

O‘ZBEKISTON RESRUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

Qo‘lyazmahuquqida

UDK.521.19

MAMADIYOROV ZARIF XUSANOVICH

«KO‘P O‘LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR UCHUN BA’ZI BIR
NATIJALAR»

5A130102– ehtimollarnazariyasivamatematikstatistikamutaxasisligi bo‘yicha
Magistr-akademik darajasini olish uchun

DISSERTATSIYA ISHI

Ilmiy rahbar:

f-m.f.n., dots. I.B.Xaliqulov

Samarqand – 2015.

MUNDARIJA

KIRISH

I-BOB. Tasodifiymiqdorlarning taqsimot funksiyalari.

1-§. Tasodifiymiqdorlar va ularning taqsimot funksiyakari

2-§. Ko'po'lchovlitasodifiymiqdorlar

II-BOB.

Biro'lchovlitasodifiymiqdorlar uchun tengsizliklar.....

.....

1-§. Ehtimollarni nazariyasining asosiy tengsizliklari.....

2-§. Eksponensial baholar

III-BOB.

Ko'po'lchovlitasodifiymiqdorlarga oid teoremlar.....

.....

1-§. Ko'po'lchovlitasodifiymiqdorlarga oid teoremlar

2-§. Ikkio'lchovlitasodifiymiqdorlar uchun S.N. Bernshteyn tengsizligining analogi

.....

Xulosa.....

Foydalanilgan adabiyotlar

KIRISH

Dissertatsiya asoslanishi va uning dolzarbligi: Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va ularga oid tengsizliklar, ehtimollar nazaryasining limitik teoremlarini isbotlashda qo'llaniladi. Bu tengsizliklarni olish uchun quyi va yuqoridan baholashdan iborat. Katta sonlar qonuni vakuchaytirikgan kata sonlar qonuni, takroriy logorifim qonunlari ahtimollar nazariyasining muhim tadbiquy masalalardan iborat ekanligidan, ularni isbotlash zarurati tug'iladi.

Ehtimollar nazaryasining asosiy tengsizliklari bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun limitik teoremlarini isbotlashda amaliy ahamiyatga ega. Xuddi shunday ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun tengsizliklar, ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun limitik teoremlarni isbotlashda va ularga olib keladigan shartlarni bilish juda katta ahamiyatga ega.

Tadqiqotning maqsad va vazifalari: Mazkur magistrlik dissitatsiyasida ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlarga oid tengsizliklar o'rganiladi. Magistrlik disseratsiyasida bir o'lchovli va ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun tengsizliklarolinadi va qanday isbotlash metodlarini o'rganishdan iborat.

Ilmiy tadqiqot metodlari:Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun tengsizliklarni olishda Yu.V.Proxrov metodidan foydalanib isbotlangan. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun tengsizliklar avval bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun isbotlanib, keyin yuqoridagi metoddan foydalanib ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun asosiy tengsizliklar isbotlangan.

Ishning ilmiy ahamiyati: Katta sonlar qonuni va kuchaytirilgan katta sonlar qonuni, takroriy logorifim qonunlari ehtimollar nazariyasida muhim tadbiquy masalalarni yechishda qo'llaniladi. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun, isbotlangan tengsizliklar ana shunday limitik teoremlarni isbotlashda ilmiy ahamiyatga ega.

Tadqiqot mavzubo'yicha adabiyotlar sharhi:

Mazkur magistrlik dissertatsiyasida Б.В.Гнеденко Курстеории вероятностей,

С.Х.Сирожиждинов,

М.М.МаматовЭхтимолларназвриясиваматематикстатистика, В. В.

ПетровСуммынезависимыхслучайныхвеличин, КучкаровЯ. Х.

Вероятностыераспределениясозначениямивпростратанствахизмеримихфункц
ий, ПрохоровЮ.В.

РаспространениенеравенствС.Н.Бернштейнанамногочмерныйслучай kabi
ehtimollar nazariyasiga oid adabiyotlar bilan tanishib chiqdim va dissertatsiya
mavzusini yozish moboynda bevosita fodalandim.

Ishning ilmiy yangiligi: Mazkur magistirlik dissertatsiyasini yozish
moboynda Б.В.ГнеденковаВ. В. Петровнингusullaridan foydalanib, ehtimollar
nazariyasining asosiy tengsizliklaridan olingan va eksponensial baholar
isbotlangan. ПрохоровЮ.В metodidan foydalanib ikki o'lchovli tasodifiy
miqdorlar uchun, shu tengsizliklarning analoglari keltirilgan.

Ishning amaliy ahamiyati: Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar va bir
o'lchovli tasodifiy miqdorlarga oid tengsizliklar ehtimollar nazariyasining barcha
tasodifiy masalalarida muhim amaliy ahamiyatga ega. Bu tengsizliklarni olishda va
ularni bevosita qo'llashda foydalaniladi.

Ishning tuzilishi: Mazkur magistirlik dissertatsiysi uchta bob va oltita
paragirifdan iborat.

Birinchi bobda tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyasialari
o'rganilgan.

Ikkinchi bobda ehtimollar nazariyasining asosiy tengsizliklari Chebeshev
tengsizligi, umumlashgan Chebeshev tengsizligi va uning tadbiqlari, Kolmogorof,
Koshi-Bunyakovskiy, Gelder tengsizliklari bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun
isbotlangan. Shu bilan birgalikda eksponensial baholar isbotlanib, ya'ni tasodifiy
miqdorlar uchun quyi va yuqoridan baholar olingan.

Uchinchi bobda ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlarga oid teoremlarning
isboti keltirilgan. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun S.N.Bernshteyn
tengsizligining analogi isbotlangan. Shu tengsizliklarning shartli bog'liq
bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinli ekanligi ko'rsatilgan.

Olingan natijalarning qisqacha mazmuni (annotatsiyasi):

Ko'p o'lchovli va bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun ehtimollar nazariyasining asosiy tengsizliklari Chebishev, Kolmogorov, S.N.Bernshteyn tengsizliklari isbotlangan.

I-bob

1.1-§. Tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari

Tasodifiy miqdorlar. Tasodifiy miqdor ta'rifini berishdan avval o'lchovli funksiy tushunchasini kiritamiz. Bizga (Ω, F) , (R, G) o'lchovli fazolar va $\xi: \Omega \rightarrow R$ funksiy berilgan bo'lib, bu funksiy uchun $A \in G$ ekanidan $\xi^{-1}(A) = \{\omega: \xi(\omega) \in A\} \in F$

ekani kelib chiqsa, bunday funksiy o'lchovli funksiy deyiladi.

Agar (Ω, F, P) , ixtiyoriy ehtimollik fazosi bo'lsin, har qanday $\xi: (\Omega, F) \rightarrow (R, G)$ o'lchovli funksiy tasodifiy miqdorlar deyiladi. Tasodifiy miqdorning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $x \in R$ uchun

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \{\xi < x\} = \xi^{-1}((-\infty, x)) \in F,$$

chunki $(-\infty, x) \in G$.

Bunda

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$$

funksiyaning R da aniqlanganligi kelib chiqadi. Bu funksiya ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

1.1.1-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymatlarini qabul qilish ehtimoliga ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi va $F_{\xi}(x)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$F_{\xi}(x) = P\{-\infty < \xi < x\}$$

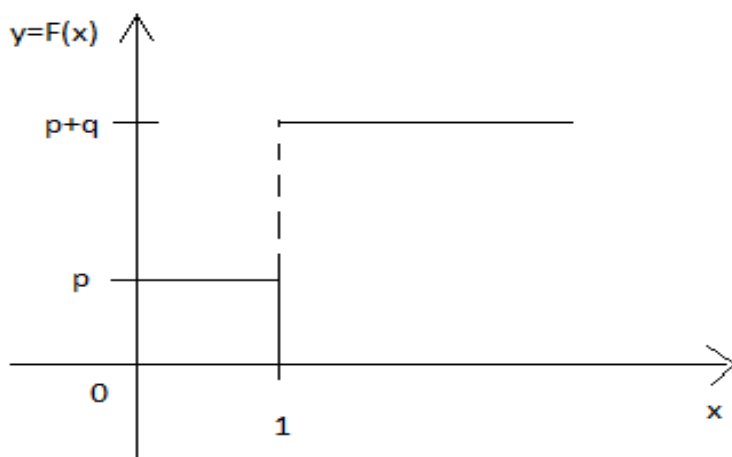
yoki

$$F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}$$

1.1.2-ta'rif. Tasodifiy sabablarga ko'ra u yoki bu qiymatlarni qabul qiladigan va o'zining taqsimot funksiyaga ega bo'lgan o'zgaruvchi miqdorga tasodifiy miqdorlar deyiladi.

1.1. 3-ta'rif. (Tasodifiy miqdorning abstrakt) Faraz qilaylik (Ω, F, P) , ehtimollar fazosi berilgan bo'lsin. Tasodifiy miqdor deb elementar hodisalar fazosi Ω da aniqlangan $\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega$ o'lchovli funksiyaga aytiladi.

1.1.1-misol. ξ tasodifiy miqdor 1 va 0 qiymatlarni mos ravishda p va q ($p+q=1$) ehtimol bilan qabul qilsin:



$$\xi: 0, 1 \quad p = P\{\xi = 1\}$$

$$q, \quad q = P\{\xi = 0\}$$

Bu holda

$$P\{\xi < x\} = F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa} \\ p, & \text{agar } 0 < x \leq 1 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Agar ξ tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, n$ qiymatlarni

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}$$

ehtimol bilan qabul qilsa, bu tasodifiy miqdor binominal, qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \\ \sum_{k < x} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{agar } 0 \leq x \leq n \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > n \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

1.1.2-misol. Agar ξ tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots, n, \dots$ qiymatlarni

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

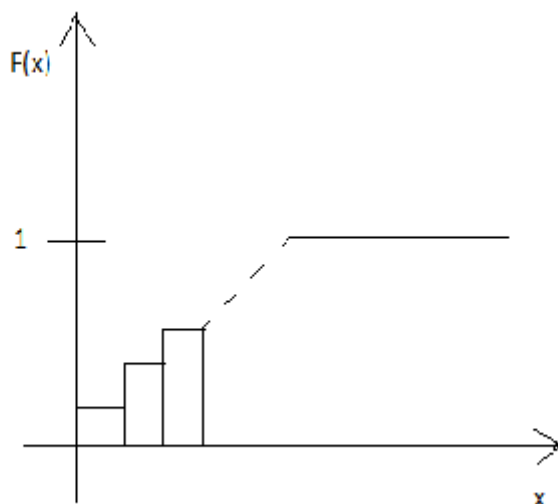
ehtimollar bilan qabul qilsa, uni Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha aniqlanadi.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } k < 0 \\ \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{agar } 0 < k \leq x \end{cases}$$

bo'lsin.

1.1.3-misol. ξ tasodifiy miqdor $[a, b]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo'lsin, u tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi.



1.1.4-misol. ξ tasodifiy miqdor $[a, b]$ tekis taqsimlangan bo'lsin, u tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ bo'lganda} \\ \frac{x - a}{b - a}, & a < x \leq b \text{ bo'lganda} \\ 1, & x > b \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

1.1.5-misol. Agar tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x) = C \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du,$$

ko'rinishda bo'lsin, bunday tasodifiy miqdor normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu erda $C > 0, \sigma > 0, -\infty < a < \infty$ o'zgarish son.

1.1.4-ta'rif. Tasodifiy miqdorning qabil qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bilan bu qiymatlarga mos keluvchi ehtimollari o'rtasida bog'lanish o'rnatuvchi munosabatga tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deyiladi.

Taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega.

1. Barcha haqiqiy x lar uchun $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$.

2. $F_{\xi}(x)$ kamaymaydigan funksiya.

