

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA TA'LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

5A 130103- “Matematik fizika” kafedrası

**Mavzu: Umumlashgan Fridriks modelining
spektral xossalari**

**MAGISTRLIK
DISSERTATSIYASI**

Ilmiy rahbar: dots. S.M.Samatov

Bajaruvchi: J.I.Asadov

M U N D A R I J A

1	Chiziqli normalangan fazolar va chiziqli chegaralangan operatorlar	10
1.1	chiziqli fazolar.	10
1.2	Ichki ko'paytmali fazolar. Hilbert fazolari	14
1.3	Hilbert fazosida chiziqli chegaralangan operatorlar	19
1.4	Hilbert fazosida teskari operatorlar	22
1.5	Hilbert fazosida qo'shma operatorlar	23
1.6	Musbat operatorlar	25
1.7	Kompakt operatorlar	28
1.8	Operatorning spektri	29
2	Ikki zarrachali Diskret Shredinger operatorining spektri	38
2.1	Ikki zarrachali sistema gamiltoniani koordinata va impul's tasvirlari	38
2.2	To'g'ri integralga yoyish.	39
2.3	$h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^1$ operatorning muhim spektri	42
2.4	$h_\mu(k)$ $k \in \mathbb{T}^1$ operatorning spektral xossalari	43
3	Umumlashgan Fridriks model $H_{\gamma\mu}(k)$ operatorning spektral xossasi	47
3.1	$H_{\gamma\mu}(k)$ Fridriks model operatori	47
3.2	$H_{\gamma\mu}(k)$ Fridriks model operatorining muhim spektri . . .	49

3.3	$H_{\gamma 0}(k), k \in \mathbb{T}^d$ operatorning spektral xossalari	49
3.4	$H_{\gamma \mu}(k), k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymatlari haqida	56

Kirish

1. Magistrlik dissertatsiyasi mavzusining asoslanishi va dolzarbligi.

Magistrlik dissertatsiyasi Umumlashgan Fridriks model operatorining spektral xossalari ya'ni muhim spektri o'rni hamda muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari sonining o'zgarishini parametrlar o'zaro ta'sir energiyalari γ, μ lar va kvaziimpuls $k \in \mathbb{T}^d$ ga bog'liqligini o'rganishdan iborat. Qattiq jismlar nazariyasi, kvant mexanikasi, zamonaviy matematik fizikaning ko'plab muhim va qiziq masalalarini o'rganishda umumlashgan Fridriks model operatori muhim ahamiyat kasb etadi. Ishda umumlashgan Fridriks model operator sifatida panjaradagi zarrachalar soni ikkitadan oshmaydigan sistemaga mos operatorlar oilasi qaradi. Bunda zarrachalar nafaqat o'zaro ta'sir potentsiali, balki paydo qilish va yo'qotish operatori orqali ta'sirlasadi. Qaralayotgan operatorning ikkinchi xos qiymatining mavjudligi asosan paydoqiluvchi va yo'qotuvchi operatorlardan bevosita bog'liqligi o'rganiladi.

2. Tadqiqot obyekti va predmeti.

($d = 1, 2$) o'lchamli panjaradagi zarrachalar soni ikkitadan oshmaydigan sistemaga mos $H_{\gamma\mu}(k)$ operatorlar oilasi. (Umumlashgan Fridriks modeli)

3. Ishning maqsad va vazifalari. Ushbu magistrlik dissertatsiyasida umumlashgan Fridriks model operator sifatida panjaradagi zarrachalar soni ikkitadan oshmaydigan sistemaga mos soni saqlanmaydigan operatorlar oilasi qaradi. Bunda qaralayotgan operator ikki zarrachali Shroedinger operatori hamda paydo qilish va yo'qotish operatori orqali aniqlanadi. Qaralayotgan operatorning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari sonining o'zgarishi ikki zarrachali $H_{\mu}(k)$ Shroedinger operatorida zarrachalar itarishuvchi yoki tortishuvchi bo'lishiga, paydo qiluvchi va yo'qotuvchi operatorlarga hamda o'zaro tasir energiyalariga va kvaziimpulsga bog'liqligi o'rganiladi.

4. Ishning ilmiy yangiligi. Magistrlik dissertatsiyasida quyidagi yangi natijalar olingan:

-zarrachalar ta'sir energiyalari $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$ va kvaziimpuls $k \in \mathbb{T}^d$ ning $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operator yagona yoki ikkita xos qiymatga ega bo'ladigan qiymatlari ajratib ko'rsatilgan;

- $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ $d = 1, 2$ operatorning ikkinchi xos qiymati mavjudligi paydo qiluvchi va yo'qotuvchi operatorlarga bog'liqligi o'rganilgan;

-xos qiymatlar $E_{\gamma\mu}^{(i)}(k)$, $i = 1, 2$ larning joylashish o'rni parametrlarga bog'liq o'rganilgan.

5. Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari. Umumlashgan Fridriks model operator sifatida panjaradagi zarrachalar soni ikkitadan oshmaydigan sistemaga mos soni saqlanmaydigan operatorlar oilasi qaradi. Bunda qaralayorgan operator ikki zarrachali Shroedinger opertori hamda paydo qilish va yo'qotish operatori orqali aniqlanadi. $H_{\mu}(k)$ Shroedinger operatorida zarrachalar itarishuvchi bo'lganda qaralayotgan operatorning muhim spektrdan o'ngda parametrning barcha qiymatlarida yagona xos qiymati borligi va muhim spektrdan chapda parametrning ma'lum qiymatlarida ikkinchi xos qiymatining borligi xuddi shuningdek mos ravishda zarrachalar tortishuvchi bo'lganda muhim spektrdan chapda parametrning barcha qiymatlarida yagona xos qiymati borligi va muhim spektrdan o'ngda parametrning ma'lum qiymatlarida ikkinchi xos qiymatning borligi o'rganiladi.

6. Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi.

Qattiq jismlar nazariyasi, kvant mexanikasi, zamonaviy matematik fizikaning ko'plab muhim va qiziq masalalarini o'rganishda panjaradagi va uzluksiz fazodagi bir nechta zarrachalar soni saqlanadigan kvazizarrachalar sistemasi uchun bog'langan holatlari haqida ko'plab masalalar va sistemada zarrachalar soni saqlanmaydigan kvazizarrachalar sistemasi uchun bog'langan

holatlari haqida [1] masalalar muhim ahamiyat kasb etadi. Kvazizarrachalarning chekli soni saqlanadigan sistema Hamiltoniani (Geyzenberg va Xabbard modeli [2, 3] misolda) panjaradagi N - zarrachali Schroedinger operatoriga keltiriladi. Chekli soni saqlanmaydigan kvazizarrachalar sistemasi esa ([4] misolda s-d modeli) panjaradagi zarrachalar soni ikki, uch va h.k. N tadan oshmaydigan sistema Hamiltonianiga keltiriladi. Shuning uchun bunday operatorlarni spektral xossalari o'rganish zamonaviy matematik fizikada muhim rol o'ynaydi.

Fridriks operatorlari $H = C \oplus L(M, d\mu)$ Gilbert fazosida (bunda $(M, d\mu)$ o'lchovli to'plam) quyidagi formula yordamida aniqlanadi.

$$\begin{aligned} (AF)_0 &= e_0 f_0 + \alpha \int_M \overline{v(q)} f_1(q) d\mu(q) \\ (AF)_1(q) &= \alpha v(q) f_0 + a(q) f_1(q) + \alpha \int_M D(q, q') f_1(q') d\mu(q') \end{aligned} \quad (0.1)$$

bunda $(f_0, f_1) \in H$, e_0 — o'zgarmas son, a va v lar M to'plamdagi funksiyalar D shu to'plamdagi ikki o'zgaruvchili funksiya va $\alpha \in R_+$ (juftlashish parametri). [5] ishda $M = [-1, 1] \in R$ $a(q) = q$ va $\alpha > 0$ kichik bo'lgan holda uzluksiz spektrda cheklita ko'p xos qiymatga egaligi va operator uning uzluksiz qism fazosida

$$(B_0 f) = \alpha(q) f(q)$$

operatorga unitar ekvivalentligi ko'rsatilgan.

Keyinchalik [6] da umumlashgan Fridriks modeli qaralgan (ya'ni $M - R$ dagi ixtiyoriy interval f funksiya H Gilbert fazosida qiymatlar qabul qiladi va D yadro H dagi chegaralangan operator bilan almashtirilgan) hamda [5] dagi natijalar umumlashtirilgan.

Bu umumlashgan nazariyani tadbiq qilish sohasini kengaytirgan.

[7] ishda $d = 1, 2$ -o'lchamli $\mathbb{Z}^d$ panjarada juft-jufti bilan kontakt ta'sirlashuvchi $\mu > 0$ potentsialli ikkita bir xil zarrachali (bozon) sistema gamiltonianiga mos ikki zarrachali diskret Shredinger operatori $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$, qaralgan.

Ushbu operatorning ixtiyoriy $\mu > 0$ va $k \in \mathbb{T}^d$ da yagona xos qiymati $z(\mu, k)$ mavjudligi isbotlanib, o'z argumentlarining analitik funksiyasi ekanligi ko'rsatilgan.

[8] ishda kontakt (bir nuqtada) ta'sirlashuvchi ikkita bir xil zarrachali sistema gamiltoniani qaralgan. Unga mos Shredinger operatori $H_\mu(k)$ zarrachalar ta'sirlashuv energiyasi $\mu > 0$ va sistema kvaziimpul'si $k \in \mathbb{T}^3$ ga bog'liq yoki yagona xos qiymatga ega yoki xos qiymatga ega emasligi isbotlangan.

Ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlarining juda keng sinfi uchun [9] ishda quyidagicha ajoyib natija olingan: agar ν — o'lchamli ($\nu \geq 3$) diskret Shredinger operatori $h(0)$ muhim spektr tubida virtual sath yoki xos qiymatga ega bo'lsa, u holda kvaziimpul's $k \in \mathbb{T}^\nu$ ning barcha nolmas qiymatlarida $h(k)$ operator xos qiymatga ega. [18] ishda xuddi shunga o'xshash model operatori qaralib qaralayotgan opertorning spektral xossalari o'rganilgan. Bundan tashqari ikkizarrachali Shroedinger operatining xos qiymati bilan model opertorining xos qiymatlari soni solishtirigan.

6. Tadqiqotda qo'llanilgan metodikaning tavsifi. Magistrlik dissertatsiyasining natijalarini olishda matematik analiz, kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi, funksional analiz fanlari metodlaridan foydalanilgan.

7. Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati. Magistrlik dissertatsiyasida olingan natijalar ilmiy xarakterga ega va bu natijalar Fridriks model operatorlarining spektral nazariyasi rivijlanishiga qo'shilgan hissa bo'ladi. Ushbu olingan natijalardan kvant mexanikasi, matematik

fizika va qattiq jismlar fizikasidagi masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

8.Ish tuzilmasining tavsifi. Magistrlik dissertatsiasi 61 sahifadan iborat bo'lib, kirish, uchta bob, adabiyotlar ro'yxati va xulosa qismidan tuzilgan.

Kirish qismida masalaning tarixi, qo'yilgan masalaning dolzarbligi va olingan natijalar yangiligi yuzasidan qisqacha aytib o'tilgan.

Birinch bobda chiziqli fazolar, chiziqli fazolarida aniqlangan o'z-o'ziga qo'shma operatorlar va ularning spektral xossalari bayon qilingan. Asosiy mavzuni bayon qilishda ishlatiladigan atamalar, asosiy tushuncha va ta'riflar hamda teoremlar ularga doir misollar keltirilgan.

Ikkinchi bobda ikki zarrachali gamiltonianiga mos diskret Shroedinger opertori qaralgan. Ushbu gamiltonian Fur'e almashtirishlari yordamida h_μ impuls tasvirga o'tkazilgan. Ikki zarrachali sistema to'la kvaziimpulsi ajratilgach, h_μ operator to'g'ri integralga yoyilgan. Natijada $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^1$ ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlar oilasi aniqlangan. $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^1$ operator muhim va diskret spektrga oid teoremlar keltirilgan.

1— paragrafda panjarada ikki kvant zarrachali sistema gamiltoniani koordinata va impul's tasvirda o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator sifatida aniqlangan.

2— paragrafda ikki zarrachali diskret Shredinger operatori $h_\mu(k)$ ning muhim spektri aniqlangan .

3— paragrafda $h_\mu(k)$ operator spektriga oud asosiy natijalar bayon qilingan.

uchinchi bobda umumlashgan Fridriks modelning o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator sifatida qaralgan. . Natijada umumlashgan Fridriks modelning operatorlar oilasining muhim va diskret spektrga oid teoremlar keltirilgan.

1— paragrafda panjarada umumlashgan Fridriks modeli o'z-o'ziga qo'shma

chegaralangan operator sifatida aniqlangan.

2— paragrafda umumlashgan Fridriks modelning muhim spektri aniqlangan .

3— paragrafda $H_{\gamma 0}(k)$ operator spektriga oud asosiy natijalar bayon qilingan.

4— paragrafda $H_{\gamma \mu}(k)$ operator spektriga oud asosiy natijalar bayon qilingan.

Bob 1

Chiziqli normalangan fazolar va chiziqli chegaralangan operatorlar

1.1 chiziqli fazolar.

Faraz qilaylik, V to'plamda elementlarni qo'shish va kompleks (haqiqiy) songa ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lsin.

Agar V to'plamda kiritilgan qo'shish amali uchun ushbu

1. Yopiqlik: $\forall x, y \in V$ uchun $x + y \in V$,
2. Kommutativlik: $\forall x, y \in V$ uchun $x + y = y + x$,
3. Assotsiativlik: $\forall x, y, z \in V$ uchun $(x + y) + z = x + (y + z)$,
4. Neytral yoki nol element mavjudligi: $\exists \Theta \in V : \forall x \in V, x + \Theta = \Theta + x = x$,
5. Qarama-qarshi element mavjudligi: $\forall x \in V$ uchun $\exists -x \in V : x + (-x) = (-x) + x = \Theta$.

va songa ko'paytirish amali uchun ushbu

1. Yopiqlik: $\forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x \in V$ uchun $\alpha x \in V$,
2. Assotsiativlik: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ va $\forall x \in V$ uchun $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

3. $1 \cdot x = x \quad \forall x \in V$,
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \text{ va } \forall x \in V$,
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \text{ va } \forall x, y \in V$.

munosabatlar bajarilsa, V to'plam **vektor fazo** yoki **chiziqli fazo** deb ataladi. Sonlar maydonining kompleks ($\mathbb{C}$) yoki haqiqiy ($\mathbb{R}$) bo'lishiga qarab, vektor fazolar mos ravishda **kompleks** yoki **haqiqiy vektor fazolar** deb yuritiladi.

Misol 1.1. $\mathbb{Z}^1$ — butun sonlar to'plami, $(\mathbb{Z}^1)^2 = \mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^1$ da quyidagi shartni qanoatlantiruvchi barcha $f : (\mathbb{Z}^1)^2 \rightarrow \mathbb{C}$ funksiyalar to'plamini qaraymiz

$$\sum_{s \in (\mathbb{Z}^1)^2} |f(s)|^2 < \infty.$$

Bu to'plam $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ kabi belgilanadi. $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ to'plamda qo'shish va songa ko'paytirish amallarini quyidagicha kiritamiz:

1. Ixtiyoriy $f, g \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ uchun

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

2. Ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C}$ va $f \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ uchun

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Nol element $\Theta(x) \equiv 0$, $f(\cdot)$ ga qarama-qarshi element $-f(\cdot)$ kabi aniqlanadi. Demak, $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ to'plam chiziqli fazo bo'ladi.

