel va ma'lum masofada joylashgan ikki to'g'ri chiziqdan iborat (44-II chizma).

9.3. Geometrik o'rinlar usuli bilan echiladigan masalalarning tiplari

Geometrik o'rin bilan echiladigan masalalarni quyidagi uch tipga bo'lish mumkin.

1. Birgina geometrik o'rindan foydalanib echiladigan masalalar.
2. Ikkita geometrik o'rindan foydalanib echiladigan masalalar.
3. 1 va 2 tipga keltiriladigan masalalar.

Birinchi tipga kiradigan masalalarda biror figura berilgan bo'lib, bu figuraning ma'lum talabga javob beruvchi nuqtasini topish talab etiladi va nuqtaning masalada aytilgan xossasiga qarab, uning qanday geometrik o'ringa qarashli ekanligi aniqlanadi,

soʻngra aniqlangan geometrik oʻrin chizib, uni berilgan figura bilan kesishtiriladi (agar ular umumiy nuqtaga ega boʻlsa). Topilgan nuqtani (yoki nuqtalarni) masala talabiga javob berishi isbot qilinadigan masala tekshiriladi. Bu tipdagi masalalar ancha sodda boʻlgani uchun avval ularni ogʻzaki echib, soʻngra chizish qoʻlayroq.

Ikkinchi tipdagi masalalarda berilgan ikki shartni qanoatlantiruvchi nuqtani topish talab etiladi. Bunday masalalar quyidagi tartibda echiladi: masalada berilgan shartlardan figuragina lavob beruvchi nuqta qidiriladi; bu bir shartli aniqmas masalani yechishdan bitta geometrik oʻrin hosil boʻladi. Soʻngra masalada berilgan ikkinchi shartning oʻzigagina javob beruvchi nuqta qidiriladi; bu ikki aniqmas masalani yechish natijasida ikkinchi bir geometrik oʻrin hosil boʻladi. Izlangan nuqta berilgan ikkala geometrik oʻrining umumiy nuqtasidan iborat boʻlishi kerak.

Uchunchi rippga birinchi va ikkinchi tipga keltiriladigan masalalar kiradi.

Geometrik oʻrinlar usulidan foydalanib echiladigan masalalarning quyidagi xususiyatlarini eslatib oʻtish foydalidir.

Aylana yasashni talab qilingan deyarli hamma masalalarni yechishda ishlatiladigan yordamchi figura (nuqta) usha aylananing markazi boʻladi.

Uchburchak yasash talab qilingan deyarli hamma masalalarni yechishda ishlatiladigan yordamchi nuqta soʻralgan uchburchakning nomaʼlum uchidan yoki birorta boshqa nuqtadan iborat boʻladi.

Tekshirish bosqichini bajarishda quyidagilarni doim nazarda tutish kerak.

- a) agar masalani yechishda qatnashgan geometrik oʻrinlarning ikkilasi ham toʻgʻri chiziq boʻlib, ular oʻzaro kesishsa, masala bitta echimga ega boʻladi; agar bu chiziqlar oʻzaro parallel boʻlsa, masala echimga ega boʻlmaydi; ular ustma-ust tushsa, masala cheksiz koʻp echimga ega boʻladi.
- b) Masala yechishda ishlatilgan geometrik oʻrinlarning biri toʻgʻri chiziq va ikkinchisi aylana yoki ikkalasi ham aylana boʻlib, ular oʻzaro kesishsa, masala ikkita echimga ega boʻladi; agar ular oʻzaro urinsa masala bitta echimga ega boʻladi; agar ular umumiy nuqtaga ega boʻlsa, masala echimga ega boʻlmaydi; basharti ular ustma-ust tushsa (ikki aylana boʻlgan holda), masala cheksiz koʻp echimga ega boʻladi.

Yana shuni ham eslatib oʻtishimiz lozimki, masala echimga ishlatilgan geometrik oʻrinlarning ortishi bilan tekshirish murakkablasha boradi.

I. Birinchi tipdagi masalalar.

1-masala. Aylanada shunday nuqta topingki, u berilgan ikkita nuqtadan teng uzoqlikda yosin.

1) Izlangan nuqta A va B nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmaning oʻrta perpendikulyarida yotishi lozim, chunki berilgan ikki nuqtadan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik oʻrni usha nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning oʻrta perpendikulyari boʻlishi bizga maʼlum (64-chizma).

2) Ikkinchidan, izlangan nuqta berilgan aylanada ham yotishi talab qilinadi. SHuning uchun bu nuqta maʼlum AB kesmaning oʻrta perpendikulyari bilan aylananing umumiy nuqtasi boʻlishi kerak. Endi izlangan nuqtani sirkul va chizgʻich yordamida topa olamiz.

Oʻrta perpendikulyar aylanani kesib oʻtishi, unga urinib oʻtishi yo aylana bilan umumiy nuqtaga ega boʻlmasligi mumkin. Birinchi holda masalaning talabiga javob

beruvchi nuqtalar ikkita, ikkinchi holda bitta bo'lidi, uchinchi holda bitta ham bo'lmaydi.

II. Ikkinchi tipdagi masalalar

2-masala. Ma'lum ikki parallel to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda va berilgan nuqtadan berilgan masofada yotuvchi nuqtani toping.

Berilgan: 1) $AB \parallel CD$ to'g'ri chiziqlar; 2) O nuqta; 3) L kesma

Analiz. Masalani ikkinchi shartini e'tiborga olmasak, masala bo'nday ko'rinishni oladi: "ma'lum ikki parallel to'g'ri chiziqdan teng uzoqlashgan nuqta topilsin". Bunday xossaga ega bo'lgan nuqtalar cheksiz ko'p va ularning geometrik o'rni berilgan ikki parallel to'g'ri chiziqning o'rta chizig'i bo'ladi.

Demak, izlangan nuqta shu to'g'ri chiziqda yotishi kerak.

Endi, berilgan shartlardan faqat ikkinchisiningina e'tiborga olsak, berilgan masala bunday aniqmas ko'rinishga keladi: "berilgan nuqtadan berilgan masofada yotuvchi nuqta topilsin", ma'lumki, bunday nuqtalar ham cheksiz ko'p bo'lib, ularning geometrik o'rni berilgan O nuqtani markaz qilib berilgan L kesmaga teng radius bilan chizilgan aylanadir.

Demak, izlangan nuqta bu aylanada yotishi kerak.