Haqiqatan ham, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Ushbu

$$A_1 = \{\xi < x_1\}, A_2 = \{\xi < x_2\}, B = \{x_1 < \xi < x_2\},$$

hodisalarni kiritsak;

$$A_2 = A_1 \cup B, A_1 \cap B = \emptyset.$$

Natijada ehtimolning additivlik xossasiga ko'ra

$$P(A_2) = P(A_1) + P(B)$$

yoki

$$0 \leq P(x_1 < \xi < x_2) = P\{\xi < x_2\} - P\{\xi < x_1\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Bundan esa $x_1 < x_2$ da $F(x_1) \leq F(x_2)$ bo'lib xossaning isboti kelib chiqadi.

3. Taqsimot funksiya chapdan uzluksiz, ya'ni

$$F_{\xi}(x) = F_{\xi}(x - 0) = \lim_{x_m \uparrow x} F(x_m).$$

Isbot. Faraz qilaylik, $a_1 < a_2 < a_3 < \dots a_n < \dots$ va $n \rightarrow \infty$ da $a_n \uparrow b$ bo'lsin, u holda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) \in [a_n, b)\} = V$$

Natijada uzluksizlik aksiomasiga ko'ra

$$F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a_n) = P\{\omega: \xi(\omega) \in [a_n, b)\}$$

ifodan $\rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Bu esa $F_\xi(x)$ ning chapdan uzliksizligini ko'rsatadi.

Boshqacha isbotini keltiramiz.

$$F_\xi(x) = F_\xi(x - 0), \quad P\{\xi \leq x\} = F(x + 0)$$

$$P\{\xi = x\} = F_\xi(x + 0) - F_\xi(x - 0),$$

xga o'sib intiluvchi $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots \overline{\lim} x_n = x - 0$.

$$A_n = \{x_n < \xi < x\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

u vaqtda

$$A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_2 \subset A_1, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = V.$$

U vaqtda uzluksiz aksiomasiga asosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(V) = 0; \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\{x_n < \xi < x\} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F(x) - F(x_n)] = 0,$$

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(x - 0).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Isbot. Biz xossani isbotlash uchun ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarni qaraymizki, bunda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $-\infty$ ga monoton kamayadi, $\{y_n\}$ esa $+\infty$ ga monoton o'sadi. $A_n = \{\xi < x_n\}$, $B_n = \{\xi < y_n\}$ belgilashlarni kiritamiz. $x_n \downarrow -\infty$ ligidan A_n to'plamlar ketma-ketligi ichma-ich qo'yilgan bo'ladi va $\cap A_n = \emptyset$. Ehtimolning uzluksizlik aksiomasiga binoan $n \rightarrow \infty$ da $P(A_n) \rightarrow 0$. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} F\{x_n\} = 0$ kelib chiqadi.

Bundan va $F(x)$ funksiyaning monotonligidan $\lim_{n \rightarrow \infty} F\{x_n\} = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

$\{y_n\}$ ketma-ketlik $n \rightarrow \infty$ da $+\infty$ ga monoton yaqinlashganligi uchun B_n ketma-ketligi ham o'suvchi bo'ladi va $\cup B_n = \Omega$, binobarin ehtimolning

xossasiga asosan $P(B_n) \rightarrow 1$. Bundan, xuddi avvalgidek, $\lim_{n \rightarrow \infty} F\{y_n\} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F\{y\} = 1$ munosabat kelib chiqadi.

5. Taqsimot funksiyaning sakrashga ega bo'lgan nuqtalari to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'lish mumkin.

Agar $x = x_0$ nuqtada $F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0) = C_0 > 0$ bo'lsin, funksiya $x = x_0$ nuqtada sakrashga ega bo'lib, uning kattaligi C_0 ga teng bo'ladi.

Isbot. $F(x)$ taqsimot funksiyaning sakrashlari $\frac{1}{2}$ dan katta bo'lgan nuqtalarning soni faqat 1 ta (chunki 2 ta bo'lsin, ularning yig'indisi 1 dan katta bo'ladi, buning esa bo'lishi mumkin emas)

$F(x)$ ning $C_0 > \frac{1}{2}$ bo'lgan sakrashlar soni 1 ta

$F(x)$ ning $\frac{1}{4} < C_0 \leq \frac{1}{2}$ 3 ta

$F(x)$ ning $\frac{1}{8} < C_0 \leq \frac{1}{4}$ 7 ta

.....

$F(x)$ ning $\frac{1}{2^n} < C_0 \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ $2^n - 1$ ta.

Bu nuqtalarning ketma-ket nomerlab chiqish mumkin, chunki sanoqli sandagi chekli to'plamlarning yig'indisi yana sanoqli bo'ladi.

1.1.5-ta'rif. Agar ξ tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli sondagi $\{x_k\}$ qiymatlarni $\{p_k\}$ ($\sum_k p_k = 1$) ehtimollar bilan qabul qilsa, uni diskret tasodifiy miqdor deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \sum_{\{k: x_k < x\}} p_k$$

formula bilan aniqlanadi.

1.1.6-ta'rif. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'lsin, bu tasodifiy miqdor absolyut uzluksiz taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Bu erdagi $p(u)$ funksiya ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deyiladi.

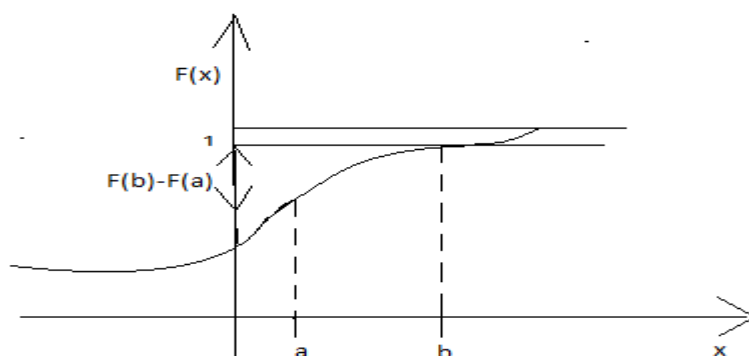
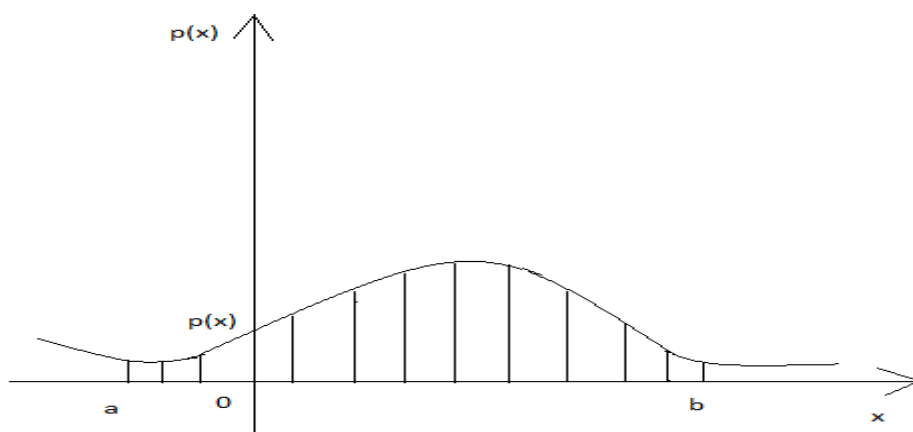
1.1.6 - ta'rifga ko'ra $F'(x) = p(x)$ bo'ladi.

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega.

1. Zichlik funksiya manfiy emas: $p(x) \geq 0$.

Haqiqatdan ham, $F(x)$ taqsimot funksiyaning kamaymasligidan uning hosilasi deyarli hamma nuqtalarda doim musbat bo'ladi.

2. Agar $p(x)$ zichlik funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin, u holda $P\{x_0 \leq \xi < x_0 + dx\}$ ehtimol zichlik funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor aniqligida ekvivalent bo'ladi.



$$P\{x_0 \leq \xi < x_0 + dx\} \approx p(x_0)dx$$

$$F(a) = P\{\xi \leq a\} = \int_{-\infty}^a p(x)dx$$

$$P\{a \leq \xi \leq b\} =$$

$$= \int_a^b p(x)dx = \int_{-\infty}^b p(x)dx - \int_{-\infty}^a p(x)dx = F(b) - F(a)$$

3. Zichlik funksiyadan $(-\infty; +\infty)$ oraliq bo'yicha olingan interval 1 ga teng.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Bu bevosita taqsimot funksiya xossasidan kelib chiqadi.

Yuqorida keltirilgan normal taqsimlangan tasodifiy miqdor uzluksiz tasodifiy miqdordir. Normal qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiya

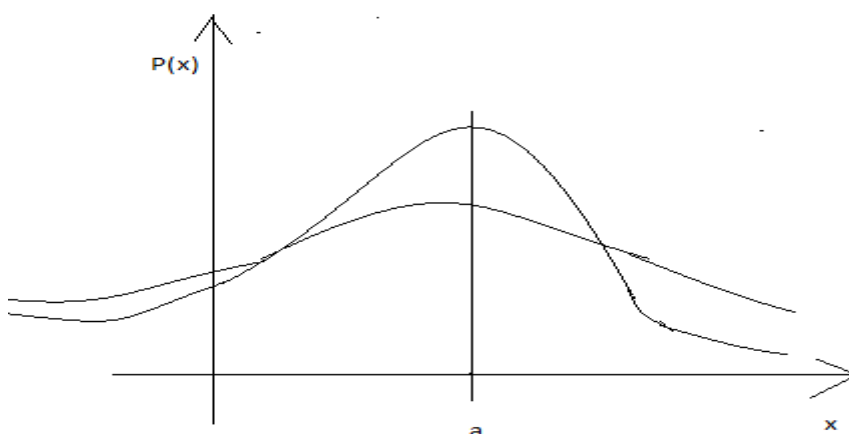
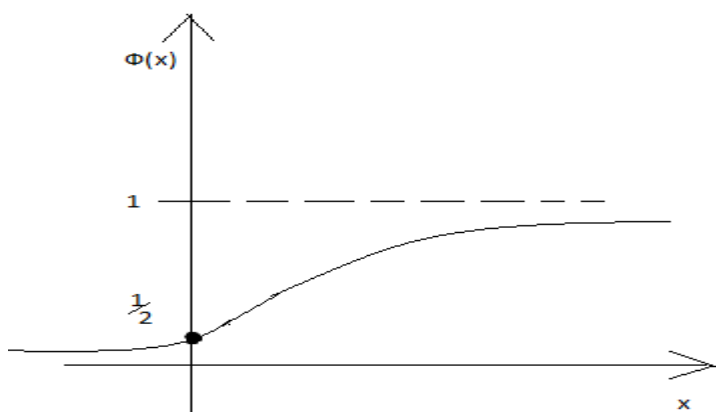
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ga teng. $p(x)$ zichlik funksiya $x = a$ nuqtada eng katta qiymatga erishadi va uning grafigi $x = a$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan, bu funksiya uchun Ox o'q garizontal asimptota, $x = a \pm \sigma$ nuqtalar bu funksiyaning bukulish nuqtalari bo'ladi. Bularni e'tiborga olsak, $p(x)$ funksiyaning grafigi quyidagicha bo'lishini ko'ramiz.

Xususan $a = 0$, $\sigma = 1$ bo'lganda taqsimot funksiya

$$\Phi_{(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

ko'rinishga ega bo'ladi.



$\Phi_{(0,1)}(x)$ taqsimot funksiya $(0,1)$ – parametrli standart normal qonun deyiladi.

