

O`ZBEKISTAN RESPUBLIKASI XALQ BILIMLENDIRIW MINISTRILIGI

A`JINIYAZ ATINDAG`I NO`KIS MA`MLEKETLIK PEDAGOGIKALIQ  
INSTITUTI

Fizika–matematika fakulteti

Uluwma matematika kafedrası

«Matematika həm informatika» təlim bag`darının` 4 g kurs studenti

**Sarsengaliev Muxtar Kurmang`azi ulının`**

**«Mektep matematika kursında elementar funktsiyalardı  
izertlew usılları»**

atamasındag`ı

**PITKERIW QA`NIGELIK JUMISI**

Kafedra baslıg`ı:

f–m.i.k. A.Xodjaniyazov

Ilimiy basshısı:

ag`a oqıt. J.Valieva

No`kis – 2015

## Mazmunı

Kirisiw.....	3
§ 1. Sızıqlı funksiyanın` grafigi.....	6
§2. Kvadrat funksiyanın` grafigi.....	9
§3. Bo`lshek da`rejeli funksiyalardıń` grafigi.....	24
§ 4. Ko`rsetkishli funksiyanın` grafigi.....	29
§5.Funktsiya grafiklerinin` xarakterli noqatları ha`m simmetriya ko`sherleri.....	32
Juwmaqlaw.....	46
Paydalanılǵ`an a`debiyatlar.....	48

## KIRISIW

Kadrlar tayarlaw milliy modeli tiykarında u`zliksiz bilimlendiriw jatadı. U`zliksiz bilimlendiriw ta`jiriybeli kadrlar tayarlawdın` tiykarı bolıp bilimlendiriwdin` barlıq tu`rlerin, ma`mleketlik ta`lim standartları, kadrlar tayarlawdın` milliy sisteması ha`m onın` xızmet ko`rsetiw ortalıg`ın o`z ishine aladı.

Ha`zirgi basqıshta bilimlendiriwdin` tiykarg`ı wazıypası ta`lim-ta`rbiya protsessin jetilistiriw tiykarında ha`r ta`repleme jetik, keleshek a`wladtı ta`rbiyalaw, kamal taptırıwdan ibarat. Oqıwshılardı barlıq kerekli bilim ha`m ko`nlikpeler menen qurallandıırıwshı olardı u`lken turmısqa tayarlaytug`ın ha`r bir oqıtıwshı, ha`zirgi zaman siyasiy-ekonomikalıq rawajlanıw ma`selesin, o`z waqtında sezip barıwı ha`m o`zindegi bar ku`sh bilimin, qa`siplik sheberligin rawajlandıırıwg`a qaratıwı, tınbay izlenip miynet etiwı kerek.

Oqıtıwshı miynetinin` na`tiyjesi ol bilim berip atırg`an oqıwshılardıń bilim da`rejesi menen o`lshenedi. Al bilimler da`rejesi bolsa, oqıwshıllardıń o`zlestiriwin tekseriw protsessinde anıqlanadı. Bul protsesstin` o`zi 45 yaki 90 minutlıq sabaq bolıp tabıladı.

Shınında da bilim beriwdin` tiykarg`ı forması sabaq bolıp, negizgi bilim sabaq o`tiw protsessinde beriledi. Sonın` ushın en` da`slep jumıstı oqıtıwshı ha`m oqıwshılardıń sabaqqa jan`asha ko`z qarasınan baslaw kerek.

Oqıwshılarg`a teren` bilim beriwde erisilgen tabıslar sırım da, jol qoyılğ`an kemshiliklerimiz sebeplerinde o`tilgen sabaqlarımızdan izlewimiz kerek.

Biz bilemiz, ulıwma bilim beriw mektepleri, akademiyalıq litsey, ka`sip-o`ner kolledjleri ha`m joqarı oqıw orınları programmalarınin` a`dewir bo`legin funktsiya ha`m onın` grafikleri haqqındag`ı temalar iyelegen.

Joqarıda aytilg`anday funktsiya haqqındag`ı bilimler sabaq protsessinde a`melge asırıladı.

Ta`jiriybe ko`rsetkendey, orta bilimlendiriw mekteplerinde konkret funktsiyalardı u`yreniwdi to`mendegi metodikalıq sxema boyınsha o`tkeriw paydalı:

1. Berilgen funktsiyag`a alıp keletug`ın situatsiyalardı qaraw.

U`yreniwdin` bul basqışında oqıwshılar a`meliyat talabı ha`m teoriyanı bunnan bılay da rawajlandırıw za`ru`rligi boyınsha berilgen funktsiyanı izertlewdir maqsetke muwapıqlıg`ına isenim arttırıwı kerek.

2. Berilgen funktsiyanın` anıqlamasın beriw, funktsiyanı formula menen jazıw, bul formulag`a kiretug`ın parametrlerdı izertlew.

U`yreniwdin` bul basqışında oqıwshılar berilgen funktsiya, onı basqa funktsiyalardan ajıratıp turatug`ın xarakterli qa`siyetleri haqqında anıq tu`siniklerge iye boladı.

3. Oqıwshılardı berilgen funktsiyanın` grafigi menen tanıstırıw.

Bul basqışta oqıwshılar izertlenetug`ın funktsiyanı grafikalıq su`wretlewdi, berilgen grafigi boyınsha funktsiyanı grafikalıq usılda berilgen basqa funktsiyalardan ayırıwdı, parametrlerdin` funktsiyanın` grafikalıq su`wretleniw xarakterine ta`sirini anıqlawdı u`yrenedi.

4. Funktsiyanın` tiykarg`ı qa`siyetlerge izertlew: anıqlanıw oblastı ha`m ma`nisler ko`pligi, o`siwi ha`m kemiwi, belgisin saqlaytug`ın aralıqları, nolleri, ekstremumları, juplıg`ı yaki taqlıg`ı, periodlılıg`ı, shegaralang`anlıg`ı, u`zliksizligi.

Orta bilimlendiriw mekteplerinin` VI- IX klasslarında ha`m akademiyalıq litseylerde oqıwshılar funktsiyanın` qa`siyetlerin grafikalıq, so`z benen ha`m simbolikalıq bolg`an u`sh «tilde» tu`sindiriwdi u`yrenedi. Bul uqıplılıq da`rhal qa`liplespeydi, biraq onın` a`hmiyetliligini asa bahalaw qıyın.

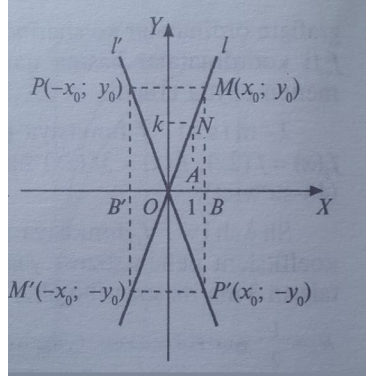
5. Funktsiyanın` u`yrenilgen qa`siyetlerinen ha`r qıylı ma`selelerdi, dara jag`dayda, ten`lemelerdi ha`m ten`sizliklerdi sheshiwde paydalanıw.

Bul basqış izertlenetug`ın funktsiya menen baylanıslı tiykarg`ı tu`siniklerdi ha`m teoriyalıq qag`ıydalardı bekkemlew, sonday-aq, sa`ykes uqıplılıqlardı ha`m ko`nlikpelerdi qa`liplestiriw basqışı.

Bul metodikalıq sxema qa`legen funktsiyanı izertlew ushın ayrıqsha bir joba- bag`darlama boladı. Funktsiyanın` grafikalıq su`wretleniwi ha`reket funktsional baylanıstı ko`z aldımızg`a keltiriwge g`ana emes al funktsiyanın` qa`siyetlerin u`yreniwdi an`satlastırıwg`a da imkaniyat jaratadı. Usılardı esapqa alıp bul pitkeriw qa`niygelik jumıstın` temasın «Funktsiyanın` grafikleri ha`m grafiklerdi tu`rlendiriwlerin u`yretiw usılları» dep tan`lap aldıq. Bul jumıstın` tiykarg`ı bo`legi bes paragrafke bo`lingen. Birinshi paragrafta sızıqlı funktsiyanın` grafigi haqqında tu`sinik berilip bul funktsiyanın` grafiklerin jasaw mısallar ja`reminde ko`rsetilgen. Pitkeriw qa`niygelik jumıstın` ekinshi paragrafta kvadrat funktsiyanın` grafigi ha`m onı jasaw usılları ko`rip o`tilgen. Bul jumıstın` u`shinshi paragrafi bo`lshek da`rejeli funktsiyalardıń grafigi haqqında tu`sinik berilgen bunda da`slep bo`lshek sızıqlı funktsiya ha`m olardıń grafiklerin jasaw usıllarına tu`sinik berilip bir neshe mısallar berilip keyin bo`lshek da`rejeli funktsiyalardıń grafigin jasaw usılları haqqında aytilg`an mısallarda grafiklerdi jasawdın` bir neshe usılları ko`rsetilgen. Pitkeriw qa`niygelik jumıstın` to`rtinshi paragrafi ko`rsetkishli funktsiyanın` grafigine arnalg`an bolıp bunda ko`rsetkishli funktsiya ha`m onın` qa`siyetleri ko`rsetilgen ha`m olardan paydalanıp funktsiyanın` grafigin jasaw anıq mısallar tiykarında orınlang`an. Pitkeriw qa`niygelik jumıstın` besinshi paragrafta funktsiya grafiginin` xarakterli noqatları haqqında aytilıp bunda: funktsiya grafiklerinin` koordinata ko`sherleri menen kesilisiw noqatları; funktsiya anıqlanıw oblastının` shegaralarındag`ı limit ma`nisi; funktsiyag`a ekstremum beriwshi noqatlar; funktsiyanın` nolleri; (burılıw) iyiliw noqatları haqqındag`ı tu`sinikler berilip, olardıń funktsiyanın` grafigin jasawdag`ı a`hmiyeti haqqında ken` tu`rde mısallar ja`rdeminde bayan etilgen .

## § 1 Sıziqlı funksiyanın` grafigi.

$l$  tuwrı sıziqlı koordinatalar tegisliginin` birinshi ha`m u`shinshi shereklerinde  $O(0,0)$  koordinatalar basınan o`tsin.



1-su`wret

Onda  $O$  noqatına salıstırğ`anda simmetriyalı  $M(x_0, y_0)$ ,  $M'(-x_0, -y_0)$  noqatları ha`m  $N(1, k)$  noqattı belgileymiz.  $\alpha = \angle lOx$  -tuwrı sıziqlı penen abtsissa ko`sherinin` on` bag`ıtı arasındag`ı su`yir mu`yesh,  $k = \frac{y_0}{x_0} = \operatorname{tg} \alpha > 0$  tuwrı sıziqlı mu`yeshlik koeffitsenti.  $\triangle OAN$  ha`m  $\triangle OB'M'$  u`shmu`yeshliklerinin` uqsaslıg`ıman  $\frac{k}{l} = \frac{y_0}{x_0}$  yaki  $y_0 = kx_0$  boladı. Sol sıyaqlı  $\triangle OAN$  ha`m  $\triangle OB'M'$  uqsaslıg`ıman  $y_0 = kx_0, k > 0$  di alamız.

$l$  tuwrı sıziqlıqa ordinata ko`sherine qarata simmetriyalı bolg`an  $l'$  tuwrı sıziqlı qarayıq.  $P$  noqat  $M$  ge,  $P'$  noqat  $M'$  simmetriyalı bolsın.  $\frac{k}{l} = \frac{y_0}{-x_0} = \frac{-y_0}{x_0}$  proporsiyag`a iye bolamız,  $y_0 = -kx_0$  boladı, bunda  $k = -\operatorname{tg} \alpha, \alpha = l'Ox$  -dog`al mu`yesh.

Solay etip, koordinata basınan o`tiwshi ha`m  $k > 0$  de dog`al mu`yesh payda etiwshi tuwrı sıziqlı  $y = kx$  funksiyanın` grafiginen ibarat.

$y = kx + l$  sıziqlı funksiya grafigi  $y = kx$  funksiyanın` grafigin ordinata ko`sheri boyınsha  $l$  birlik parallel ko`shiriw menen jasaladı. Bunnan birdey  $k$  koeffitsentli sıziqlı funksiyalardıń grafikleı o`z-ara paralel bolıwı kelip shıg`adı.

Koordinata tegisligidagi  $L(a,b)$  noqat orqali mu'yeshlik koeffitsenti  $k$  g'a teng bolgan tek bir tuwri sızıq o'tedi, bunda  $k$  aldinnan berilgen san. Onin ten'lemesi  $y = k(x-a) + b$  boladi. Sızıq  $y = kx$  funktsiyanin grafigin parallel ko'shiriw orqali payda etiledi, bunda  $O(0,0)$  koordinatal bası  $L(a,b)$  noqatqa o'tedi.