Darhaqiqat, agar $f \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ bo'lsa, yaqinlashuvchi qatorning xos-salariga ko'ra ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $\lambda f \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ bo'ladi. Ixtiyoriy $f, g \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ uchun $f + g \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ ekanligi Minkovskiy tengsizligidan kelib chiqadi. Shunday qilib, $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ fazo qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq. ▲

Misol 1.2. $\mathbb{T}^1 = (-\pi, \pi]$ bo'lsin. $\mathbb{T}^1$ da qo'shish va songa ko'paytirish amallarini haqiqiy sonlarni 2π modul bo'yicha qo'shish va songa ko'paytirish sifatida kiritamiz, masalan

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi},$$

$$14 \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Ushbu to'plam **bir o'lchamli tor** deb ataladi. $\mathbb{T}^1$ da aniqlangan, Haar ma'nosida o'lchovga ega va

$$\int_{\mathbb{T}^1} |f(q)|^2 dq < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ funksiyalar to'plamini qaraymiz, bunda integralda o'lchov Haar ma'nosida olinadi. Hosil bo'lgan to'plam $L_2(\mathbb{T}^1)$ kabi belgilanadi. Bu to'plamda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish odatdagi funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish kabi kiritiladi.

$L_2(\mathbb{T}^1)$ to'plam qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq: haqiqatan ham, agar $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ bo'lsa, integralning xossalari ko'ra ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $\lambda f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ bo'ladi. Ixtiyoriy $f, g \in L_2(\mathbb{T}^1)$ uchun $f + g \in L_2(\mathbb{T}^1)$ ekanligi esa Minkovskiyning integral tengsizligidan kelib chiqadi. Nol element $\Theta(x) \equiv 0$ kabi, $f(\cdot)$ ga qarama-qarshi element $-f(\cdot)$ kabi aniqlanadi. Demak, $L_2(\mathbb{T}^1)$ ham chiziqli fazo bo'ladi. $\blacktriangle$

$V' - V$ chiziqli fazoning bo'sh bo'lmagan qism to'plami bo'lsin.

Ta'rif 1.1. Agar V' ning o'zi V da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazo tashkil qilsa, u holda V' to'plam V ning **qism fazosi** deyiladi.

Misol 1.3. $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ fazoda $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar to'plamini qaraymiz va uni $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ kabi belgilaymiz, ya'ni

$$\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2) = \{f \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2) : f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1), x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^1\} \subset \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2).$$

Bu to'plam $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ fazoda kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi va bu fazo $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ ning **simmetrik funksiyalar qism fazosi** yoki qiaqacha **simmetrik qism fazosi** deb ataymiz.

Misol 1.4. $L_2(\mathbb{T}^1)$ fazoda $f(p) = f(-p)$, $p \in \mathbb{T}^1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar to'plamini qaraymiz va uni $L_2^e(\mathbb{T}^1)$ kabi belgilaymiz, ya'ni

$$L_2^e(\mathbb{T}^1) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^1) : f(p) = f(-p), p \in \mathbb{T}^1\} \subset L_2(\mathbb{T}^1).$$

Bu to'plam $L_2(\mathbb{T}^1)$ fazoda kiritilgan amallarga nisbatan (qar. misol 1.2) chiziqli fazo tashkil qiladi uni $L_2(\mathbb{T}^1)$ fazoning **jurt qism fazosi** deb ataymiz.

V chiziqli fazo bo'lsin. Agar $p : V \rightarrow \mathbb{R}$ akslantirish

1. $p(x) \geq 0$, $\forall x \in V$ va $p(x) = 0 \iff x = 0$,
2. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$, $\forall x \in V$ va $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in V$

munosabatlarni qanoatlantirsa, unga V fazoda aniqlangan **norma** deyiladi. Norma aniqlangan fazolar **normalangan fazolar** deyiladi. Bitta chiziqli fazo normaning aniqlanishiga ko'ra bir necha xil normalangan fazolarga aylantirilishi mumkin. Odatda norma $\|\cdot\|$ kabi belgilanadi.

Misol 1.5. $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ va $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ fazolarda norma

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{x \in (\mathbb{Z}^1)^2} |f(x)|^2}$$

tenglik bilan aniqlanadi. $\blacktriangle$

Misol 1.6. $L_2^e(\mathbb{T}^1)$ va $L_2(\mathbb{T}^1)$ fazolarda norma quyidagicha aniqlanadi:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{T}^1} |f(q)|^2 dq}. \blacktriangle$$

Faraz qilaylik, V — normalangan chiziqli fazo bo'lsin.

Ta'rif 1.2. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ ketma-ketlik uchun Cauchy sharti bajarilsa, ya'ni $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ mavjud bo'lib, $\forall n, m > n_0$ lar uchun $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda bu ketma-ketlik **fundamental ketma-ketlik** yoki **Cauchy ketma-ketligi** deb ataladi.

Yuqorida zikr etilgan Cauchy ketma-ketligi ta'rifi quyidagi ta'rifga ekvivalentdir: $\forall \varepsilon > 0$ shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ mavjud bo'lib, $\forall n > n_0$ va $\forall p \in \mathbb{N}$ uchun $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ munosabat bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik **Cauchy ketma-ketligi** deyiladi.

Ta'rif 1.3. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday $x_0 \in H$ element topilib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

munosabat bajarilsa, bu ketma-ketlik x_0 **elementga yaqinlashuvchi** (yoki qisqacha **yaqinlashuvchi**) ketma-ketlik deyiladi.

Bu ta'rifda asosan ketma-ketlik yaqinlashadigan (ketma-ketlikning limiti) element ham shu fazoga qarashli bo'lishi talab etiladi.

Osongina ko'rsatish mumkinki, istalgan yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo'ladi. Biroq, buning aksi doimo o'rinli emas.

Ta'rif 1.4. Agar V fazodagi istalgan fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u **to'la fazo** deyiladi.

Odatda to'la normalangan fazolarni **Banach fazolari** deb ataydilar.

1.2 Ichki ko'paytmali fazolar. Hilbert fazolari

V chiziqli fazo bo'lsin.

Ta'rif 1.5. Agar $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ funksional $\forall x, y, z \in V$ va $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ uchun ushbu munosabatlarni qanoatlantirsa:

$$1. (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \iff x = 0;$$

$$2. (x + y, z) = (x, z) + (y, z);$$

$$3. (\alpha x, y) = \alpha(x, y);$$

$$4. (x, y) = \overline{(y, x)},$$

u holda V fazo **ichki (skalyar) ko'paytmali fazo** deyiladi. $(\cdot, \cdot)$ funksional esa **ichki ko'paytma** yoki **skalyar ko'paytma** deyiladi.

Misol 1.7. $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ ($\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$) fazoda ichki ko'paytma quyidagicha kiritiladi:

$$(f, g) = \sum_{s \in (\mathbb{Z}^1)^2} f(s) \overline{g(s)}, \quad f, g \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2) \quad (f, g \in \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)). \blacktriangle$$

Misol 1.8. $L_2(\mathbb{T}^1)$ ($L_2^e(\mathbb{T}^1)$) fazoda ichki ko'paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$(f, g) = \int_{\mathbb{T}^1} f(p) \overline{g(p)} dp, \quad f, g \in L_2(\mathbb{T}^1) \quad (f, g \in L_2^e(\mathbb{T}^1)). \blacktriangle$$

Izoh 1.1. Agar $\mathbb{T}^1$ da Haar o'lchovidan boshqa biror sanoqli-additiv μ o'lchov kiritilgan bo'lsa, hosil bo'lgan fazo $L_2(\mathbb{T}^1, d\mu)$ kabi belgilanadi.

Ichki ko'paytma aniqlangan fazolarda x va y elementlar uchun $(x, y) = 0$ tenglik bajarilsa, ular **ortogonal elementlar** deyiladi. Agar V ichki ko'paytmali fazoda $\{x_\alpha\} \subset V$ elementlar sistemasi $(x_\alpha, x_\alpha) = 1$ va $(x_\alpha, x_\beta) = 0$, $\alpha \neq \beta$ munosabatlarni qanoatlantirsa, u holda bu sistema **ortogonal normalangan sistema** (qisqacha ONS) deyiladi.

Ichki ko'paytmali fazoda norma: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ tenglik bilan aniqlanadi.

Teorema 1.1 (Pythagoras teoremasi). Faraz qilaylik, $\{x_n\}_{n=1}^N \subset V$ ichki ko'paytmali V fazodagi ONS bo'lsin. U holda istalgan $x \in V$ uchun

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |(x, x_n)|^2 + \|x - \sum_{n=1}^N (x, x_n) x_n\|^2$$

tenglik o'rinli.

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Natija 1.1 (*Bessel tengsizligi*). Faraz qilaylik $\{x_n\}_{n=1}^N \subset V$ ONS bo'lsin. U holda istalgan $x \in V$ uchun

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |(x, x_n)|^2$$

tengsizlik o'rinli.

Natija 1.2 (*Schwartz tengsizligi*). Ichki ko'paytmali fazodagi istalgan x va y vektorlar uchun

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

tengsizlik o'rinli.

Teorema 1.2. Istalgan ichki ko'paytmali V fazo $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ norma yordamida **normalangan fazo** bo'ladi.

Ushbu teoremadan ichki ko'paytmali fazoda kiritilgan ichki ko'paytmadan foydalanib, normani aniqlash mumkin ekanligi kelib chiqadi. Normalangan fazolarda esa kiritilgan normadan foydalanib, ichki ko'paytmani aniqlash masalasi quyidagi ayniyatga asoslanadi:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= 2(x, x) + 2(y, y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Bu tenglik **parallelogramm ayniyati** deyiladi.

Teorema 1.3. Normalangan fazoda ichki ko'paytmani berilgan norma orqali kiritish uchun parallelogram ayniyatining bajarilishi zarur va yetarli; bu holda ichki ko'paytma norma orqali quyidagicha ifodalanadi:

- kompleks normalangan fazolar uchun

$$(x, y) = \frac{1}{4} \{ (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) - i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \}$$

- haqiqiy normalangan fazolar uchun

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Hilbert fazolari

Ta’rif 1.6. Ichki ko’paytma kiritilgan va uning yordamida aniqlangan normaga nisbatan to’la chiziqli normalangan fazo **Hilbert fazosi** deyiladi.

Misol 1.9. Yuqorida qaralgan (qar. misollar 1.7, 1.8) $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$, $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$, $L_2(\mathbb{T}^1)$ va $L_2^\varepsilon(\mathbb{T}^1)$ fazolar Hilbert fazolaridir.

Faraz qilaylik, H — Hilbert fazosi bo’lsin. Ushbu

$$B(x_0, r) = \{x \in H : \|x - x_0\| < r\}$$

to’plam H dagi markazi x_0 nuqtada va radiusi r ga teng bo’lgan **ochiq shar** deyiladi. Xuddi shunday

$$B[x_0, r] = \{x \in H : \|x - x_0\| \leq r\}$$

to’plam H dagi markazi x_0 nuqtada va radiusi r ga teng bo’lgan **yopiq shar** deyiladi. $x_0 \in H$ **nuqtaning atrofi** deganda markazi shu nuqtada bo’lgan ixtiyoriy ochiq sharni tushunamiz. $x_0 \in H$ **nuqtaning ε atrofi** deganda esa $B(x_0, \varepsilon)$ ochiq sharni tushunamiz.

Ta’rif 1.7. Agar $M \subset H$ to’plam biror $B(x_0, r)$ sharda saqlansa, u **chegaralangan to’plam** deyiladi.

Ta’rif 1.8. M to’plam H ning biror qism to’plami bo’lsin. Agar har bir $x \in M$ nuqta biror atrofi bilan M ga tegishli bo’lsa, bu to’plam H fazoda **ochiq to’plam** deyiladi.

Agar $x_0 \in H$ nuqtaning istalgan atrofida M ning biror elementi mavjud bo’lsa, u holda bu nuqta M ning **urinish nuqtasi** deyiladi. M to’plamning barcha urinish nuqtalari to’plami uning **yopiq’i** deb ataladi va $[M]$ kabi belgilanadi. Tushunarliki, $M \subset [M]$.

Ta'rif 1.9. Agar $M = [M]$ bo'lsa, M **yopiq to'plam** deyiladi.

Faraz qilaylik, H – Hilbert fazosi, M va N uning qism to'plamlari bo'lsin. Agar $M \subset [N]$ munosabat bajarilsa, N **to'plam M da zich** deyiladi. Misol uchun irratsional sonlar to'plami ratsional sonlar to'plamida zich. Xususan, agar $[M] = H$ bo'lsa, M to'plam H da zich deyiladi. Agar M to'plam H dagi birorta ham sharda zich bo'lmasa bu to'plam H ning **hech qayerida zich emas** deyiladi. Misol uchun butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}^1$ haqiqiy sonlar fazosi $\mathbb{R}^1$ ning hech qayerida zich emas.

Ta'rif 1.10. Agar Hilbert fazosida hamma yerda zich sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, u **separabel Hilbert fazosi** deyiladi.

Misol 1.10. $L_2^e(\mathbb{T}^1)$ separabel Hilbert fazosi bo'ladi. Bu fazoda qiymatlari to'plami chekli yoki sanoqli bo'lgan kompleks qiymatli funksiyalar to'plami zich. Haqiqatan ham haqiqiy qiymatli $g(x)$ funksiya uchun barcha $x \in \mathbb{T}^1$ larda

$$g(x) - \frac{1}{n} \leq \frac{[ng(x)]}{n} \leq g(x)$$

va demak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ng(x)]}{n} = g(x)$ munosabatlar bajariladi, bunda $[q]$ - q ning butun qismi. Endi agar istalgan $f \in L_2^e(\mathbb{T}^1)$ uchun

$$f_n(x) = \frac{[n\operatorname{Re} f(x)]}{n} + i \frac{[n\operatorname{Im} f(x)]}{n}$$

ketma-ketlikni aniqlasak, bu ketma-ketlikning qiymatlari to'plami chekli yoki sanoqli va shuningdek, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $n \rightarrow \infty$. Qiymatlari chekli yoki sanoqli bo'lgan funksiyalar odatda **sodda funksiyalar** deyiladi. Sodda funksiyalar esa sanoqlidir.