1.1.6-misol. Zichlik funksiyasi

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

dan iborat bo'lgan tasodifiy miqdorni erklilik darajasi n bo'lgan Styudent qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Bu erda $\Gamma(x)$ – gamma funksiyadir. Uning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^x \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} du;$$

Zichlik funksiyasi $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ko'rinishda bo'lgan tasodifiy miqdorni

Koshi qonuni bilan taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

1.2-§ Ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar va ularning taqsimot funksiyalari

Faraz qilaylik, (Ω, F, P) ehtimollik fazosida $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin.

Ushbu $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ vektorni qaraylik $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdor yordamida beriladigan $\xi: \Omega \rightarrow R^n$ akslantirish tasodifiy vektor yoki ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdor deyiladi.

Agar R^n dagi Borel to‘plamlari σ – algebrasini $\mathcal{E}$ desak u holda $\Omega \rightarrow R^n$ akslantirishni (Ω, B) fazoni $(R^n, \mathcal{E})$ fazoga o‘lchovli akslantirish deb qaraladi.

Shuning uchun $\forall \mathcal{E}$ Borel to‘plami uchun ξ vektorning taqsimoti deb ataladigan $P_\xi(B) = P\{\xi \in B\}$ funksiya aniqlangan.

Ushbu

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} \quad (1.2.1)$$

funksiya $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi yoki $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdorning birgalikdagi taqsimot funksiya deyiladi.

$$1. \lim_{x_n \rightarrow \infty} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

$$2. \lim_{x_n \rightarrow -\infty} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Bu erda limit oxirgi argument bo‘yicha olingan, lekin bu shart emas bo‘lib, $\forall$ argument bo‘yicha limitga o‘tish mumkin edi. Bu xossalar bir o‘lchovli kabi isbotlanadi.

3. $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ taqsimot funksiya har bir argument bo'yicha kamaymaydigan funksiya.

4. $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ taqsimot funksiya har bir argument bo'yicha chapdan uzluksiz.

5. $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$ munosabat o'rinli.

Ixtiyoriy $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya no'lchovli tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi bo'lishi uchun yuqorida keltirilgan hossalarga yana, quyidagi hossani qo'shish zarur:

$\forall \alpha_i, \forall \beta_i$ haqiqiy sonlar uchun quyidagi ifoda manfiy emas.

$$P\{\alpha_1 \leq \xi \leq \beta_1, \alpha_2 \leq \xi \leq \beta_2, \dots, \alpha_n \leq \xi \leq \beta_n\} = \\ = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) - \sum_{i=1}^n p_i +$$

$$+ \sum_{i < j}^2 p_{ij} + \dots + (-1)^n F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

bu erda $P_{i,j,\dots,k}$ bilan $F(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ funksiyaning

$\eta_i = \alpha_i, \eta_j = \alpha_j, \dots, \eta_k = \alpha_k$ va qolgan η_s larda β_s ga teng qiymatlari belgilangan. $(R^n, \mathcal{E})$ fazoda $P_\xi(B)$ ehtimollik o'lchovining kiritilishi bu o'lchov bo'yicha integrallash imkonini beradi. Agar φ funksiya: $R^n \rightarrow R$ akslantiruvchi Borel funksiya bo'lsin, u holda $\varphi(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ funksiya boshlang'ich fazoni Ω ga o'lchovli akslantiradi hamda

$$\int_{\Omega} \varphi(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) P(d\omega)$$

integral aniqlangan bo'ladi. Biz integral ta'rifidan foydalanib, yuqoridagi integral

$$\int_{R^n} \varphi(\vec{x}) p_\xi(d\vec{x}), \quad \vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in R^n$$

bilan bir xil ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Xuddi bir o'lchovli tasodifiy miqdor kabi tasodifiy vektorni diskret va absolyut uzluksiz tiplarga ajratib o'rganish mumkin.

1.2.1-ta'rif. Agar chekli yoki sanoqli $\{(x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k})\}$ nuqtalar to'plami uchun

$$P\{\xi_1 = x_{m_1}, \xi_2 = x_{m_2}, \dots, \xi_n = x_{m_k}\} = p_{x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}}$$

va

$$\sum_{(x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k})} p_{x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_k}} = 1$$

munosabatlar bajarilsa, u holda $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ diskret tipdagi tasodifiy vektor deyiladi.

1.2.2-ta'rif. Agar funksiyap(t₁, t₂, ..., t_n) ≥ 0 bo'lib, tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi ushbu

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1, dt_2, \dots, dt_n$$

ko'rinishda bo'lsin, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ absolyut uzluksiz tipdagi tasodifiy vektor deyiladi.

$$\int_{R^n} p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1, dt_2, \dots, dt_n = 1$$

ekanligi ravshan. Yuqoridagi $p(t_1, t_2, \dots, t_n)$ funksiya

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi deyiladi.

Deyarli hamma erda

$$\frac{\partial^n F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1, \partial x_2, \dots, \partial x_n} = p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1), F_{\xi_2}(x_2), \dots, F_{\xi_n}(x_n),$$

tenglik bajarilsa, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tasodifiy miqdor o'zaro bog'liq emas deyiladi.

1.2.1-misol. n –o'lchovli $a_i \leq \xi_i \leq b_i, i = \overline{1, n}$ parallelepipedda tekis taqsimlangan $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{agar hech bo'laganda bitta } i \text{ uchun } x_i \leq a \\ \prod_{i=1}^n \frac{x_i - a_i}{b_i - a_i}, & a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n} \\ 1, & \text{agar } x_i > b_i, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

ko'rinishda bo'ladi.

1.2.2-misol. Zichlik funksiyasi

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} Q(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

ko'rinishga ega bo'lgan $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektor normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy vektor deyiladi, bunda

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

musbat aniqlangan kvadratik forma, $|A| = \det \|a_{ij}\|$.

Xususan $n = 2$ bo'lsin

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2} \right]} \quad (1.2.2)$$

bu erda a, b -haqiqiy sonlar, $-1 \leq r \leq 1$, σ_1, σ_2 -musbat sonlar. Agar $r = \pm 1$ bo'lsin, ξ_1 va ξ_2 lar chiziqli bog'langan bo'ladi.

Normal taqsimlangan tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi quyidagicha bo'ladi.

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{1}{2} Q(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Agar $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ vektorning komponentalari normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lib, ular o'zaro bog'liq bo'lmasa, u holda uning zichlik funksiyasi quyidagiga teng

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (1.2.3)$$

Demak, (1) va (2) larni solishtiradigan bo'lsink $r = 0$ ligini ko'razim, shunday qilib tasodifiy vektorning komponentalari o'zaro bog'liq bo'lmasinva har bir komponentasi normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsin $r = 0$ bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalarga asosan, har bir komponentasi normal qonun bo'yicha taqsimlangan $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning komponentalari o'zaro bog'liq bo'lmasligi uchun $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$) bo'lishi zarur va etarliciligini ko'rish qiyin emas.

II-BOB

2.1-§. Ehtimollar nazariyasining asosiy tengsizliklari.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilma atrofida tarqoqlik darajasini xarakterlaydigan kattalik, xususan, tasodifiy miqdorning dispersiyasi ekanligi bizga ma'lum. Agar dispersiya kichik son bo'lsa, u holda tasodifiy miqdor qiymatlari matematik kutilma atrofida zichiroq joylashgan bo'ladi. Bu fakti tasdiqlovchi quydagi Chebishev tengsizligini keltiramiz.

Chebishev tengsizligi. Agar ξ tasodifiy miqdor chekli dispersiyaga ega bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ son uchun ushbu tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad (2.1.1)$$

Isbot. Agar $F(x)$ ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsa, u vaqtda

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = \int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} dF(x)$$

integrallash sohasini hisobga olsak

$$\frac{|x - M\xi|}{\varepsilon} \geq 1 \text{ yoki } \frac{(x - M\xi)^2}{\varepsilon^2}$$

u vaqtda

$$\int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} dF(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} (x - M\xi)^2 dF(x) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-M\omega| \geq \varepsilon} (x - M\omega)^2 dF(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\omega)^2 dF(x) = \frac{D\omega}{\varepsilon^2}$$

Chebishev tengsizligi isbot bo'ldi.

2.1.1-misol. ξ tasodifiy miqdor o'zining sonli xarakteristikalar bilan berilgan

$$M\xi = 1, \quad \sqrt{D\xi} = 0.2, \quad A = \{0.5 \leq \xi \leq 1.5\}$$

hodisani ehtimolini quyidan baholang.

Yechish. Tasodifiy hodisani quydagicha baholaymiz

$$\begin{aligned} \{0.5 \leq \xi \leq 1.5\} &= \{0.5 - M\xi \leq \xi - M\xi \leq 1.5 - M\xi\} = \\ &= \{0.5 - 1 \leq \xi - M\xi \leq 1.5 - 1\} = \{-0.5 \leq \xi - M\xi \leq 0.5\} = \\ &= \{|\xi - M\xi| \leq 0.5\} = \overline{\{|\xi - M\xi| > 0.5\}} \end{aligned}$$

bu yerda chiziq $\{|\xi - M\xi| > 0.5\}$ hodisaga qarama-qarshi hodisa ekanligini anglatadi.

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \cup \{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = \Omega = (-\infty, \infty)$$

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} + P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = P(\Omega) = 1$$

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad (2.1.1')$$

Oxirgi tenglikdan quydagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} P\{0.5 \leq \xi \leq 1.5\} &= 1 - P\{|\xi - M\xi| > 0.5\} \\ &= P\{|\xi - M\xi| \leq 0.5\} \end{aligned}$$

Hodisa ehtimolini hisoblashga Chebishev tengsizligini qo'llasak, quydagiga ega bo'lamiz

$$P\{|\xi - M\xi| > 0.5\} \leq \frac{D\xi}{(0.5)^2} = \frac{(0.2)^2}{(0.5)^2} = \frac{4}{25}$$

shunday qilib

$$1 - P\{|\xi - M\xi| > 0.5\} \geq 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} = 0.84$$

Umumlashgan Chebishev tengsizligi.

Chebishev tengsizligining tadbqiqini keltirishdan oldin quydagi tenglikni keltiramiz

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) \quad (2.1.2)$$

bu formula $M = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$ formulaning umumlashmasidir. (2.1.2) tenglik $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dF(x) < \infty$ shartda o'rinli bo'ladi.

2.1.1-teorema. Faraz qilaylik $g(x)$ manfiy bo'lmagan X tasodifiy miqdorning qiymatlar to'plamida kamaymaydiga funksiya bo'lsin. Agar $M(g\xi)$ mavjud bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ son uchun quydagi tengsizlik o'rinli:

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M(g\xi)}{g(\varepsilon)} \quad (2.1.3)$$

Isbot. Faraz qilaylik $F(x)$ ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi bo'lsin, ya'ni $F_{\xi}(x) = P\{\xi < x\}$ u holda (2.1.2) formulaga ko'ra va $g(x)$ funksiyaning xossalriga ko'ra quydagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} Mg(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) + \int_{\varepsilon}^{\infty} g(x)dF(x) \geq \\ &\geq \int_{\varepsilon}^{\infty} g(x)dF(x) \geq g(\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\infty} dF(x) = g(\varepsilon)F(x)|_{\varepsilon}^{\infty} = \\ &= g(\varepsilon)[F(+\infty) - F(\varepsilon)] = g(\varepsilon)[1 - F(\varepsilon)] = g(\varepsilon)P\{\xi > \varepsilon\} \end{aligned}$$

bu tengsizlikdan esa teoremaning tasdiqi kelib chiqadi, ya'ni

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M(g\xi)}{g(\varepsilon)}.$$

Xususiyl holda, agar ξ manfiy bo'lmagan tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda $g(x)$ sifatida $g(x)=x$ deb olib quydagi Chebishev tengsizligini hosil qilamiz:

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M\xi}{\varepsilon} \quad (2.1.4)$$

Agar $g(x) = |x|^r, r > 0$, u holda quidagi tengsizlikga ega bo'lamiz

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{M|\xi|^r}{\varepsilon^r}.$$

Ba'zi hollarda bu tengsizlikni Markov tengsizligi deb ham yuritiladi.