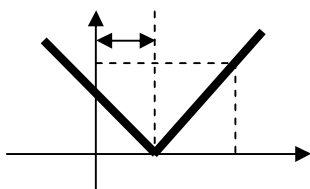
Sızıqlı funktsiyalardin grafigin jasawg'a misallar keltiremiz.

1-misal.  $M(2;-3)$  noqattan o'tiwshi ha'm  $y = 5x - 6$  tuwri sızıqqa parallel bolgan tuwri sızıq ten'lemesin du'zemiz.

Izlenip atirgan tuwri sızıq  $y = 5x - 6$  tuwri sızıqqa parallel, demek onin mu'yeshlik koeffitsentide  $k = 5$ . Tuwri sızıq  $M(2;-3)$  noqattan o'tedi. Demek onin ten'lemesi  $y = 5(x-2) - 3$  yamasa  $y = 5x - 13$  boladi.

2-misal.  $y = |x-2|$ .

1-usıl. Berilgen  $y = |x|$  funktsiyanin grafigin jasaymız. Koordinatalar ko'sherin aldın ala shtrix sızıqlarda sızamız. Keyin,  $y$  ko'sherin  $(-2)$  ge qozg'aymız.  $x$  ko'sheri ornında qaladı (2-su'wret).



2-su'wret

2-usıl. Grafikti eki shaqadan turatug'in ha'm ha'r qaysısı o'zinin analitikaliq an'latpasına iye dep qarastıramız.

a)  $x-2 \geq 0$  bolg'anda  $y = x - 2$

b)  $x-2 \leq 0$  bolg'anda  $y = -x + 2$ .

Bul eki shaqada tuwri sızıqtı beredi. Olardin ha'r birin, eki noqat boyınsha jasaw mu'mkin. Grafiktin eki shaqasında  $y = 0$  bolg'anda ulıwma bir noqatqa iye; usı noqattın abstsissasın esaplaymız.

$$y = |x-2| = 0;$$

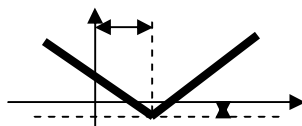
$$x = 2$$

Grafiktin` eki shaqası ushın ulıwma (2;0) noqatqa iye boldıq. Ha`r bir shaqa ushın ja`ne bir noqattın` koordinatın tabamız:

On` shaqa ushın  $x = 5; y = 5 - 2 = 3; (5; 3)$  noqat

Shep shaqa ushın  $x = 0; y = 0 + 2 = 2; (0; 2)$  noqat

3-mısal.  $y = |-x + 3| - 1$



3-su`wret

1-usıl. Berilgen funksiyanın` grafigin jasaw ushın, onı to`mendegishe tu`rlendiremiz. (-1) belgini qawsırmanın` sırtına shıg`aramız:  $y = -|x - 3| - 1$

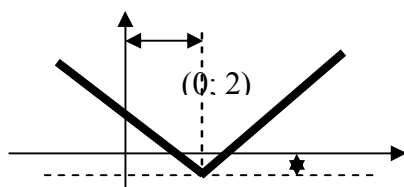
Berilgen  $y = |-x| = |x|$  grafikti shtrixlang`an koordinatalar ko`sherine jaylastıramız. Keyin,  $y$  ko`sherin (-3) ke ko`shiremiz ha`m  $x$  ko`sherin [-(1)] ge yag`nıy (+1).

2-usıl. Grafik eki shaqag`a ha`m olardıń ha`r biri o`zinin` ten`lemelerine iye.

a)  $-x + 3 \geq 0$  bolg`anda, yag`nıy  $x \leq 3$  bolg`anda  $y = -x + 3 - 1$  yamasa  $y = -x + 2$

b)  $-x + 3 \leq 0$  bolg`anda, yag`nıy  $x \geq 3$  bolg`anda  $y = (-x + 3) - 1 = x - 3 - 1$  yamasa  $y = x - 4$ .

Bul yarım tuwrılardıń ulıwma noqatının` koordinataların tabamız



4-su`wret

$-x + 2 = x - 4, 2x = 6, x = 3; y = -1$  ulıwma noqat (3;-1)

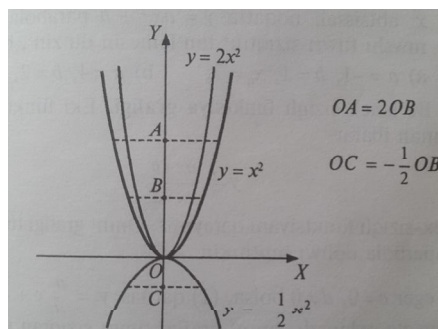
Ha`r bir yarım tuwrı ushın qosımsha noqatlar:

On` shaqa ushın  $x = 4; y = 4 - 4 = 0; (4; 0)$  noqat

Shep shaqa ushın  $x = 0; y = 0 + 2 = 2; (0; 2)$  noqat.

## § 2. Kvadrat funksiyanın grafigi

$y = x^2$  funksiyası bizge to'mengi klasslardan tanis. Onın grafigi, to'besi koordinata bası  $O(0,0)$  noqatında ha'm ushları joqarig'a qaray bag'itlang'an parabola



(5-su'wret).

$y = ax^2$  funksiya grafigi bolsa,  $x^2$  parabolani abtissalar ko'sherinen  $a$  koefitsent penen soziw ( $|a| > 1$  de) yamasa qisiw ( $|a| < 1$  de) arqalı payda boladı.  $a < 1$  de  $y = ax^2$  parabola  $Ox$  ko'sherine qarata simmetriyalı sa'wlelenedi. Erikli  $a \neq 0$  de  $y = ax^2$  funksiya grafigi paraboladan ibarat.

Kvadrat u'sh ag'zalınnı ulıwma ko'rinisi :

$$y = ax^2 + bx + c$$

bunda  $a$ ,  $b$  ha'm  $c$  qa'legen haqıyqiy sanlar (on', teris, ratsional ha'm irratsional).

Kvadrat u'sh ag'zalınnı grafiklerin izertlew ushın eki usıldı qarastıramız.

1) Toliq kvadratqa ajratıw usılı ha'm grafikti keyingi qurıwında jasalma usıldı qollanamız.

2) Kvadrat u'sh ag'zalınnı grafigin arnawlı izertlewge tiykarlanıp jasaymız.

1-usıl. a) on' jag'ındag'ı u'sh ag'zalınnı eki ag'zag'a ajratamız ha'm birinshi  $a$  koefitsent qawsırmanın sırtına shıg'arladı, yag'nıy

$$y = (ax^2 + bx) + c$$

$$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a} x \right) + c$$

b) qawsırmanın` ishindegi an`latpanı kvadrat eki ag`zalı dep qarastırıw mu`mkin.  $x^2$  ha`m  $\frac{b}{a}x = 2x \cdot \frac{b}{2a}$ . Bunnan ko`rinip turıptı, ekinshi ag`za  $\frac{b}{2a}$  boladı, al onnıń kvadratı  $\frac{b^2}{4a^2}$ .

Onda

$$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c$$

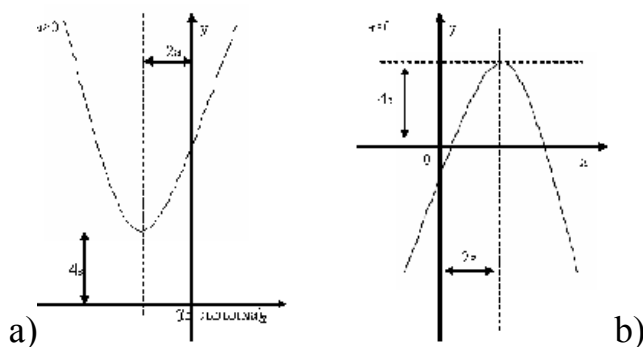
$$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c - \frac{b^2}{4a^2}$$

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{4a^2} \right)$$

v) Tu`rlendirilgen kvadrat u`sh ag`zalınnıń grafigin jasaw ushın, berilgen grafikti:

1).  $a > 0$  bolg`anda funksiyanıń grafigi  $y = x^2$

2).  $a < 0$  bolg`anda funksiyanıń grafigi  $y = -x^2$



6-su`wret

6-su`wretde berilgen grafiktin` koordinata ko`sherleri ha`m grafik shtrix sızılmalarda ko`rsetilgen. Vertikal ko`sherlerde, en` jaqsısı shtrix sızılmalarda ko`rsetiw ha`m ol grafiktin` simmetriya ko`sheri boladı.

g)  $y$  ko'sheri  $\frac{b}{2a}$  shama g'a jılısadı, sonın` ushın  $y_1 = \pm \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

funktsiyanın` grafigi alınadı. Keyin bul grafik  $|a|$  ma`rtebe sızılıp (qısılıp) ha`m

$y_1 = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  grafigi alınadı.

d)  $x$  ko'sheri  $-\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(\frac{b^2}{4a} - c\right)$  shamasına jılısadı. Yadqa tu`siremiz

kvadrat u`sh ag`zalının` diskriminantı  $D = b^2 - 4ac$

Bunnan,  $x$  ko'sheri  $\frac{D}{4a}$  shamasına jılısadı, ol  $\frac{b^2}{4a} - c$  g'a ten`.

Solay etip,  $y = ax^2 + bx + c$  kvadrat u`sh ag`zalının` grafigi jasaladı.

Grafikti bul usılda jasawdag`ı kemshilikler:

1) Iymekliktin` koordinata ko'sherleri menen kesilisiw noqatları anıqlanbaydı. Sol sebepten bul noqattın` koordinataları, grafikti jasag`annan keyin, qosımsha esaplanadı.

2)  $x^2$  tın` koeffitsentlerine baylanıslı grafikti soziwdın` za`ru`rligi. Sol sebepten iymek sızılıq eki ma`rtebe jasaladı.

Bul kemshiliklerdin` ekinshisi bolmaydı, egerde  $a = \pm 1$  bolsa. Onda funksiya  $y = \pm x^2 + px + q$  boladı.

$y$  ko'sheri  $\pm \frac{p}{2}$ ;  $\begin{cases} \frac{p}{2} \\ -\frac{p}{2} \end{cases}$  boladı,  $\begin{cases} y = x^2 + px + q \\ y = -x^2 + px + q \end{cases}$  funksiya ushın.

$x$  ko'sheri  $\pm \left(\frac{p^2}{4} - q\right)$ ;  $\begin{cases} \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \\ -\left(\frac{p^2}{4} - q\right) \end{cases}$  boladı,  $\begin{cases} y = x^2 + px + q \\ y = -x^2 + px + q \end{cases}$

funktsiyanı ushın.

Ko`rsetilgen sheshimlerden birinshisi aydarlıqtay kemshilikke jatpaydı. Sebebi koordinatalar ko'sherleri grafiktin` kesilispesin, tekseriw ushın dep

qaraw mu'mkin. Sonin` ushında, qosımsha tekseriw noqatların almassada boladı.

2-usıl. Bizge ma`lim, kvadrat u`sh ag`zalınin` grafigi, vertikal ko`sherge simmetriyalı parabolanı beredi. Egerde  $a > 0$  bolsa, onda parabola joqarıg`a bag`ıtlang`an, al parabolanın` to`besinin` ordinatası funksiyanın` minimumın beredi (6 a-su`wret). Egerde  $a < 0$  bolsa, onda parabolanın` shaqası to`men bag`ıtlang`an, al parabolanın` to`besinin` ordinatası funksiyanın` maksimumın beredi (6 b-su`wret).

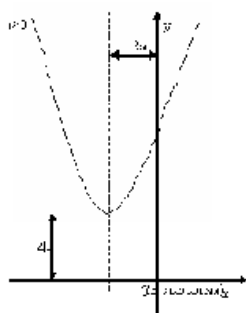
Kvadrat u`sh ag`zalı funksiyanı izertlegenimizde, ulıwma sxema boyınsha dawamlaw mu'mkin. Biraqta bul jag`dayda za`ru`rlik joq. Sebebi kvadrat u`sh ag`zalınin` ko`rnisi boyınsha,  $x$  tın` qa`legen haqıyqıy ma`nisti qabil etiw mu'mkinligi jen`il anıqlanadı, yag`nıy funksiyanın` bar bolıw oblasti  $(-\infty; +\infty)$  interval, al  $y$  ko`sheri boyınsha grafik parabolanın` to`besi menen shegaralang`an. Sonin` ushında, birinshi koeffitsenttin` belgisi boyınsha salıstırmalı parabolanın` to`besinin` jaylasıwınan (maksimum, minimum), birden xarakterli noqatların anıqlawg`a o`tiw mu'mkin.