Demak, $L_2^e(\mathbb{T}^1)$ separabel Hilbert fazosi bo'ladi. **▲**

Misol 1.11. $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ separabel Hilbert fazosidir. Bu fazoda ushbu to'plamni aniqlaymiz:

$$P_n = \{\hat{f} \in \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2) : \hat{f}(s) = 0, \text{ agar } |s| > n\},$$

bunda n chekli natural son. $\mathbb{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n < \infty} P_n$ bo'lsin. Tushunarliki, $\mathbb{U}$ to'plam $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ da zich. Chunki ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ va istalgan $\hat{f} \in \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ uchun shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ mavjudki, $\forall n > n_0$ larda

$$\sum_{s \in (\mathbb{Z}^1)^2, |s| > n} |\hat{f}(s)|^2 < \varepsilon$$

munosabat bajariladi. Bundan foydalanib,

$$\hat{f}_n(s) = \begin{cases} \hat{f}(s), & \text{agar } |s| \leq n \\ 0, & \text{agar } |s| > n \end{cases} \quad (1.2)$$

funksiyalar ketma-ketligini qursak, u holda $\hat{f}_n \in \mathbb{U}$ va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \hat{f}\| = 0,$$

ya'ni $\mathbb{U}$ ning $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ da zichligi kelib chiqadi. Agar $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ deb $\mathbb{U}$ dagi ratsional qiymatli funksiyalar to'plamini belgilasak, unda $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ to'plam $\mathbb{U}$ da va demak $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ da zich. $\mathbb{U}_{\mathbb{Q}}$ to'plam sanoqli ekanligidan $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ ning separabel ekanligi kelib chiqadi. $\blacktriangle$

1.3 Hilbert fazosida chiziqli chegaralangan operatorlar

H_1 fazoning har bir elementiga H_2 fazoning yagona elementini mos qo'yuvchi akslantirish **operator** deyiladi va $A : H_1 \rightarrow H_2$ yoki $y = Ax$ kabi belgilanadi. Agar H_1 va H_2 lar chiziqli fazolar bo'lib, istalgan $x \in H_1$ va $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $A(\lambda x) = \lambda Ax$ munosabat bajarilsa, A operator **bir jinsli** deyiladi. Agar istalgan $x, y \in H_1$ uchun $A(x + y) = Ax + Ay$ munosabat bajarilsa, u holda A operator **additiv** deyiladi.

Ta'rif 1.11. *Bir jinsli additiv operator chiziqli operator deyiladi.*

Demak biror A operatorni chiziqlilikka tekshirish uchun uni additivlik va bir jinslilikka tekshirish lozim. Chiziqli operatorning ta'rifiga ekvivalent quyidagi ta'rifni ham keltirib o'tish foydadan xoli bo'lmaydi:

Ta’rif 1.12. Agar ixtiyoriy $x, y \in H_1$ va $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ lar uchun

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik bajarilsa, u holda A operator chiziqli deyiladi.

Chiziqli operator butun fazoda aniqlangan yoki uning aniqlanish sohasi butun fazoning biror qismi bo’lishi mumkin.

Lekin chiziqli operatorning aniqlanish sohasi chiziqli ko’pxillik bo’lishi talab etiladi. Operatorning aniqlanish sohasi $D(A)$ deb belgilanadi. $R(A)$ deb esa A operatorning qiymatlar to’plamini belgilaymiz:

$$R(A) = \{y \in H_2 : \exists x \in D(A), \quad Ax = y\}.$$

Osongina ko’rsatish mumkinki, chiziqli operatorning qiymatlar sohasi ham chiziqli ko’pxillikdir.

$A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operatorning asosiy xossaligidan biri H_1 fazodagi nol elementni H_2 fazodagi nol elementga o’tkazishidir. Haqiqatan additivlik xossasidan $A(0) = A(0+0) = A(0) + A(0) = 2A(0)$ ekani kelib chiqadi. Bundan $A(0) = 0$.

Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik tushunchasi odatdagi funksiyaning chegaralanganligi tushunchasidan biroz farq qiladi.

Faraz qilaylik, H_1 va H_2 Hilbert fazolari bo’lsin.

Ta’rif 1.13. Agar $A : H_1 \rightarrow H_2$ operator H_1 dagi istalgan chegaralangan to’plamni H_2 dagi chegaralangan to’plamga o’tkazsa, u chegaralangan operator deyiladi.

Demak chegaralanmagan operator biror chegaralangan to’plamni chegaralanmagan to’plamga o’kazadi. Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik ta’rifini quyidagicha ham berish mumkin:

Ta'rif 1.14. H_1 va H_2 Hilbert fazolari, $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Agar biror $M > 0$ son va istalgan $x \in H_1$ uchun

$$\|Ax\|_{H_2} \leq M\|x\|_{H_1}$$

tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi. Agar istalgan M soni uchun shunday $x_M \in H_1$ element mavjud bo'lib, $\|Ax_M\|_{H_2} > M\|x_M\|_{H_1}$ munosabat o'rinli bo'lsa, A chegaralanmagan operator deyiladi.

Agar A chegaralanmagan operator bo'lsa, uning normasini ∞ ga teng deb qabul qilamiz.

Ta'rif 1.15. H_1 va H_2 Hilbert fazolari va $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Istalgan $x \in H_1$ uchun $\|Ax\|_{H_2} \leq M\|x\|_{H_1}$ munosabat bajariluvchi $M > 0$ sonlarning aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi va u $\|A\|$ kabi belgilanadi.

Amalda operatorning normasini topishda bu ta'rifdan foydalanish ancha noqulayliklar tug'diradi.

Teorema 1.4. $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operatorning normasi uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

1. $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}$
2. $\|A\| = \sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|Ax\|_{H_2}$
3. $\|A\| = \sup_{\|x\|_{H_1} = 1} \|Ax\|_{H_2}$

Chiziqli operatorning uzliksizligi tushunchasi sonlar o'qi $\mathbb{R}^1$ da aniqlangan funksiyalarning uzluksizligi tushunchasi bilan bir xil kiritiladi.

Ta'rif 1.16 (Geyne). H_1 va H_2 normalangan fazolar va $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Agar $x_0 \in H_1$ elementga intiluvchi ixtiyoriy

$\{x_n\} \in H_1$ ketma-ketlik uchun $\{Ax_n\} \in H_2$ ketma-ketlik $Ax_0 \in H_2$ elementga intilsa, A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar A operator H_1 fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa u butun fazoda uzluksiz deyiladi.

Chiziqli operatorning bu ta'rifiga ekvivalent Cauchy ta'rifini ham keltirib o'tamiz:

Ta'rif 1.17 (Cauchy). H_1 va H_2 normalangan fazolar va $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Agar $x_0 \in H_1$ element uchun $\|x - x_0\| \rightarrow 0$ bo'lgan $x \in H_1$ lar uchun $\|Ax - Ax_0\| \rightarrow 0$ munosabat bajarilsa, A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ma'lumki, uzluksiz funksiya chegaralangan bo'ladi. Chiziqli operatorlar uchun esa uzluksizlik va chegaralanganlik tushunchalari ekvivalentdir.

Teorema 1.5. H_1 va H_2 Hilbert fazolari va $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo'lsin. Quyidagi tasdiqlar ekvivalent:

- (i) A operator 0 nuqtada uzluksiz.
- (ii) A operator butun H_1 fazoda uzluksiz.
- (iii) A operator chegaralangan.

Odatda H_1 Hilbert fazosini H_2 Hilbert fazosiga akslantiruvchi barcha chiziqli chegaralangan operatorlar to'plamini $L(H_1, H_2)$ deb belgilaymiz. Bundan buyon alohida aytilmagan bo'lsa, A operator H Hilbert fazosida aniqlangan deganda operatorning aniqlanish sohasi ham qiymatlar sohasi ham H da ekanligini, ya'ni $A \in L(H, H)$ ni tushunamiz.

1.4 Hilbert fazosida teskari operatorlar

H_1 va H_2 Hilbert fazolari bo'lsin. A operator H_1 fazoda aniqlanib, H_2 fazoda qiymatlar qabul qilsin, ya'ni $A : H_1 \rightarrow H_2$.

Ta’rif 1.18. Agar istalgan $y \in R(A)$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo’lsa, A operator teskarilanuvchan deyiladi. Agar A teskarilanuvchan bo’lsa, har bir $y \in R(A)$ ga $Ax = y$ tenglamaning yagona yechimi $x \in D(A)$ ni mos qo’yuvchi akslantirish A operatorning teskarisi deyiladi va A^{-1} kabi belgilanadi.

Teorema 1.6. Agar chiziqli operator teskarilanuvchan bo’lsa, unga teskari operator ham chiziqlidir.

Teorema 1.7. $A : H_1 \rightarrow H_2$ operator teskarilanuvchan bo’lishi uchun $Ax = 0$ tenglama yagona $x = 0$ yechimga ega bo’lishi zarur va yetarli.

Teorema 1.8 (Teskari operatorlar haqida Banach teoremasi). Faraz qilaylik, $A - H_1$ Hilbert fazosini H_2 Hilbert fazosiga o’zaro bir qiymatli akslantiruvchi chiziqli chegaralangan operator bo’lsin. U holda u teskarilanuvchan va teskari operator A^{-1} ham chegaralangan.

Ta’rif 1.19. Agar $A : H_1 \rightarrow H_2$ teskarilanuvchan operator, $R(A) = H_2$ va teskari operator A^{-1} chegaralangan bo’lsa, u holda A uzluksiz teskarilanuvchan deb ataladi.

Bundan buyon biz teskarilanuvchanlik va uzluksiz teskarilanuvchanlik tushunchalari bir xil deb hisoblaymiz.

Teorema 1.9. $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli operator bo’lsin. U holda A teskarilanuvchan bo’lishi uchun $R(A) = H_2$ va shunday $m > 0$ soni topilib ixtiyoriy $x \in H_1$ uchun $\|Ax\|_{H_2} \geq m\|x\|_{H_1}$ munosabatlarning bajarilishi yetarli va zarur.

1.5 Hilbert fazosida qo’shma operatorlar

Ta’rif 1.20. H Hilbert fazosida aniqlangan T operator uchun

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad (1.3)$$

shartni qanoatlantiruvchi T^ operator T operatorning Hilbert qo'shmasi deyiladi.*

Bundan buyon operatorning qo'shmasi deganda Hilbert qo'shmasini tushunamiz.

Lemma 1.1. *$A : H \rightarrow H$, $B : H \rightarrow H$ operatorlar berilgan bo'lsin. Agar barcha $x, y \in H$ lar uchun $(Ax, y) = (Bx, y)$ tenglik bajarilsa, u holda $A = B$ bo'ladi.*

Tasdiq 1.1. *A operatorning qo'shmasi ham chiziqlidir.*

Teorema 1.10. *Quyidagi tasdiqlar o'rinli:*

(a) $T \mapsto T^*$ operator $L(H)$ ni $L(H)$ ga qo'shma izometrik akslantiradi.

(b) $(TS)^* = S^*T^*$.

(c) $(T^*)^* = T$.

(d) T^{-1} mavjud bo'lsa, u holda $(T^*)^{-1}$ mavjud hamda $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(e) $\|TT^*\| = \|T\|^2$.

Teorema 1.11. *$T : H \rightarrow H$ operatorning qo'shmasi mavjud bo'lishi uchun uning aniqlanish sohasi $D(T)$, H da zich bo'lishi zarur va yetarli. Agar bu shart bajarilsa, T^* operator quyidagicha aniqlanadi: $y \in H$ element T^* ning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lishi uchun shunday $y^* \in H$ mavjud bo'lib istalgan $x \in D(T)$ uchun*

$$(Tx, y) = (x, y^*)$$

*tenglik bajarilishi yetarli va zarur. Bu holda $T^*y = y^*$.*

T^* operator T ning qo'shmasi deb atalishi uchun ularning aniqlanish sohalari ustma-ust tushishi lozim. Biroq umumiy holda, masalan chegaralanmagan operatorlar uchun bunday bo'lishi shart emas.

Ta'rif 1.21. Agar $D(A) = D(A^*)$ va $A = A^*$ bo'lsa, ya'ni $\forall x, y \in H$ uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

tenglik bajarilsa, A o'z-o'ziga qo'shma operator deyiladi. Agar $D(A) \subset D(A^*)$ va barcha $x \in D(A)$ lar uchun $Ax = A^*x$ munosabat bajarilsa, A simmetrik operator deyiladi.

Qo'shma operatorning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan $D(A^*) \subset D(A)$ bo'lishi mumkin emas.

O'z-o'ziga qo'shma operatorlarning xossalari. H – Hilbert fazosi bo'lsin.

Teorema 1.12. $A, B \in L(H)$ – o'z-o'ziga qo'shma operatorlar, α, β – haqiqiy sonlar bo'lsin. U holda $\alpha A + \beta B$ ham H dagi o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Teorema 1.13. Agar $A = A^*$ bo'lsa, barcha $x \in H$ lar uchun (Ax, x) haqiqiy qiymatlar qabul qiladi.

1.6 Musbat operatorlar

H Hilbert fazosi, $A \in L(H)$ bo'lsin. 1.13 teoremaga ko'ra (Ax, x) kvadratik forma haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. Bundan foydalanib, musbat operator tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif 1.22. Agar 1) $A = A^*$, 2) $\forall x \in H$ uchun $(Ax, x) \geq 0$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, A operator **nomanfiy operator** deyiladi. Agar A nomanfiy operator va barcha $0 \neq x \in H$ uchun $(Ax, x) > 0$ bo'lsa, A **musbat operator** deyiladi.

Bundan buyon qisqalik uchun qat'iy musbat operatorlarni ham nomanfiy operatorlar deb ataymiz.

Teorema 1.14. $A, B \in L(H)$ – nomanfiy operatorlar, α, β nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda $\alpha A + \beta B$ operator ham nomanfiydir.

Shuningdek musbat operatorlar uchun umumlashgan Cauchy-Bunyakovskiy tengsizligi ham o'rinli.

Lemma 1.2. A nomanfiy operator bo'lsin. U holda quyidagi umumlashgan Cauchy-Bunyakovskiy tengsizligi o'rinli:

$$|(Ax, y)| \leq \sqrt{(Ax, x)} \sqrt{(Ay, y)}.$$

Misol 1.12. $A : \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2) \rightarrow \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$, $(Af)(n) = \hat{v}(n)\hat{f}(n)$, operator musbat bo'lishi uchun $\hat{v}$ haqiqiy qiymatli va $\forall n \in (\mathbb{Z}^1)^2$ da $\hat{v}(n) \geq 0$ bo'lishi yetarli va zarur. Darhaqiqat agar biror $n_0 \in (\mathbb{Z}^1)^2$ da $\hat{v}(n_0) < 0$ bo'lsa,

$$f_{n_0}(n) = \begin{cases} 1, & \text{agar } n = n_0 \\ 0, & \text{agar } n \neq n_0 \end{cases}$$

funksiya uchun $(Af_{n_0}, f_{n_0}) = \hat{v}(n_0) < 0$ munosabat bajariladi. Bu A musbat emasligini ko'rsatadi. $\blacktriangle$

Misol 1.13. $A : L_2^e(\mathbb{T}^1) \rightarrow L_2^e(\mathbb{T}^1)$, $(Af)(x) = \varepsilon(x)f(x)$, $f \in L_2^e(\mathbb{T}^1)$, $\varepsilon(x) \in L_2^e(\mathbb{T}^1)$ operator musbat bo'lishi uchun ε funksiyaning deyarli haqiqiy qiymatli va nomanfiy bo'lishi yetarli va zarur. Haqiqatan ham agar biror $X \subset \mathbb{T}^1$ nolmas o'lchovli to'plam uchun $\varepsilon(x) < 0$ bo'lsa,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in X \\ 0, & \text{agar } x \notin X \end{cases}$$

funksiya uchun

$$(Af_1, f_1) = \int_{\mathbb{T}^1} \varepsilon(x)f_1(x)\overline{f_1(x)}dx = \int_X \varepsilon(x)dx < 0$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa A musbat emasligini ko'rsatadi. $\blacktriangle$

Istalgan nomanfiy haqiqiy sonning yagona nomanfiy kvadrat ildizi mavjud. Chiziqli operatorlar ham xuddi shunday xossaga ega. Agar biror B musbat operator uchun $B^2 = A$ tenglik bajarilsa, B operator A ning **kvadrat ildizi** deyiladi.