Agar $\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining har bir hadi uchun

$|\xi|^r, r > 0$ darajasining matematik kutilmasi mavjud bo'lsa, va

$$M\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ko'rsatish kerak. Chebishev tengsizligiga ko'ra

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \leq \frac{M|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r}$$

bo'ladi, shartga asosan $M|\xi_n - \xi|^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ bundan esa

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\}$$

kelib chiqadi. Demak $M|\xi|^r$ bo'yicha yaqinlashish ehtimol bo'yicha yaqinlashishdan iborat ekan, lekin teskarisi o'rinli emas.

2.1.1-misol. Agar $D\xi = 0$ bo'lsa, u holda $P\{\xi = M\xi\} = 1$ ekanligini isbot qilamiz. Haqiqatan $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ deb olsak, u holda

$$P\left\{|\xi - M\xi| > \frac{1}{n}\right\} \leq n^2 D\xi = 0$$

ya'ni $\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\xi - M\xi| > \varepsilon\} = 0$.

bundan kelib chiqadiki

$P\{|\xi - M\xi| > 0\} = 0$ yoki $P\{|\xi - M\xi| = 0\} = 1$ ekan.

Chebishev tengsizligining ba'zi bir tadbirlari.

Chebishev tengsizligi tasodifiy miqdorning o'zining matematik kutilmasidan farqini baholaganligi uchun, uni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$P\{|\xi - M\xi| > k\sqrt{D\xi}\} \leq \frac{D\xi}{k^2 D\xi} = \frac{1}{k^2} \quad (2.1.5)$$

bu yerda k ixtiyoriy musbat son. U vaqtda quydagini hosil qilamiz:

$$P\{|\xi - M\xi| \leq k\sqrt{D\xi}\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| > k\sqrt{D\xi}\} \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad (2.1.6)$$

2.1.2-misol. $k=3$ deb olsak, u holda $1 - 1/9 = 8/9$ dan katta ehtimollik bilan ξ tasodifiy miqdorning qiymati $(M\xi - 3\sqrt{D\xi}, M\xi + 3\sqrt{D\xi})$ intervalda yotadi, ya'ni

$$\begin{aligned} P\{|\xi - M\xi| > 3\sqrt{D\xi}\} &= P\{-3\sqrt{D\xi} < \xi - M\xi < 3\sqrt{D\xi}\} = \\ &= P\{M\xi - 3\sqrt{D\xi} < \xi < M\xi + 3\sqrt{D\xi}\} \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Faraz qilaylik ξ tasodifiy miqdor a, σ^2 parametirli normal qonun bilan taqsimlangan bo'lsin. $P\{|\xi - a| \leq 3\sigma\}$ hodisa ehtimolini (2.1.5) baho bilan solishtiramiz. $\frac{\xi - a}{\sigma}$ tasodifiy miqdor 0 va 1 parametirli normal qonun bilan taqsimlangan, haqiqatan

$$M\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right) = \frac{M(\xi - a)}{\sigma} = \frac{M\xi - a}{\sigma} = \frac{a - a}{\sigma} = 0$$

$$D\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right) = \frac{D(\xi - a)}{\sigma^2} = \frac{D\xi}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

bu yerda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutulmasini $M\xi = a$ va dispersiyasini $D\xi = \sigma^2$ bilan belgilanadi, u vaqtda

$$P\{|\xi - a| < 3\sigma\} = P\left\{\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right| < 3\right\} = \Phi(3) - \Phi(-3).$$

Bizga ma'lumki ξ tasodifiy miqdor 0 va 1 parametirli normal qonun bilan taqsimlangan bo'lsa, uning taqsimot funksiyasi quydagicha bo'ladi:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz$$

ga teng bo'ladi. Integral ostidagi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

funksiya esa shu tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deyiladi.

$a = 0, \sigma = 1$ bo'lsa $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ga teng bo'ladi.

Haqiqatan ehtimol bo'yicha yaqinlashish ta'rifiga asosan $\forall \varepsilon > 0$ uchun

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ko'rsatish kerak. Chebishev tengsizligiga ko'ra

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \leq \frac{M|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^2}$$

bo'ladi, shartga asosan

$$M|\xi_n - \xi|^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Bundan esa

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

kelib chiqadi. Demak $M|\xi|^r$ bo'yicha yaqinlashish ehtimol bo'yicha yaqinlashishga nisbatan kuchliroq ekan, lekin teskarisi o'rinli emas.

$$P\{|\xi - M\xi| \leq k\sqrt{D\xi}\} = 1 - P\{|\xi - M\xi| > k\sqrt{D\xi}\} = 1 - \frac{1}{k^2} \quad (2.1.7)$$

Masalan $k=3$ deb olsak, u holda $1-1/9=8/9$ dan katta ehtimollik bilan, ξ tasodifiy miqdorning qiymati

$$(M\xi - 3\sqrt{D\xi}, M\xi + 3\sqrt{D\xi})$$

intervalda yotadi, ya'ni

$$\begin{aligned} P\{|\xi - M\xi| > 3\sqrt{D\xi}\} &= P\{-3\sqrt{D\xi} < \xi - M\xi < 3\sqrt{D\xi}\} = \\ &= P\{M\xi - 3\sqrt{D\xi} < \xi < M\xi + 3\sqrt{D\xi}\} \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Faraz qilaylik ξ tasodifiy miqdor a, σ^2 parametrlil normal qonun bilan taqsimlangan bo'lsin.

$P\{|\xi - a| \leq 3\sigma\}$ hodisa ehtimolini (2.1.4) baho bilan taqsimlangan, haqiqatan

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right) &= \frac{M(\xi - a)}{\sigma} = \frac{M\xi - a}{\sigma} = \frac{a - a}{\sigma} = 0 \\ D\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right) &= \frac{D(\xi - a)}{\sigma^2} = \frac{D\xi}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \end{aligned}$$

Bu yerda ξ tasodifiy miqdorning matematik kutulmasini $M\xi = a$ va dispersiyasini $D\xi = \sigma^2$ bilan belgiladik. U vaqtda

$$P\{|\xi - a| < 3\sigma\} = P\left\{\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right| < 3\right\} = \Phi(3) - \Phi(-3).$$

Bizga ma'lumki ξ tasodifiy miqdor 0 va 1 parametrlil normal qonun bilan taqsimlangan bo'lsa, uning taqsimot funksiyasi quydagicha bo'ladi:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

umumiy holda a, σ^2 parametrlil ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dz$$

ga teng bo'ladi. Integral ostidagi

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

funksiya esa shu tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deyiladi. $a = 0, \sigma = 1$ bo'lsa

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ga teng bo'ladi.

Shunday qilib

$$\begin{aligned} P\{|\xi - a| < 3\sigma\} &= P\left\{\left|\frac{\xi - a}{\sigma}\right| < 3\right\} = \Phi(3) - \Phi(-3) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-3} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \end{aligned}$$

biz ikkinchi integralda $x=-x$ almashtirish olsak, shuning uchun integral oldiga minus ishorasi chiqib qoladi

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_3^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

yana ikkinchi integralda, integrallash chegarasini o'zgartirib yozdik.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx - 1 = 2\Phi(3) - 1 \approx 0.997. \end{aligned}$$

Shunday qilib ξ tasodifiy miqdor (a, σ^2) parametirli normal qonun bilan taqsimlangan bo'lsa, u vaqtda 0.997 ehtimol bilan $a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma$ tengsizlik bajariladi. Bunga ehtimollar nazariyasida uch sigma qoidasi deb ataladi.

1. Agar ξ va η tasodifiy miqdor uchun $M\xi^2 < +\infty, M\eta^2 < +\infty$ chekli bo'lsa, u vaqtda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi o'rinli bo'ladi:

$$(M\xi\eta)^2 \leq M\xi^2 M\eta^2 \text{ yoki } M|\xi\eta| \leq \sqrt{M\xi^2} \sqrt{M\eta^2} \quad (2.1.8)$$

haqiqatan kvadrat uchhad manfiy emas

$$M(\xi + t\eta)^2 = M\xi^2 + 2tM\xi\eta + t^2 M\eta^2$$

shuning uchun uning diskriminanti musbat emas.

$$(2M\xi\eta)^2 - 4M\xi^2 M\eta^2 \leq 0 \Rightarrow (M\xi\eta)^2 \leq M\xi^2 M\eta^2$$

Lekin $M\xi\eta$ mavjudligi $|\xi\eta| \leq \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ tengsizlikdan kelib chiqadiki, qaysiki $M\xi^2 < +\infty, M\eta^2 < +\infty$ ekanligidan $M|\xi\eta| < +\infty$ kelib chiqadi.

2. Agar $M\xi^2 < +\infty$ va $M\eta^2 < +\infty$ bo'lsa, u vaqtda Shvars tengsizligi o'rinli:

$$\sqrt{M(\xi + \eta)^2} \leq \sqrt{M\xi^2} + \sqrt{M\eta^2} \quad (2.1.9)$$

Haqiqatdan (2.1.8) tengsizlikdan quydagiga ega bo'lamiz:

$$M(\xi + \eta)^2 = M\xi^2 + 2M\xi\eta + M\eta^2 \leq M\xi^2 + 2\sqrt{M\xi^2 M\eta^2} + M\eta^2$$

$$M(\xi + \eta)^2 \leq (\sqrt{M\xi^2} + \sqrt{M\eta^2})^2$$

Har ikkala tomondan kvadrat ildiz olsak (2.1.9) tengsizlik kelib chiqadi.

3. Faraz qilaylik $p > 1, q > 1, 1/q + 1/p = 1$ bo'lsin va ξ va η tasodifiy miqdorlar uchun $M|\xi|^p < +\infty, M|\eta|^q < +\infty$ bo'lsa u vaqtda quydagi Gelder tengsizligi o'rinli:

$$M|\xi\eta| \leq (M|\xi|^2)^{1/p} * (M|\eta|^2)^{1/q} \quad (2.1.10)$$

Gelder tengsizligining xususiy holi, ya'ni $p=q=2$ Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

Isbot. Quydagi OBA egri chiziqni qaraymiz. $y = x^{p-1}$ yoki $x = y^{q-1}$ $b < a$ bo'lsin.

$$S = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{1}{p} a^p,$$

$$T = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{1}{q} b^q$$

$$\{1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}; \frac{p-1}{q} = \frac{1}{q}; \frac{p}{p-1} - 1 = q - 1 \Rightarrow \frac{1}{p-1} = q - 1.$$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

bu tengsizlikdan

$$a = \frac{|\xi|}{(M|\xi|^p)^{1/p}}, \quad b = \frac{|\eta|}{(M|\eta|^q)^{1/q}}$$

deb olib, har ikkala tomonidan matematik kutulma olsak

$$M \frac{|\xi|}{(M|\xi|^p)^{1/p}} \frac{|\eta|}{(M|\eta|^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

bundan (2.1.10) kelib chiqadi.

Iensen tengsizligi. Agar $M|\xi| < \infty$ va $g(x)$ funksiya botiq bo'lsa, u holda

$$Mg(\xi) \geq g(M\xi) \quad (2.1.11)$$

Isbot. Agar $g(x)$ funksiya botiq bo'lsa, u holda har bir y uchun shunday $g_1(y)$ topiladiki $g(x) \geq g(y) + (x - y)g_1(y)$ bo'ladi. Agar $x = \xi$, $y = M\xi$ desak va bu tengsizlikning har ikkala tomonidan matematik kutilma olsak

$$Mg(\xi) \geq g(M\xi)$$

kelib chiqadi.