Shunday qilib izlangan nuqta ma'lum ikki parallel to'g'ri chiziqning o'rta chizig'ida va berilgan nuqtani markazi qilib, berilgan kesmaga teng radius bilan chizilgan aylanada yotishi kerak, ya'ni izlangan nuqta yuqorida aytilgan geometrik o'rinning umumiy nuqtasi bo'ladi.

Yasash. Berilgan AB va CD parallel to'g'ri chiziqlarning o'rta chizig'i MH ni yasaymiz.

So'ngra berilgan O nuqtadan berilgan L kesmaga teng radius aylana chizamiz. Bu geometrik o'rinning kesishishidan, umuman X_1 va X_2 nuqtalar hosil bo'ladi.

Isbot. Topilgan X_1 va X_2 nuqtalar berilgan ikki parallel to'g'ri chiziqning o'rta to'g'ri chizig'ida yotganligi uchun ular berilgan O nuqtadan berilgan L masofada bo'ladi.

Ayni vaqtda berilgan nuqra (O, L) aylanada yotgani uchun ular berilgan O nuqtadan berilgan L masofada bo'ladi. Demak, bu nuqtalar masalaning ikkala talabiga ham javob beradi.

Tekshirish. Masalada izlangan nuqtalarning mavjud bo'lishi yoki bo'lmasligi topilgan ikki geometrik o'rinning kesishish yoki kesishmasligiga bog'liqdir. Agar aylananing radiusi L kesma, aylana markazidan o'rta chiziqqa (MH ga) tushirilgan OP perpendikulyardan uzun bo'lsa, ikkita nuqta hosil bo'ladi. Agar $L < OP$ bo'lsa, izlangan nuqta mavjud bo'lmaydi.

Takrorlash uchun masalalar

1. Yasashga doir masalalar turlarini ayting.
2. Yasashga doir masalalar yyechish usullarini gapirib bering.
3. Konstruktiv masalalarni yyechishning xususiyatlari nimalardan iborat.

10-§. TADQIQOTGA DOIR MASALALAR YYECHISH USLUBIYATI

Reja:

1. *Tadqiqotga doir masala qanday masala?*
2. *Tadqiqotga doir geometrik masalalar yyechish xususiyatlari.*

Tayanch iboralar: *tadqiqotga doir geometrik masalalar, xususiyatlar, qirra, katet, .*

1. Tadqiqotga doir masalalarga biror narsani tadqiq etishni talab yetuvchi masalalar kiradi. Bunday masalalar quyidagi savollar xarakterli "mumkinmi?" "mavjudmi?"... qanday o'zgaradi?", "qanday shartlarda"? ".....tengmi"? ".....parallelni?".

Ma'lumki, hisoblashga doir masala son yechimga ega, yasashga doir masala yechimi shakl hisoblanadi, tadqiqotga doir masala yechimi esa mulohaza bo'ladi. Ba'zida to'la yoki bir nechta mulohazalar bilan bayon etiladi.

1-masala. Ikki diagonal va tomoni mos ravishda 8, 10 va 10 sm ga teng parallelogramm mavjudmi?

Mavjudligini tekshirishga doir masalani faraz qilish yo'li bilan yyechish mumkin. Faraz qilaylik, bunday parallelogramm mavjud, u holda AOD uchburchak tomonlari 4, 5 va 10 sm, bu esa mumkin emas.

Javob: Mavjud emas.

Agar masalada sonli qiymatlar boshqacha bo'lganda masalan, 8, 10, 6 bo'lsa, shunga o'xshash mulohazalar qarama-qarshilikka olib kelmas edi. Shuning uchun talabini davom ettirish mumkin edi. OAD uchburchakni yasash mumkin. Unga ABSD parallelogrammni yasash mumkin. Bundan parallelogrammni yasash mumkinligi kelib chiqadi, ya'ni bunday parallelogrammning mavjudligi kelib chiqadi.

2-masala. Barcha to'rtta yoki to'g'ri burchakli uchburchaklardan iborat uchburchakli piramidalar bormi?

Yyechish. Bundan piramidani yasaymiz. ABS va BSD uchburchaklarni olamiz, bunda BS katet umumiy. Ularni shunday joylashtiriladiki, BS katetda hosil bo'lgan ikki yoki burchak to'g'ri bo'lsin. D ni A bilan barcha yoqlari to'g'ri burchakli uchburchak bo'lgan tetraedr hosil qilamiz.

Javob: Mavjud.

TADQIQOTGA DOIR GEOMETRIK MASALALAR

3-masala. Uchburchakning bir tomoni ikkinchi tomonidan 1 sm qisqa, uchinchi tomonidan 3 sm uzun. Uchburchak perimetri 10 smga teng bo'lishi mumkinmi?

Yechish: uning bir tomoni uzunligi x deb belgilaymiz. U holda ikkinchi tomoni $x+1$, uchinchi tomoni $x-3$ ga teng bo'ladi. Tenglama tuzamiz $x+x+1+x-3=10$, $x=1$. Demak 4 sm, 5sm va 1 sm tomonlari bo'lgan uchburchak mavjud emas. Bundan masalaning berilgan shartlarda uchburchak perimetri 10 sm ga teng bo'lishi mumkin emas.

4-masala. Diagonallari soni tomonlar soniga teng bo'lgan ko'pburchak mavjudmi?

Yechish: Ko'pburchak ta tomonga ega bo'lsin, uning diagonallari soni $\frac{n(n-3)}{2}$ formula bilan topiladi. Bundan $\frac{n(n-3)}{2} = n$. Demak, $n = 5$.

5-masala. Ichki burchagi 100 ga teng bo'lgan muntazam ko'pburchak mavjudmi?

Javob: Mavjud emas, chunki $\frac{180^\circ \cdot (n-3)}{2} = 100$ tenglama butun musbat yechimlarga ega emas.

7-masala. To'g'ri burchakli uchburchak har bir tomonini 1 smga kattalashtirildi. qanday uchburchak to'g'ri burchakli, o'tkir burchakli yoki o'tmas burchakli uchburchak hosil bo'ladi?

Yechish: To'g'ri burchakli uchburchak katetlari a, b va gipotenuzasi c bo'lsin $a^2 + b^2 = c^2$. U holda yangi uchburchak tomonlari $a+1, b+1, c+1$. Demak $(a+1)^2 + (b+1)^2 = a^2 + b^2 + 2(a+b) + 2 > c^2 + 2c + 2 > (c+1)^2$ hosil bo'lgan uchburchak katta tomoni kvadrati boshqa tomonlari kvadratlari yig'indisidan kichik. Demak, tomonlari $a+1, b+1, c+1$ larga teng uchburchak o'tkir burchakli.