Teorema 1.15. *Ixtiyoriy A musbat operatorning yagona B kvadrat ildizi mavjud. Shuningdek, A bilan o'rin almashinuvchilik xossasiga ega bo'lgan ixtiyoriy C operator B bilan ham o'rin almashinuvchi bo'ladi.*

Misol 1.14. $A : L_2(\mathbb{T}^1) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^1)$, $(Af)(x) = \varepsilon(x)f(x)$, operator musbat, ya'ni ε uzluksiz funksiya haqiqiy qiymatli va nomanfiy bo'lsin. U holda

$$(Bf)(x) = \sqrt{\varepsilon(x)}f(x)$$

operator $B \geq 0$ va $B^2 = A$ tenglikni qanoatlantiradi. 1.15 teoremaga ko'ra esa B operator A ning yagona kvadrat ildizi bo'ladi. $\blacktriangle$

Misol 1.15. Agar $\hat{v}$ funksiya haqiqiy qiymatli va $\forall n \in (\mathbb{Z}^1)^2$ da $\hat{v}(n) \geq 0$ bo'lsa,

$$A : \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2) \rightarrow \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2), \quad (Af)(n) = \hat{v}(n)\hat{f}(n)$$

operatorning kvadrat ildizi

$$(B\hat{f})(n) = \sqrt{\hat{v}(n)}\hat{f}(n)$$

ko'rinishda bo'ladi. $\blacktriangle$

Operatorlarning musbatligi tushunchasi ikkita operatorni taqqoslash imkonini beradi.

Ta'rif 1.23. Agar $A, B \in L(H)$ operatorlar uchun $A - B \geq 0$ munosabat bajarilsa, $A \geq B$ deyiladi.

Teorema 1.16. *Ixtiyoriy chegaralangan A operator uchun AA^* va A^*A operatorlar musbatdir.*

1.7 Kompakt operatorlar

Faraz qilaylik, H_1, H_2 - Hilbert fazolari, $A : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli chegaralangan operator bo'lsin.

Ta'rif 1.24. Agar A operator H_1 fazodagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamni H_2 fazodagi nisbiy kompakt to'plamga o'tkazsa, u kompakt operator deyiladi.

Boshqacha aytganda, H_1 fazodagi ixtiyoriy chegaralangan to'plamning operator ta'siridagi aksi nisbiy kompakt bo'lsa, bu operator kompakt deyiladi.

Teorema 1.17. H Hilbert fazosi bo'lsin. Agar A kompakt, B chegaralangan operator bo'lsa, u holda AB va BA operatorlar kompakt bo'ladi.

Bu teorema A va B operatorlar har xil fazolarda aniqlanib, AB yoki BA mavjud bo'lgan holda ham o'rinlidir.

Natija 1.3. Cheksiz o'lchamli fazolarda har qanday chegaralangan kompakt operator chegaralangan teskariga ega bo'la olmaydi.

Teorema 1.18. A chegaralangan chiziqli operator kompakt bo'lishi uchun A^*A operatorning kompakt bo'lishi yetarli va zarur.

Natija 1.4. A chiziqli, chegaralangan operator bo'lsin. Agar A^*A kompakt bo'lsa, u holda AA^* ham kompaktdir.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijani olamiz:

Natija 1.5. Musbat kompakt operatorning kvadrat ildizi ham kompaktdir.

Teorema 1.19. A chiziqli chegaralangan operator bo'lsin. A operator kompakt bo'lishi uchun A^* operatorning kompakt bo'lishi yetarli va zarur.

1.8 Operatorning spektri

H - Hilbert fazosi, $A : H \rightarrow H$ biror chiziqli chegaralangan operator bo'lsin.

Ta'rif 1.25. *Biror $z \in \mathbb{C}$ uchun $Ax = zx$ tenglama noldan farqli $x \in H$ yechimga ega bo'lsa, z soni A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos nolmas yechim xos vektor deyiladi.*

Ta'rif 1.26. *Agar $z \in \mathbb{C}$ son uchun $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud bo'lib, H ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, z soni A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi, $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$ operator esa A operatorning z nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtalar to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.*

Ta'rif 1.27. *A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalar to'plami A operatorning spektri deyiladi va $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.*

Spektr qanday nuqtalar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin?

1. $A - zI$ operator teskarilanuvchan emas. Demak $(A - zI)x = 0$ tenglama nolmas yechimga ega. Bu holda z soni A operatorning xos qiymati, x esa xos vektor deyiladi.
2. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, lekin chegaralanmagan. Bu holda z soni A operatorning muhim spektriga tegishli deyiladi.
3. $A - zI$ operatorning teskarisi mavjud, chegaralangan, lekin $A - zI$ ning qiymatlar sohasi butun fazoga teng emas. Bu holda z soni qoldiq spektrga tegishli deyiladi.

A operatorning z xos qiymatiga mos keluvchi xos vektorlaridan hosil qilingan fazoning o'lchami z xos qiymatning karraligi deyiladi. Agar z ning karraliligi 1 ga teng bo'lsa, u oddiy xos qiymat, aks holda karrali xos

qiymat deb ataladi. A operatorning chekli karrali va yakkaalangan xos qiymatlari to'plamini diskret spektr deb ataymiz va $\sigma_{disc}(A)$ deb belgilaymiz. A operatorning muhim spektrini $\sigma_{ess}(A)$ deb, qoldiq spektrini esa $\sigma_{res}(A)$ deb belgilaymiz.

Endi H Hilbert fazosida aniqlangan A chiziqli chegaralangan operatorning spektr va regulyar nuqtalari haqidagi quyidagi teoremlarni keltiramiz.

Teorema 1.20. *Agar $A \in L(H)$ va $|z| > \|A\|$ bo'lsa, u holda z regulyar nuqta bo'ladi.*

Teorema 1.21. *Agar $A \in L(H)$ bo'lsa, u holda $\sigma(A)$ — yopiq to'plamdir.*

Umumiy holda o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning muhim spektri haqida Weylning quyidagi teoremasi o'rinli.

Teorema 1.22. *$z \in \mathbb{C}$ soni A operatorning muhim spektriga tegishli bo'lishi uchun H da shunday $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ONS topilib,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - zI)\phi_n = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema 1.23. *H - Hilbert fazosi va $A \in L(H)$. U holda $R_z(A)$ $\rho(A)$ to'plamda analitik, operator qiymatli ($L(H)$) qiymatli funksiya bo'ladi va ixtiyoriy $\lambda, \mu \in \rho(A)$ uchun $R_\lambda(A)$ va $R_\mu(A)$ operatorlar o'rin almashtirish xossasiga ega. Shuningdek*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A). \quad (1.4)$$

Teorema 1.24. *H - Hilbert fazosi va $A \in L(H)$. U holda*

$$\sigma(A^*) = \left\{ z \mid \bar{z} \in \sigma(A) \right\} \quad \text{va} \quad R_{\bar{z}}(A^*) = R_z(A).$$

O'z-o'ziga qo'shma operatorning spektri

H Hilbert fazosi, $A \in L(H)$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

M va m sonlari mos ravishda A operatorning yuqori va quyi chegarasi deyiladi.

Teorema 1.25. $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Ma'lumki operatorning $\sigma(A)$ spektri $\|A\|$ radiusli doira ichida saqlanadi. O'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun esa bu baholash yanada aniqroq.

Teorema 1.26. $\sigma(A) \subset [m, M]$. Shuningdek, $m, M \in \sigma(A)$.

Teorema 1.27. A - H Hilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin. U holda

- (a) A qoldiq spektrga ega emas;
- (b) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;
- (c) A operatorning har xil xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari ortogonal.

Kompakt operatorlarning spektri

$A \in L(H)$ o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lsin.

Teorema 1.28. Kompakt operatorning z xos qiymatiga mos keluvchi L_z xos fazosi chekli o'lchamli.

Teorema 1.29. A kompakt operator va ixtiyoriy $\delta > 0$ son berilgan bo'lsin. A operatorning absolyut qiymati δ dan katta bo'lgan xos qiymatlariga mos keluvchi chiziqli erkli xos vektorlarining soni cheklidir.

Natija 1.6. *Kompakt operatorning xos qiymatlari to'plami noldan farqli limitik nuqtaga ega emas.*

Teorema 1.30. *Agar $z \in \mathbb{C}$ soni A kompakt operatorning xos qiymati bo'lsa, $\bar{z} \in \mathbb{C}$ soni A^* ning xos qiymati bo'ladi.*

Teorema 1.31. *A va A^* kompakt operatorlarning z va $\bar{z}$ xos qiymatlariga mos keluvchi xos qism fazolarining o'lchamlari teng.*

Teorema 1.32. *A kompakt operator bo'lsin. U holda*

1. *A operatorning spektridagi noldan farqli ixtiyoriy nuqta xos qiymatdir;*
2. *0 soni operatorning spektriga tegishli.*

Teorema 1.33. *Agar A o'z-o'ziga qo'shma va $A \neq 0$ bo'lsa, u holda uning hech bo'lmaganda bitta nolmas xos qiymati bor.*

Teorema 1.34. *(Hilbert-Shmidt) H — Hilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma, kompakt operator berilgan bo'lib, $\{\lambda_n\}$ uning barcha nolmas xos qiymatlari bo'lsin. H fazoda shu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlardan iborat shunday $\{\phi_n\}$ ONS mavjudki, har bir $x \in H$ elementga yagona usulda*

$$x = \sum_k c_k \phi_k + x'$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda x' vektor $Ax' = 0$ shartni qanoatlantiradi.

Bu holda

$$Ax = \sum_k \lambda_k c_k \phi_k.$$

Agar xos qiymatlar cheksiz bo'lsa, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$

Unitar operatorlar. H_1 va H_2 Hilbert fazolari bo'lsin.

Ta'rif 1.28. *Agar $U : H_1 \rightarrow H_2$ akslantirish uchun $D(U) = H_1$, $R(U) = H_2$ va ixtiyoriy $x, y \in H_1$ lar uchun*

$$(Ux, Uy)_{H_2} = (x, y)_{H_1}$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda U **unitar operator** deyiladi.

Unitar operatorning quyidagi ekvivalent ta'rifi ham ishlatiladi.

Ta'rif 1.29. Agar $U : H_1 \rightarrow H_2$ chiziqli akslantirish uchun $D(U) = H_1$, $R(U) = H_2$ va barcha $x \in H_1$ lar uchun

$$\|Ux\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda bu operator **unitar operator** deyiladi.

Teorema 1.35. Unitar operator chiziqli, chegaralangan va normasi 1 ga teng. Shuningdek istalgan unitar operator teskarilanuvchan.

Teorema 1.36. U chiziqli operator unitar bo'lishi uchun $U^* = U^{-1}$ bo'lishi yetarli va zarur.

Shuni aytib o'tish joizki, ixtiyoriy unitar operatorning teskarisi ham unitar bo'ladi.

Misol 1.16. $U_s : L_2(\mathbb{T}^1) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^1)$, $(U_s f)(x) = e^{i(s,x)} f(x)$, $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$, $s \in \mathbb{Z}^1$ operator unitardir. Haqiqatdan ham

$$\|U_s f\|^2 = \int_{\mathbb{T}^1} |e^{i(s,x)} f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{T}^1} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2$$

va $D(U_s) = L_2(\mathbb{Z}^1)$, $R(U_s) = L_2(\mathbb{Z}^1)$ ekanidan ta'rifga binoan U_s – unitar. ▲

Misol 1.17. $\hat{U}_s : \ell_2(\mathbb{Z}^1) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^1)$, $(\hat{U}_s \hat{f})(n) = \hat{f}(n+s)$, $\hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^1)$, $s \in \mathbb{Z}^d$ operator unitardir. Haqiqatdan ham

$$\|\hat{U}_s \hat{f}\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^1} \|\hat{f}(n+s)\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^1} \|\hat{f}(n)\|^2 = \|\hat{f}\|^2$$

va $D(\hat{U}_s) = \ell_2(\mathbb{Z}^1)$, $R(\hat{U}_s) = \ell_2(\mathbb{Z}^1)$ ekanidan ta'rifga binoan $\hat{U}_s$ – unitar.

▲

Faraz qilaylik, $A : H_1 \rightarrow H_1$ va $B : H_2 \rightarrow H_2$ bo'lsin. Agar shunday $U : H_1 \rightarrow H_2$ unitar operator topilib, $A = U^{-1}BU$ tenglik bajarilsa, A va B operatorlar **unitar ekvivalent operatorlar** deyiladi.

Biz yuqorida ko'rgan U_s va $\hat{U}_s$ ((1.16) va (1.17) misollar) operatorlar unitar ekvivalent. Chunki Fourier almashtirishi $U_s = \mathcal{F}\hat{U}_s\mathcal{F}^{-1}$ munosabatni qanoatlantiradi.

Teorema 1.37. *Ixtiyoriy chegaralangan unitar ekvivalent operatorlarning spektrlari, xususan muhim spektrlari, diskret spektrlari, qoldiq spektrlari ustma-ust tushadi.*

Misol 1.18. $\hat{\mathbf{v}} : \ell_2(\mathbb{Z}^1) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, $(\hat{\mathbf{v}}\hat{f})(n) = \hat{v}(n)\hat{f}(n)$, $\hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, bunda $\hat{v}$ funksiya chegaralangan, operatorni qaraymiz. Bu operator biror operatorga unitar ekvivalent bo'ladimi? Unitar operator sifatida Fourier akslantirishini olamiz.

$$f = \mathcal{F}\hat{f} = (2\pi)^{-d/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{f}(s)e^{i(p,s)}$$

bo'lsin.