Lyapnov tengsizligi. Agar $0 < s < t$ bo'lsa u vaqtda

$$(M|\xi|^s)^{1/s} \leq (M|\xi|^t)^{1/t} \quad (2.1.12)$$

isbot qilish uchun $r=t/s$, $g(x) = |x|^r$, $r \geq 1$, $\eta = |\xi|^s$ desak Iensen tengsizligini qo'llasak quydagiga ega bo'lamiz

$$(M|\xi|^s)^{t/s} \leq M(|\xi|^s)^{t/s} = M|\xi|^t$$

Bu tengsizlikdan (2.1.12) tengsizlik kelib chiqadi. Xususiyligida agar

$$g(x) = x^2 \Rightarrow (M\xi)^2 \leq M\xi^2$$

agar

$$g(x) = |x|^r (r \geq 1) \Rightarrow |M\xi|^r \leq M|\xi|^r.$$

Kolmagorov tengsizligi. Agar o'zaro bog'liq bo'lmagan $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

tasodifiy miqdorlar chekli $D\xi_k(k = \overline{1, \infty})$ dispersiyalarga ega bo'lsa, ushbu tengsilik o'rinli bo'ladi.

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} |\sum_{s=1}^k (\xi_s - M\xi_s)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k \quad (2.1.13)$$

bu yerda $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son.

Isbot. Endi $\eta_k = \xi_k - M\xi_k, S_k = \sum_{j=1}^k \eta_j$

$$E_k = \{w: |S_j| < \varepsilon, j \leq k-1\} \cap \{w: |S_k| \geq \varepsilon\}$$

$$E_0 = \{w: |S_j| < \varepsilon, j \leq n\}$$

belgilashlarni kiritaylik, u holda $\{w: \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^n E_k$ bo'ladi. Bu tenglikdan $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$ bo'lganligidan

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\} = \sum_{k=1}^n P(E_k) \quad (2.1.13)$$

S_n ning dispersiyasini hisoblaymiz.

$$DS_n = \sum_{k=0}^n P(E_k) M(S_n^2/E_k) \geq \sum_{k=1}^n P(E_k) M(S_n^2/E_k)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} M\left(\frac{S_n^2}{E_k}\right) &= M\left\{S_k^2 + 2 \sum_{j>k} S_k \eta_j + \sum_{j>k} \eta_j^2 + 2 \sum_{j>n>k} \frac{\eta_j \eta_n}{E_k}\right\} \geq \\ &\geq M\{S_k^2 + 2 \sum_{j>k} S_k \eta_j + 2 \sum_{j>n>k} \eta_j \eta_n / E_k\} \end{aligned}$$

E_k ning ro'y berishi, $\xi_i, i = \overline{1, k}$ largagina ta'sir etadi, lekin boshqa

$\xi_i, i = \overline{(k+1), n}$ tasodifiy miqdorlarga ta'sir qilmaydi, chunki

$\xi_i, i = \overline{(k+1), n}$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq emasligicha qoladi. Shuning uchun

$$M(S_k \eta_j / E_k) = M(S_k / E_k) M(\eta_j / E_k) = 0 \text{ va } M(\eta_j \eta_k / E_k) = 0$$

bu yerda $h \neq j, j > k, j > k \geq 1$. Bundan tashqari $k \geq 1$ bo'lganda

$$M\left(\frac{S_k^2}{E_k}\right) = \frac{1}{P(E_k)} \int_{(E_k)} x^2 dF(x) \geq \frac{\varepsilon^2}{P(E_k)} \int_{(E_k)} dF(x) = \varepsilon^2$$

Shu sabablarga ko'ra

$$DS_n \geq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^n P(E_k) \quad (2.1.14)$$

va nihoyat (2.1.13) va (2.1.14) dan

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\} = \sum_{k=1}^n P(E_k) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} DS_n$$

Bu esa Kolmogorov tengsizligining isboti bo'lganligini ko'rsatadi.

2.2-§.Eksponensial baholar.

Bu paragrafda bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ketma ketligi berilgan bo'lib matematik kutilmasi nolga teng va chekli dispersiyaga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlar uchun quyi va yuqori baxolar olinadi.

Faraz qilaylik $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo'lsin va quyidagi belgilanilarni kiritamiz

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad \sigma_k^2 = MX_k^2, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$$

$$q_n(x) = P\{S_n \geq x\}$$

Umumiylikka halaqit bermasdan $\{H_n\}$ ketma-ketlikni kamayadigan deb olamiz.

2.2.1-lemma. Agar $0 \leq xH_n \leq B_n$ bo'lsa, u vaqtda

$$P\{S_n \geq x\} \leq \exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n}\left(1 - \frac{xH_n}{2B_n}\right)\right\} \quad (2.2.1)$$

Agar $xH_n \geq 2B_n$ bo'lsa, u vaqtda

$$P\{S_n \geq x\} \leq \exp\left\{-\frac{x}{4H_n}\right\} \quad (2.2.2)$$

Isbot. Faraz qilaylik $t > 0$ va $tH_n \leq 1$ u vaqtda $|MX_n^k| \leq H_n^{k-2} \sigma_k^2$ tengsizlikga ko'ra ixtiyoriy $k \geq 2$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} \text{Me}^{tX_n} &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} M X_n^k \leq 1 + \frac{t^2}{2} \sigma_n^2 \left(1 + \frac{t}{3} H_n + \frac{t^2}{2} H_n^2 + \dots \right) \leq \\ &1 + \frac{t^2}{2} \sigma_n^2 \left(1 + \frac{t}{2} H_n \right) \leq \exp \left\{ \frac{t^2}{2} \sigma_n^2 \left(1 + \frac{t}{2} H_n \right) \right\} \\ \text{Me}^{tS_n} &\leq \exp \left\{ \frac{t^2}{2} B_n \left(1 + \frac{t}{2} H_n \right) \right\}. \end{aligned}$$

Haqiqatan

$$P\{S_n \geq x\} \leq e^{-tx} \text{Me}^{tS_n} \leq \exp \left\{ -tx + \frac{t^2}{2} B_n \left(1 + \frac{t}{2} H_n \right) \right\}$$

bu yerda $xH_n \leq B_n$ bo'lganda $t = \frac{x}{B_n}$ deb olsak $xM_n \leq B_n$ bo'lganda

$t = \frac{1}{H_n}$ deb olsak (2.2.1) va (2.2.2) tengsizliklar kelib chiqadi.

2.2.2-lemma. Agar $x > 0$, $\frac{xH_n}{B_n} \rightarrow 0$ va $\frac{x^2}{B_n} \rightarrow \infty$ u vaqtda ixtiyoriy fiksirlanagan $\mu > 0$ va hamma yetarli katta n lar uchun quydagi tingsizlik o'rinli

$$P\{S_n \geq x\} \geq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2B_n} (1 + \mu) \right\} \quad (2.2.3)$$

Isbot. Ixtiyoriy $x \geq 0$ uchun $1 + x \geq e^{x(1-x)}$ bo'ladi.

Agar $0 \leq t H_n \leq 1$ bo'lsa, u vaqtda

$$\begin{aligned} \text{Me}^{tX_n} &\geq 1 + \frac{t^2}{2} \sigma_n^2 \left(1 - \frac{t}{3} H_n - \frac{t^2}{12} H_n^2 - \dots \right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{t^2}{2} \sigma_n^2 \left(1 - \frac{t}{2} H_n \right) \geq \exp \left\{ \frac{t^2}{2} \sigma_n^2 \left(1 - \frac{t}{2} H_n - \frac{t^2}{2} \sigma_n^2 \right) \right\} \geq \\ &\geq \exp \left\{ \frac{t^2}{2} \sigma_n^2 (1 - tH_n) \right\} \\ \text{Me}^{tS_n} &\geq \exp \left\{ \frac{t^2}{2} B_n (1 - tH_n) \right\}. \end{aligned}$$

Agar $t = \frac{x}{(1-\delta)B_n}$ deb olsak, bularda δ – kichik musbat son. U vaqtda $tH_n \rightarrow 0$

va ixtiyoriy fiksirlangan $\alpha > 0$ uchun quyidagi tengsizlik o'rinli.

$$\text{Me}^{tS_n} \geq \exp \left\{ \frac{B_n}{2} t^2 (1 - \alpha) \right\} \quad (2.2.4)$$

yetarlikatta nlar uchun. Keyin

$$Me^{ts_n} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} dq_n(y) = t \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} q_n(y) dy = t \sum_{k=1}^5 J_k, \quad (2.2.5)$$

bu yerda $J_1, J_2, \dots, J_5$ integrallarni $e^{ty} q_n(y)$ bo'yicha

$(-\infty, 0), (0, t(1 - \delta)B_n), (t(1 - \delta)B_n, t(1 + \delta)B_n),$

$(t(1 + \delta)B_n, 8tB_n)$ va $(8tB_n, \infty)$

intervallar bo'yicha mos ravishda integrallaymiz.

Ma'lumki $tJ_1 \leq t \int_{-\infty}^0 e^{ty} dy = 1$ teng.

Agar $yH_n \geq B_n$ bo'lasu vaqtda

$$q_n(y) \leq e^{-\frac{4}{4H_n}} \leq e^{-2ty}$$

yetarli kattalar uchun birinchi lemmaga asosan. Shu lemmaga ko'ra

$$8tB_n \leq y \leq \frac{B_n}{H_n}$$

Shu

soxaga

ko'ra

$$q_n(y) \leq e^{-\frac{y^2}{4B_n}} \leq e^{-2ty}$$

Bizga malumki $4B_n \leq \frac{y}{2t}$ ni yuqoridagi tengsizlikga qo'yib xosil qildik.

$$tJ_5 \leq t \int_{8tB_n}^{\infty} e^{-2ty} e^{ty} dy = t \int_{8tB_n}^{\infty} e^{-ty} dy = -e^{-ty} \Big|_{8tB_n}^{\infty} = \frac{1}{e^{8tB_n}} < 1$$

(2.2.5) ga asosan, bu yerdan

$$tJ_1 + tJ_5 < 2 < \frac{1}{4} Me^{ts_n} \quad (2.2.6)$$

yetarli katta n lar uchun .

J_2 va J_4 integrallarni baxolash uchun (2.2.1) tingsizlikdan foydalanamiz va

$\frac{xH_n}{B_n} \rightarrow 0$ shartga ko'ra .Quydaginihosil qilamiz

$$q_n(y) \leq \exp \left\{ -\frac{y^2}{b_n} (1 - \beta) \right\}$$

ixtiyoriy fiksirlangan $\beta > 0$ va yetarli katta n uchun.

Shunday qilib, yetarli n uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$tJ_2 + tJ_4 \leq t \int_D e^{\psi(y)} dy ,$$

bu yerda,

$$\psi(y) = ty - \frac{y^2}{2B_n} (1 - \beta),$$

va

$$D = (0, t(1 - \delta)B_n) \cup (t(1 + \delta)B_n, 8tB_n).$$

$\psi(y)$ funksiyay $= \frac{tB_n}{1-\beta}$ nuqtada $(t(1 - \delta)B_n, t(1 + \delta)B_n)$ intervalda, agar β ni yetarlicha kichik qilib olsak maksimumga erishadi.