Masalani geometrik usul bilan yechish mumkin. To'g'ri burchakli uchburchakda (katetlari $b+1, a+1$,) gipotenuza $c+1$ dan katta bo'lishi lozim, $A_1C_1 \geq C$ chunki (agar $a \geq b$ bo'lsa), $C_1B_1 > BB_1$ (gipotenuza katetdan katta). Bundan $A_1B_1 > c+1$ bu ko'rsatadiki, tomonlariga teng hosil bo'lgan uchburchak o'tkir burchakli.

Takrorlash uchun savollar

1. Tadqiqotga doir masala qanday masala?
2. Tadqiqotga doir geometrik masalalar yechishning qanday xususiyatlari mavjud?
3. Bir nechta tadqiqotga doir masala tuzing va uni yechish metodikasini ishlab chiqing.

11-§. GEOMETRIK MIQDORLARNI O'RGANISH METODIKASI

Reja:

1. Yuzalarni hisoblash.
2. Hajmlarni hisoblash

Tayanch iboralar: yuza, hajm, birlik, kvadrat, ikkinchi sistema, figura, taqribiy qiymat, to'r, to'r chiziqlari, ko'paytma, ichki kvadratlar, ichki chizilgan aylana radius uzunlik o'lchovi.

1. Yuzalarni o'lchash nazariyasida quyidagilar aniqlanishi lozim:

1) yuzasi aniqlanayotgan figurada unga tegishli va unga tegishli bo'lmagan nuqtalarni ajrata olish lozim. Agar berilgan nuqtadan chiquvchi ixtiyoriy nur figura konturini toq marta kesib o'tsa, u holda nuqta ichki, agar juft marta kesib o'tsa, nuqta tashqi bo'ladi;

2) o'lchov birligini o'rnatish lozim, yuzalarni o'lchash uchun tomoni chiziqli birlikka teng bo'lgan kvadrat yuzasi olinadi.

Agar birlik kvadrat tomonini 10 ta teng kesmalarga bo'lib, bo'linish nuqtalari orqali tomonlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazsak, u holda birlik kvadrat 100 ta teng kvadratga bo'linadi va har birining yuzasi kvadrat birlik 1:100 qismiga teng bo'ladi. Har bir hosil qilingan kvadratlar bilan xuddi shunday bo'linishni bajarsak va yuza o'lchovi 0,0001 kv.birlikka teng kvadratlar hosil qilinadi va hokazo.

Endi butun tekislik parallel to'g'ri chiziqlar yordamida polosalarga bo'lingan bo'lsin (ular orasidagi masofa chiziqli birlikka teng). Ikkinchi sistemani ham o'tkazsak butun tekislik kvadratlariga bo'linadi va birlik kvadrat masshtab to'rni hosil qilamiz. Bunga misol daftarning xonalariga bo'lingan kataklarini ham olish mumkin yoki millimetrli qog'oz va hokazo.

Qandaydir figura yuzasi o'lchovini aniqlash uchun bu figuraga kvadrat masshtab to'rini qo'yamiz va barcha nuqtalari bilan figuraga tegishli bo'lgan to'r kvadratning sonini sanaymiz va bu yuza o'lchovini kami bilan olingan taqribiy qiymati S_1 ni beradi.

Bir vaqtning o'zida hech bo'lmaganda bitta nuqtasi figuraga tegishli kvadratlar sonini sanab yuza o'lchovining ortig'i bilan olingan S_1 taqribiy qiymatini topamiz. Shundan so'ng to'rni o'nli bo'laklarga bo'lib avvalgi jarayonni amalga oshirsak yuza o'lchovining yangi S_2 taqribiy qiymatlarini topamiz. Oxirida $\{S_n, S_n'\}$ ketma-ketlik hosil qilamiz. Agar ularning yaqinlashishini o'rnatib, u holda ular bilan aniqlangan son berilgan figura yuza o'lchovi bo'ladi.

Tomonlari a va b bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuza o'lchovini topamiz. Unga masshtab to'rni shunday qo'yamizki, to'r chiziqlari to'g'ri to'rtburchak tomonlariga parallel bo'lsin.

U holda ichki kvadratlar soni a_0b_0 ko'paytmaga teng, bunda a_0 va b_0 - a va b ning kami olingan taqribiy qiymatlari, to'g'ri to'rtburchakni qoplovchi kvadratlar soni a_0b_0 ga teng, a_0b_0 ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlar. Yana n o'nli bo'linishini bajarib p -chi kami bilan olingan S_n taqribiy qiymati S_n ni, ortig'i bilan olingan qiymatlarni topamiz. Lekin haqiqiy sonlarni ko'paytirish qoidasiga ko'ra $\{a_nb_n, a'_nb'_n\}$ ketma-ketliklar ab sonni aniqlaydi, shuning uchun S to'g'ri to'rtburchakning yuza o'lchovi $S=ab$ formula bilan aniqlanadi.

Yuza o'lchovlari xossalariidan foydalanib to'g'ri chiziqli figuralarni bevosita hisoblash mumkin. Har qanday parallelogramning to'g'ri to'rtburchak hosil qiladigan ikki qismga ajratish mumkin. Shunday yo'l bilan parallelogramning yuzi asosi uzunligi o'lchovini balandlik uzunligi o'lchoviga ko'paytirish bilan aniqlashini topish mumkin: $S = ah$

Har qanday uchburchakni parallelogramga to'ldirib, uchburchak yuzasi o'lchovi uchun $S = \frac{ah}{2}$ formulani topamiz. Nihoyat, ko'pburchakni uchburchaklarga ajratamiz, uning yuzasini u tashkil etgan uchburchaklar yuzalar yig'indisi sifatida topishga kelinadi. Xuddi shunday yo'l bilan quyidagi formulalar topiladi:

Trapetsiya yuzi o'lchovi:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h ,$$

a va b bunda asoslari uzunliklari o'lchovlari, h - balandlik uzunlik o'lchovi.

Tashqi chizilgan ko'pburchak yuzasi o'lchovi:

$$S = \frac{Pr}{2}$$

bunda R -perimetr, r - ichki chizilgan aylana radius uzunlik o'lchovi.

Ixtiyoriy kontur bilan chegaralangan figura yuzasi o'lchovini aniqlashda quyidagi usuldan foydalaniladi: har biri barcha nuqtalari figuraga tegishli bo'lgan va yuzalari $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ larga teng bo'lgan ko'pburchaklar sistemasini qaraymiz. Bir vaqtning o'zida har biriga berilgan figura barcha nuqtalari bilan tegishli bo'lgan va yuzalari $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ larga teng bo'lgan ko'pburchaklarni qaraymiz. Agar $\{S_n, S'_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ular bilan aniqlanadigan S soni berilgan figura yuza o'lchovi bo'ladi.