1) Parabola  $x$  ko`sherin kesip o`tiwin anıqlaw ushın, berilgen u`sh ag`zalınin` diskriminatın esaplaymız:  $D = b^2 - 4ac$  (1)

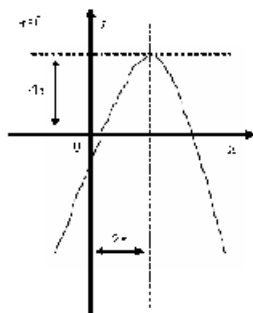
Egerde  $D > 0$  bolsa, onda parabola  $x$  ko`sherin eki noqatta kesip o`tedi. Funktsiyanın` grafiginin`  $x$  ko`sherin kesip o`tiw noqatları  $y = ax^2 + bx + c = 0$  an`latıladi. Aling`an kvadrat u`sh ag`zalı  $D > 0$  bolg`anda eki haqıyqıy korengi iye:  $x_1, x_2$ .

Egerde  $D = 0$  bolsa, onda parabola o`zinin` to`besi menen  $x$  ko`sherine tiyip o`tedi. Sebebi  $D = 0$  bolg`anda  $x_1 = x_2$  boladı.

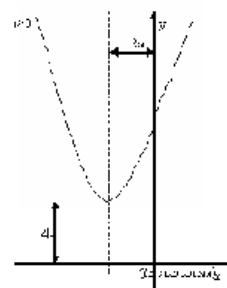
Egerde  $D < 0$  bolsa, onda parabola  $x$  ko`sherin kespeydi ha`m tiyipte o`tpeydi. Bul jag`dayda  $\sqrt{D}$  minimum shamanı beredi ha`m  $y = 0$  ten`leme haqıyqıy sheshimge iye emes.



a)

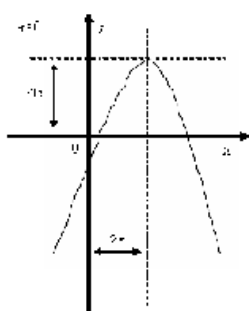


b)

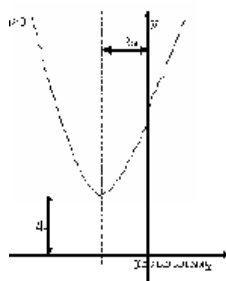


s)

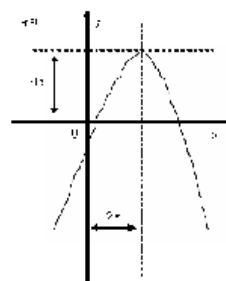
### 7-su`wret



a)



b)



c)

### 8-su`wret

2) Egerde  $D \geq 0$  bolsa, onda grafikning  $x$  ko`sheri menen kesilishi noqatlarining koordinatalari esaplanadi. Oning ushin  $ax^2 + bx + c = 0$  tengleme sheshiledi. Bunnan  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$  iye bolamiz.  $x_1$  ushin kishi sheshimni alish usulini etiledi. Bugan parabolani simmetriya ko`sherining shep jag`ida jatiwshi noqat sa`ykes keledi.

Bul noqatlar  $x$  ko`sherine tu`siriledi. Olardi ajralip turatug`in belgi menen tu`siriw usulini etiledi. Birinshi koeffitsent  $a > 0$  bolg`anda 7-su`wretde, al  $a < 0$  bolg`anda 8-su`wretde ko`rsetilgen.

3) Parabolaning to`besinin  $(x_0; y_0)$  koordinatalari aniqlanadi

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}. \quad (2)$$

$x$  ko`sherin kesip o`tiwshi parabolalar ushin  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  formula boyinsha aniqlag`an qolayli. Al  $x$  ko`sherine tiyip o`tiwshi parabola ushin

$x_0 = x_1 = x_2$  ha'm  $x$  ko'sherin kesip o'tpeytug'in parabola ushin  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  formulalarin qollang'an maqul.

Egerde  $a = 1$  bolsa, onda  $x_0 = -\frac{p}{2}$  boladi.  $x_0$  aniqlang'annan keyin, grafikte  $x = x_0$  ten'lemege iye bolg'an, parabolanning vertikal ko'sherin jasaymiz.

$x_0$  ushin (3) formulada ko'rinip tur, parabolanning ko'sherlerinin jasaliwi saltan' shamasinan baylanissiz. Egerde saltan' ag'zanı o'zgartip, kvadrat u'sh ag'zalinin' basqa koeffitsentlerin o'zgerissiz qaldirsaq, onda parabola o'zinin' ko'sheri boylap qozg'aladi. Bul aytilg'an sızılma (7a, b, v-su'wret)  $a > 0$  ushin, (8 a, b, v-su'wret)  $a < 0$  ushin ko'rsetilgen.  $y_0$  di aniqlaw ushin, kvadrat u'sh

ag'zalig'a  $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$  ma'nisti beremiz,

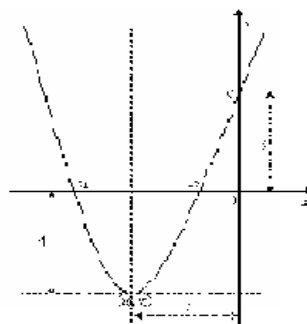
na'tiyjede  $y_0 = ax^2 + bx + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$

$$y_0 = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{1}{4a}(b^2 - 4ac) = -\frac{D}{4a} \text{ iye bolamiz.}$$

Solay etip,  $y_0$  di esaplaw ushin  $y_0 = -\frac{D}{4a}$  formulani qollanawimiz maqsetke muwapiq boladi.

4)  $y$  ko'sheri menen parabolanning kesilisiw noqatlarinin' koordinatalari esaplaniladi. Onin' ushin kvadrat u'sh ag'zalig'a  $x=0$  di qoyamiz  $y = ax^2 + bx + c = c$ . Sızılmada  $(0, c)$  sa'ykes keliwshi noqat jaylastiriladi. Keyin, og'an sa'ykes keliwshi simmetriyalı noqat jaylastiriladi.

5)  $D > 0$  de u noqat boyinsha iymek ju'rgiziledi,  $D \leq 0$  bolg'anda u'sh noqat boyinsha iymek ju'rgiziledi. Qosimsha (ayiqsha, u'sh noqat boyinsha iymekti jasag'anımızda) ja'ne bir tekseriw noqatin ha'm og'an simmetriyalı noqat alıwımız mu'mkin.



9-su`wret

1-mısal  $y = x^2 + 6x + 5$

1-usıl. u`sh ag`zalını tu`rlendiremiz:

$$y = (x^2 + 6x) + 5 = (x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2) + 5 = (x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2) - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4,$$

Solay etip,  $y = (x + 3)^2 - 4$ . Berilgen  $y = x^2$  funksiyanın` grafigi` jasaladı. Bul grafik  $y$  ko`sheri boyınsha 3 ke jıstırıladı, yag`nıy 3 birlikke on`g`a,  $x$  ko`sheri boyınsha -4 ke jıstırıladı, yag`nıy 4 birlikke to`menge.

Koordinata ko`sherleri jasalg`annan keyin grafiktin` koordinata ko`sherleri menen kesilisiw noqatların anıqlaw za`ru`r.

2-usıl. Parabolanın` to`besi minimum noqat boladı (parabolanın` shaqası joqarıg`a qarag`an), sebebi  $a=1>0$ .

a)  $D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 > 0$ , parabola  $x$  ko`sheri menen eki noqatta kesilisedi.

b)  $x^2 + 6x + 5 = 0$  ten`lemeni sheshemiz (Viet teoreması boyınsha),  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = -1$  iye bolamız ha`m onı  $x$  ko`sherinde belgileymiz (9-su`wret).

v) Parabolanın` to`besinin` koordinataların anıqlaymız  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 - 1}{2} = -3$  ha`m  $y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{16}{4 \cdot 1} = -4$  ( $x_0$  ha`m  $y_0$  di anıqlag`anımızdan son`, parabolanın` ko`sherin ju`rgizemiz).

g) Grafiktin`  $y$  ko`sheri menen kesilisiwi S noqatı  $y = 5$  ordinatag`a iye ( $x=0$  bolg`anda). 9-su`wretde S(0;5) noqat ha`m og`an simmetriyalı  $C_1(-6; 5)$  noqat jasalg`an.  $C_1$  noqatının` abstsissasın  $X_{c_1} = 2x_0 = 2 \cdot (-3) = -6$  tu`rinde esaplanadı.

2-mısal.  $y = -x^2 - 6x + 1$

1-usul. u`sh ag`zalını tu`rlendiremiz:

$$y = -(x^2 + 6x) + 1 = -(x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2) + 1 = -(x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2) + 3^2 + 1 \sim$$

$$y = -(x+3)^2 + 10$$

Berilgen  $y = -x^2$  funktsiya  $y$  ko`sheri boyınsha (3) ke,  $x$  ko`sheri boyınsha (-10) g`a jılısadı.

2-usul. Parabolanın` shaqaları to`men qarag`an ha`m to`besi maksimum boladı. Sebebi  $a = -1 < 0$ .

$$1) D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(-1 \cdot 1) = 36 + 4 = 40 > 0$$

$$2) -x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ ten`lemini sheshemiz: } x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{D}}{-2} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{-2} \approx \frac{6 \pm 6,4}{-2}$$

$$x_1 \approx -6,2; \quad x_2 \approx 0,2$$

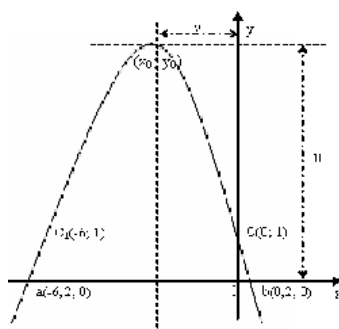
$$3) \text{ Parabolanın` to`besinin` abstsissası: } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-6,2 + 0,2}{2} = -3 \quad y$$

ko`sherinen (-3) aralıqta parabolanın` vertikal ko`sheri o`tkeriledi. Parabolanın`

$$\text{to`besinin` ordinatası } y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{40}{4(-1)} = 10$$

4) Grafiktin`  $y$  ko`sheri menen kesilisiwshi S noqatının` ordinatası ( $x=0$  bolg`anda)  $y = c = 1$ .

$$5) D \text{ noqatının` koordinatası: } x = -1 \text{ bolg`anda } y = -(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 6$$

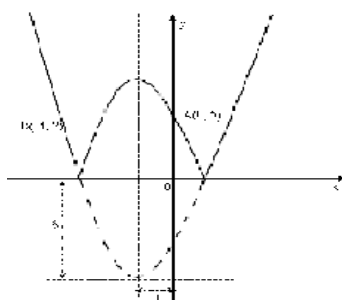


10-su`wret

$$3-mısal. y = |-x^2 - 2x + 5|$$

Bul jerde funktsiya modulde berilgen, onda moduldin` ishindegi belgini kerige o`zgertiw mu`mkin. Bul bolsa bizge qandayda bir qolaylı jag`day tuwg`ızadı. Na`tiyjede  $y = |x^2 + 2x - 5|$  iye bolamız. Berilgen funktsiyanın`

grafigin jasaw rejisi to`mendegishe:  $y = x^2 + 2x - 5$  parabolani shtrix sızıq penen jasaymız. Keyin  $y$  ko`sherinin` ma`nisinde jaylasqan grafiktin` bo`legin,  $x$  ko`sherine salıstırg`anda simmetriyalı tu`rde sa`wlelendiremiz (11-su`wret).



11-su`wret

Funktsiyanın` ja`rdemshi parabolası  $y = x^2 + 2x - 5$  grafigin qurıw ushın bir usıldan paydalanamız. Onın` ushın funktsiyanı  $y = x^2 + 2x - 5 = ((x^2 + 2x + 1) - 1 - 5) = (x + 1)^2 - 6$  tu`rlendiremiz.  $y$  ko`sheri (1) ge,  $x$  ko`sheri 6 g`a jılistırıladı.

Parabolanın` to`mengi shaqası (shtrixlang`an)  $x$  ko`sherine salıstırg`anda simmetriyalı to`mennen joqarıg`ı yarım tegislikke o`tkeriledi.

Tekseriw noqatları:

a)  $x=0$  bolg`anda  $y = |-5| = 5$ ;  $(0; 5)$  noqat

b)  $x=-4$  bolg`anda  $y = |-16 + 8 + 5| = |-3| = 3$ ;  $(-4; 3)$  noqat.