Haqiqatan

$$\sup_{y \in D} \psi(y) = \max(\psi(t(1 - \delta)B_n), \psi(t(1 + \delta)B_n)).$$

Shunday qilib

$$\begin{aligned} \psi(t(1 \pm \delta)B_n) &= t^2(1 \pm \delta)B_n - \frac{t^2(1 \pm \delta)^2 B_n^2}{2B_n} (1 - \beta) \\ &= \frac{t^2 B_n}{2} [2(1 \pm \delta) - (1 \pm \delta)^2 (1 - \beta)] = \\ &= \frac{t^2 B_n}{2} [2(1 \pm \delta) - (1 \pm \delta)^2 + \beta(1 \pm \delta)^2] = \\ &= \frac{t^2 B_n}{2} [2(1 \pm \delta) - (1 \pm \delta)^2 + \beta(1 \pm \delta)^2] \\ &= \frac{t^2 B_n}{2} (1 - \delta^2 + \beta(1 \pm \delta)^2) \leq \frac{t^2 B_n}{2} (1 - \frac{\delta^2}{2}) \end{aligned}$$

Agar $\beta \leq \frac{\delta^2}{2(1+\delta)^2}$ olsak

Shuning uchun

$$tJ_2 + tJ_4 \leq 8t^2 B_n \exp \left\{ \frac{t^2 B_n}{2} \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right) \right\}.$$

$$t = \frac{x}{(1-\delta)B_n} \text{ deb olsak}$$

$$t^2 B_n = \frac{x^2}{(1-\delta)^2 B_n} \rightarrow \infty$$

ekanligidan yetarli katta n uchun

$$32t^2 B_n \leq \exp \left\{ \frac{t^2 B_n}{8} \delta^2 \right\}.$$

$$\text{vat} J_2 + tJ_4 \leq \frac{8}{32} \exp \left\{ \frac{t^2 B_n}{8} \delta^2 \right\} \exp \left\{ \frac{t^2 B_n}{2} \left(1 - \frac{\delta^2}{2} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \exp \left\{ \frac{t^2 B_n}{2} \left(1 - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{4} \right) \right\} \leq \frac{1}{4} M e^{tS_n} \quad (2.2.7)$$

(2.2.4) ga asosan $q_n(y)$ funksiya o'smaydi. $x = (1-\delta)tB_n$ tenglikni e'tiborga olsak, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$tJ_3 \leq 2\delta t^2 B_n \exp \{ t^2 B_n (1 + \delta) \} q_n(x)$$

(2.2.5)-(2.2.7) ga asosan $tJ_3 > \frac{1}{2} M e^{tS_n}$ bo'ladi.

(2.2.4) ni e'tiborga olsak, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned} q_n(x) &\leq \frac{1}{2t^2 B_n} \exp \left\{ -t^2 B_n (1 + \delta) + \frac{B_n t^2}{2} (1 - \alpha) \right\} = \\ &= \frac{1}{2t^2 B_n} \exp \left\{ -\frac{t^2 B_n}{2} (2 + (1 + \delta) - (1 - \alpha)) \right\} = \\ &= \frac{1}{2t^2 B_n} \exp \left\{ -\frac{t^2 B_n}{2} (1 + \alpha + 2\delta) \right\} \geq \\ &\geq \exp \left\{ -\frac{x^2}{2S_n (1 - \delta)^2} \left(1 + \alpha + 2\delta + \frac{\delta^2}{4} \right) \right\} \end{aligned}$$

yetarlikattan uchun, agar $\delta < \frac{1}{2}$ bo'lsa.

Faraz qilaylik μ – ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Musbat δ va α sonni shunday tanlaymizki

$$\frac{(1 + \alpha + 2\delta + \frac{\delta^2}{4})}{(1 - \delta)^2} < 1 + \mu$$

bo'lsin. U vaqtda yetarli katta n uchun (2.2.3) tengsizlik o'rinli bo'ladi. Lemma isbot bo'ldi.

III-BOB

3.1-§. Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlarga oid teoremlar.

Faraz qilaylik $X_1, X_2, \dots, X_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan, quydagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$|X_j| \leq L \quad (3.1.1)$$

(bu yerda L -qandaydir o'zgarmas $1 \leq j \leq n$)

$$MX_j = 0 \quad (3.1.2)$$

tasodifiy miqdorlar bo'lsin. U vaqtda

$$Y_n = \frac{X_1, X_2, \dots, X_n}{\sqrt{n}}$$

uchun quydagi tengsizliklar o'rinli

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq 2 \exp \left\{ \frac{-r^2}{2\sigma^2} \left(1 - \frac{rL}{2\sigma^2\sqrt{n}} \right) \right\}$$

agar $0 < r \leq \frac{\sigma^2}{L} \sqrt{n}$ bo'lsa

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{r\sqrt{n}}{4L} \right\}$$

agarr $\geq \frac{\sigma^2}{L} \sqrt{n}$ bo'lsa (bu yerda $\sigma^2 Y_n$ ning dispersiyasi)

bu keltirilgan natijalarni hamma $r > 0$ lar uchun

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{r^2}{4L^2} \right\} \quad (3.1.3)$$

ko'rinishida ham olish mumkin.

Xuddi yuqoridagiga o'xshash tengsizliklarni $P\{|Y_n| \geq r\}$ uchun agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ m o'lchovli tasodifiy vektorlar bo'lgan holda olish mumkin.

Kelgusida

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$$

ning normasini yevklid normasi deb olamiz.

$$|x|^2 = (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 + \dots + (x^{(n)})^2$$

(3.1.1) va (3.1.2) shartlarni qanoatlantirgan holda tasodifiy vektorlar uchun S.N.Bernshteyn tengsizligining umumlashmalarini keltirib o'tamiz. Bizga ma'lumki S.N.Bernshteyn tengsizligi Chebishev tengsizligiga asoslangan holda isbot qilinadi. Ixtiyoriy $h > 0$ uchun

$$P\{Y_n \geq r\} \leq e^{-hr} M e^{hY_n} = e^{-hr} \prod_{j=1}^n M \exp \left\{ h \frac{X_j}{\sqrt{n}} \right\}$$

o'ng tomondagi har bir ko'paytuvchini yuqoridan baholash mumkin. Shunday qilib h ni shunday tanlaymizki

$$M^{ZX_j} \leq e^{Z^2 L^2} \quad (3.1.4)$$

u vaqtda biz quydagi tengsizlikga kelamiz.

$$P\{Y_n \geq r\} \leq e^{-hr + h^2 L^2}$$

Lekin bu usul bilan tengsizlikni ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun qo'llab bo'lmaydi. Buning uchun quydagi usulni qo'llaymiz, ya'ni quydagi funksiyani kiritamiz.

Agar $q(x) \geq 0$ bo'lsa, $x \in R^M, s \in R^m$ lar uchun

$$\chi\chi(s) = \int_{R^m} (Me^{(x,Y_n)})q(x)dx \quad (3.1.5)$$

(bu yerda (s,x)- s va x vektorlarning skaliyar ko'paytmasi)
u vaqtda

$$M\chi(Y_n) = \int_{R^m} (Me^{(x,Y_n)})q(x)dx$$

agar $a > 0$

$$P\{\chi\chi(Y_n) \geq a\} \leq a^{-1} \int_{R^m} (Me^{(x,Y_n)})q(x)dx.$$

Shunday qilib Y_n ning R^m fazoga tushish ehtimolini topishning maxsus ko'rinishini hosil qilamiz: $\{s: \chi\chi(s) \geq a\}$, bu yerda $\chi(s)$ (3.1.5) ko'rinishda.

Markazi kordinatalar boshida bo'lgan radiusi r ga teng bo'lgan shar uchun

$$\chi\chi(s) = e^{\frac{\sigma^2|s|^2}{2}} = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \sigma^{-m} \int_{R^m} e^{(s,x)} e^{\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} dx$$

(σ^2 –parametr, xuddi shunday h ham bir o'lchovli holdagi kabi)

$$\begin{aligned} P\{|Y_n| \geq r\} &= P\left\{\chi\chi(Y_n) \geq e^{\sigma^2 \frac{r^2}{2}}\right\} \leq \\ &\leq e^{-\frac{\sigma^2 r^2}{2}} (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \sigma^{-m} \int_{R^m} M(e^{(x,Y_n)}) e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) tengsizlik kelgusi mulohazalar uchun asosiy tushunchalardan biri hisoblanadi. (3.1.4) tenglikdan

$$Me^{(x,Y_n)} \leq e^{x^2 L^2}$$

ayrim hisoblashlardan so'ng quydagi tengsizlikga kelamiz. ($2L^2 \sigma^2 < 1$)

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq e^{-\frac{\sigma^2 r^2}{2}} (1 - 2L^2 \sigma^2)^{-\frac{m}{2}}$$

Xususiyl holda agar $r^2 > 2mL^2$ deb o'ng tomondan σ^2 bo'yicha minimum olsak

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq \left(\frac{2e}{m}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{r^2}{4L^2}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{r^2}{4L^2}} \quad (3.1.7)$$

(3.1.7) ning o'ng tomoni $r^2 > 2L^2$ bo'lganda birdan kichik bo'ladi. Shunday qilib (3.1.7) fazoning o'lchovi katta bo'lishi bilan natija kuchsizlanadi.

3.1.1-teorema. Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan bir xil taqsimlangan tasodifiy vektorlar bo'lsin va ular quydagi shartlarni qanoatlantirsin.

$$MX_j = 0, \quad |X_j| \leq L, \quad M|X_j|^2 = L \quad (3.1.8)$$

u vaqtda (3.1.8) uchun quydagi munosabat o'rinli bo'ladi.

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq C \exp \left\{ -\frac{r^2}{8e^2 L^2} \right\} \quad (3.1.9)$$

Bu yerda

$$C = 1 + \frac{e^{5/12} L}{\pi\sqrt{2} L^2}.$$

Yordamchi munosabatlar.

Faraz qilaylik X tsadifiy miqdor uchun

$$MX = 0, \quad |X| \leq L, \quad DX = b$$

bo'lsin u vaqtda

$$\begin{aligned} Me^{zX} &= 1 + \frac{Mx^2}{2!} z^2 + \frac{Mx^3}{3!} |z|^3 + \dots + \leq \\ &\leq 1 + \frac{b}{2!} z^2 + \frac{bL}{3!} |z|^3 + \dots + = 1 + \frac{b}{L^2} (e^{L|z|} - 1L|z|) \end{aligned}$$

agar X tasodifiy miqdor bo'lsa ya'ni

$$X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(m)})$$

korremerlanmagan komponentali va

$$MX = 0, \quad |X| \leq L, \quad M(X^{(j)})^2 = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad \text{bo'lsin.}$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz

$$Q(z) = M(z, X)^2 = \sum_{j=1}^m \lambda_j (z^{(j)})^2$$

va z ni $z = |z|l_z$ ko'rinishida olsak u vaqtda

$$\begin{aligned}
Me^{(z,X)} &= Me^{|z|(l_z,X)} \leq 1 + \frac{M(l_z,X)^2}{L^2} (e^{L|z|} - 1 - L|z|) = \\
&= 1 + \frac{Q(z)}{L^2|z|^2} (e^{L|z|} - 1 - L|z|)
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Biz kelgusida $|z|$ va $Q(z)$ ning darajalaridan $(2\pi)^{-\frac{m^2}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{2}}$ zichlik funksiyada olingan integrallar bilan ish ko'ramiz.