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}f)(p) &= (\mathcal{F}\hat{\mathbf{v}}\mathcal{F}^{-1}f)(p) = (\mathcal{F}\hat{\mathbf{v}}\hat{f})(p) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{v}(s)\hat{f}(s)e^{i(p,s)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{v}(s) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{T}^1} f(q)e^{-i(q,s)} dq \right\} e^{i(p,s)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{T}^1} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{v}(s)e^{i(p-q,s)} \right\} f(q) dq. \end{aligned}$$

Agar

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{v}(s)e^{i(p-q,s)}$$

yaqinlashuvchi bo'lsa, bu biror $v : L_2(\mathbb{T}^1) \rightarrow \mathbb{C}$ funksiyaning aniqlaydi, ya'ni $\hat{v}$ funksiyaning Fourier almashtirishiga bo'lamiz.

$$v(p-q) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{v}(s)e^{i(p-q,s)}$$

kabi belgilash kiritsak, $\mathbf{v}$ operator quyidagi ko'rinishga keladi:

$$(\mathbf{v}f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{T}^1} v(p-q)f(q)dq.$$

Demak $\ell_2(\mathbb{Z}^1)$ fazodagi ko'paytirish operatori $L_2(\mathbb{T}^1)$ fazodagi integral operatorga unitar ekvivalent. Yuqoridagi 1.37 teorema asosan

$$\sigma(\hat{\mathbf{v}}) = \sigma(\mathbf{v}), \quad \sigma_{\text{disc}}(\hat{\mathbf{v}}) = \sigma_{\text{disc}}(\mathbf{v}), \quad \sigma_{\text{ess}}(\hat{\mathbf{v}}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{v}), \quad \sigma_{\text{res}}(\hat{\mathbf{v}}) = \sigma_{\text{res}}(\mathbf{v}).$$

Izoh 1.2. Ushbu misolda bajarilgan ba'zi amallar $\hat{\mathbf{v}}$ operatorning ma'lum bir shartlarni qanoatlantirishiga asoslangan. Kelgusida bunga batafsil to'xtalib o'tishimiz munosabati bilan hozir ushbu shartlarni keltirib o'tirmadik. $\blacktriangle$

Misol 1.19. $L_2^\varepsilon(\mathbb{T}^1) \subset L_2(\mathbb{T}^1)$ fazoda $\{\tilde{H}_2(k), k \in \mathbb{T}^1\}$ operatorlar oilasini qaraymiz:

$$\tilde{H}_2(k)f(q) = \left[\varepsilon\left(\frac{k}{2} - q\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + q\right) \right] f(q) - \int_{\mathbb{T}^1} v(q-p)f(p)dp,$$

bu yerda $v(\cdot)$ – juft funksiya. Shuningdek $L_{2,L}^\varepsilon(\mathbb{T}^1) \subset L_2(\mathbb{T}^1)$ fazoda $\{H_2(k), k \in \mathbb{T}^1\}$ operatorlar oilasini qaraymiz:

$$H_2(k)f(q) = [\varepsilon(q) + \varepsilon(k-q)]f(q) - \int_{\mathbb{T}^1} v(q-p)f(p)dp.$$

Osongina tekshirib ko'rish mumkinki, ushbu $L_2^\varepsilon(\mathbb{T}^1)$ va $L_{2,L}^\varepsilon(\mathbb{T}^1)$ fazolar har bir $k \in \mathbb{T}^1$ uchun mos ravishda $\tilde{H}_2(k)$ va $H_2(k)$ operatorlarga nisbatan invariant. Bu ikkala operatorning unitar ekvivalentligini ko'rsatamiz. Buning uchun quyidagi unitar operatorni qaraymiz:

$$(U_k f)(q) : L_{2,L}^\varepsilon(\mathbb{T}^1) \rightarrow L_2^\varepsilon(\mathbb{T}^1), \quad (U_k f)(q) = f\left(\frac{k}{2} - q\right).$$

Biz $U_k \tilde{H}_2(k) = H_2(k)U_k$ bo'lishini isbot qilamiz. Haqiqatan ham $f \in L_{2,L}^\varepsilon(\mathbb{T}^1)$ hamda $v(q)$ ning juftligidan

$$(U_k \tilde{H}_2(k)f)(q) = (\tilde{H}_2(k)f)\left(\frac{k}{2} - q\right) =$$

$$\begin{aligned}
& [\varepsilon(q) + \varepsilon(k - q)]f\left(\frac{k}{2} - q\right) - \int_{\mathbb{T}^1} v\left(\frac{k}{2} - q - p\right) f(p) dp = \\
& = [\varepsilon(q) + \varepsilon(k - q)]f(q) - \int_{\mathbb{T}^1} v\left(\frac{k}{2} - q - \left(\frac{k}{2} - p\right)\right) f\left(\frac{k}{2} - p\right) dp = \\
& = [\varepsilon(q) + \varepsilon(k - q)]f\left(\frac{k}{2} - q\right) - \int_{\mathbb{T}^1} v(q - p)f\left(\frac{k}{2} - p\right) dp.
\end{aligned}$$

Xuddi shunday, $U_k f$ element hamda operatorlar superpozitsiyasining aniqlanishidan

$$(H_2(k)U_k f)(q) = [\varepsilon(q) + \varepsilon(k - q)]f\left(\frac{k}{2} - q\right) - \int_{\mathbb{T}^1} v(q - p)f\left(\frac{k}{2} - p\right) dp$$

tenglikka ega bo'lamiz. ▲

Izoh 1.3. *Ushbu, $D(U_k) = L_2^e(\mathbb{T}^1)$, $(U_k^{-1}f)(q) = f\left(\frac{k}{2} - q\right)$ munosabatlari o'rinli.*

Misol 1.20. $\hat{h} : \ell_2(\mathbb{Z}^1) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^1)$, $(\hat{h}\hat{f})(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{\varepsilon}(s)\hat{f}(x - s)$, $\hat{f} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$, bunda $\sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{\varepsilon}(s)$ qator absolyut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi. Bu operatorga ham $L_2(\mathbb{T}^1)$ fazodagi unitar ekvivalent bo'lgan h operatorni hosil qilamiz.

$$\begin{aligned}
(hf)(p) &= (\mathcal{F}\hat{h}\mathcal{F}^{-1}f)(p) = (\mathcal{F}\hat{h}\hat{f})(p) = (2\pi)^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^1} (\hat{h}\hat{f})(n)e^{i(n,p)} = \\
&= (2\pi)^{-d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^1} \left\{ \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{\varepsilon}(s)\hat{f}(n - s) \right\} e^{i(n,p)} = \\
&= (2\pi)^{-d/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{\varepsilon}(s) \left\{ (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^1} \hat{f}(n - s)e^{i(n-s,p)} \right\} e^{i(s,p)}.
\end{aligned}$$

Quyidagi

$$\varepsilon(p) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{\varepsilon}(s)e^{i(s,p)},$$

$$f(p) = (2\pi)^{-d/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^1} \hat{f}(n) e^{i(n,p)}$$

belgilashlarni kiritsak, u holda

$$(hf)(p) = \varepsilon(p)f(p)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu operatorning spektri $\varepsilon(p)$ funksiyaning qiymatlari sohasining yopig'i M ga tengligi uchun unitar ekvivalentlik haqidagi teoremaga asosan $\sigma(\hat{h}) = M$. ▲

Bob 2

Ikki zarrachali Diskret Shredinger operatorining spektri

2.1 Ikki zarrachali sistema gamiltoniani koordinata va impul's tasvirlari

$\mathbb{Z}^1$ — butun sonlar to'plami (bir o'lchamli butun sonli panjara), $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ — $(\mathbb{Z}^1)^2 = \mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^1$ da aniqlangan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi, $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2) \subset \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ — simmetrik funksiyalar qism fazosi bo'lsin.

Koordinata tasvirida ikki bozonli sistemaga mos Hamiltonian $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\hat{h}_\mu = \hat{h}_0 - \hat{v}_\mu,$$

$$(\hat{h}_0 \hat{\varphi})(x_1, x_2) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^1} \hat{\varepsilon}(s) \left[\hat{\varphi}(x_1 + s, x_2) + \hat{\varphi}(x_1, x_2 + s) \right], \quad \hat{\varphi} \in \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2),$$

$$(\hat{v}_\mu \hat{\varphi})(x_1, x_2) = \hat{v}_\mu(x_1 - x_2) \hat{\varphi}(x_1, x_2), \quad \hat{\varphi} \in \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2).$$

$\hat{\varepsilon}(s)$ va $\hat{v}_{\mu\lambda}(s)$ funksiyalar $\mathbb{Z}^1$ da quyidagicha aniqlangan:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} 1, & \text{agar } s = 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{agar } |s| = 1 \\ 0, & \text{agar } |s| > 1, \end{cases} \quad \text{va} \quad \hat{v}_{\mu\lambda}(s) = \begin{cases} \mu, & \text{agar } s = 0 \\ 0, & \text{agar } |s| \geq 1, \end{cases}$$

bunda $\mu \in \mathbb{R}$.

Ta'kidlab o'tamizki, ikki zarrachali Hamiltonian $\hat{h}_\mu, \ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2)$ Hilbert fazosida chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

$\mathbb{T}^1 = (-\pi; \pi]$ — bir o'lchamli tor, $L_2((\mathbb{T}^1)^2)$ — $(\mathbb{T}^1)^2 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi, $L_2^s((\mathbb{T}^1)^2) \subset L_2((\mathbb{T}^1)^2)$ — simmetrik funksiyalar qism fazosi bo'lsin.

$\mathcal{F}_2 : L_2((\mathbb{T}^1)^2) \rightarrow \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ — standart Fourier akslantirishi bo'lsin. $\mathcal{F}_2^s$ orqali $\mathcal{F}_2$ ning $L_2^s((\mathbb{T}^1)^2)$ qism fazodagi qismini belgilaymiz.

Impuls tasvirda ikki zarrachali Hamiltonian $L_2^s((\mathbb{T}^1)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operatorni aniqlaydi.

$$h_\mu = (\mathcal{F}_2^s)^{-1} \hat{h}_\mu \mathcal{F}_2^s = h_0 - v_\mu,$$

bunda

$$(h_0 f)(k_\beta, k_\gamma) = (\varepsilon(k_\beta) + \varepsilon(k_\gamma)) f(k_\beta, k_\gamma), \quad f \in L_2^s((\mathbb{T}^1)^2)$$

$$(vf)(k_\beta, k_\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathbb{T}^1)^2} \cos(k_\beta - t_\beta) \delta(k_\beta + k_\gamma - t_\beta - t_\gamma) f(t_\beta, t_\gamma) dt_\beta dt_\gamma,$$

$$f \in L_2^s((\mathbb{T}^1)^2), \quad \beta, \gamma = 1, 2 \quad \beta \neq \gamma.$$

Bu yerda $\varepsilon(p)$ funksiya $\varepsilon(p) = (1 - \cos p)$, $p \in \mathbb{T}^1$ ko'rinishga ega va $\delta(k)$ — Dirakning delta funksiyasi.

2.2 To'g'ri integralga yoyish.

$\hat{U}_s^2, s \in \mathbb{Z}^1$ orqali $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan aniqlangan unitar operatorni belgilaymiz

$$(\hat{U}_s^2 f)(n_1, n_2) = f(n_1 + s, n_2 + s), \quad f \in \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2).$$

Osongina ko'rsatish mumkinki,

$$\hat{U}_{s+p}^2 = \hat{U}_s^2 \hat{U}_p^2, \quad s, p \in \mathbb{Z}^1$$

tenglik o'rinli va bundan $\hat{U}_s^2, s \in \mathbb{Z}^1 - \ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ fazoda $\mathbb{Z}^1$ abel gruppasi-
ing unitar akslantirishi bo'ladi. $\ell_2^s((\mathbb{Z}^1)^2) - \hat{U}_s^2, s \in \mathbb{Z}^2$ gruppaga nisbatan
invariant qism fazo bo'ladi.

$\mathcal{F}_2$ Fourier akslantirishidan so'ng $\ell_2((\mathbb{Z}^1)^2)$ fazodagi $\mathbb{Z}^1$ abel gruppasi-
ing unitar akslantirishi, $L_2((\mathbb{T}^1)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan
aniqlangan $U_s^2 = \mathcal{F}_2^{-1} \hat{U}_s^2 \mathcal{F}_2, s \in \mathbb{Z}^1$ unitar operatorga o'tadi:

$$(U_s^2 f)(k_1, k_2) = \exp(-i(s, k_1 + k_2)) f(k_1, k_2), \quad f \in L_2((\mathbb{T}^1)^2). \quad (2.1)$$

Har bir $k \in \mathbb{T}^1$ uchun $\mathbb{F}_k^2$ orqali quyidagi to'plamni belgilaymiz

$$\mathbb{F}_k^2 = \{(k_1, k - k_1) \in (\mathbb{T}^1)^2 : k_1 \in \mathbb{T}^1, k - k_1 \in \mathbb{T}^1\}.$$

$L_2((\mathbb{T}^1)^2)$ fazo

$$L_2((\mathbb{T}^1)^2) = \int_{k \in \mathbb{T}^1} \oplus L_2(\mathbb{F}_k^2) dk$$

to'g'ri integralga yoyiladi.

Mos holda, $U_s, s \in \mathbb{Z}^1$ unitar akslantirish quyidagi to'g'ri integralga
yoyiladi

$$U_s^2 = \int_{k \in \mathbb{T}^1} \oplus U_s(k) dk,$$

bunda $U_s(k), L_2(\mathbb{F}_k^2)$ fazoda quyidagi tenglik bilan aniqlanadi

$$U_s(k) = \exp(-i(s, k)) I$$

va $I = I_{L_2(\mathbb{F}_k^2)} - L_2(\mathbb{F}_k^2)$ fazodagi birlik operator.

$h_{\mu\lambda}$ Hamiltonian (2.1) tenglik bilan aniqlangan $U_s^2, s \in \mathbb{Z}^1$ gruppaga
bilan o'rin almashinadi.

Shuning uchun

$$L_2^s((\mathbb{T}^1)^2) = \int_{k \in \mathbb{T}^1} \oplus L_2^s(\mathbb{F}_k^2) dk,$$

yoyilmaga mos $h_{\mu\lambda}$ operator to'gri integralga yoyiladi

$$h_{\mu} = \int_{k \in \mathbb{T}^1} \oplus \tilde{h}_{\mu}(k) dk,$$

bunda $L_2^s(\mathbb{F}_k^2) - L_2(\mathbb{F}_k^2)$ fazoning simmetrik (o'zgaruvchilari o'rnini almashtirishga nisbatan) funksiyalardan tuzilgan qism fazosi.

Quyidagi akslantirishni kiritamiz

$$\pi_{\alpha}^{(2)} : (\mathbb{T}^1)^2 \rightarrow \mathbb{T}^1, \quad \pi_{\alpha}^{(2)}((k_{\beta}, k_{\gamma})) = k_{\beta}.$$

$\pi_k^{(2)}$, $k \in \mathbb{T}^1$ orqali $\pi_{\alpha}^{(2)}$ ning $\mathbb{F}_k^2 \subset (\mathbb{T}^1)^2$ dagi qismini belgilaymiz, ya'ni

$$\pi_k^{(2)} = \pi_{\alpha}^{(2)}|_{\mathbb{F}_k^2}. \quad (2.2)$$

Ta'kidlab o'tish joizki, $\mathbb{F}_k^2$, $k \in \mathbb{T}^1$ bir o'lchamli ko'pxillik $\mathbb{T}^1$ ga izomorfdir.

Lemma 2.1. *Teskarisi*

$$(\pi_k^{(2)})^{-1}(k_{\beta}) = (\frac{1}{2}k - k_{\beta}, \frac{1}{2}k + k_{\beta})$$

tenglik bilan aniqlanadigan $\pi_k^{(2)}$, $k \in \mathbb{T}^1$ akslantirish $\mathbb{F}_k^2 \subset (\mathbb{T}^1)^2$ ni $\mathbb{T}^1$ ga biyektiv akslantiradi.

Ushbu akslantirishni qaraymiz

$$u_k : L_2^s(\mathbb{F}_k^2) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^1), \quad u_k g = g \circ (\pi_k^{(2)})^{-1}, \quad k \in \mathbb{T}^1,$$

bunda $\pi_k^{(2)}$ (2.2) formula bilan aniqlangan. Ta'kidlab o'tamizki, u_k unitar operator bo'ladi.

$$h_{\mu}(k) = u_k \tilde{h}_{\mu}(k) (u_k)^{-1}$$

bo'lsin.