4-mısal.  $y = -x^2 + 2|x + 2| + 4$

Bul funktsiya ekige ajırıladı.

1) Egerde modul astındag`ı an`latpa  $x + 2 \geq 0$  yag`nıy  $x \geq -2$ , onda  $|x + 2| = x + 2$  ha`m  $y = -x^2 + 2(x + 2) + 4 = -x^2 + 2x + 4 + 4$  yag`nıy

$$y = -x^2 + 2x + 8 \quad (a)$$

2) Egerde  $|x + 2| \leq 0$  yag`nıy  $x \leq -2$ , onda  $|x + 2| = -(x + 2)$  ha`m  $y = -x^2 - 2(x + 2) + 4 = -x^2 - 2x - 4 + 4$  yag`nıy

$$y = -x^2 - 2x \quad (b)$$

$x + 2 = 0$  bolg`anda, yag`nıy  $x = -2$  ko`rinip turıptı, (a) ha`m (b) an`latpalar bir noqattı beredi:

$$(a) \text{ an'latpadan } y = -(-2)^2 + 2(-2) + 8 = -4 - 4 + 8 = 0$$

$$(b) \text{ an'latpadan } y = -(-2)^2 - (-2) = -4 + 4 = 0$$

Bul  $A(-2;0)$  noqatti sızılmada belgileymiz. Usı sızılmada (a) ha'm (b) parabolalardı shtrix sızıqlar menen jasaymız.

Eki parabola ushın koordinata ko'sherleri birdey bolg'anlıqtan, olardıń grafiklerin ko'sherlerdi jılıtıw usılı menen jasawg'a bolmaydı. Sonlıqtan eki funktsiya ushın ulıwma izertlew ju'rgizemiz.

$$a) y = -x^2 + 2x + 8$$

Parabolanın' shaqası to'men bag'ıtlang'an, yag'nıy onın' to'besi maksimum noqat boladı.

Diskriminant  $D=2^2-4(-1)8=36>0$ . Parabola  $x$  ko'sherin eki noqatta kesip o'tedi.  $y = -x^2 + 2x + 8 = 0$  bolg'anda

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} = 1 \pm 3; \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Parabolanın' abstsissa ko'sheri  $x_0 = \frac{-2+4}{2} = 1$ . Parabolanın' ordinatası

$y_0 = -\frac{36}{4(-1)} = 9$ ,  $y$  ko'sheri menen parabola  $y = 8$  bolg'anda kesilisedi, yag'nıy  $(0;8)$  noqatta. Bug'an simmetriyalı noqat  $x=2$   $x_0=2 \cdot 1=2$  ha'm  $u=8$  koordinatalarına iye,  $(2;8)$  noqat.

$$b) y = -x^2 - 2x$$

Funktsiya kvadrat u'sh ag'zalının'  $s=0$  bolg'andag'ı dara tu'ri. Onın' grafigi koordinatalar basınan o'tetug'in parabola. Sebebi  $u=-x^2-x$  ten'lemesi  $x=0$  ha'm  $u=0$  ma'nislerdi qanaatlandıradı. Parabolanın' to'besi maksimum noqat boladı.

Ten'lemenin' on' jag'ın ko'beytiwshilerge jikleymiz:

$$y = -x(x+2)$$

Bunnan  $-x(x+2) = 0$  ten'lemenin' korenleri

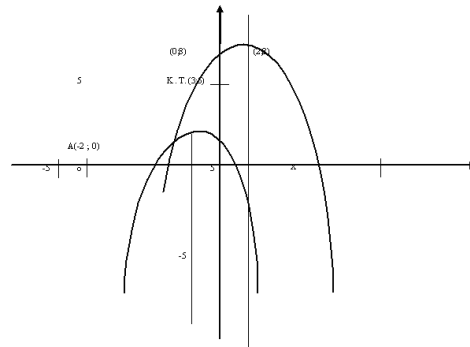
$$x_1 = 0; x_2 = -2$$

Parabolanın ko'sheri  $y$ -ko'sherinen  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 - 2}{2} = -1$  aralıqta jaylasadı.

Parabolanın to'besinin ordinatası

$$y_0 = -x_0(x_0 + 2) = 1(-1 + 2) = 1$$

$y$ -ko'sheri menen parabola  $(0;0)$  noqatta kesilisedi. Bul noqatqa simmetriyalı noqatın koordinatı  $x=2$   $x_0=-2$  ha'm  $y=0$  yag'niy  $(-2;0)$ . Esaplang'an noqatlar boyınsha eki parabolada shtrix sızıqlar menen sızılğ'an



12-su'wret

Da'slepki sha'rtti qarasaq, a) funktsiya  $x > -2$  bolg'anda berilgen grafikni an'latadı yag'niy  $x = -2$  noqatının on' ta'repi, b) funktsiya  $x \leq -2$  bolg'anda, yag'niy  $x = -2$  noqatının shep ta'repi. Parabolanın bul ko'rsetilgen bo'leklerin yag'niy (a) ha'm (b) lardı u'zliksiz sızıqlar menen ju'rgizemiz.

Keyin, shtrix penen sızılğ'an bo'leklerdi alıp taslawımız mu'mkin.

Tekseriw noqatları:

1)  $x = 3; y = -3^2 + 2|3 + 2| + 4 = -9 + 10 + 4 = 5; (3, 5)$  noqat,

2)  $x = -3; y = -(-3)^2 + 2|-3 + 2| + 4 = -9 + 2|-1| + 4 = -9 + 2 + 4 = -3; (-3, -3)$

noqat.

5-mısal.  $y = |2x^2 - x|$

Ma'seleni sheshiw rejesi.

$y = 2x^2 - x$  ja'rdemshi funktsiyanın grafigi shtrix sızıqlar menen jasaladı.

Keyin,  $x$  ko'sherinin to'meninde jaylasqan grafik bo'legin, bul ko'sherge salıstırmalı simmetriyalı sa'wlelendiriledi.

$y = 2x^2 - x$  kvadrat funktsiyani,  $c = 0$  bolg`andag`ı kvadrat u`sh ag`zalinin` dara ko`rinishi dep qaraw mu`mkin. Onin` grafigi koordinatalar basınan o`tetug`ın parabola, parabolanın` shaqaları joqarig`a bag`itlang`an. Bul parabolani 2 usıl menen jasaw qolaylı. Sebebi  $2x^2 - x = 0$  ten`lemenin` sheshimi, ten`lemenin` shep ta`repi ko`beytiwshilerge tarqatıw arqalı jen`il tabıw mu`mkin.

$$2x^2 - x = x(2x - 1)$$

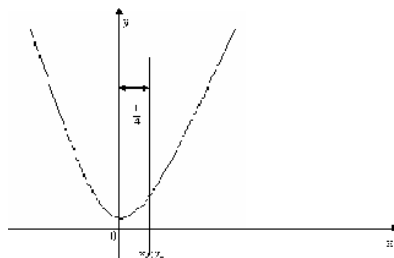
$$x(2x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Parabolanın` ko`sheri  $y$  ko`sherinen  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{4}$

aralıqta jaylasadı. Parabolanın` to`besinin` ordinatası

$$y_0 = 2x_0^2 - x_0 = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$



13-su`wret.

Tekseriw noqatları:  $x = 1$ ;  $y = (2 \cdot 1^2 - 1) = 1$ ; (1;1) noqat.

6-mısal.  $y = (5 - x)(x + 1)$

Bul an`latpanın` on` jag`ındag`ı ko`beymeni orınlasan`

$y = -x^2 + 4x + 5$  kvadrat u`sh ag`zalig`a iye bolamız. Biraqta, bunday etip jazıwdın` za`ru`rligi joq. Sebebi xarakterlik noqatlardan funktsiyanın` da`slepki ko`rinishinen tabıw an`sat boladı.

1)  $y = 0$  bolg`anda  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = -1$ ;  $x$  ko`sheri menen kesilisetug`ın (5;0) ha`m (-1;0) noqatlarg`a iye bolamız. Keyingi izertlewdi qa`dimgishe ju`rgizemiz.

2) Parabola ko`sherinin` abstsissası

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$$

Parabolanın to`besinin` ordinatası

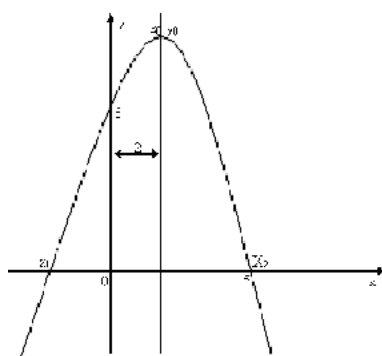
$$y_0 = (5 - x_0)(x_0 + 1) = (5 - 2)(2 + 1) = 9$$

3)  $y$  ko`sheri menen kesilisiw noqatı

$$x = 0; \quad y = (5 - 0)(0 + 1) = 5; \quad (0, 5) \text{ noqatı.}$$

Tekseriw noqatı:

$$x = 5,5; \quad y = (5 - 5,5)(5,5 + 1) = -3,25; \quad (5,5; -3,25) \text{ noqatı.}$$



14-su`wret

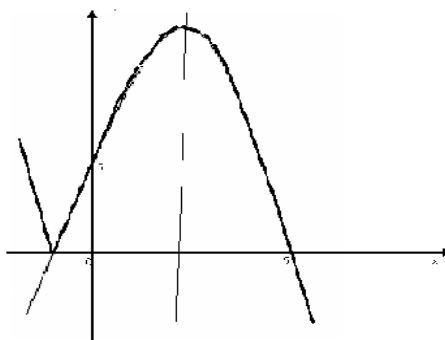
7-misal.  $y = (5 - x)|x + 1|$ .

Funktsiya ekige bo`linedi.

1)  $x+1 \geq 0$  bolg`anda, yag`ınıy  $x \geq -1$  bolg`anda  $y = (5 - x)(x + 1)$ . Bul funksiyanın` grafigin burın bizler ko`rdik (6-misal). 14-su`wretdegi grafikti jasaymız. Biraq onın`  $x \geq -1$  bo`legin tutas sızıqta, al basqa bo`legin shtrix sızıqta jasaymız.

2)  $x+1 \leq 0$  bolg`anda, yag`ınıy  $x \leq -1$  bolg`anda  $y = (5 - x)|-(x + 1)|$  yamasa  $y = (x + 5)(x + 1)$ . Absolyut shaması boyınsha bul parabolanın` ordinatası, birinshi  $y = (5 - x)(x + 1)$  parabolanın` ordinatasının` belgisi boyınsha qarama-qarsısına ten` ekenligin bayqawg`a boladı.

Sonlıqtan, onı izertlemey-aq,  $x \leq -1$  bolg`anda birinshi parabolanın` ordinatasın keri belgi menen grafikte belgileymiz. Yag`ınıy birinshi parabola grafiginin` shtrixlang`an bo`leginin` aynalıq sa`wlelendiriwın jasaymız.



15-su`wret

Tekseriw noqatları:

$$x = -1,5; \quad y = (5 + 1,5)|-1,5 + 1| = 6,5 \cdot 0,5 = 3,25; \quad (-1,5; 3,25) \text{ noqatı.}$$

8-mısal.  $y = (5 - |x|)(x + 1)$

Funktsiya ekige ajıraladı.

a)  $x \geq 0$  bolg`anda  $y = (5 - x)(x + 1)$ . Bul funktsiyanın` grafıgi 6-mısalda qaralg`an.  $x \geq 0$  bolg`anda bul grafıktin` bo`legın tutas sızıqta, al qalg`an bo`legın shtrix sızıqta jasaymız.

b)  $x \leq 0$  bolg`anda  $|x| = -x$ ;  $y = (5 + x)(x + 1)$  bul parabolannın` shaqası joqarıg`a qarag`an.

1)  $y = 0$  bolg`anda  $x_1 = -5$ ;  $x_2 = -1$

2) Parabolannın` to`besinin` abstsıssası:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 - 1}{2} = -3.$$

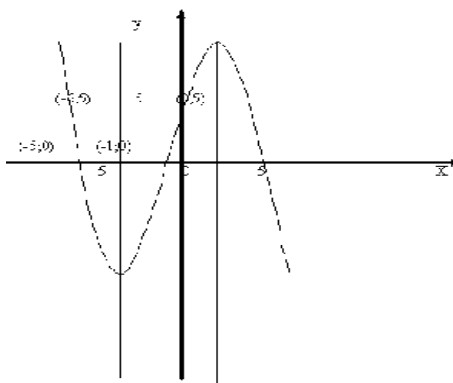
Parabolannın` to`besinin` ordinatası:  $y_0 = (5 - 3)(-3 + 1) = -4.$

3)  $x = 0$  bolg`anda  $y = 5 \cdot 1 = 5$ ;  $(0; 5)$  noqatı.