Ulardan birinchisi

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{R^m} |z|^k e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz = \frac{\Gamma(\frac{m+2}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} 2^{k/2} \tag{3.1.11}$$

xususiyl holda $m=2$ bo'lsa

$$(2\pi)^{-1} \int_{R^2} |z|^k e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz = \frac{\Gamma(\frac{z+k}{2})}{\Gamma(1)} 2^{k/2}$$

bo'ladi. Ikkinchisi uchun biz yuqoridan baholaymiz. Buning uchun $z_1, z_2, \dots, z_n$ lar teoremani shartlarini qanoatlantirsin deb olamiz agar $l > 0$ butun musbat son bo'lsa u vaqtda

$$(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{R^m} Q^{e(z)} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz = M(\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2)^l$$

Solishtirish maqsadida

$$\begin{aligned}
M(\sqrt{\lambda_1} z_1 + \dots + \sqrt{\lambda_m} z_m)^{2l} &= M(\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2 + \\
+ 2 \sum_{1 \leq k \leq j \leq m} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\lambda_j} z_k z_j)^2 &= M(\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2)^l + \dots
\end{aligned}$$

agar λ sonlardan hech bo'lmaganda bittasi toq bo'lsa, u holda mos qo'shiluvchilar nolga teng, agar hamma λ_j lar juft bo'lsa mos qo'shiluvchilar musbat bo'ladi. Shunday qilib Z bilan teorema shartlarni qanoatlantiruvchi normal tasodifiy miqdorni olsak quydagiga ega bo'lamiz.

$$M(\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_m z_m^2)^l \leq M(\sqrt{\lambda_1} z_1 + \dots + \sqrt{\lambda_m} z_m)^{2l} = \Lambda^l M z^{2l}$$

bu yerda $\Lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$.

Isbot. Faraz qilaylik X_k vektorning j -komponentasi dispersiysini λ_j bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\Lambda = M|X_k| = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$$

$$p = p(z) = L^{-2}|z|^{-2}Q(z)$$

desak (3.1.6) va (3.1.7) dan quydagiga ega bo'lamiz.

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq e^{-\frac{\sigma^2 r^2}{2}} (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{R^m} (1 + p(e^u - 1 - u)^n e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Bu yerda

$$u = L\sigma|z|/\sqrt{n}$$

integral ostidagi $e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ ifoda oldidagi ko'paytuvchini quydagi n qavs ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin.

$$1 + p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{L^k \sigma^k}{n^{k/2}} \frac{|z|^k}{k!}$$

Haqiqatdan ham

$$(1 + p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{L^k \sigma^k}{n^{k/2}} \frac{|z|^k}{k!})^n = \dots$$

Bu yerda $|z|^s$ darajasi bo'yicha ochib chiqsak

$$K_s = \frac{L^s \sigma^s}{n^{s/2}} \sum_{j=1}^{s_n} p^j c_n^j N_{s,j}$$

bu yerda

$$s_n = \left[\min(n, \frac{s}{2}) \right] N_{s,j} - \frac{1}{k_1! \dots k_s!}$$

bo'yicha hamma tartiblangan miqdorlarning yig'indisidan iborat.

$$N_{s,j} \leq \frac{j^s}{s!} \quad (3.1.13)$$

va K_s aniqlanishiga quydagiga ega bo'lamiz.

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq e^{-\frac{\sigma^2 r^2}{2}} (1 + \sum_{s=2}^{\infty} W_s) \quad (3.1.14)$$

bu yerda

$$W_s = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{R^m} K_s |z|^s e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.1.15)$$

shuning uchun W_s ni baholashga kirishamiz qaysiki

$$K_s |z|^s \leq \frac{L^s \sigma^s}{n^{\frac{s}{2}} s!} \sum_{j=1}^{s_n} j^s c_n^j L^{-2j} |z|^{s-2j} Q^j(z)$$

U vaqtda

$$W_s \leq \frac{L^s \sigma^s}{n^{s/2} s!} \sum_{j=1}^{s_n} j^s c_n^j L^{-2j} J_{s,j}$$

$$J_{s,j} = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{R^m} K_s |z|^{s-2j} Q^j(z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

bu yerda endi $J_{s,j}$ integralni baholaymiz. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi, (3.1.11)

va (3.1.12) ga asosan

$$J_{s,j} \leq \Lambda^j 2^{s/2} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + s - 2j\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2j\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^{1/2} = V_{s,j}$$

$V_{s,j}$ formulaga σ kirgan funksiyani baholash uchun Sterling formulasidan foydalanamiz.

Agar $x > 0$

$$\Gamma(x) = x^{x-1} e^{-x} \sqrt{2\pi x} e^{\frac{-\theta}{12x}}, \quad 0 < \theta < 1$$

biz quydagi tengsizlikga kelamiz.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + s - 2j\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} &\leq (s - 2j)^{(s-2j)} \left(1 + \frac{m}{2(s - 2j)}\right)^{s-2j} \cdot \\ &\cdot \left(1 + \frac{2(s - 2j)}{m}\right)^{m/2} e^{-(s-2j)} e^{1/6} \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 2j)}{\Gamma(\frac{m}{2})} \leq (2j)^{(2j)} (1 + 4j)^{1/2} e^{-(2j)} e^{1/6}$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$H_{s,j} = (s - 2j)^{(s-2j)} 2j^{2j}$$

va quyidagi bahodan foydalanamiz

$$(1 + 4j)^{1/4} < 2\sqrt{j}$$

u holda quydagiga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{m}{2(s-2j)}\right)^{\frac{s}{2}-j} &\leq 2^{\frac{s}{2-j}-1} \left(1 + \frac{m^{\frac{s}{2}-j}}{2^{\frac{s}{2}-j}(s-2j)^{\frac{s}{2}-j}}\right) \\ \left(1 + \frac{2(s-2j)}{m}\right)^{m/4} &\leq e^{s/2-j} \end{aligned}$$

bu yerda

$$\begin{aligned} V'_{s,j} &= \Lambda^j 2^{s/2} H_{s,j}^{1/2} 2^{\frac{s}{2-j}} e^{-j} e^{1/6} \sqrt{j} e^{1/4} \\ V''_{s,j} &= \Lambda^j 2^{s/2} H_{s,j}^{1/2} \frac{m^{\frac{s}{2}-j}}{(s-2j)^{(s-2j)}} e^{1/6} \sqrt{j} e^{1/4} \\ T''_{s,j} &= \frac{j^s c_n^j L^{-2j} V'_{s,j}}{n^{s/2} s!} \end{aligned}$$

deb olsak va xuddi shunday $T''_{s,j}$ ni ham aniqlaymiz. Quyidagi tengsizliklarni etiborga olsak

$$H_{s,j} \leq s^s, \quad c_n^j \leq \frac{n^j}{j!}, \quad j \leq \left[\min\left(n, \frac{s}{j}\right) \right] = S_n$$

s! va j! Sterling formulasini qo'llasak quydagiga ega bo'lamiz

$$T'_{s,j} \leq \frac{1}{2\pi} e^{5/12} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{s/2} \left(\frac{\Lambda}{2L^2}\right)^j$$

va

$$U'_s = \sum_{j=1}^{S_n} L^s \sigma^s T'_{s,j} \leq \frac{1}{2\pi} e^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\sqrt{s}} (L\sigma e\sqrt{2})^s \left(\frac{\Lambda}{2L^2}\right)^s \quad (3.1.16)$$

va xuddi shunday $j!$ va $s!$ larga Sterling formulasini qo'llab

$$H_{s,j}^{1/2} (s - 2j)^{-\left(\frac{s}{2-j}\right)} = (2j)^j$$

ekanliginin $\geq m$ bo'lganda

$$\begin{aligned} T_{s,j}'' &\leq \frac{1}{2\pi} e^{\frac{5}{12}} \frac{j^s m^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{s}{2}} s^s} e^s \frac{2^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{s}} \left(\frac{2n\Lambda}{mL^2} \right)^j \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} e^{5/12} \frac{1}{\sqrt{s}} 2^{s/2} e^s \left(\frac{\Lambda}{2L^2} \right)^j \end{aligned}$$

va

$$U_s'' = \sum_{j=1}^{s_n} L^s \sigma^s T_{s,j}'' \leq \frac{1}{2\pi} e^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\sqrt{s}} (L\sigma e\sqrt{2})^s \frac{\Lambda}{2L^2} \quad (3.1.17)$$

(3.1.15), (3.1.16) va (3.1.17) dan

$$\sum_{s=2}^{\infty} W_s \leq \sum_{s=2}^{\infty} U_s' + \sum_{s=2}^{\infty} U_s''$$

$L\sigma e\sqrt{2} = 1/2$ deb olsak quydagiga ega bo'lamiz.

$$\sum_{s=2}^{\infty} W_s \leq \frac{e^{5/12}}{\pi\sqrt{2}L^2} \frac{\Lambda}{L^2} = c - 1$$

Endi (3.1.14) ga asosan quydagi tengsizlikga ega bo'lamiz

$$P\{|Y_n| \geq r\} \leq C e^{-\frac{r^2}{8^2 L^2}}$$

bu esa teoremani isbotlaydi.

3.2-§. Ikki o'lchovli tasaodifiy miqdorlar uchun S.N Bernshteyn tengsizliogining analogi.

Mazkur paragrfdada bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun S.N Bernshteyn tengsizligining analogi keltirilgan.

Faraz qilaylik (Ω, F, P) ehtimolli fazo bo'lsin, F_1 esa F - σ -algebraning algebra osti bo'lsin.

$$P^{F_1}: A \in F \rightarrow P^{F_1}(A) \in S(\Omega, F_1)$$

F_1 - σ -algebra ostiga nisbatdan shartli ehtimol bo'lsin, bu yerda $S(\Omega, F_1)$ tasodifiy miqdorlar fazosidan iborat. ξ va η tasodifiy miqdorlar F_1 ga nisbatdan shartli bog'liq emas deyiladi, agar ixtiyoriy λ va ν lar uchun $\{\xi < \lambda\}$ va $\{\eta < \nu\}$ hodisalar shartli bog'liq bo'lmasa, ya'ni

$$P^{F_1}\{\xi < \lambda, \eta < \nu\} = P^{F_1}\{\xi < \lambda\} \cdot P^{F_1}\{\eta < \nu\}$$

$\{\xi_n\}$ tasodifiy miqdorlar ξ ga deyarli yaqinlashadi (d.ya.) P^{F_1} o'lchov bo'yicha deyiladi $\xi_n \rightarrow \xi$ (d.ya. P^{F_1}) va shunday yoziladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

Agar $X_1, X_2, \dots, X_n$ lar n-o'lchovli shartli bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa $M^{F_1} X_i = 0$, $Var(X_i) = \sigma^2$ va t-haqiqiy musbat son va $\sigma^2 = \sum \sigma_i^2$ bo'lsa, u vaqtda $P^{F_1}[\sum X_i \geq t\sigma]$ ifoda uchun

Xchegaralangan holda, yuqori chegarani baholash mumkin.

Biz ikki o'lchovli holni qaraymiz, qaysiki tasodifiy vektorlar $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$

lar uchun

$$M^{F_1} X_i = M^{F_1} Y_i = 0$$

$$var(X_i) = var(Y_i) = \sigma_i^2, \quad M^{F_1} X_i Y_i = \rho \sigma_i^2$$

bo'lgan holda, tasodifiy vektorlar uchun quydagi teoremani isbotlash mumkin.

3.2.1-teorema. Faraz qilaylik t, a va b lar haqiqiy musbat sonlar bo'lsin va shartli bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar uchun $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$

bu yerda

$$M^{F_1} X_i = M^{F_1} Y_i = 0$$

$$var(X_i) = var(Y_i) = \sigma_i^2,$$

$$M^{F_1} X_i Y_i = \rho \sigma_i^2, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

bo'lganda $|X_i| \leq R, |Y_i| \leq R$ shartda quydagi

$$P^{F_1} \left\{ \sum_i X_i \geq t\sigma, \sum_i Y_i \geq t\sigma \right\} < \exp \left\{ \frac{-t^2(2 - |\rho|)}{2(1 + \frac{tR}{3\sigma})} \right\}$$

munosabat o'rinli.