Isbotlash uchun berilgan figuraga kvadrat masshtabi to'rni qo'yamiz va S_n yuza o'lchovli ko'pburchak ichida joylashgan kvadratlar yuza o'lchovini Z_m deb olsak, S_n yuza o'lchovli ko'pburchakni qoplovchi kvadratlar yuzasi o'lchovini Z'_m deb olsak, m, n bir vaqtning o'zida oshganda $\{Z_m, Z'_m\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi:

$$1) Z_m < Z'_m$$

2) m va n o'sganda Z_m kattalashadi, Z'_m kichiklashadi.

3) n ni shunday katta olamizki

$$S'_n - S_n < \frac{\varepsilon}{3}$$

bo'lsin, xuddi shunday m ni ham olamizki

$$S_n - S_m < \frac{\varepsilon}{3}, S'_m - S'_n < \frac{\varepsilon}{3}$$

o'rinli bo'ladi.

Ularini qo'shib $Z'_m - Z_m < \varepsilon$ ni olamiz.

Demak, $\{Z_m, Z'_m\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va Z sonini aniqlaydi.

$Z_m < S_n < S'_n < Z'_n$ tengsizlikdan $Z_m < S_n, S_n < Z'_n$ asosiy teorema ko'ra .
 $Z = S$

Olingan xulosalarni doira yuziga ham qo'llash mumkin. Agar doiraga bir vaqtda tashqi chizilgan n - burchaklar va ichki chizilgan n -burchaklarni yasab ularning tomonlarini cheksiz ikkilantirib, $\{S_n, S'_n\}$ ketma-ketliklarni hosil qilamiz.

$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot k_n$, bo'lgani uchun $\left\{ \frac{1}{2} P_n \cdot k_n, \frac{1}{2} P'_n \cdot k_n \right\}$ ketma-ketliklarni hosil qilamiz. Lekin $\{P_n, P'_n\}$ ketma-ketliklar aylana uzunligi o'lchovini aniqlaydi, ya'ni $2\pi R$, $\{R_n, R\}$, ketma-ketliklar radius uzunligi o'lchovini, ya'ni, R ni aniqlaydi. Shuning uchun haqiqiy sonlarni ko'paytirish qoidasiga asosan $\{S_n, S'_n\}$ ketma-ketliklar

$$S_n = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

sonni aniqlaydi. Xuddi shunday burchagi radian o'lchovi bilan aniqlangan sektor yuza o'lchovi

$$S_\alpha = \frac{1}{2} P^2 \cdot \alpha$$

ga teng ekanligini topamiz. Segment yuza o'lchovi sektor yuza o'lchovi

$\frac{1}{2} R^2 \cdot \alpha$ va uchburchak yuza o'lchovi ayirmasi sifatida topiladi, ya'ni

$$S_{\text{сегмент}} = \frac{1}{2} R^2 \cdot (\alpha - \sin \alpha)$$

Shuningdek, teng yuzalarga ega bo'lgan figuralar tengdosh ekanligi, agar ikkita ko'pburchakni juft-juft teng ko'pburchaklar (bir xil sondagi) ajratish mumkin bo'lsa, ular teng tuzilgan deyiladi.

1) Teng tuzilgan ko'pburchaklar tengdosh.

2) Ikkita figura uchinchisiga teng tuzilgan bo'lsa, o'zaro teng tuzilgan bo'ladi.

3) Tengdosh figuralar hammavaqt teng tuzilgan bo'ladi kabi tushunchalar ham berilishi mumkin, ularning uchburchak, to'rtburchak va ko'pburchaklar uchun isbotlarini berish mumkin.

Bunda quyidagi masalalar ham muhokama qilinishi maqsadga muvofiq:

1) Berilgan aylanaga eng katta yuzali uchburchak ichki chizilgan u qanday uchburchak bo'ladi?

2) To'g'ri burchakli uchburchak tomonlarida diametrlar sifatida uchta doira yasalgan. Gipotenuzaga yasalgan doira yuzasi katetlarga doiralari yuzalariga tengligini isbotlang.

3) Teng tuzilganlikdan foydalanib Pifagor teoremasini 12 rasmdan foydalanib isbotlang.

4) To'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasida diametr sifatida yarim aylana yasalgan. Katetlarda ham yarim aylanalar yasalgan. Hosil bo'lgan oychalarning yuzi uchburchak yuziga tengligini isbotlang.

2. Hajmlarni hisoblash

Hajmlarni o'lchash nazariyasi yuzalar nazariyasiga o'xshash bayon etiladi. Shuning uchun ko'pgina mulohazalarni (masalan, ko'pyoq hajmi haqidagi teoremani, ko'pyoqlar hajmlari yig'indisi haqidagi teorema) o'quvchilar mustaqil isbotlashlari mumkin. SHu bilan birga analogiyani ehtiyot bilan ishlatish lozim. Misol uchun tengdosh ko'pburchaklar hammavaqt teng tuzilgan bo'lsada, tengdosh ko'pyoqlap umuman olganda teng tuzilgan bo'lmaydi (Dekart teoremasi).

Jism hajm o'lchovi deb shunday haqiqiy songa aytiladiki, u berilgan jism bilan mos keltiriladi va quyidagi shartlarni qanoatlantirishi lozim.

1) Hajm o'lchovi birga teng bo'lgan jism mavjud.

2) Teng jismlar teng hajm o'lchovlariga ega.

3) Agar jism bir nechta qismlardan iborat bo'lsa, bu jism uning qismlari hajmlari yig'indisiga teng.

Hajmlarni o'lchashda birlik sifatida qirrasiz uzunlik birligiga teng bo'lgan kub qabul qilinadi. Yuzalarni topishdagi kabi bu kublarni unga karrali qismlarga bo'lib, hajmlarni hisoblash masalasi qaraladi. Shuningdek kubik masshtab to'ri hosil qilinadi. Shuning uchun birorta jism hajmini topish uchun uning kubik masshtab to'ri ichiga solib, kublar sonlari aniqlanadi: ular kam va ortig'i bilan hajmning taqribiy qiymatlarini beradi, ya'ni $\{V_n, V'_n\}$ ketma-ketliklar hosil bo'ladi.