Bul noqat parabolannın`  $y$  ko`sheri menen kesilisiw ha`m birinshi parabola menen ulıwma noqat.

Tekseriw noqatı:

$$x = -6; \quad y = (5 - |6|)(-6 + 1) = -1(-5) = 5; \quad (-6; 5) \text{ noqatı.}$$



16-su`wret

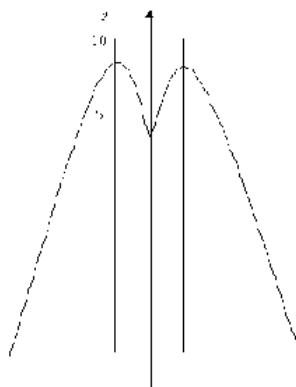
9-mısal.  $y = (5 - |x|)(|x| + 1)$

Berilgen funksiya jup funksiya. Sebebi  $f(-x) = (5 - |-x|)(|-x| + 1) = f(x)$ .

Sonn` ushın,  $x \geq 0$  bolg`anda da`slep grafiktin` on` jag`ın jasaymız.

Bul jag`dayda berilgen funksiyanı  $y = (5 - x)(x + 1)$  tu`rinde jazıwg`a boladı.

Bul funksiyanın` grafigin jasag`annan keyin, grafiktin` shep ta`repi  $y$  ko`sherine salıstırg`anda simmetriyalı jasaladı.



17-su`wret

### §3. Bo'lshek da'rejeli funktsiyalardın grafigi

Bo'lshek da'rejeli funktsiya grafigin u'yreniwden aldın bo'lshek-sızıqlı funktsiyanın grafigi haqqında so'z ju'ritemiz.

Eki funktsiyanın qatnasınan ibarat  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  (1) bo'lshek sızıqlı funktsiyanı qaraymız. Onın grafigi tuwrı sızıq yaki giperbola bolıwı mu'mkin:

1) eger  $c=0, d \neq 0$  bolsa (1) qatnas  $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$  sızıqlı funktsiyag'a aylanadı, onın grafigi tuwrı sızıqtan ibarat;

2)  $c \neq 0, \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = m$  bolsa,  $y = \frac{mcx+md}{cx+d} = m$  ge iye bolamız. Bull jag'dayda (1) funktsiya grafigi  $Ox$  ko'sherine parallel bolg'an ha'm  $M(-\frac{d}{c}; m)$  shıg'arılıwı kerek, sebebi  $y = m$  tuwrı sızıq boladı.

3)  $a \neq 0, \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ . Da'slep  $\frac{ax+b}{cx+d}$  bo'lsheginen pu'tin bo'legin ajıratamız:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}} = \beta + \frac{k}{x-\gamma},$$
 bunda  $\beta = \frac{a}{c}, k = \frac{bc-ad}{c^2}, \gamma = -\frac{d}{c}$  (2).

Bunnan ko'rinedi,  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  funktsiya grafigi  $y = \frac{k}{x}$  funktsiya grafigin parallel ko'shiriwler arqalı payda boladı, bunda koordinatalar bası  $L(\gamma, \beta)$  noqatqa o'tedi.  $\lambda, \beta$  ha'm  $k$  lar (2) formulalar boyınsha tabıladı.

Eki qısqarmaytug'ın putin-ratsional funktsiyanın (ko'pag'zalınnı) qatnasınan du'zilgen

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$$

funktsiya bo'lshek ratsional funktsiya dep ataladı. Bo'lshek-ratsional funktsiya

$$X = R \setminus \{x : x \in R, Q_m(x) = b_0x\}$$

ko`plikte, yag`niy bo`limi no`lge aylandiruvshı noqatlardan o`zgeshe bolg`an barlıq haqıyqiy sanlardan ibarat bog`an ko`plikke aytiladı.

Bo`lshek-sızıqlı funksiya-bul  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  tu`rindegi algebralıq bo`lshek, onın` alımı ha`m bo`limi sızıqlı funksiyaadan turadı.

Barlıq bo`lshek-sızıqlı funksiyanın` pu`tin bo`legin ajratıwg`a boladı.

Mısalı:

$$y = \frac{3-2x}{1-x} = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{(2x-2)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}$$

bo`lshek-sızıqlı funksiyanın` grafigin tikkeley izertlew usılı arqalı jasaw mu`mkin. Sonday-aq, jasalma usıldı qollanıp, funksiyanı aldın ala tu`rlendirilip, keyin grafigi jasaladı.

1-mısal.  $y = \frac{2}{|1+x|} = \left| \frac{2}{1+x} \right|$

1-usıl.  $y = \frac{1}{|x|}$  funksiyanın` grafigi shtrix sızıg`ı menen sızıladı. Keyin,  $y$  ko`sheri (+1) ge jılıyadı, bunnan son` grafik vertikal bag`ıtı boyınsha eki ese soziladı.

2-usıl. 1. Funktsiyanın` anıqlanıw oblastı  $x \neq -1$  sha`rtinen anıqlanadı;  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; +\infty)$  intervalg`a iye bolamız.  $x=-1$  tuwrısı vertikal asimtota boladı.

Funktsiyanın` o`zgeriwi:

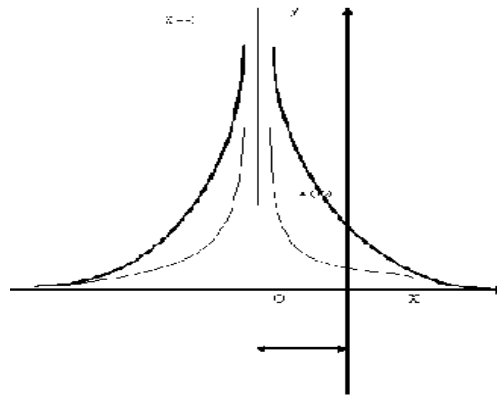
a)  $y \geq 0$  modul retinde.

b)  $y \neq 0$   $y \rightarrow 0$   $x \rightarrow \infty$  bolg`anda sha`rtlerinde shegaralang`an.

Bunnan  $y > 0$  yag`niy funksiya yarım tegisliktin` joqarısında jaylasqan  $y \rightarrow 0$  de  $x \rightarrow \pm\infty$  yag`niy  $x$  ko`sheri gorizantal asimtota boladı.

2. Funktsiyanın` grafigi  $y$  ko`sheri menen  $x=0$  de  $y=2$  yag`niy  $A(0;2)$  noqatda kesisedi.

3. Anıqlaw ha`m tekseriw ushın ja`ne bir noqattı esaplaymız. Mısalı  $x=-3$  te  $y = \frac{3}{|1-3|} = 1$ ;  $(-3;1)$  noqat.



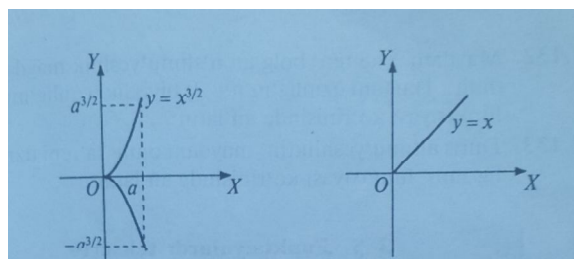
18-su`wret

$\alpha$  haqıyqıy san ha`m qa`legen  $x$  on` sanı ushın  $x^\alpha$  san barlıq waqıtta anıqlang`an boladı.  $x < 0$  ha`m  $\alpha = \frac{m}{n}$  bolg`anda  $y < x^\alpha$  funktsiya anıqlanbag`an. Biz  $x > 0$  jag`day menen shug`ıllanamız. Ha`r qanday  $\alpha$  san ushın  $(0, +\infty)$  on` sanlar ko`pliginde anıqlang`an  $y = x^\alpha$  funktsiya bar boladı. Og`an  $\alpha$  ko`rsetkishli da`rejeli funktsiya delinedi, bunda  $x$  - da`rejenin` tiykari. Da`rejeli funktsiya  $x=1$  de  $y=1$  den ibarat turaqlı funktsiyag`a aylanadı. Da`rejeli funktsiyanın` ayırım qa`siyetlerin keltirip o`temiz.

1. Da`rejeli funktsiya barlıq  $x > 0$  ma`nislerinde anıqlang`an.
2. Da`rejeli funktsiya  $(0, +\infty)$  de on` ma`nislerdi qabil etedi.
3.  $\alpha > 0$  de da`rejeli funktsiya  $(0, 1)$  aralıqta monoton kemeyedi,  $[1; +\infty)$  de monoton o`sedı.

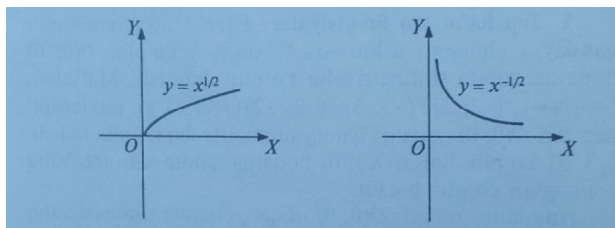
Da`rejeli funktsiya o`zinin` anıqlanıw oblastında bir ma`nisli, tek g`ana  $\alpha$  ko`rsetkishi jup bo`limli qısqarmaytug`ın bo`lshek san bolg`an jag`dayda eki ma`nisli boladı. Ko`p jag`daylarda da`rejeli funktsiyanın` eki ma`nisinen teris bolmag`an (arifmetikalıq) ma`nisi tan`lap alınadı.

$x > 0$  de  $\alpha$  da`reje ko`rsetkishi tu`rlishe bolg`an da`rejeli funktsiyalar grafikleri 19-22 su`wretlerde ko`rsetilgen.



19-su`wret

20-su`wret



21-su`wret

22-su`wret

19-su`wrette  $y = x^{\frac{3}{2}}$  yarım kublıq parabola su`wretlengen.

2-mısal.  $y = 3 - \sqrt{1 - 2x}$

1-usıl. Funktsiyanı sonday etip tu`rlendiremiz, x argumentke qosımsha ajralıp tursın.

$$y = 3 - \sqrt{2\left(\frac{1}{2} - x\right)} = 3 - \sqrt{2\left[-\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]} = 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{-(x - 0,5)} + 3$$

Berilegi funksiya:  $y = -\sqrt{-x}$ . Bul funksiya ushın anıqlanıw oblastı  $(-\infty; 0)$  yag`nıy shep yarım ko`sher. Funktsiyanın` o`zgeriw oblastı  $y \leq 0$ , sebebi radikaldın` belgisi minus.

Solay etip, funksiyanın` grafigi u`shinshi sherekte jaylasqan. Ol  $y = \sqrt{x}$  grafigine qıya simmetriyalı. Sızılma 1 de berilgen funksiya shtrix sızıg`ında ko`rsetilgen.

Keyin, y - ko`sheri argumentke qosılg`an shamag`a jılıstırıladı. Yag`nıy  $(-0; 5)$  ha`m alıng`an  $\sqrt{-(x - 0,5)}$  funksiyanın` grafigi  $\sqrt{2} \approx 1,4$  ma`rtebe sozıladı.

Bunnan keyin x-ko`sheri funksiyaq`a  $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{-(x - 0,5)}$  qosılg`an shamag`a keri jılııydı.

2-usıl. Funktsiyanı da`slepki o`zinin` tu`rinde alamız  $y = 3 - \sqrt{1 - 2x}$  anıqlanıw oblastı  $1 - 2x \geq 0$  sha`rtinen tabıladı; bunnan  $2x \leq 1$  ha`m  $x \leq 0,5$ . Anıqlanıw oblastı  $(\infty; 0,5)$ .

Funktsiya ulıwma ko`riniste, sebebi jup yamasa taq ha`m periodlı qa`siyetlerge iye emes.

x ko`sheri menen grafiktin` kesilisiw noqatı:

$$y=0 \text{ yag`nıy } 3-\sqrt{1-2x}=0; \text{ bunnan } \sqrt{1-2x}=3; 1-2x=9; 2x=8; x=4;$$

kesisiwshi bir noqatı  $A(4;0)$  qa.  $y$  ko`sheri menen kesilisiw noqatı :

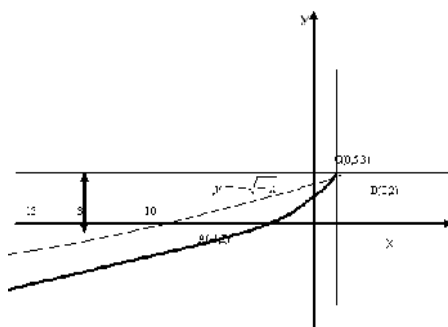
$$x=0, \text{ yag`nıy } y=3-\sqrt{1-0}=2 \text{ ja`ne bir kesisiw noqatı: } B(0;2)$$

Funktsiyanın` shegaralıq ma`nisleri

$$x=0,5 \text{ te, } y=3-\sqrt{1-1}=3; (0,5;3) \text{ noqatı } x \rightarrow -\infty \text{ te, } y \rightarrow -\infty.$$

ha`r tu`rli bo`leklerindeki iymekliktin` o`zgeriwi.