$L_2^e(\mathbb{T}^1) \subset L_2(\mathbb{T}^1)$ orqali juft funksiyalar qism fazosini belgilaymiz. $h_{\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^1$ operator $L_2^e(\mathbb{T}^1)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$h_{\mu}(k) = h_0(k) - v_{\mu},$$

bunda $h_0(k) - \varepsilon_k(\cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$(h_0(k)f)(p) = \varepsilon_k(p)f(p), \quad \varepsilon_k(p) = 2(1 - \cos \frac{k}{2} \cos p), \quad f \in L_2^e(\mathbb{T}^1),$$

va v_μ — integral operator va uning rangi birdan oshmaydi:

$$(v_\mu f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} (\mu f(t)) dt, \quad f \in L_2^e(\mathbb{T}^1).$$

2.3 $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^1$ operatorning muhim spektri

v_μ — rangi birdan oshmaydigan integral operator bo'lganligi uchun muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra, $h_\mu(k)$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$, $\mu \in \mathbb{R}$ ga bog'liqsiz va $h_0(k)$ operatorning spektri $\sigma(h_0(k))$ bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, quyidagi tengliklar o'rinli

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

bunda

$$m(k) = \min_{p \in \mathbb{T}^1} \varepsilon_k(p) = 2(1 - \cos \frac{k}{2}) \geq 0,$$

$$M(k) = \max_{p \in \mathbb{T}^1} \varepsilon_k(p) = 2(1 + \cos \frac{k}{2}) \leq 4.$$

Ta'kidlab o'tamizki, ixtiyoriy $\mu, \geq 0$ da $v_\mu \in L_e^2(\mathbb{T}^1)$ fazoda nomanfiy operator bo'ladi. $z \in \mathbb{C} \setminus [m(k), M(k)]$ larda aniqlangan funksiya ($h_\mu(k)$ operatorga mos fredholm determinanti) quyidagi formula yordamida aniqlangan

$$\Delta(\mu, k; z) = 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} \frac{dp}{\varepsilon_k(p) - z} = 1 - a(k, z)$$

O'z-o'ziga qo'shma $h_\mu(k)$ operatorning xos qiymatlari va $\Delta(\mu, k; z)$ funksiyaning nollari orasidagi bog'liqlikni quyidagi lemma o'rnatadi :

Lemma 2.2. *Ixtiyoriy $\mu \in \mathbb{R}$ va $k \in \mathbb{T}^1$ lar uchun $z \in \mathbb{C} \setminus [m(k), M(k)]$ soni $h_\mu(k)$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun $\Delta(\mu, k; z) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.*

2.4 $h_\mu(k)$ $k \in \mathbb{T}^1$ operatorning spektral xossalari

Shuni takidlash joizki $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^1$ operatorning muhim spektri $\mu \in \mathbb{R}_0$ ga bog'liqsiz $[m(k), M(k)]$ kesmadan iborat va bu operatorning $\mu \geq 0$ bo'lganda $[m(k), M(k)]$ kesmadan o'ng tomonda xos qiymatga ega emas hamda mos ravishda $\mu \leq 0$ bo'lganda $[m(k), M(k)]$ kesmadan chap tomonda xos qiymatga ega emas.

Bundan, ushbu paragrafning natijasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz:

Teorema 2.1. *a). Ixtiyoriy $\mu > 0$ va $k \in \mathbb{T}^1$ lar uchun $h_\mu(k)$ operator yagona $\zeta_1(\mu; k) < m(k)$ xos qiymatga ega bo'ladi va bu xos qiymatga mos xos funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi*

$$f_1(p) = \frac{\mu C}{\varepsilon_k(p) - \zeta_1} \in L_e^2(\mathbb{T}^1), \quad C = \text{const} \neq 0. \quad (2.3)$$

b). Ixtiyoriy $\mu < 0$ va $k \in \mathbb{T}^1$ lar uchun $h_\mu(k)$ operator yagona $M(k) < \zeta_1(\mu; k)$ xos qiymatga ega bo'ladi va bu xos qiymatga mos xos funksiya quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$f_1(p) = \frac{\mu C}{\varepsilon_k(p) - \zeta_1} \in L_e^2(\mathbb{T}^1), \quad C = \text{const} \neq 0. \quad (2.4)$$

Teorema 2.1 ni isbotlash uchun quyidagi tasdiqlardan foydalanamiz.

Tasdiq 2.1. *a). Ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^1$ uchun $a(k; \cdot)$ funksiya $\mathbb{C} \setminus [m(k), M(k)]$ sohada analitik, $(-\infty, m(k))$ intervalda musbat va monoton o'suvchi va mos ravishda ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^1$ uchun $a(k; \cdot)$ funksiya $\mathbb{C} \setminus [m(k), M(k)]$ sohada analitik, $(M(k), +\infty)$ intervalda manfiy va monoton kamayuvchi*

b). Ixtiyoriy $k \in (-\pi, \pi)$ uchun quyidagi tengliklar (asimptotik yoyilmalar) o'rinli

$$a(k; z) = \frac{(m(k) - z)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\cos \frac{k}{2}}} + \frac{(m(k) - z)^{\frac{1}{2}}}{16 \cos \frac{k}{2} \sqrt{\cos \frac{k}{2}}} + O(m(k) - z)^{\frac{3}{2}}, \quad z \rightarrow m(k)-,$$

$$a(k; z) = \frac{(z - M(k))^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\cos \frac{k}{2}}} + \frac{(z - M(k))^{\frac{1}{2}}}{16 \cos \frac{k}{2} \sqrt{\cos \frac{k}{2}}} + O(z - M(k))^{\frac{3}{2}}, \quad z \rightarrow M(k)-,$$

Isbot. a). $a(k; z)$ funksiyaning musbatligi (mos ravishda manfiyligi) integral belgisi ostidagi funksiylarning nomanfiyligi va Lebeg integralining monotonlik xossasidan osongina kelib chiqadi.

$a(k; \cdot)$, funksiyaning $(-\infty, m(k))$ intervalda hosilasi ham musbat (mosravishda $a(k; \cdot)$, funksiyaning $(M(k), +\infty)$ intervalda hosilasi ham manfiy) va shuning uchun bu funksiya monoton o'suvchi (mos ravishda monoton kamayuvchi) bo'ladi.

b). $a(k, z)$ integralni hisoblab, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$a(k; z) = \frac{(m(k) - z)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\cos \frac{k}{2}}} f(k; z),$$

bunda

$$f(k; z) = \frac{1}{g(k; z)}, \quad .$$

So'ngra, $f(k; z)$ funksiyaning $z = m(k)$ (mos ravishda $z = M(k)$) nuqtaning biror atrofida Teylor yoyib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(k; z) = 1 + \frac{1}{8 \cos \frac{k}{2}} (m(k) - z) + O(m(k) - z)^2, \quad z \rightarrow m(k)-,$$

$$f(k; z) = 1 + \frac{1}{8 \cos \frac{k}{2}} (z - M(k)) + O(z - M(k))^2, \quad z \rightarrow M(k)+,$$

Bu yoyilmalardan foydalanib, Tasdiq 2.1 ning b) bandida keltirilgan asimptotik yoyilmani hosil qilamiz. ▲

Tasdiq 2.2. *Ixtiyoriy $\mu > 0$ (mos holda $\mu < 0$ va $k \in \mathbb{T}^1$ lar uchun shunday yagona $\zeta_1(\mu; k) < m(k)$ (mos holda $M(k) < \zeta_1(\mu; k)$ soni mavjudki, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi*

$$\Delta(\mu, k; \zeta_1(\mu; k)) = 0 \quad (\text{mos holda } \Delta(\mu, k; \zeta_1(\mu; k)) = 0). \quad (2.5)$$

Isbot. *Yuqorida bayon qilingan Tasdiq 2.1 ga ko'ra fiksirlangan $\mu > 0$ (mos holda $\mu < 0$) va $k \in \mathbb{T}^1$ larda $\Delta(\mu, k; \cdot)$ (mos holda $\mu < 0$ $\Delta(\mu, k; \cdot)$) funksiya $(-\infty, m(k))$ intervalda uzluksiz va monoton kamayuvchi (mos ravishda $(M(k), +\infty)$ intervalda uzluksiz va monoton o'suvchi) bo'ladi. Shu bilan birga, quyidagi tengliklar bo'ladi*

$$\lim_{z \rightarrow m(k)-} \Delta(\mu, k; z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta(\mu, k; z) = 1$$

va

$$\lim_{z \rightarrow M(k)+} \Delta(\mu, k; z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta(\mu, 0, k; z) = 1$$

Shuning uchun ishorasi almashinuvchi uzluksiz funksiya xossaligidan Tasdiq 2.2 da keltirilgan fakt kelib chiqadi. ▲

Teorema 2.1 ning isboti. *a. Tasdiq 2.2 ga ko'ra shunday yagona $\zeta_1(\mu; k) \in (-\infty, m(k))$ mavjudki, $\Delta(\mu, k; \zeta_1(\mu; k)) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

(mos ravishda shunday yagona $\zeta_1(\mu; k) \in (M(k), +\infty)$ mavjudki,

$\Delta(\mu, k; \zeta_1(\mu; k)) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi) Lemma 2.2 ga ko'ra $h_\mu(k)$ operator yagona $\zeta_1(\mu; k) < m(k)$ (mos ravishda $M(k) < \zeta_1(\mu; k)$) xos qiymatga ega bo'lishi kelib chiqadi.

$\zeta_1 < m(k)$ soni $h_\mu(k)$ operatorning xos qiymati, yani $h_\mu(k)f = \zeta_1 f$ tenglama nolmas $f \in L_e^2(\mathbb{T}^1)$ yechimga ega bo'lsin (mos ravishda $M(k) < \zeta_1$ soni $h_\mu(k)$ operatorning xos qiymati, yani $h_\mu(k)f = \zeta_1 f$ tenglama nolmas $f \in L_e^2(\mathbb{T}^1)$ yechimga ega bo'lsin). Bu tenglama quyidagiga ekvivalent

bo'lad:

$$(\varepsilon_k(p) - \zeta_1)f(p) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} f(t)dt, \quad f \in L_2^e(\mathbb{T}^1).$$

Bundan

$$f(p) = \frac{\mu C}{\varepsilon_k(p) - \zeta_1}, \quad C = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} f(t)dt \neq 0$$

ni hosil qilamiz.

Teorema isbotlandi. **▲**

Bob 3

Umumlashgan Fridriks model $H_{\gamma\mu}(k)$ operatorning spektral xossasi

2-bo'limda panjaradagi ikki zarrachali (zarrachalar bozon bo'lgan hol) sistemaga mos $\hat{h}_{\mu\lambda}$ Hamiltonianning spektral xossalarini o'rganish $L_2^\epsilon(\mathbb{T}^1)$ Hilbert fazosida aniqlangan ikki zarrachali diskret Shroedinger operatori $h_{\mu\lambda}(k)$, $k \in \mathbb{T}^1$ ning spektral xossalarini o'rganishga keltirilgan edi. Bundan tashqari, $h_{\mu\lambda}(k)$, $k \in \mathbb{T}^1$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(h_{\mu\lambda}(k))$, $[m(k), M(k)]$ to'plamdan iborat ekanligi va u muhim spektrdan o'ngda xos qiymatga ega emasligi bayon qilingan edi.

Bu bo'limda $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning (Fridrix model operatorining) ($\mu, \gamma \in \mathbb{R}$ va $k \in \mathbb{T}^d$, $d = 1, 2$ parametrlardan bog'liq holda) xos qiymatlari sonini to'liq tahlil qilamiz.

3.1 $H_{\gamma\mu}(k)$ Fridriks model operatori

Faraz qilamiz, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ – bir o'lchamli $\mathcal{H}_0 = C^1$ kompleks sonlar Gilbert fazosi (1-kanal) va $\mathcal{H}_1 = L_e^2(\mathbb{T}^d)$ – $d \geq 1$ o'lchamli tor $\mathbb{T}^d$ da kvadrati bilan integrallanuvchi juft funksiyalarning Gilbert fazosi (2-kanal) ning to'g'ri yig'indisidan iborat ikki kanalli Gilbert fazosi bo'lsin.

$$E(k), \quad k \in \mathbb{T}^d \text{ orqali } \mathcal{H}_0 \text{ Gilbert fazosidagi } \varepsilon(k) = 4 \sum_{i=1}^d (1 + \cos \frac{k^{(i)}}{2})$$

songa ko'paytirish operatorini belgilaymiz:

$$E(k)f_0 = \varepsilon(k)f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0,$$

$h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d - \mathcal{H}_1$ Gilbert fazosidagi kontakt ta'sirlashuvchi ikkita bir xil zarracha (bozon) li sistemaga mos ikki zarrachali diskret Shroedinger operatori bo'lsin:

$$h_\mu(k) = h_0(k) + \mu V, \quad \mu \geq 0,$$

bunda $h_0(k)$ operator $\varepsilon_k(\cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$(h_0(k)f_1)(q) = \varepsilon_k(q)f_1(q), \quad f_1 \in \mathcal{H}_1, \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_k(q) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} - q\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + q\right) = 2 \sum_{i=1}^d \left(1 - \cos \frac{k^{(i)}}{2} \cos q^{(i)}\right)$$

hamda V bir o'lchamli integral operator:

$$(Vf_1)(q) = \alpha_0(f_1, \alpha_0)_{\mathcal{H}_1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} f_1(s) ds, \quad f_1 \in \mathcal{H}_1, \quad \alpha_0 \equiv (2\pi)^{-d/2}.$$

$H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ operator $\mathcal{H}$ gilbert fazosida

$$H_{\gamma\mu}(k) = \begin{pmatrix} E(k) & C_\gamma^* \\ C_\gamma & h_\mu(k) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

formula yordamida aniqlanadi, bunda

$$C_\gamma : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1, \quad C_\gamma f_0 = \gamma \alpha_0(f_0, \alpha_0)_{\mathcal{H}_0}$$

va

$$C_\gamma^* : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0, \quad C_\gamma^* f_1 = \gamma(f_1, \alpha_0)_{\mathcal{H}_1}$$

operatorlar mos ravishda paydo qiluvchi va yo'qotuvchi operatorlar.

Tushunarliki, $H_{\gamma\mu}(k)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{T}^d$ operator $\mathcal{H}$ Gilbert fazosida o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator bo'ladi.

3.2 $H_{\gamma\mu}(k)$ Fridriks model operatorining muhim spektri

$H_{\gamma\mu}(k)$ va $H_{0\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorlar ayirmasining rangi ikkiga teng bo'lgani uchun, muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga asosan, $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning muhim spektri $H_{0\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(H_{0\mu}(k))$ bilan ustma-ust tushadi [13], xususan,

$$\sigma_{ess}(H_{\gamma\mu}(k)) = \sigma_{ess}(H_{0\mu}(k)) = \sigma_{ess}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)],$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

3.3 $H_{\gamma 0}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning spektral xossalari

Quyidagi teorema, $d = 1, 2$ o'lchamlarda $H_{\gamma 00}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymatlari mavjudligi va unga mos xos funksiyaning analitikligini tavsiyadan iborat.