Avvalo asosi o'lchovi ga teng, balandligi esa uzunlik o'lchovi h ga teng silindrni qaraymiz. Bu silindrga kubik masshtab to'rni shunday qo'yamizki, to'rning birorta tekisligi silindr asos tekisligi bilan ustma-ust tushsin. U holda ichki sohada kublar sonini sanaymiz, u S_0 - asos yuza o'lchovi kami bilan olingan taqribiy qiymati. Har bir kubda balandlikni h o'lasaymiz, u h balandlikka kami bilan yaqinlashadi. Demak, $V_0 = S_0 \cdot h$ xuddi shunday qoplovchi kublar soni uchun ham formula topamiz:

$$V'_0 = S'_0 \cdot h'_0$$

Yana minglarga bo'lib, yangi taqribiy qiymatlarni topamiz: $\{S_n h_n, S'_n h'_n\}$ ketma-ketliklarni olamiz:

Lekin $\{S_n, S'_n\}$ ketma-ketliklar S sonini, $\{h_n, h'_n\}$ ketma-ketliklar sonni h aniqlaydi. Bundan $\{S_n h_n, S'_n h'_n\}$ ketma-ketliklar Sh sonni aniqlash kelib chiqadi. Bu to'g'ri silindr hajmi o'lchovini beradi: $V = S \cdot h$

1. To'g'ri prizma hajmi o'lchovi asosi yuzi o'lchovini balandlik uzunligi o'lchoviga ko'paytmasiga teng. Prizmani yasovchisi yopiq siniq chiziq bo'lgan silindrning xususiy holi deb qarash mumkin.

2. To'g'ri burchakli parallelepid hajmi o'lchovi uning uchta o'lchovlari ko'paytmasiga teng. Bu jism to'g'ri prizmaning xususiy holi. Prizmaning asosi to'g'ri to'rtburchakdan iborat.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

3. Silindrning hajmi o'lchovi

$$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$$

formula bilan topiladi.

Ixtiyoriy ko'pyoq hajmi o'lchovi mavjudligini isbotlaymiz. Haqiqatdan $\{V_n, V'_n\}$ ketma-ketlik quyidagilarni qanoatlantiradi:

$$1) V_n < V'_n$$

$$2) V_{n+1} > V_n, \quad V'_{n+1} > V'_n$$

$V_n - V'_n$ ayirmaning baholash uchun ko'pyoq har bir yoqini to'rtning bu yoq bilan 45° dan oshmaydigan ikkiyoqli burchak tashkil qiluvchi tekisligiga proyeksiyalaymiz va shu asosda $V_n - V'_n < \varepsilon$ ekanligini topamiz. Demak, $\{V_n, V'_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashish uchun barcha shartlar bajariladi. Ko'pyoq hajmini aniqlovchi V soni mavjud.

Ko'pyoq hajmi o'lchovi hajmlarning barcha xossalarga ega.

Hajmlarni o'lchashda quyidagi teoremlardan foydalaniladi:

1-teorema. Berilgan jism ichida joylashgan $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ hajm o'lchovlariga ega jismlar sistemasiga va boshqa tomon berilgan jism ichida joylashgan, ya'ni jismni o'z ichiga olgan hajm o'lchovlariga jismlar sistemasi berilgan. Agar $\{V_n, V'_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u bilan aniqlanadigan soni berilgan jism o'lchovidan iborat.

2-teorema (B.Kavaleri prinsipi) Agar ikkita jismni bir tekislikka parallel tekisliklar bilan kesilganda o'zaro tengdosh figuralar hosil bo'lsa, u holda bu jismlar hajm o'lchovlari teng bo'ladi.

3-teorema. (Simpson teoremasi). Agar jism balandligiga perpendikulyar tekislik bilan kesim yuzi kesimdan balandlikdagi o'zgarmas nuqtagacha bo'lgan masofaning ikkinchi darajadan yuqori bo'lmagan funktsiyasi bo'lsa, u holda jism hajmi

$$V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_n)$$

formula bilan topiladi, bunda h - jism balandligi o'lchovi, S_0 - quyi asos yuzi o'lchovi, S_n - yuqoriga asos yuzi o'lchovi, S_m - o'rta kesim yuzi o'lchovi.

Bu teoremlarni turli jismlar hajmlarini hisoblashga tadbqiq etamiz:

1) Har qanday silindr va har qanday prizmaning hajmi asosi yuza o'lchovini balandlik uzunligi o'lchoviga ko'paytmasiga teng. Bu Kaval'eri printsipligiga asosan og'ma silindr hajmi to'g'ri silindr hajm o'lchoviga teng bo'ladi, agarda ularning asoslari yuzalari va ularning balandliklari teng bo'lsa.

2) Har qanday piramida va konusning hajmi asosi yuza o'lchovini balandlik uzunlik o'lchoviga ko'paytmasining uchdan biriga teng.

Agar konus va piramidani asosiga parallel tekislik bilan kessak asosiga gomotetik figura hosil bo'ladi, uning koeffitsienti bu figuralarining uchlaridan masofalari nisbatiga teng, bundan

$$\frac{S}{Q} = \frac{x^2}{h^2}, \quad S = \frac{Qx^2}{h^2}$$

Q - asos yuzi o'lchovi, S - kesim yuza o'lchovi, h - balandlik uzunligi o'lchovi, x - kesim tekisligining uchigacha bo'lgan masofa.

Agar masofani uchidan emas asosdan hisoblasak kesim yuzi

$$S = \frac{Q(g-x)^2}{h^2}$$

ko'rinishga ega. Shuning uchun Simpson formulasiga ko'ra

$$V = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_n)$$

Bunda $S_0 = 0, S_m = \frac{Q}{4}, S_n = Q$.

Shuning uchun $V = \frac{Qh}{3}$.

Demak, aylanish konusi uchun $V = \frac{\pi R^2}{h}$ formulasiga ega bo'lamiz.

III. Kesik konus va kesik piramida hajm o'lchovi

$$V = \frac{h}{3}(Q + \sqrt{Qq} + q)$$

formula bilan topiladi. Bunda h - jism balandligi, Q - pastki asos yuza o'lchovi, q - yuqoriga asos yuza o'lchovi.

Bu erda ham Simpson formulasini qo'llaymiz:

O'rta kesim yuzini topish uchu yuqoriga va pastki asoslar o'rta arifmetigi uning chiziqli o'lchovlarini ifodalaydi. Shuning uchun

$$\frac{\sqrt{Q} + \sqrt{q}}{\sqrt{S_m}} = 2, \quad 2\sqrt{S_m} = \sqrt{Q} + \sqrt{q}$$

bundan $4S_m = Q + 2\sqrt{Qq} + q$

Buni formulaga qo'yib jism hajm o'lchovini topamiz:

$$V = \frac{h}{6}(Q + \sqrt{Qq} + q)$$

Balandligi h asoslari radiuslari r va R bo'lgan kesik konus uchun

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

formula o'rinli.