Barlıq aralıqta iymeklik o`siwshi.



23-su`wret

#### §4. Ko`rsetkishli funktsiyanin` grafigi

Aniqlama. Ko`rsetkishli yamasa eksponentsial (latinsha “eksponent”- “ko`rsetkish”) funktsiya dep,  $y = a^x$  ko`rinisindegi funktsiya aytiladi, bunda  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x$ -erikli o`zgeriwshi.

Ko`rsetkishli funktsiya ilimde ha`m texnikada u`lken a`hmiyetke iye. Ta`biyattag`i ko`p qubulislardi  $y = a^x$  ko`rinistegi funktsiya ja`rdeminde aniqlaw mu`mkin.

Ko`rsetkishli funktsiya to`mendegi qa`siyetlerge iye.

1<sup>0</sup>. Ko`rsetkishli funktsiyanin` aniqlanaw oblasti barliq haqiqiy sanlar ko`pliginen ibarat:  $D(a^x) = R^1$ .

2<sup>0</sup>. Ko`rsetkishli funktsiyanin` o`zgeriw oblasti:  $E(f)(0; +\infty) = R_+^1$  den ibarat.

3<sup>0</sup>. Funktsiya  $a > 1$  bolg`anda  $a^x$  funktsiya annı3lanaw oblastında o`siwshi,  $0 < a < 1$  bolg`anda bolsa kemeyiushi.

4<sup>0</sup>  $a > 1$  bolsın. Bul jag`dayda  $x > 0$  bolg`anda  $a^x > 1$ ,  $x < 0$  bolg`anda  $a^x < 1$ .

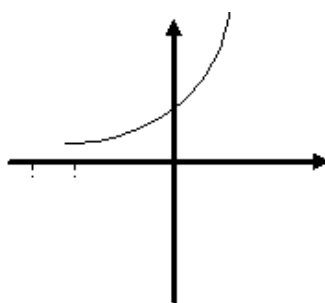
5<sup>0</sup>.  $0 < a < 1$  bolsın. Bul jag`dayda  $x > 0$  bolg`anda,  $a^x < 1$ ,  $x < 0$  bolsa  $a^x > 1$

6<sup>0</sup>. Eger  $a > 1$  bolsa, onda  $x \rightarrow +\infty$  de  $a^x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  de bolsa  $a^x \rightarrow 0$  boladı.

7<sup>0</sup> Eger  $0 < a < 1$  bolsa, onda  $x \rightarrow +\infty$  de  $a^x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow -\infty$  de bolsa  $a^x \rightarrow +\infty$  boladı.

8<sup>0</sup>.  $y = 0$  tuwrı sıziq  $y = a^x$  funktsiya grafiginin` gorizantal asimptotası boladı.

9<sup>0</sup>. Ko`rsetkishli funktsiyanin` grafigi aniqlanaw oblastında oyıs boladı.  $y = a^x$  ha`m  $y = a^{-x}$  funktsiyalarinin` grfikleri to`mendegishe boladı.



24-su`wret

1-misal.  $f(x) = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) ko`rinistegi u`zliksiz funktsiyanin` ayırım ma`nisleri kestdede berilgen:

$x$	1	2	3	4
$y$	3	9	27	81

Funktsiyanin` analitikalıq ko`rinisin du`zin`:

$f(1) = 3, f(2) = 9, f(1+2) = 27, f(1) \cdot f(2) = 3 \cdot 9 = 27$ , yag`nıy ko`rsetkishli funktsiyanin` funksionallıq qa`siyetinen qa`legen  $x$  ha`m  $z$  te  $f(x+z) = f(x) \cdot f(z)$  ten`lik orınlı, sebebi  $a^{x+z} = a^x \cdot a^z$ .

2-misal.  $y = 3^{|x+1|}$  grafigin jasan`.

1-usıl. Berilgen funktsiya  $y = 3^{|x|}$ . u-ko`sheri (+1) ko`shiriledi.

2-usıl. 1. Anıqlanıw oblastı:  $(-\infty; \infty)$ ;

1. Funktsiyanin` o`zgeriw intervalı

$$(x+1) > 0$$

$$1 \leq y < \infty$$

$$y \geq 3^0, y \geq 1$$

2. Funktsiyanin` ulıwma ko`rinisi, eki shaqadan turadı:

a)  $|x+1| \geq 0$  de  $y = 3^{x+1}$

b)  $|x+1| \leq 0$  de  $y = 3^{-(x+1)}$  yamasa  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

Ulıwma noqat:  $|x+1| = 0$  de  $x+1 = 0; x = -1; y = 3^{-1+1} = 3^0 = 1; A(-1;1)$

noqat.

3.  $y$ -ko`sheri menen kesilisiwshi noqat:

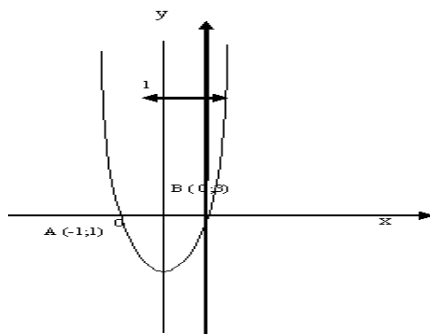
$$x = 0; y = 3^1 = 3; V(0;3) \text{ noqat}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3^{|x+1|} = \infty$$

$x+1 > 0$  de  $y = 3^{x+1}$  funksiya o`siwshi.

$x+1 < 0$  de  $y = 3^{-(x+1)}$  funksiya kemiwshi.

Argumenttin` o`siwine qarag`anda, funksiyanin` o`siwi ha`m kemiwi tezirek boladı.



25-su`wret

## §5. Funktsiya grafiklarining xarakterli noqatlarini ha'm simmetriya ko'sherleri

Funktsiya grafiginin xarakterli noqatlarina to'mendegi noqatlar kiredi: funktsiya grafiklarining koordinata ko'sherleri menen kesilish noqatlarini; funktsiya aniqlanish oblastinin shegaralarindagi limit ma'nisi; funktsiyaga ekstremum berish noqatlarini; funktsiyaning nollari; (burilish) iyilish noqatlarini.

1. Funktsiya grafiklarining koordinata ko'sherleri menen kesilish noqatlarini.

Funktsiya grafiklarining koordinata ko'sherleri menen kesilish noqatlarini aniqlawda to'mendegi jag'daylar qaraladi:

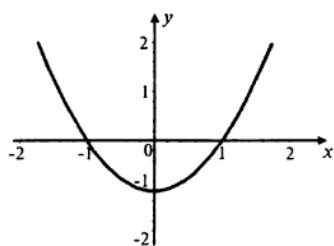
1)  $f(x)$  funktsiya grafiginin  $Oy$  ko'sheri menen kesilish noqatini tabiw ushin  $x=0$  dep,  $y=f(0)$  tabiw gerek:

2).  $f(x)$  funktsiya grafiginin  $Ox$  ko'sheri menen kesilish noqatini tabiw ushin  $y=0$  dep,  $f(x)=0$  ten'lemeden  $x$  ti tabiw gerek.

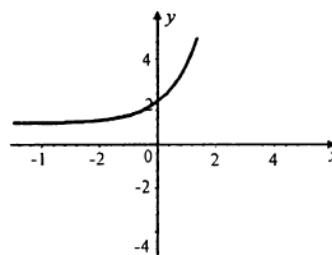
1-misal.  $f(x)=x^2-1$  funktsiya grafiginin koordinata ko'sherleri menen kesilish noqatlarini tabin'.

Sheshiw.  $f(x)=x^2-1$  funktsiya grafiginin  $Oy$  koordinata ko'sheri menen kesilish noqatini tabiw ushin  $x=0$  dep,  $f(0)=-1$  ge iye bolamiz.  $Ox$  ko'sheri menen kesilish noqatini tabiw ushin bolsa  $f(x)=0$  dep  $x^2-1=0$  ten'lemenin sheshimlari ko'pligini tabamiz:  $x=\pm 1$ .

Solay etip,  $(0;-1), (-1;0), (1;0)$  noqatlar funktsiya grafiginin koordinata ko'sherleri menen kesilish noqatlarini boladi (26-su'wret).



26-su'wret



27-su'wret

2-misal.  $f(x)=e^x+1$  funktsiya grafiginin koordinata ko'sherleri menen kesilish noqatlarini tabin'.

Sheshiw. Berilgen funksiyanın grafigi  $Oy$  ko'sherin kesip o'tedi yag'niy  $x=0$  de  $f(0)=e^0+1=2$  boladı biraq  $Ox$  ko'sherin kesip o'tpeydi yag'niy  $f(x) \neq 0$ , sebebi  $e^x \neq -1$  (27-su'wret).

2. Funktsiya anıqlanıw oblastının shegaralarındag'ı limitlik ma'nisi.

Funktsiya anıqlanıw oblastının shegaraları a'tirapında onın limitin anıqlawda to'mendegi jag'daylar qaraladı:

1) eger funksiyanın anıqlanıw oblastı  $[a; b]$  kesindiden ibarat bolsa,  $x$  tin  $x=a$  ha'm  $x=b$  noqatalardag'ı funksiyanın ma'nisleri yag'niy  $y=f(a), y=f(b)$  nı esaplaw kerek;

2) eger funksiyanın anıqlanıw oblastı  $(a; b)$  aralıqtan ibarat bolsa,  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  ha'm  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  (limitlerge iye bolsa) lardı esaplaw kerek.

1-mısal. To'mendegi funksiya anıqlanıw oblastının shegaraları a'tirapında onın limitin anıqlan`;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1, \text{ bolg anda} \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 4, \text{ bolg anda} \end{cases}$$

Sheshiw. Berilgen funksiya  $[0; 1) \cup (1; 4]$  aralıqlarda anıqlang'an. Berilgen funksiyanın  $x=1$  noqatta shep ha'm on limitlerin esaplaymız.

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 1) = 0$$

Demek  $f(1-0) = f(1) = 2, f(1+0) = 0$ .

2-mısal.  $f(x) = \frac{4+x}{x-2}$  funksiya anıqlanıw oblastının shegaraları

a'tirapında onın limitin anıqlan`:

Sheshiw. Berilgen funksiya  $(-\infty; 2)$  ha'm  $(2; +\infty)$  aralıqlarda anıqlang'an. Endi funksiya anıqlanıw oblastının shegaraları a'tirapında onın limitin anıqlaymız:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4+x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{4+x}{x-2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{4+x}{x-2} = +\infty$$

Demek  $f(\pm\infty) = 1, f(2-0) = -\infty, f(2+0) = +\infty$  boladı.

### 3. Funktsiyag`a ekstremum beriwshi noqatlar.

$f(x)$  funktsiya  $(a;b)$  aralıqta anıqlang`an bolıp  $x_0 \in (a;b)$  bolsın.

1-anıqlama. Eger  $x_0 \in (a;b)$  noqattın` sonday

$$\bigcup_{\delta}(x_0) = \{x : x \in \mathbb{R}^1, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \delta > 0\} \subset (a;b) \text{ a`tirapı bar bolıp}$$

$x \in \bigcup_{\delta}(x_0)$  ushın  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) ten`sizlik orınlı bolsa,  $f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta lokal maksimumg`a (lokal minimumg`a) iye delinedi.  $f(x_0)$  ma`nis bolsa  $f(x)$  funktsiyanın`  $\bigcup_{\delta}(x_0)$  ko`pliktegi lokal maksimumı (lokal minimumı) delinedi.

2-anıqlama. Eger  $x_0 \in (a;b)$  noqattın` sonday  $\bigcup_{\delta}(x_0) \in (a;b)$  a`tirapı bar bolıp  $\forall x \in \bigcup_{\delta}(x_0)$  ushın  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ) ten`sizlik orınlı bolsa,  $f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta qatan` lokal maksimumg`a (qatan` lokal minimumg`a) iye delinedi.  $f(x_0)$  ma`nis bolsa  $f(x)$  funktsiyanın`  $\bigcup_{\delta}(x_0)$  ko`pliktegi qatan` lokal maksimumı (qatan` lokal minimumı) delinedi.