Isbot. Quydagi $e^{aX_i + bY_i}$ ifodani qaraymiz

$$e^{aX_i + bY_i} = \left\{ 1 + aX_i + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{a^r X_i^r}{r!} \right\} \left\{ 1 + bY_i + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b^s Y_i^s}{s!} \right\}$$

bu ifodadan matematik kutulma olamiz, $M^{F_1} aX_i = M^{F_1} bY_i = 0$ ekanini etiborga olsak

$$M^{F_1} e^{aX_i + bY_i} = 1 + ab\rho\sigma_i^2 + \frac{a^2\sigma_i^2 A_i}{2} + \frac{b^2\sigma_i^2 B_i}{2} + ab\sigma_i^2 (C_i + D_i + E_i)$$

bo'ladi, bu yerda

$$A_i = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{a^{r-2} M^{F_1} X_i^2}{r! \sigma_i^2 \cdot \frac{1}{2}}, B_i = \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b^{s-2} M^{F_1} Y_i^2}{s! \sigma_i^2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$C_i = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{a^{r-1} M^{F_1} Y_i X_i^r}{r! \sigma_i^2}, \quad D_i = \sum_{s=2}^{\infty} \frac{b^{s-1} M^{F_1} X_i Y_i^s}{s! \sigma_i^2}$$

$$E_i = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} \frac{a^{r-1} b^{s-1} M^{F_1} X_i^r Y_i^s}{r! s! \sigma_i^2}$$

iborat, shunday qilib quydagini hosil qilamiz.

$$M^{F_1} e^{aX_i + bY_i} < \exp\left\{\left(\frac{a^2 \sigma_i^2}{2} + \frac{b^2 \sigma_i^2}{2}\right) M_i + ab \sigma_i^2 G_i\right\}$$

bu yerda

$$M_i = \max(A_i, B_i), \quad G_i = \rho + C_i + D_i + E_i$$

endi, agar

$$S(X) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i$$

deb olsak u vaqtda

$$M^{F_1} e^{aS(X) + bS(Y)} < \exp\left\{\left(\frac{a^2 \sigma^2}{2} + \frac{b^2 \sigma^2}{2}\right) M + ab \sigma G_i\right\}$$

bu yerda

$$M = \max M_i, \quad G = \max G_i$$

Faraz qilaylik $h = (X, Y)$ X va Y bo'yicha manfiy bo'lmagan funksiya bo'lsin va $f(x, y)$ shunday bo'lsinki $h = (X, Y) > K$ bo'lib, $X \geq C_1, Y \geq C_2$ dan iborat.

$$\begin{aligned} M^{F_1}[h(X, Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy \geq \int_{x \geq C_1} \int_{y \geq C_2} h(x, y) f(x, y) dx dy \geq \\ &\geq K \int_{x \geq C_1} \int_{y \geq C_2} f(x, y) dx dy = K P^{F_1}[X \geq C_1, Y \geq C_2] \end{aligned}$$

Endi agar $h = (X, Y) = \exp(aX + bY)$ deb olsak, u vaqtda

$$P^{F_1}[X \geq C_1, Y \geq C_2] \leq \frac{M^{F_1} \exp(aX + bY)}{\exp(aC_1 + bC_2)}$$

Xni $S(X)$, Y ni $S(Y)$ bilan almashtirsak $C_1 = C_2 = t\sigma$ deb olsak, u vaqtda

$$P^{F_1}[S(X) \geq t\sigma, S(Y) \geq t\sigma] \leq \frac{M^{F_1} \exp(aS(X) + bS(Y))}{\exp((a + \sigma)(t\sigma))} <$$

$$< \exp\left\{\left(\frac{a^2\sigma^2}{2} + \frac{b^2\sigma^2}{2}\right)M + ab\sigma^2G - (t\sigma)(a+b)\right\}$$

O'ng tomonni a va b ga nisbatdan minimallashtirsak

$$a\sigma^2M + b\sigma^2G = t\sigma, \quad b\sigma^2M + a\sigma^2G = t\sigma$$

shunday bo'lganda, ya'ni

$$M = \frac{1}{\sigma(a+b)}, \quad G = \frac{1}{\sigma(a+b)} \quad (3.2.2)$$

bo'lsa, quydagicha yozishimiz mumkin.

$$P^{F_1}[S(X) \geq t\sigma, S(Y) \geq t\sigma] < \exp\left\{-\frac{t\sigma(a+b)}{2}\right\} \quad (3.2.3)$$

Endi quydagicha olsak

$$M^{F_1}|X_i|^r \leq \frac{1}{2}\sigma_i^2 r! w^{r-2}, \quad M^{F_1}|Y_i|^s \leq \frac{1}{2}\sigma_i^2 s! w^{r-2}$$

$r, s \geq 2$, $W = \text{const}$, u vaqtda $M^{F_1}X_i = M^{F_1}|X_i|^r$ ekanligidan, biz quydagi tasdiqni takidlashimiz mumkin

$$M_i \leq (1 - aW)^{-1}$$

va i ga bog'liq bo'lmagan

$$M \leq \frac{1}{1-aW}.$$

Kiyinchalik shunday olsak

$$M^{F_1}|X_i||X_i|^r \leq |\rho|\sigma_i^2 r! W^{r-1}$$

$$M^{F_1}|X_i||Y_i|^s \leq |\rho|\sigma_i^2 s! W^{s-1}, \quad M^{F_1}|X_i||Y_i|^s \leq |\rho|\sigma_i^2 r! W^{r-1}W^{s-1}$$

bu yerda $r, s \geq 2$, $W = \text{const}$, u vaqtda

$$C_i \leq \frac{|\rho|aW}{1-aW}, \quad D_i \leq \frac{|\rho|bW}{1-bW}, \quad E_i \leq \frac{|\rho|abW^2}{(1-aW)(1-bW)}.$$

O'ng tomon i ga bog'liq emasligidan, quydagiga ega bo'lamiz.

$$G \leq |\rho| \left\{ 1 + \frac{aW}{1-aW} + \frac{bW}{1-bW} + \frac{abW^2}{(1-aW)(1-bW)} \right\} = \frac{|\rho|}{(1-aW)(1-bW)} \quad (3.2.5)$$

Endi W shunday tanlaymizki,

$$1-bW \leq |\rho| \quad (3.2.6)$$

u vaqtda (3.2.4), (3.2.5) va (3.2.6) dan

$$M = \frac{t}{\sigma(a+b)} \leq \frac{1}{1-aW} \leq \frac{|\rho|}{(1-aW)(1-bW)}.$$

Chapdan eng katta tengsizlikni olsak

$$a \geq \frac{t - \sigma b}{\sigma + tW}$$

buni (3.2.3) ga qo'ysak quydagi hosil bo'ladi

$$P^{F_1}[S(X) \geq t\sigma, S(Y) \geq t\sigma] < \exp \left\{ -\frac{t^2 \sigma^2 (1 + bW)}{2(\sigma + tW)} \right\}$$

(3.2.6) ni qo'llasak, quydagiga ega bo'lamiz

$$P^{F_1}[S(X) \geq t\sigma, S(Y) > t\sigma] < \exp \left\{ \frac{-t^2(2 - |\rho|)}{2(\sigma - tW)} \right\}$$

yoki

$$P^{F_1}[S(X) \geq t\sigma, S(Y) \geq t\sigma] < \exp \left\{ \frac{-t^2(2 - |\rho|)}{2(1 + t\frac{W}{\sigma})} \right\} \quad (3.2.7).$$

Biz $|X_i| \leq R$, $|Y_i| \leq R$ shartlarni qanoatlantirishni e'tiborga olsak, u vaqtda quydagiga ega bo'lamiz.

$$M^{F_1}|X_i|^r < \sigma_i^2 R^{r-2}, \quad M^{F_1}|Y_i|^s \leq \sigma_i^2 R^{s-2}$$

$$M^{F_1}|X_i||Y_i|^r \leq |\rho|\sigma_i^2 R^{r-1}, \quad M^{F_1}|X_i||Y_i|^s \leq |\rho|\sigma_i^2 R^{s-1}$$

$$M^{F_1}|X_i|^r|Y_i|^s \leq |\rho|\sigma_i^2 R^{s-1}R^{r-1}$$

Shunday qilib $W=3R$ kelgusida qo'llash uchun W eng kichik miqdordir. U vaqtda (3.2.7) quydagicha bo'ladi

$$P^{F_1}[S(X) \geq t\sigma, S(Y) \geq t\sigma] < \exp \left\{ \frac{-t^2(2 - |\rho|)}{2(1 + \frac{tR}{3})} \right\} \quad (3.2.8)$$

Teorema isbot bo'ldi.

Agar $|\rho| = 1$ bo'lsa biz bir o'lchovli tasodifiy hodisalar uchun (3.2.8) o'rinli bo'ladi. Agar $|\rho| = 0$ bo'lsa (3.2.8) ikkita bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar ko'paytmasi uchun o'rinli ekanligini anglatadi.

XULOSA

Tadqiqot natijalari bo'yicha xulosalar va ularning asoslanishi:

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlarning taqsimot funksiyalari o'rganilib, shu tasodifiy miqdorlar uchun tengsizliklar isbotlangan. Shu bilan birgalikda ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun ehtimollar nazariyasining asosiy tengsizliklari isbotlangan.

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun S.N.Bernshteyn tengsizligining analogi isbotlanib shu bilan birga ekspenensial baholar olingan.

Erishilgan asosiy natijalar:

Maskur magistirlilik dissertatsiyasida Chebishev, Kolmogorov, S.N.Bernshteyn tengsizliklari isbotlangan. Bu tengsizliklarning turli shartlardagi isbotlari keltirilgan.

Dissertant shaxsan erishgan natijalar:

Mazkur magistirlilik dissertatsiyasida Chebishev, Kolmogorov, S.N.Bernshteyn tengsizliklari isbotlangan. Bu tengsizliklarining analoglari baholangan.

Takliflar va tavsiyalar:

Ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar uchun olingan tengsizliklar, ehtimollar nazariyasining limitik teoremlarini isbotlash uchun bevosita asosiy manba bo'lib hisoblanadi. Olingan natijalardan shu soha bo'yicha shug'ullanuvchi talabalar foydalanishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Б.В.Гнеденко Курс теории вероятностей. Издательство <<Наука>> 1988г, 446 стр.
2. С.Х.Сирожиддинов, М.М.Маматов Эхтимоллар назврияси ва математик статистика. Тошкент “Укитувчи” 1980 йил 254 бет.
3. И. И. Гихман, А.В.Скороход, М. И. Ядренко Теория вероятностей и математическая статистика, Изд-во “Вища школа” Киев 1988г,-427 стр.
4. А.И.Ширяев Вероятность. Москва <<Наука>> 633 стр.
5. М. Лоев Теория вероятностей, Изд-во ИЛ, -Москва1962г, 719 стр.
6. В. В. Петров Суммы независимых случайных величин. — Москва:<<Наука>>1972г, -414 стр.
7. Кучкаров Я. Х. Вероятностные распределения со значениями в простратанствах измеримых функций. Ташкент Фан, 1984г, 176 стр.

8. Прохоров Ю.В. Распространение неравенств С.Н.Бернштейна на многомерный случай. Теория вероятностей и её применения. 1968г..вып.2. 266-274 стр.
9. Xaliqulov I.B., Mamdiyrov Z.X.
Ko'po'lchovlitasodifiymiqdorlaruchunba'zibirnatijalar. Respublika ilmiy amaliy konfrensiyasi materiallari. Navoi 2015-yil.
10. Xaliqulov I.B., Mamdiyrov Z.X. Eksponensialbaholar. Yosh olimlar ilmiy amaliy konfrensiyasi materiallari. Samarqand 2015-yil.