IV. R radiusli shar hajmi o'lchovi

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

formula bilan topiladi. Agar kesim radiusi r u diametrdan x masofada, u holda $OO'A$ to'g'ri burchakli uchburchakdan

$$OA = R, \quad OO' = R - x, \quad r^2 = R^2 - (R - x)^2 = 2Rx - x^2$$

larni topamiz. Bu kesim yuza o'lchovi $\pi r^2 = 2\pi x - \pi x^2$ ga teng. Bunga Simpson formulasini qo'llaymiz:

$$S_0 = 0, S_m = \pi R^2, S_n = 0$$

$$V = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Xuddi shunday shar qatlami uchun:

$$V = \frac{h}{6}(\pi r_1^2 - 4\pi p^2 + \pi r_2^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Shar segmenti:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{2} + \frac{\pi h^3}{6}$$

Shar sektori:

$$V = \pi \frac{r^2(h + 2R) + h^3}{6}$$

hajmlari uchun formulalarni topish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Konusning yasovchisi uzunligi l , asosi aylanasi uzunligi s . k ajmini toping.

$$\text{Javob: } \frac{c^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$$

2. Konus hajmini asosi va yuzi Q va yon sirti S bo'yicha toping.

$$\text{Javob: } \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(S^2 - Q^2)Q}{\pi}}$$

3. a) Teng tomonli konusda asos yuzi, yon sirt va to'la sirti qanday munosabatda bo'ladi?

Javob: 1: 2: 3:

Yasovchi asosi diametriga teng – teng tomonli konus.

b) Teng tomonli konusga muntazam to'rtburchakli piramida ichki chizilgan. Konus va piramida yon sirlari qanday nisbatda?

Javob: $\pi : \sqrt{7}$

4. Kesik konus asoslar yuzalari M va m . Asosi piramida ustida bo'lgan kesim yuzini toping.

$$\text{Javob: } \frac{1}{4} (\sqrt{M} + \sqrt{m})^2$$

5. Kesik konus yon sirti S , asoslari radiuslari R va r . To'liq konusning yon sirtini toping.

$$\text{Javob: } \frac{SR^2}{R^2 - r^2}$$

6. Agar kesik konus yon sirti asoslar yig'indisi tengdosh bo'lgan, radiuslari R va r bo'lgan, uning balandligini toping.

$$\text{Javob: } \frac{2Rr}{R+r}$$

7. Kesik konusda H – balandlik, yasovchisi l , yon sirti S . O'q kesimi yuzini toping.

8. Asoslari yuzalari Q va E va yon sirti S bo'lsa, o'q kesimi yuzini toping.

$$\text{Javob: } \frac{1}{\pi} \sqrt{S^2 - (Q - E)^2}$$

a) Radiuslari r_1 va r_2 teng bo'lgan ikkita sfera (shar) hajmlarini qanday nisbatda bo'ladi.

$$(r_1=5, r_2=3\text{sm}, r_1=6,8 \ r_2=1,6) \quad \text{Hisoblang: } \left(\frac{r_1^3}{r_2^3}\right)$$

(Javob: $\approx 4,63, \approx 76,77$).

b) Radiuslari r_1 va r_2 ga teng bo'lgan sferalar sirt yuzalari qanday nisbatda bo'ladi. ($r_1=7, \ r_2=5 \ r_1=5,4, \ r_2=0$,

$$\text{c). Hisoblang } \left(\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)$$

(Javob: $\approx 1,96, \approx 59,5$).

9. Sharlar hajmlari a) $\pi/8$ b) $8/27$ nisbatda bo'lsa, radiuslari qanday nisbatda bo'ladi?

(Javob: a) $1/2$ b) $2/3$).

10. Sharga silindr tashqi chizilgan. Ular sirlari va hajmlari nisbatini toping.

Javob: $2:3$ (ikki hol).

11. Konus balandligi H , yasovchisi l . Tashqi chizilgan shar radiusini toping.

Javob: $\frac{l^2}{2h}$

12. Teng tomonli konus va unga ichki chizilgan shar hajmlar nisbatini toping

Javob: $9:4$

13. Sharga asoslar radiusi R va r bo'lgan kesik konus tashqi chizilgan. SHar radiusini toping.

Javob: $\sqrt{Rr}$

14. Silindrga muntazam uchburchakli prizma ichki chizilgan. Unga silindr ichki chizilgan. Ikkita silindr hajmlari nisbatini toping.

Javob: $4 : 1$

15. Silindrga yon sirti S ga teng, asosi aylanasi uzunligi l . Hajmni toping.

16. Muntazam tetraedr qirrasi buyicha tashqi va ichki chizilgan sharlar radiuslarini toping

Javob : $\frac{1}{4}a\sqrt{6}, \frac{1}{n}a\sqrt{6}$

17. Uchta shar sirlari qanday nisbatda agar biri muntazam tetraedr yoqlariga ikkinchisi qirralariga, uchinchisi uchlariga urinib o'tadi.

Javob: $1 : 3 : 9$

18. Muntazam oktaedr qirrasi a ga teng. Tashqi va ichki chizilgan shar radiuslarini toping.

Javob: $\frac{1}{2}a\sqrt{2} \approx 0,7a$; $\frac{1}{6}a\sqrt{6} \approx 0,4a$

19. Muntazam piramida balandligi H , asosi radiusi R . Balandligi va asos radiusi qanday munosabatda agar tashqi chizilgan shar markazi: a) piramida asosida b) piramida ichida v) piramida tashqarisida bo'lsa.

Javob: $H = R, H > R, H < R$

20. R radiusli sharga teng tomoni silindr ichki chizilgan. SHar sirti silindr asosini qanday qismlarga bo'ladi?

Javob: $S_{\text{segm}} = \pi R^2(r - \sqrt{r}), S_{\text{losk}} = 2\pi R^2 \sqrt{r}$

21. Kub sirtini: a) uning diagonal d bo'yicha; b) uning diagonal kesim yuzi Q bo'yicha toping

Javob: a) $2d^2$; b) $3Q$.

22. Muntazam tetraedr bitta uchidan nechta simmetrik tekislik o'tkazish mumkin (3ta)? Umuman nechta bunday tekislik o'tkazish mumkin (6 ta)?