Bul jag`dayda  $x_0$  san sa`ykes tu`rde lokal maksimum (lokal minimum), qatan` lokal maksimum (qatan` lokal minimum) ma`nis beretug`ın noqat dep ataladı.

Funktsiyanın`  $\bigcup_{\delta}(x_0)$  degi lokal maksimum (lokal minimum) ma`nisleri

$$f(x_0) = \max_{x \in \bigcup_{\delta}(x_0)} \{f(x)\} \quad (f(x_0) = \min_{x \in \bigcup_{\delta}(x_0)} \{f(x)\}) \text{ sıyaqlı belgilenedi. Bunda}$$

max(min) latinsha maksimum (minimum) so`zden alıng`an bolıp, en` u`lken (en` kishi) degen mag`anani bildiredi.

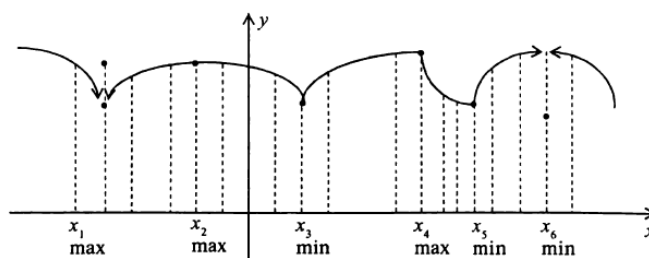
Funktsiyanın maksimum ha'm minimum ma'nisleri ulıwma at penen ekstremum ma'nisleri delinedi (ekstremum-latinsha shetki ma'nis degeni).

Funktsiyanın ekstremum ma'nislerin noqatların tabıwda to'mendegi jag`daylarg`a ayrıqsha itibar beriw kerek.

1-jag`day. Eger funktsiya  $[a;b]$  kesindide berilgen bolsa, funktsiyanın ekstremum noqatı kesindinin shegara noqatıda, ishki noqatıda bolıwı mu`mkin.

2-jag`day. Ekstremumg`a iye bolg`an funktsiya monoton bolmaydı. Monoton o`zgeriwshi funktsiya ekstremumg`a iye bolmaydı. Mısal,  $y = kx + b$  funktsiya  $k > 0$  bolg`anda monoton o`siwshi,  $k < 0$  bolg`anda monoton kemeyiwshi bolg`anı ushın ekstremumg`a iye emes.

3-jag`day. Funktsiya ekstremum noqatı bir neshe ha'tteki sheksiz bolıwı da mu`mkin. Funktsiya u`zliksiz bolg`anda onın maksimum ha'm minimum ma'nisleri o`z-ara almasıp keledi (28-su`wret).



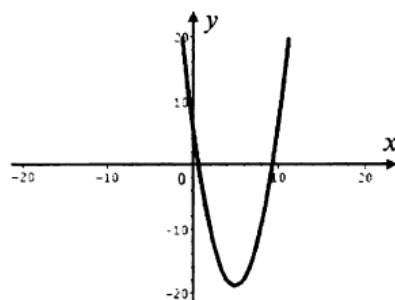
28-su`wret

1-Mısal.  $f(x) = x^2 - 10x + 6$  funktsiyanın ekstremum noqatı ha'm ekstremum ma'nisin tabın`.

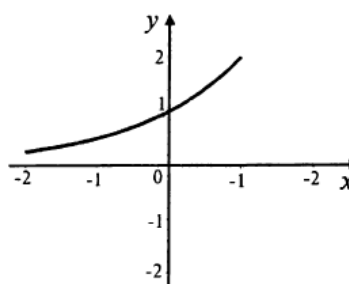
Sheshiw. Berilgen kvadrat u`shag`zalıdan tolıq kvadratı ajıratamız:

$f(x) = (x-5)^2 - 19$ .  $x_0 = 5$  bolg`anda, al  $f(x_0) = -19, x_0 \neq 5$  bolg`anda  $(x-5)^2 > 0$  ha'm  $f(x) = (x-5)^2 - 19 > -19 = f(x_0)$  boladı.

Demek  $x_0 = 5$  noqata funktsiyanın ekstremum noqatı,  $f(x_0) = -19$  bolsa onın ekstremum ma'nisi boladı (29-su`wret).



29-su`wret



30-su`wret

2-mısal.  $f(x) = 2^x$  funksiyanın` ekstremum noqatın ha`m ekstremum ma`nısın tabın`.

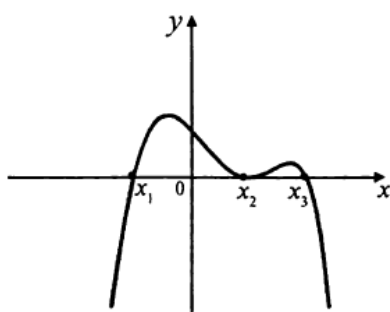
Sheshiw.  $f(x) = 2^x$  qatan` monoton o`siwshi ha`m  $2^x \neq 0$  bolg`anlıg`ı ushın ekstremumg`a iye emes(30-su`wret).

#### 4.Funktsiyanın` nolleri

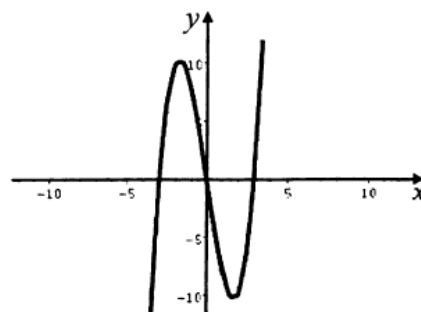
$y = f(x)$  funksiya  $x \in X(x \subset R^1)$  ko`plikte berilgen bolsın.

1-Anıqlama. Argument  $x$  tin` funksiyanı nolge aylandıratug`ın ma`nisleri yag`nıy  $x \in X$  tin`  $f(x) = 0$  ten`lemenı qanaatlandıratug`ın ma`nisleri funksiyanın` nolleri delinedi.

Funktsiyanın` grafıgı onın` nollerinde yaki  $Ox$  ko`sherın kesip o`tiwi yaki  $Ox$  ko`sherine urınıp o`tiwi mu`mkin(31-su`wret). 31-su`wrettegi  $x_1, x_2, x_3$ , noqatlar funksiya grafıgının` nolleri boladı.



31-su`wret



32-su`wret

1-mısal.  $f(x) = x^3 - 9x$  funksiyanın` nollerin tabın`.

Sheshiw. Berilgen funksiyanın` nollerin tabıw ushın  $x^3 - 9x = 0$  ten`lemenı sheshemiz:  $x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 3$  noqatlar berilgen funksiyanın` nolleri boladı (32-su`wret).

Ayırım funksiya o'zining aniqlanish obastida nolgerge iye bolmawi da mu'mkin, misali  $y = 3^x, y = x^2 + 1$  h.t.b

Funktsiyaning nollerinen o'tiwde oning belgisi o'zgeredi. Sonday-aq u'ziliw noqatlarinan o'tiwde de belgisi o'zgeriwi mu'mkin.

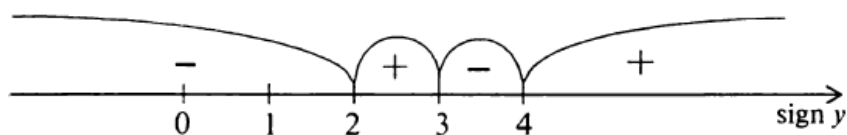
Berilgen funksiyaning belgisin tekseriw ushin  $f(x) > 0$  ha'm  $f(x) < 0$  ten'sizliklerdi sheshiw na'tiyjesinde  $x$  tin bul ten'sizliklerdi qanaatlandirish ma'nisleri tabiladi.

Eger funksiyaning grafigi  $Ox$  ko'sherge urinsa, urinuw noqatinda funksiyaning belgisi o'zgermeydi.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  lar  $f(x) = 0$  ten'lemenin sheshimleri bolsin onda funksiyaning aniqlanish obastu bir neshe bo'leklerge bo'linedi. Bul izbe-iz bo'leklerdin har birinen birewden ma'nis alip, funksiya belgisinin o'zgeriwin tekseriw gerek.

2-misal.  $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4}$  funksiyaning belgisin aniqlan.

Sheshiw. Berilgen funksiyaning aniqlanish obastu  $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$  dan ibarat. Funktsiyanu nolge aylandiratug'in noqatlardi tabiw ushin



(33-su'wret)

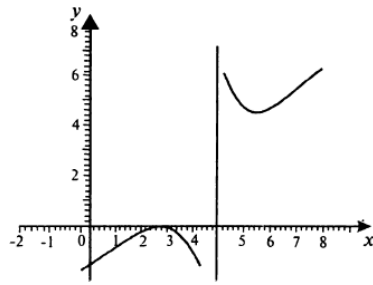
bo'lshektin alimin nolge ten'lestirip  $x^2 - 5x + 6 = 0$  ten'lemenin sheshimin tabamiz:  $x_1 = 2, x_2 = 3$ . Funktsiyaning belgisin aniqlaw ushin to'mendegi

aralqlarg'a bo'lemiz:  $(-\infty; 2), (2; 3), (3; 4), (4; +\infty)$  ha'm bul bo'leklerden  $1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 5$

noqatlarin alip funksiyaning belgisin tekseremiz:

$$f(1) < 0, f\left(\frac{5}{2}\right) > 0, f\left(\frac{7}{2}\right) < 0, f(5) > 0.$$

$x_1 = 2, x_2 = 3$  noqatlar berilgen funksiyaning nolleri boladi(34-su'wret).



34-su`wret

5.Funktsiya grafiginin` iyiliw (bu`giliw) noqatları.

Funktsiya grafiginin` iyiliw (bu`giliw) noqatların tabıwda do`n`es ko`plik ha`m do`n`es funksiya tu`sinigi u`lken a`hmiyetke iye. Sonın` ushın biz da`slep do`n`es ko`plik ha`m do`n`es funksiya tu`sinigin beremiz:

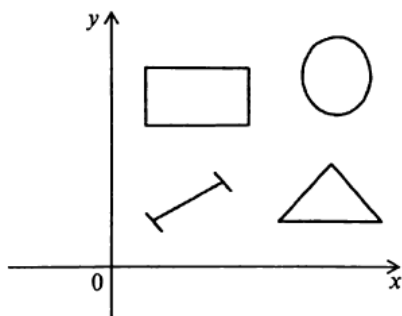
a) Do`n`es ko`plik tu`sinigi.

Bos bolmag`an  $E \subset R^2$  ko`plik berilgen bolsın.

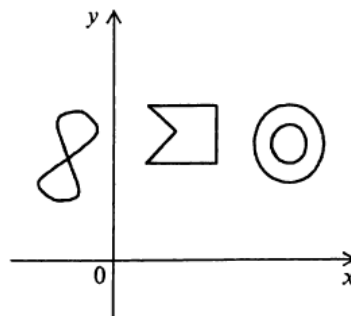
1-Anıqlama. Eger E ko`pliktin` qa`legen eki noqatı menen birge olardı tutastırıwshı kesindide usı ko`plikke tiyisli bolsa, E ko`plik do`n`es ko`plik delinedi.

Basqasha aytqanda eger  $\forall x, y \in E$  ha`m barlıq  $\lambda \in [0;1]$  ushın  $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$  bolsa, E do`n`es ko`plik delinedi.

35-su`wrettegi tuwrı mu`yeshli to`rtmu`yeshlik, do`n`gelek, u`shmu`yeshlikler do`n`es ko`pliklerge misal bola aladı, 36-sızılmadag`ı figuralar bolsa do`n`es bolmag`an ko`pliklerge misal boladı. Jalg`ız bir elementli ko`pliklerdi ha`m bos ko`pliklerdi de do`n`es ko`plik dep qaraw mu`mkin.



35-su`wret



36-su`wret

2-Aniqlama. Eger qa'legen  $\forall x, y \in E \quad x \neq y$  noqatlar ha'm barliq  $\lambda \in (0;1)$  sanlar ushin  $\lambda x + (1-\lambda)y$  de E ko'pliktin' ishki noqati bolsa, E qatan' do'n'es ko'plik delinedi. Mısalı do'n'gelek qatan' do'n'es ko'plik boladı, paralelepiped qatan' emes do'n'es ko'plik.

b)Do'n'es funktsiya tu'sinigi.

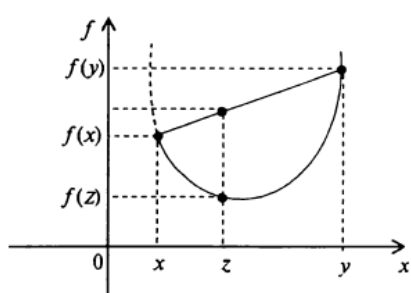
$f(x)$  funktsiya E do'n'es ko'plikte berilgen bolsın.