Teorema 3.1. $d = 1, 2$ va $\gamma > 0$ $\mu = 0$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $H_{\gamma 0}(k)$ operator muhim spektrdan tashqarida ikkita $E_{\gamma 0}^1(k)$ va $E_{\gamma 0}^2(k)$ xos qiymatlarga ega. Va bu xos qiymatlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$$E_{\gamma 0}^1(k) < \varepsilon_{\min}(k) \leq \varepsilon_{\max}(k) \varepsilon(k) < E_{\gamma 0}^2(k)$$

Unga mos $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ xos vektor

$$f_{0,k}^i = \frac{-c\gamma}{\varepsilon(k) - E_{\gamma 0}^i(k)}, \quad f_{1,k}^i(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{\gamma 0}^i(k)} \right) \frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma 0}^i(k)}, \quad i = 1, 2$$

ko'rinishga ega, bunda $c \neq 0$ – normalovchi ko'paytuvchi va $f_{1,k}^i(\cdot)$ funksiya $\mathbb{T}^d$ da haqiqiy analitik.

Bundan tashqari, $E_{\gamma 0}^i : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $k \rightarrow E_{\gamma 0}^i(k)$, $i = 1, 2$ akslantirish $\mathbb{T}^d$ dagi juft va haqiqiy analitik funksiya va $f^i : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{H}$, $k \rightarrow f_k^i \in \mathcal{H}$ akslantirish esa, $\mathbb{T}^d$ dagi vektor qiymatli analitik akslantirish bo'ladi.

$a(k, z)$ orqali $\mathbb{T}^d \times (\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(H_{\gamma_0}(k)))$ da haqiqiy-analitik bo'lgan quyidagi funktsiyani belgilaymiz:

$$a(k, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{z - \varepsilon_k(q)}. \quad (3.3)$$

Har bir fiksirlangan $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $\mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ dagi analitik bo'lgan $\Delta_{\gamma_0}(k; \cdot)$ funktsiya (H_{γ_0} operatorga mos Fredholm determinanti) ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Delta_{\gamma_0}(k; z) = 1 - \left[\frac{\gamma^2}{z - \varepsilon(k)} \right] a(k, z). \quad (3.4)$$

Lemma 3.1. a) *Ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $a(k, \cdot)$ funktsiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda manfiy, monoton o'suvchi (mos ravishda $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda musbat, monoton kamayuvchi) hamda ixtiyoriy $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ uchun $\mathbb{T}^d$ da haqiqiy analitik funktsiya bo'ladi.*

b) *Ixtiyoriy $\gamma \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{T}^d$ uchun*

$$\Delta_{\gamma_0}(k; z) = 1 - \left(\frac{\gamma^2}{z - \varepsilon(k)} \right) a(k, z)$$

funktsiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda monoton o'sadi (mos ravishda $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda monoton kamayadi).

c) *Ixtiyoriy $\gamma \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{T}^d$ uchun*

$$\Delta_{\gamma_0}^*(k; z) = (z - \varepsilon(k)) \Delta_{\gamma_0}(k; z)$$

funktsiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda ko'pi bilan bitta nolga ega (mos ravishda $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda ko'pi bilan bitta nolga ega).

Isbot. a) $a(k, \cdot)$ ning musbatligi integral ostidagi funktsiyaning manfiyligi (mos ravishda musbatligi) hamda Lebeg integralining monotonligidan kelib chiqadi. Shuningdek, $a(k, \cdot)$ ning hosilasi musbat bo'lganligi uchun, u $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ da monoton o'suvchi bo'ladi (mos ravishda $a(k, \cdot)$ ning hosilasi manfiy bo'lganligi uchun, u $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ da monoton kamayuvchi bo'ladi).

b) 3.1 lemmaning a) bandiga ko'ra istalgan $z < \varepsilon_{\min}(k)$ uchun

$$\frac{\partial \Delta_{\gamma_0}(k; z)}{\partial z} = \left[\frac{\gamma^2}{(z - \varepsilon(k))^2} a(k, z) \frac{\partial a(k, z)}{\partial z} + \frac{\gamma^2}{(z - \varepsilon(k))} \frac{\partial a(k, z)}{\partial z} \right] > 0$$

tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi, ya'ni $\Delta_{\gamma_0}(k; \cdot)$ funksiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda monoton o'sadi (mos ravishda $\Delta_{\gamma_0}(k; \cdot)$ funksiya $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty,)$ intervalda monoton kamayadi).

c) Tushunarliki, $\Delta_{\gamma_0}(k; z)$ va $\Delta_{\gamma_0}^*(k; z)$ funksiyalarning $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervaldagi nollari ustma-ust tushadi (mos ravishda $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty,)$ intervaldagi nollari ustma-ust tushadi). $\Delta_{\gamma_0}(k; \cdot)$ ning $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda monoton o'suvchiligidan uning shu intervaldagi nollari soni bittadan oshmaydi (mos ravishda $\Delta_{\gamma_0}(k; \cdot)$ ning $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda monoton kamayuvchiligidan uning shu intervaldagi nollari soni bittadan oshmaydi). Bu esa $\Delta_{\gamma_0}^*(k; \cdot)$ funksiya mazkur intervallardan bittadan ortiq nolga ega emasligini bildiradi. $\square$

Quyidagi lemmada o'z-o'ziga qo'shma $H_{\gamma_0}(k)$ operatorning xos qiymati va $\Delta_{\gamma_0}(k; z)$ funksiyaning noli o'rtasidagi bog'liqlik o'rnatilgan.

Lemma 3.2. *Ixtiyoriy $\gamma \neq 0$ uchun $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ soni $H_{\gamma_0}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun, $\Delta_{\gamma_0}(k; z) = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zarurligi.* Faraz qilamiz, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(H_{\gamma_0}(k))$ soni $H_{\gamma_0}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymati hamda $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$ unga mos xos vektor bo'lsin. U holda f_0 va f_1 lar quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} (\varepsilon(k) - z)f_0 = -\gamma(f_1, \alpha_0) \\ (\varepsilon_k(q) - z)f_1(q) = -\gamma\alpha_0 f_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

$\sigma_{ess}(H_{\gamma_0}(k)) = [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ tenglikka ko'ra, ixtiyoriy $z \in \mathbb{C} \setminus$

$[\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ va $q \in \mathbb{T}^d$ lar uchun

$$\varepsilon_k(q) - z \neq 0, \quad k \in \mathbb{T}^d$$

tengsizlik o'rinli. (3.5) sistemaning ikkinchi tenglamasidan f_1 uchun quyidagi

$$f_1(q) = \frac{-\gamma\alpha_0 f_0}{\varepsilon_k(q) - z} \quad (3.6)$$

ifodaga ega bo'lamiz va

$$c = (f_1, \alpha_0) \quad (3.7)$$

deb belgilaymiz.

f_1 uchun (3.6)) ifodani (3.7) tenglikka qo'yib va (3.5) tenglamalar sistemasini birinchi tenglamasini hisobga olib quyidagi

$$\begin{cases} (\varepsilon(k) - z)f_0 + \gamma c = 0 \\ \gamma a(k, z)f_0 + c = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

chiziqli tenglamalar sistemasiga kelimiz. Ma'lumki, (3.8) chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas (f_0, c) yechimga ega bo'lishi uchun shu sistemaning determinanti $\Delta_{\gamma_0}(k; z)$ nolga teng bo'lishi yetarli va zarur hamda $\Delta_{\gamma_0}(k; z) = 0$ bo'lgan holda bu sistemani yechib, H_{γ_0} operatorning xos funksiyasi $f = (f_0, f_1)$ quyidagi ko'rinishga egaligini topamiz:

$$f_0 = \frac{-\gamma c}{\varepsilon(k) - z}, \quad f_1(q) = \frac{\gamma\alpha_0 f_0}{\varepsilon_k(q) - z} \quad (3.9)$$

Yetarliligi. Faraz qilamiz, biror $k \in \mathbb{T}^d$ va $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ uchun $\Delta_{\gamma_0}(k; z) = 0$ tenglik bajarilsin. U holda (3.9) ko'rinishga ega bo'lgan $f = (f_0, f_1)$ vektor (3.5) tenglamalar sistemasini qanotlantiradi, ya'ni $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ soni $H_{\gamma_0}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymati bo'ladi. Lemma 3.2 isbotlandi. $\square$

Lemma 3.3. a) $d \geq 1$ va $k \in (-\pi, \pi)$ bo'lsin. U holda yetarlicha kichik va musbat $\varepsilon_{\min}(k) - z$ lar uchun $a(k, z)$ funksiya quyidagi yaqinlashuvchi

yoyilmaga ega:

agar $d = 2m + 2$, $m = 0, 1, \dots$ bo'lsa,

$$a(k, z) = -\frac{\Phi_0(k)}{2} (z - \varepsilon_{\min}(k))^m \ln(\varepsilon_{\min}(k) - z) + \\ + (z - \varepsilon_{\min}(k))^{m+1} \ln(\varepsilon_{\min}(k) - z) \Phi_{11}(k, z) + \nu(k) + \Phi_2(k, z),$$

agar $d = 2m + 1$, $m = 0, 1, \dots$ bo'lsa,

$$a(k, z) = \frac{\pi \Phi_0(k)}{2} \frac{(z - \varepsilon_{\min}(k))^m}{\sqrt{\varepsilon_{\min}(k) - z}} + \\ + (\varepsilon_{\min}(k) - z)^{m+1/2} \Phi_{12}(k, z) + \nu(k) + \Phi_2(k, z),$$

bunda

$$\Phi_0(k) = \frac{c}{\sqrt{\cos \frac{k_1}{2} \dots \cos \frac{k_d}{2}}}, \quad c = \text{const},$$

va

$$\Phi_{12}(k, z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l(k) (\varepsilon_{\min}(k) - z)^{l/2}$$

hamda $\Phi_{11}(k, \cdot)$ va $\Phi_2(k, \cdot)$, $k \in \Pi_{0,\pi}$ funksiyalar $z = \varepsilon_{\min}(k)$ nuqtaning biror δ - atrofi $V_\delta(\varepsilon_{\min}(k))$ da analitik funksiyalar, $\Phi_2(k, \varepsilon_{\min}(k)) = 0$; $b_l(k)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ lar esa haqiqiy sonlar

b) $d \geq 1$ va $k \in (-\pi, \pi)$ bo'lsin. U holda yetarlicha kichik va musbat $\varepsilon_{\max}(k) - z$ lar uchun $a(k, z)$ funksiya quyidagi yaqinlashuvchi yoyilmaga ega:

agar $d = 2m + 2$, $m = 0, 1, \dots$ bo'lsa,

$$a(k, z) = -\frac{\Phi_0(k)}{2} (z - \varepsilon_{\max}(k))^m \ln(z - \varepsilon_{\max}(k)) + \\ + (z - \varepsilon_{\max}(k))^{m+1} \ln(z - \varepsilon_{\max}(k)) \Phi_{11}(k, z) + \nu(k) + \Phi_2(k, z),$$

agar $d = 2m + 1$, $m = 0, 1, \dots$ bo'lsa,

$$a(k, z) = \frac{\pi \Phi_0(k)}{2} \frac{(z - \varepsilon_{\max}(k))^m}{\sqrt{z - \varepsilon_{\max}(k)}} + \\ + (z - \varepsilon_{\max}(k))^{m+1/2} \Phi_{12}(k, z) + \nu(k) + \Phi_2(k, z),$$

bunda

$$\Phi_0(k) = \frac{c}{\sqrt{\cos \frac{k_1}{2} \dots \cos \frac{k_d}{2}}}, \quad c = \text{const},$$

va

$$\Phi_{12}(k, z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l(k) (z - \varepsilon_{\max}(k))^{l/2}$$

hamda $\Phi_{11}(k, \cdot)$ va $\Phi_2(k, \cdot)$, $k \in \Pi_{0,\pi}$ funksiyalar $z = \varepsilon_{\max}(k)$ nuqtaning biror δ -atrofi $V_\delta(\varepsilon_{\max}(k))$ da analitik funksiyalar, $\Phi_2(k, \varepsilon_{\max}(k)) = 0$; $b_l(k)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ lar esa haqiqiy sonlar.

Isbot. Lemmaning a) va b) tasdig'larini [18] dagi 4-lemma kabi isbotlanadi. □

3.1 teoremaning isboti. $z < \varepsilon_{\min}(k)$ bo'lsin. U holda 3.3 lemma va (3.13) tenglikka asosan fiksirlangan $\gamma > 0$ larda

$$\lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\min}(k)-} \Delta_{\gamma 0}(k; z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_{\gamma 0}(k; z) = 1.$$

tengliklar o'rinli. $\Delta_{\gamma 0}(k; \cdot)$ funksiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda uzluksiz, monoton o'suvchi va ishorasi o'zgarganligi sababli $\Delta_{\gamma 0}(k; z) = 0$ tenglama mazkur intervalda yagona $z = E_{\gamma 0}^1(k)$ yechimga ega. Natijada 3.1 va 3.2 lemmalarga ko'ra $H_{\gamma 0}(k)$ operator yagona $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda $E_{\gamma 0}^1(k) < \varepsilon_{\min}(k)$ xos qiymatga ega.

$E_{\gamma 0}^1(k)$ ning $\mathbb{T}^d$ da haqiqiy analitikligi u $\Delta_{\gamma 0}(k; z) = 0$ tenglamaning yagona yechimi ekanligidan hamda $\Delta_{\gamma 0}(k; \cdot)$ va $\Delta_{\gamma 0}(\cdot; z)$ funksiyalarning mos ravishda $\mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ va $\mathbb{T}^d$ da haqiqiy-analitik ekanligidan kelib chiqadi. Shuningdek, ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^d$ uchun

$$0 = \Delta_{\gamma 0}(-k, E_{\gamma 0}^1(-k)) = \Delta_{\gamma 0}(k, E_{\gamma 0}^1(-k)) = \Delta_{\gamma 0}(k, E_{\gamma 0}^1(k))$$

tengliklar bajarilishini hisobga olsak, $\Delta_{\gamma 0}(k; \cdot)$ tenglamaning yechimi yagonaligidan $E_{\gamma 0}^1(k) = E_{\gamma 0}^1(-k)$ tenglikning bajarilishi kelib chiqadi. Shuning uchun $E_{\gamma 0}^1(k)$ funksiya $\mathbb{T}^d$ dagi juft funksiya bo'ladi.

Shuni ta'kidlaymizki, $E_{\gamma 0}^1(k) \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ soni $H_{\gamma 0}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun

$$\begin{cases} (\varepsilon(k) - E_{\gamma 0}^1(k))f_0 = -\gamma(f_1, \alpha_0) \\ (\varepsilon_k(q) - E_{\gamma 0}^1(k))f_1(q) = -\gamma\alpha_0 f_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

tenglamalar sistemasi notrivial $f_k = (f_{0,k}, f_{1,k}) \in \mathcal{H}$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli, bunda

$$f_{0,k} = \frac{-\gamma c}{\varepsilon(k) - E_{\gamma 0}^1(k)}, \quad f_{1,k}(q) = \left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon(k) - E_{\gamma 0}^1(k)} + \mu \right) \frac{c}{\varepsilon_k(q) - E_{\gamma 0}^1(k)}, \quad (3.11)$$

va $c \neq 0$ - normalovchi ko'paytuvchi. $\varepsilon_k(\cdot)$ funksiyaaning $\mathbb{T}^d$ da analitikligidan va $\varepsilon(k) - E_{\gamma 0}^1(k) > 0$ ekanligidan $f_{1,k}(\cdot)$ ning $\mathbb{T}^d$ da analitikligi kelib chiqadi. $f_{0,k}$ va $f_{1,k}$, lar uchun (3.11) ifodalardan va $E_{\gamma 0}^1(\cdot)$ funksiyaning $\mathbb{T}^d$ da analitik ekanligidan xulosa qilish mumkinki, $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathcal{H}$, $k \rightarrow f_k \in \mathcal{H}$ akslantirish $\mathbb{T}^d$ dagi analitik akslantirish bo'ladi. $f : k \rightarrow f_k \in \mathcal{H}$ akslantirishning analitikligi f_k vektornig $f_{0,k}$ va $f_{1,k}$ komponentalari analitik ekanligidan kelib chiqadi.