23. Muntazam tetraedr a qirrasi bo'yicha uning sirti va hajmini toping.

Javob: $a^2\sqrt{3}; \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$

24. ABC muntazam uchburchakli piramida asosi tomoni a va yon qirradi b ga teng. AB va BC qirralar o'rtalarida o'tuvchi BC qirrani parallel tekislik o'tkazilgan. Hosil qilingan kesim yuzini toping.

$$\text{Javob: } \frac{ab}{4}$$

25. Muntazam to'rtburchakli piramida qirradi a ga teng. Asosining ikki qo'shni tomoni va balandligi o'rtasida tekislik o'tkazilgan. Kesim yuzini toping.

$$\text{Javob: } \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$$

26. Agar asosi tomoni a va balandligi h bo'lsa, a) uchburchakli b) to'rtburchakli; v) oltiburchakli muntazam piramida hajmini hisoblang ($a=15$, $h=20$ sm)

$$(\text{Javob: a) } \frac{a^2h\sqrt{3}}{12} ; \text{ b) } \frac{a^2h}{3} ; \text{ v) } \frac{a^2h\sqrt{3}}{2})$$

27. Yon qirradi b va asosiga tashqi chizilgan aylana radiusi R ga teng bo'lgan to'rtburchakli muntazam piramida hajmini toping.

$$(\text{Javob: } \frac{2R^2}{3}\sqrt{b^2 - R^2})$$

28. Balandligi h va asosiga ichki chizilgan aylana radiusi r ga teng bo'lgan muntazam to'rtburchakli piramida sirti va hajmini toping.

$$(\text{Javob: } S = 42(2 + \sqrt{h^2 + r^2}), \quad V = \frac{4}{3}r^2h)$$

29. Muntazam oktaedr a qirradi bo'yicha uning sirti va hajmini toping.

$$\text{Javob: } 2a^2\sqrt{3}; \quad \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$$

30. Muntazam oktaedr qirradi a ga teng. Ikki qo'shni yoqlari markazlari orasidagi masofani toping.

$$\text{Javob: } \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

31. Muntazam oktaedrga kub shunday ichki chizilganki uning uchlari oktaedr qirralarida joylashgan. Oktaedr qirradi a ga teng. Kub qirrasini toping.

$$\text{Javob: } (a2\sqrt{2}) \approx 0,6a$$

32. Muntazam oktaedr qirradi a va oktaedrning ikki qarama-qarshi uchlari orasidagi EF masofani toping.

$$\text{Javob: } a\sqrt{2}$$

33. Kub qirradi a ga teng. Unga ichki chizilgan muntazam oktaedr sirtini toping. Uning bu kubga ichki chizilgan muntazam tetraedr sirtiga nisbatini toping.

$$\text{Javob: } a^2\sqrt{3}; \quad \frac{1}{2}$$

34. To'g'ri burchakli parallelepiped hajmini uning yoqlari yuzalari Q_1, Q_2, Q_3 bo'yicha toping.

$$\text{Javob: } \sqrt{Q_1, Q_2, Q_3}$$

35. To'g'ri burchakli parallelepiped asosi tomonlari $m:n$ nisbatda, diagonal kesimi – kvadrat yuzasi Q . Parallelepiped hajmini toping.

$$\text{Javob: } \frac{mnQ\sqrt{Q}}{m^1 + n^2}$$

36. To'g'ri parallelepiped asosi Q ga teng yuzali romb, diagonal kesimlar yuzalari M va N . Parallelepiped hajmini toping.

$$\text{Javob: } \sqrt{\frac{MNQ}{2}}$$

37. Asosi tomoni a va yon qirradi b bo'yicha muntazam prizma hajmini toping, agarda:

- a) prizma uchburchakli bo'lsa;
- b) to'rtburchakli prizma bo'lsa;
- v) oltiburchakli prizma bo'lsa?

$$\text{Javoblar: a) } \frac{1}{4}a^2b\sqrt{3}; \quad \text{b) } a^2b \quad \text{v) } 1,5a^2b\sqrt{3}.$$

38. Kubning kesimida: a) uchburchak (teng yonli, teng tomonli, turli tomonli) b) kvadrat; v) to'g'ri to'rtburchak; g) trapetsiya; d) beshburchak; e) oltiburchak; j) ettiburchak hosil bo'lishi mumkin)?

39. Kub qirradi a ga teng. Kub uchidan uning diagonaligacha bo'lgan masofani toping.

$$\text{Javob: } \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

40. Kub qirradi a ga teng. Diagonalidan uni kesib o'tmaydigan qirrasigacha bo'lgan eng qisqa masofani toping.

$$\text{Javob: } \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

41. Kub qirradi uzunligi a ga teng. Kubga ichki chizilgan va tashqi chizilgan shar radiuslarini toping.

$$\text{Javob: } \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

42. Kub hajmini toping, agarda:

- a) uning diagonal l ;
- b) sirti S bo'lsa?

$$\text{Javob: a) } \frac{1}{5}l^3\sqrt{3}; \quad \text{b) } \frac{1}{6}S\sqrt{\frac{1}{6}S}$$

XULOSA

Geometriya o'qitishda talabalarning nazariy bilimlarini amalda qo'llay olishga o'rgatish uslublari bo'yicha olib borilgan nazariy tahlillar, amaliyot ish tajribasini kuzatish va pedagogik tajriba natijalari quyidagi xulosalarga chiqarishga imkon berdi:

1. Talabalarni geometriya darslarida olgan nazariy bilimlarini amalda qo'llash quyidagi omillarga bog'liq ekanligini tasdiqlaydi: talabalar mantiqiy fikrlashni o'stirish, fazoviy tasvurlarini rivojlantirish, boshqa fanlar bilan aloqadorlikni ta'minlash, amaliy mazmunli masalalar yyechish hamda turli geometrik isbotlash usullariga o'rgatish.

2. Isbotlashlarga o'rgatishda yasashga doir konstruktiv masalalardan foydalanish bilan birga ularni bosqichma-bosqich isbotlash va tadqiqot xarakteridagi masalalar yyechishga o'rgatish ya'xshi natijalar beradi.

3. Turli geometrik masalalarni yyechishda mantiqiy fikrlash bilan birga ularning bilimini sifatini oshirish, yo'l qo'yadigan xatolarini oldini olish talabalarning ijodiy va tadqiqot faoliyatlarini rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

4. Ayniqsa, talabalar nazariy bilimlarini amalda qo'llash samaradorligini oshirishda geometrik bilimlarni qo'llashga doir mashqlardan foydalanish maqsadga muvofiq.