$z > \varepsilon_{\max}(k)$ bo'lsin. U holda 3.3 lemma va (3.13) tenglikka asosan fiksirlangan $\gamma > 0$ larda

$$\lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\max}(k)+} \Delta_{\gamma 0}(k; z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta_{\gamma 0}(k; z) = 1.$$

tengliklar o'rinli. $\Delta_{\gamma 0}(k; \cdot)$ funksiya $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda uzluksiz, monoton o'suvchi va ishorasi o'zgarganligi sababli $\Delta_{\gamma 0}(k; z) = 0$ tenglama mazkur intervalda yagona $z = E_{\gamma 0}^2(k)$ yechimga ega. Natijada 3.1 va 3.2 lemmalarga ko'ra $H_{\gamma 0}(k)$ operator yagona $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda $E_{\gamma 0}^2(k) > \varepsilon_{\max}(k)$ xos qiymatga ega. Xuddi shunday bu xos qiymat uchun ham yuqoridagi mulohazalar o'rinli $\square$

3.4 $H_{\gamma\mu}(k), k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymatlari haqida

Quyidagi teorema, $d = 1, 2$ o'lchamlarda $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymatlari mavjudligi haqida .

Teorema 3.2. a) $d = 1, 2$ va $\gamma \neq 0$ $\mu \geq 0$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $H_{\gamma\mu}(k)$ operator muhim spektrdan tashqarida ikkita $E_{\gamma\mu}^1(k)$ va $E_{\gamma\mu}^2(k)$ xos qiymatlarga ega. Va bu xos qiymatlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$$E_{\gamma\mu}^1(k) < \varepsilon_{\min}(k) \leq \varepsilon_{\max}(k) < \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^2(k)$$

b) $d = 1, 2$ va $\gamma \neq 0$ $\mu \geq 0$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $H_{\gamma\mu}(k)$ operator $(\varepsilon_{\max}(k), \varepsilon(k))$ intervalda xos qiymatga ega emas.

c) $d = 1, 2$ va $\gamma = 0$ $\mu > 0$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $H_{\gamma\mu}(k)$ operator muhim spektrdan tashqarida ikkita $E_{\gamma\mu}^1(k)$ va $E_{\gamma\mu}^2(k)$ xos qiymatlarga ega. Va bu xos qiymatlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$$E_{\gamma\mu}^1(k) < \varepsilon_{\min}(k) \leq \varepsilon_{\max}(k) < \varepsilon(k) = E_{\gamma\mu}^2(k)$$

Teorema 3.3. Faraz qilamizki $d = 1, 2$ va $\gamma \neq 0$ $\mu \leq 0$ bo'lsin.

a) $\frac{\gamma^2}{\mu} > \varepsilon_{\max}(k) - \varepsilon(k)$ va $k \in \mathbb{T}^d$ bo'lsin. U holda $H_{\gamma\mu}(k)$ operator muhim spektrdan tashqarida ikkita $E_{\gamma\mu}^1(k)$ va $E_{\gamma\mu}^2(k)$ xos qiymatlarga ega. Va bu xos qiymatlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\varepsilon_{\max}(k) < E_{\gamma\mu}^1(k) < \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^2(k)$$

b) $\varepsilon_{\max}(k) - \varepsilon(k) \geq \frac{\gamma^2}{\mu} \geq \varepsilon_{\min}(k) - \varepsilon(k)$ va $k \in \mathbb{T}^d$ bo'lsin. U holda $H_{\gamma\mu}(k)$ operator yagona $E_{\gamma\mu}^2(k)$ xos qiymatga ega va bu xos qiymat quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi

$$\varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^2(k)$$

c) $\frac{\gamma^2}{\mu} < \varepsilon_{\min}(k) - \varepsilon(k)$ va $k \in \mathbb{T}^d$ bo'lsin. U holda $H_{\gamma\mu}(k)$ operator muhim spektrdan tashqarida ikkita $E_{\gamma\mu}^1(k)$ va $E_{\gamma\mu}^2(k)$ xos qiymatlarga ega.

Va bu xos qiymatlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$$E_{\gamma\mu}^1(k) < \varepsilon_{\min}(k) < \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^2(k)$$

c) $d = 1, 2$ va $\gamma = 0$ $\mu < 0$ bo'lsin. U holda $H_{\gamma\mu}(k)$ operator muhim spektrdan tashqarida ikkita $E_{\gamma\mu}^1(k) = \varepsilon(k)$ va $E_{\gamma\mu}^2(k)$ xos qiymatlarga ega.

Va bu xos qiymatlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\varepsilon_{\max}(k) < E_{\gamma\mu}^1(k) = \varepsilon(k) < \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^2(k)$$

$a(k, z)$ orqali $\mathbb{T}^d \times (\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(H_{\gamma\mu}(k)))$ da haqiqiy-analitik bo'lgan quyidagi funktsiyani belgilaymiz:

$$a(k, z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{dq}{z - \varepsilon_k(q)}. \quad (3.12)$$

Har bir fiksirlangan $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $\mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ dagi analitik bo'lgan $\Delta_{\gamma\mu}(k; \cdot)$ funktsiya ($H_{\gamma 0}$ operatorga mos Fredholm determinanti) ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Delta_{\gamma\mu}(k; z) = 1 - \left[\frac{\gamma^2}{z - \varepsilon(k)} - \mu \right] a(k, z). \quad (3.13)$$

Lemma 3.4. a) Ixtiyoriy $k \in \mathbb{T}^d$ uchun $a(k, \cdot)$ funktsiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda manfiy, monoton o'suvchi (mos ravishda $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda musbat, monoton kamayuvchi) hamda ixtiyoriy $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ uchun $\mathbb{T}^d$ da haqiqiy analitik funktsiya bo'ladi.

b) Ixtiyoriy $\gamma \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{T}^d$ uchun

$$\Delta_{\gamma\mu}(k; z) = 1 - \left(\frac{\gamma^2}{z - \varepsilon(k)} - \mu \right) a(k, z)$$

funktsiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda monoton o'sadi (mos ravishda $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda monoton kamayadi).

c) Ixtiyoriy $\gamma \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{T}^d$ uchun

$$\Delta_{\gamma\mu}^*(k; z) = (z - \varepsilon(k)) \Delta_{\gamma\mu}(k; z)$$

funksiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda ko'pi bilan bitta nolga ega (mos ravishda $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda ko'pi bilan bitta nolga ega).

Isbot. Lemmaning isboti lemma 3.1 isboti kabi isbotlanadi. $\square$

Quyidagi lemmada o'z-o'ziga qo'shma $H_{\gamma\mu}(k)$ operatorning xos qiymati va $\Delta_{\gamma\mu}(k; z)$ funksiyaning noli o'rtasidagi bog'liqlik o'rnatilgan.

Lemma 3.5. *Ixtiyoriy $\gamma \in \mathbb{R}$ va $\mu \leq 0$ uchun $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)]$ soni $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operatorning xos qiymati bo'lishi uchun, $\Delta_{\gamma\mu}(k; z) = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.*

Isbot. Lemmaning isboti lemma 3.2 isboti kabi isbotlanadi. $\square$

3.2 teoremaning isboti. Teoremaning a) bandining sharti bajarilsin . U holda 3.3 lemma va (3.13) tenglikka asosan

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \varepsilon(k)-} \Delta_{\gamma 0}(k; z) &= -\infty, & \lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta_{\gamma 0}(k; z) &= 1. \\ \lim_{z \rightarrow \varepsilon_{\min}(k)-} \Delta_{\gamma 0}(k; z) &= -\infty, & \lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_{\gamma 0}(k; z) &= 1. \end{aligned}$$

tengliklar o'rinli. $\Delta_{\gamma\mu}(k; \cdot)$ funksiya $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ intervalda uzluksiz, monoton o'suvchi (mos ravishda $(\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ intervalda uzluksiz, monoton kamayuvchi)va ishorasi o'zgarganligi sababli $\Delta_{\gamma\mu}(k; z) = 0$ tenglama mazkur intervalda yagona $z = E_{\gamma\mu}^1(k)$ va $z = E_{\gamma\mu}^2(k)$ yechimlarga ega. Natijada 3.1 va 3.2 lemmalarga ko'ra $H_{\gamma\mu}(k)$ operator muhim spektrdan tashqarida ikkita $E_{\gamma\mu}^1(k)$ va $E_{\gamma\mu}^2(k)$ xos qiymatlarga ega. Va bu xos qiymatlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\varepsilon_{\max}(k) < E_{\gamma\mu}^1(k) < \varepsilon(k) < E_{\gamma\mu}^2(k).$$

Xuddi shunday teoremaning qolgan banlari uchun yuqoridagi mulohazalar o'rinli $\square$

3.3 teoremaning isboti. teorema 3.3 ning isboti ham teorema 3.1 ning isbotiga o'xshash isbotlanadi $\square$

Foydalanilgan adabiyotlar

- [1] Izyumov YU. A. Medvedov M.B. : Magnitniy polaron v ferromagnitnom kristalle // Jurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziki .1970.-Vip.2(8).-str.553-560.
- [2] Lieb E. : Two theorems of the Hubbard model// Phys.Rev.Lett.62(1989).-P.1201-1204.
- [3] Mattis D.C. : The few-body problem on lattice//Rev.Modern Phys, 58(1986).-2.-p.361-379.
- [4] Mogilner A.I. : Hamiltonians of solid state physics as few-particle discrete Schrodinger operators: problems and results //Advance of Soviet Mathematics.1991.-vol.5.-P.139-194.
- [5] Friedrichs K.O. : Uber die Spectralzerlegung einer Integral operators //Math . Ann.115,1938.-2.-P.249-272.
- [6] Friedrichs K.O. : On the perturbation of continuous spectra//Comm. Pure. Appl. Math.1/1948.-4.-P.361-406.
- [7] S.N.LAKAEV, A. M. XALXUJAEV, SH. S. LAKAEV. Razlozheniye dlya sobstvennix znacheniy dvuxchastichnogo diskretnogo operatora Schroedingera. TmPh (2012).
- [8] LAKAEV S.N. Ob effekte Yefimova v sisteme trex odinakovix chastits. funk. analiz i yego pril. T. 27. Vip. 3. 15-28.(1993).
- [9] S.ALBEVERIO, S.N.LAKAEV, K.A.MAKAROV AND Z.I.MUMINOV. The Threshold effects for the two-particle Hamiltonians. Communications in Mathematical Physics, 262, 91-115. (2006).
- [10] S.N. LAKAEV, A.M. KHALKHUZHAEV. Spectrum of the two-particle Schroedinger Operator on a lattice, Theoret.and Math. Physics, 155 (2): 753-764 (2008).
- [11] M. REED and B. SIMON: Methods of modern mathematical physics. I: Functional analysis. Academic Press, N.Y., London 1972.

- [12] V.A.TRENOGIN: Functional analysis. "Nauka", Moscow 1980.
- [13] M. REED and B. SIMON: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1978.
- [14] A.N.KOLMOGOROV, S.V.FOMIN: Elementi teorii funktsii i funktsionalnogo analiza. "Nauka", Moscow 1976
- [15] L.A.LYUSTERNIK, V.I.SOBOLEV: Elements of functional analysis. "Nauka". Moscow 1965
- [16] S.N. LAKAEV, SH. TILOVOVA. Sliyaniye sobstvennix znacheniy i rezonansov dvuxchastichnogo operatora Shredingera. TmPh T.101. N2, 235-251.(1994).
- [17] S.N.LAKAEV: Bound states and resonances of N particle discrete Schrödinger operators. Theor.and Math.Phys. **91**(1992), No.1,51-65.
- [18] S.N.LAKAEV,SH.M.LATIPOV.O sushestvovanie i analitichnosti sobstvennix znacheniy dvux kanalnoy rezonansnoy modeli TMF 169(2011)N3 str 1657-1666.
- [19] SH.M.LATIPOV.J.I.ASADOV.O sushestvovanii sobstvennix znacheniy vne sushestvennogo spektra odnoy obobshennoy modeli Fridriksa. "Sovremennye metody matematicheskoy fiziki i ixprilojeniya" Toshkent 2015g.str 72-74
- [20] D.A.LATIPOVA J.I.ASADOV.O chisle sobstvennix znacheniy odnoy obobshennoy modeli Fridriksa. "Matematika va uni zamonaviy pedagogik texnologitalar yordamida oqitish muammolari" Navoiy 2015y .str 47-48.
- [21] S.M. SAMATOV.,J.I.ASADOV B.ABRAEV.O spektre dvuxchastichnogo Gamiltoniana na reshetke."Magistrantlarning XIV ilmiy konfrensiyasi materiallari"Samarqand 2014y str 39-43.

XULOSA

Ushbu magistrlik dissertatsiyasida umumlashgan Fridriks model operator sifatida panjaradagi zarrachalar soni ikkitadan oshmaydigan sistemaga mos soni saqlanmaydigan operatorlar oilasi qaralgan. Bunda qaralayotgan operator ikki zarrachali Shroedinger operatori hamda paydo qilish va yo'qotish operatori orqali aniqlanadi. Qaralayotgan operatorning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari sonining o'zgarishi ikki zarrachali $h_\mu(k)$ Shroedinger operatorida zarrachalar itarishuvchi yoki tortishuvchi bo'lishiga, paydo qiluvchi va yo'qotuvchi operatorlarga hamda o'zaro tasir energiyalariga va kvaziimpulsga bog'liqligi o'rganildi.

Magistrlik dissertatsiyasida quyidagi yangi natijalar olingan:

-zarrachalar ta'sir energiyalari $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$ va kvaziimpuls $k \in \mathbb{T}^d$ ning $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ operator yagona yoki ikkita xos qiymatga ega bo'ladigan qiymatlari ajratib ko'rsatilgan;

- $H_{\gamma\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ $d = 1, 2$ operatorning ikkinchi xos qiymati mavjudligi paydo qiluvchi va yo'qotuvchi operatorlarga bog'liqligi o'rganilgan;

-xos qiymatlar $E_{\gamma\mu}^{(i)}(k)$, $i = 1, 2$ larning joylashish o'rnini parametrlarga bog'liq o'rganilgan.

Magistrlik dissertatsiyasida olingan asosiy natijalar yangi bo'lib, kvant mexanikasi, qattiq jismlar fizikasi, statistik fizika, kvant maydonlar nazariyasi masalalarida qo'llanilishi mumkin; o'z-o'ziga qo'shma operatorlar spektral nazariyasi va o'z-o'ziga qo'shma chiziqli operatorlar qo'zg'alishlar nazariyasini rivojiga hissa qo'shishi mumkin.