5. Geometriya o'qitishda predmetlararo aloqalarni ta'minlash talabalarni na faqat geometriya bo'yicha bilimlarini mustahkamlash uchun, balki boshqa fanlarda geometrik tushuncha va qoidalarining qo'llanilishini ko'rsatish uchun imkon beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR ROYXATI

1. *Karimov I.A.* Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. – T.: O'zbekiston, 1997.
2. *Karimov I.A.* Yuksak ma'naviyat – yengilmas kuch. – T.: O'zbekiston, 2009.
3. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "OTM moddiy bazasini mustahkamlash va yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash sifatini tubdan yaxshilash chora-tadbirlari to'g'risida"gi 2011-yil 1533-sonli qarori.
4. O'zbekiston Respublikasining "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni. – T.: "Sharq," 2001. Oliy ta'lim me'yoriy hujjatlari. 3 - 18 betlar.
5. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi. – T.: "Sharq," 2001. Oliy ta'lim me'yoriy xujjatlari. 18 - 52 betlar.
6. *Abduqodirov A., Pardaev A.X.* Pedagogik texnologiyalarga oid atamalar izohli lug'ati. -T.: Fan va texnologiya, 2012. -104 b.
7. Методика преподавания математики. Частная методика. Под ред. В.И.Мишина. -М.: Просвещение, 1987.
8. Методика преподавания математики. Частная методика. Ю.М.Колягин и др. – М., 1977.
9. *Ostonov Q.* Matematika va informatika o'qitish uslubiyati. Ma'ruzalar matni.-Samarqand, SamDU, 2001.
10. *Ostonov Q., Mardonov Э.М.* "Matematika tarixi va matematika o'qitish uslubiyati" predmeti bo'yicha o'quv-uslubiy majmua (bakalavriat bosqichi talabalari uchun). – Samarqand: SamDU, 2013. – 353 b.
11. *Ostonov Q., Mardonov Э.М.* Matematika tarixi va matematika o'qitish uslubiyati. Uslubiy qo'llanma. - Samarqand: SamDU, 2013. – 271 b.
12. *Ostonov Q.* Yangi pedagogik texnologiyalarni matematika o'qitish jarayonida tadbiq etish usullari. Uslubiy qo'llanma. – SamDU, 2006. -70 b.
13. *Ostonov Q.* Matematika o'qitishning dolzarb muammolari. Ma'ruzalar matni. – SamDU, 2006. -69 bet.
14. *Ostonov Q.* Matematika va uni o'qitish metodikasi taraqqiyoti tarixi. Uslubiy qo'llanma. – SamDU, 2006. - 87 b.
15. *Ostonov Q.* Geometriya o'qitish uslubiyati masalalari. Uslubiy qo'llanma. – SamDU, 2006. - 59 -b.
16. *Погорелов В.А.* Геометрия. 7-11. – Тошкент: Ўқитувчи, 2001.
17. *Бескин Н.М.* Стереометрия. -М.: Просвещение, 1967.
18. *Александров А. Д., Вернер А, Л., Рыжик В, И.* Геометрия для 10–11-х классов: учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик – 3-е. изд. – М.: Просвещение, 1992. – 464 с.
19. *Гайштут А., Литвиненко Г.* Стереометрия. Задачник к школьному курсу 10–11-го класса. – М.: АСТ-ПРЕСС, 1998. – 156 с.
20. Геометрия: Учебник для 10–11-х кл. сред. шк./ Л, С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1993. – 207 с.

21. *Зив Б. Г. И др.* Задачи по геометрии для 7–11-х классов / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский. – М.: Просвещение, 1991. – 171 с.
22. *Киселев А. П.* Элементарная геометрия. Книга для учителя / А. П. Киселев. – М.: Просвещение, 1980. – 287 с.
23. *Крамор В. С.* Повторяем и систематизируем школьный курс по геометрии / В. С. Крамор. – М.: Просвещение, 1992. – 320 с.
24. *Бевз Г. П.* Геометрия: Учебник для 7-11 кл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владимирова. – М.: Просвещение, 1990.
25. *Березанская Е. С.* Вопросы стереометрии в восьмилетней школе. / Е. С. Березанская. – М.: Просвещение, 1964.
26. *Габович И. Г.* Решение экстремальных задач на комбинации стереометрических фигур / И. Г. Габович. // Математика в школе – 1980 - №5 – С. 24-26.
27. Геометрия: Учеб. для 10 – 11 кл. общеобразоват. учреждений / А. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1998.
28. *Лоповок Л. М.* Изображение фигуры в стереометрии: преподавание геометрии в 9 – 10 классах: сб. статей. / Л. М. Лоповок – М.: Просвещение, 1980.
29. *Никитин Н. Н.* Геометрия: учебник для 6-8 кл. / Н. Н. Никитин. – Учпедгиз, 1963.
30. *Паповский В. М.* Углублённое изучение геометрии в 10 – 11 классах: метод. рекомендации к преподаванию курса геометрии в 10 – 11 кл. по учеб. Пособию А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжина: кн. для учителя. / В. М. Паповский. – М.: Просвещение, 1993.
31. *Сверченская И. А.* Устные задачи по теме «Объемы тел вращения. Площадь сферы» / И. А. Сверченская // Математика в школе – 2005 - № 3, С. 5-9.
32. *Смирнова И. М.* Геометрия: учебное пособие для 10-11 кл. гуманитар. профиля. / И. М. Смирнова – М.: Просвещение, 1997.
33. *Столяр А. А.* Педагогика математики. Учеб. пособие для физ. – мат. фак. пед. ин – тов / А. А. Столяр. – Мн.: Высш. шк., 1986.
34. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев – М.: Просвещение, 1991.
35. *Шарыгин И. Ф.* Чертеж в стереометрических задачах. / И. Ф. Шарыгин // Квант - 1991 - №5-С. 47-50.
36. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия 10 – 11 классы. / И. Ф. Шарыгин // Математика – 2006 - №3 - С. 36-38.
37. *Штейнгауз Г.* Сто задач. – М.: Наука, 1977.
38. Энциклопедический словарь юного математика. / Сост. А. П. Савин. – М.: Педагогика, 1985. – 352 с.
39. *Isroilov I., Pashaev I.* Geometriya. Darslik. -T.: O'qituvchi, 2011.

Internet saytlari

<http://www.mathedu.ru/journals-collections/>

<http://www.mathedu.ru/mathteach/geometry/-/1/3>

<http://www.math.ru/lib/>

http://www.metodkabinet.eu/PO/PO_menu_Matem.htm

ilib.mccme.ru -

www.ega-math.narod.ru