3-Aniqlama. Eger  $\forall x, y \in E$  ha'm  $\forall \lambda \in [0;1]$  ushin

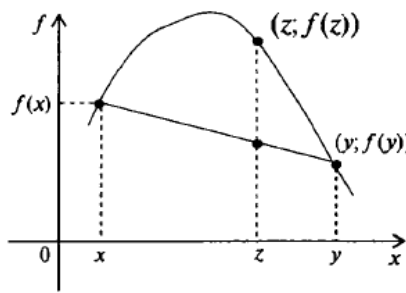
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

qatan' ten'sizlik orinlansa,  $f(x)$  funktsiya E ko'plikte qatan' do'n'es delinedi(37-su'wret).

5-Aniqlama. Eger  $g(x) = -f(x)$  funktsiya do'n'es  $E \subset R^1$  ko'plikte do'n'es bolsa,  $f(x)$  funktsiya E ko'plikte oyıs delinedi (38-su'wret).



37-su'wret



38-su'wret

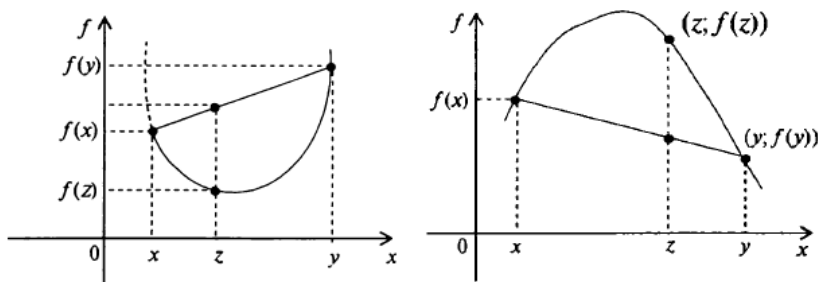
1-Mısal.  $f(x) = |x|, x \in R^1$  funktsiya do'n'es, sebebi  $\forall x_1, x_2 \in R^1, x_1 \neq x_2$  noqatlar ha'm  $\forall \lambda \in [0;1]$  ushin  $|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \leq \lambda |x_1| + (1-\lambda)|x_2|$  ten'lik orinlı boladı.

2-mısal.  $f(x) = e^x$  funktsiya  $R^1$  de qatan' do'n'es funktsiya, sebebi  $\forall x_1, x_2 \in R^1, x_1 \neq x_2$  noqatlar ha'm  $\forall \lambda \in [0;1]$  ushin  $e^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} < \lambda e^{x_1} + (1-\lambda)e^{x_2}$  ten'sizlik orinlanadı.

3-mısal.  $f(x) = -e^x$  funktsiya  $R^1$  de oyıs funktsiya boladı.

A'meliyatda ko'binese funktsiya grafigi do'n'esligin (oyıslıg'ın) tekseriwde joqarıda keltirilgen aniqlamag'a ekvivalent bolg'an to'mendegi aniqlamadan paydalanıladı.

6-Aniqlama. Eger  $f(x)$  funktsiya grafigi qa`legen xordanin` ortasi funktsiya grafiginin` sa`ykes noqatidan to`mende (joqarida) jatsa, bul funktsiyanin` grafigi berilgen araliqta oyis (do`n`es) delinedi (39-su`wret).



39-su`wret

7-Aniqlama. Eger qa`legen  $x_1, x_2 \in [a; b]$  ushin  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  ten`sizlik orinli bolsa,  $f(x)$  funktsiyanin` grafigi  $[a; b]$  kesindide oyis (do`nesligi joqarig`a bag`itlang`an) delinedi.

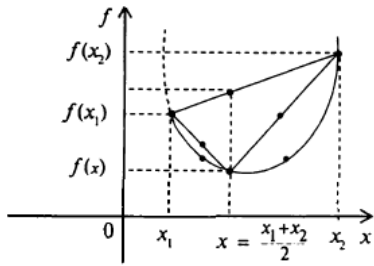
8-Aniqlama. Eger qa`legen  $x_1, x_2 \in [a; b]$  ushin  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  ten`sizlik orinli bolsa,  $f(x)$  funktsiyanin` grafigi  $[a; b]$  kesindide do`n`es (do`n`esligi to`menge bag`itlang`an) delinedi.

1-misal.  $f(x) = 3^x$  funktsiya grafiginin`  $R^1$  de do`n`esligi yaki oyislig`in aniqlan`.

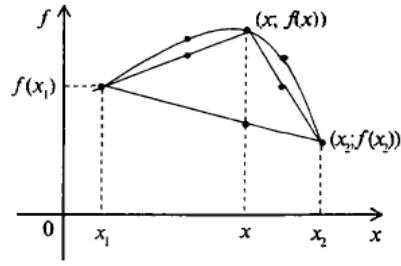
Sheshiw. Funktsiya grafiginin` do`n`esligi yaki oyislig`in aniqlama boyinsha tekseremiz:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = 3^{\frac{x_1 + x_2}{2}} = \sqrt{3^{x_1 + x_2}} \quad \text{ha`m} \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{3^{x_1} + 3^{x_2}}{2}$$

$\forall x_1, x_2 \in R^1, (x_1 < x_2)$  ushin  $3^{x_1}$  ha`m  $3^{x_2}$  sanlar bir-birine ten`emes ha`m on` sanlar. Orta arifmetikaliq ha`m orta geometriyalıq shamalar arasındag`ı baylanıslardan  $\sqrt{3^{x_1 + x_2}} < \frac{3^{x_1} + 3^{x_2}}{2}$  ten`sizlikke iye bolamız. Demek 4-anıqlama boyinsha funktsiyanin` grafigi qatan` do`n`es eken (40-su`wret).



4-su`wret



41-su`wret

2-misal.  $f(x) = \sin x$  funktsiya grafiginin  $[0; \pi]$  kesindide oyislig`in ko`rsetin`.

Sheshiw. Sha`rt boyinsha

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \sin \frac{x_1+x_2}{2} \text{ ha`m } \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} = \sin \frac{x_1+x_2}{2} \cos \frac{x_1-x_2}{2}$$

large iye bolamiz. Qa`legen  $x_1, x_2 \in (0; \pi), (x_1 < x_2)$  larde  $0 < \frac{x_1+x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$  bolg`ani

ushin  $0 < \cos \frac{x_1-x_2}{2} < 1, \sin \frac{x_1+x_2}{2} > \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}$  ten`sizlik orinli boladi. Demek 6-

aniqlama boyinsha  $f(x) = \sin x$  funktsiya grafiginin  $[0; \pi]$  kesindide oyis eken (41-su`wret).

Do`n`es funktsiyanin` qa`siyetleri.

1. Do`n`es (oyis) funktsiyanin` turaqli on` sang`a ko`beymesi ja`ne do`n`es (oyis) funktsiya boladi.

2. Do`n`es (oyis) funktsiyanin` turaqli teris sang`a ko`beymesi ja`ne oyis (do`n`es) funktsiya boladi.

3. Do`n`es funktsiyanin` qosindisi do`n`es funktsiya boladi.

4. Eger  $f(x)$ -do`n`es ha`m o`siwshi funktsiya bolip, al  $x = \varphi(t)$  funktsiya oyis funktsiya bolsa onda qoramali  $f(\varphi(t))$  funktsiya oyis boladi.

5. Eger  $f(x)$ -oyis ha`m o`siwshi funktsiya bolip, al  $x = \varphi(t)$  funktsiya do`n`es funktsiya bolsa onda qoramali  $f(\varphi(t))$  funktsiya oyis boladi.

6. Eger  $f(x)$ -do`n`es ha`m o`siwshi funktsiya bolip, al  $x = \varphi(t)$  funktsiya do`n`es funktsiya bolsa onda qoramali  $f(\varphi(t))$  funktsiya do`n`es boladi.

7. Eger  $f(x)$ -do`n`es ha`m kemeyiwshi funktsiya bolıp, al  $x = \varphi(t)$  funktsiya oyıs funktsiya bolsa onda qoramalı  $f(\varphi(t))$  funktsiya do`n`es boladı.

8. Eger  $y = f(x)$  ha`m  $y = g(x)$  o`z-ara kerı (sa`ykes aralıqlarda) funktsiyalar bolsa onda :

a) eger  $f(x)$ -funktsiya oyıs ha`m o`siwshi funktsiya bolsa,  $g(x)$  do`n`es ha`m o`siwshi boladı;

b) Eger  $f(x)$ -funktsiya do`n`es ha`m kemeyiwshi funktsiya bolsa,  $g(x)$  funktsiya oyıs ha`m kemeyiwshi boladı;

d) Eger  $f(x)$ -funktsiya do`n`es ha`m kemeyiwshi funktsiya bolsa,  $g(x)$  funktsiya do`n`es ha`m kemeyiwshi boladı.

9.  $[a; b]$  aralıqta oyıs bolg`an  $f(x)$  (turaqlı san emes) funktsiya usı aralıqtın` ishinde o`zinin` en` u`lken ma`nısın qabıl etpeydi.

10. Eger  $f(x)$  ha`m  $g(x)$  funktsiyalar on` ha`m do`n`es bolsa onda  $y = \frac{\varphi(x)}{g(x)}$  funktsiya do`n`es bolıwı ushın bul funktsiyalardıń birewi o`siwshi, ekinshisi kemeyiwshi bolıwı jeterli.

11. Eger  $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  funktsiya do`n`es bolıp,  $f(x)$  teris, do`n`es ha`m o`siwshi bolsa onda  $\varphi(x)$  funktsiya on`, oyıs ha`m o`siwshi boladı.

12. Eger  $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$  funktsiya oyıs bolıp,  $f(x)$  ha`m  $\varphi(x)$  funktsiyalar do`n`es ha`m teris bolsa onda qaralıp atırg`an funktsiyanın` birewi o`siwshi, ekinshisi kemeyiwshi boladı.

13. Eger  $f(x)$ -funktsiya do`n`es bolsa,  $\frac{1}{f(x)}, (f(x) \neq 0)$  funktsiya oyıs boladı.

14. Eger  $f(x)$ -funktsiya on` ha`m do`n`es bolsa onda  $y = \sqrt[n]{f(x)}$  funktsiya do`n`es boladı ( $n$ -natural san).

15. Eger  $[f(x)]^n$  funktsiya do`nes bolsa ( $n$ -natural san), onda  $f(x)$ -funktsiya on` ha`m oyıs boladı.

16. Eger  $f(x)$  ha'm  $g(x)$  funktsiyalar on', o'siwshi ha'm oyis bolsa onda  $y = f(x) \cdot \varphi(x)$  on', o'siwshi ha'm oyis boladı.

17. Eger  $f(x)$  ha'm  $g(x)$  funktsiyalar on', kemeyiwshi ha'm oyis bolsa onda  $y = f(x) \cdot \varphi(x)$  on', oyis boladı.

18. Eger  $f(x)$  ha'm  $g(x)$  funktsiyalar teris, o'siwshi ha'm do'n'es bolsa onda  $y = f(x) \cdot \varphi(x)$  on', oyis boladı.

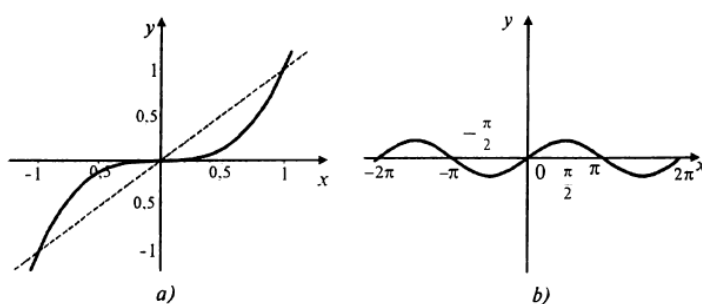
19. Eger  $f(x)$  ha'm  $g(x)$  funktsiyalar teris, kemeyiwshi, do'n'es bolsa onda  $y = f(x) \cdot \varphi(x)$  on', oyis boladı.

20. Eger  $f(x)$  funktsiya on' kemeyiwshi, do'n'es bolsa,  $g(x)$  funktsiya on', o'siwshi ha'm do'n'es bolsa onda  $y = f(x) \cdot \varphi(x)$  on', do'n'es boladı.

6-Anıqlama. Eger  $f(x)$  funktsiya  $\bigcup_{\delta}^{-}(x_0)$  a'tirapında do'n'es (oyis) bolıp, al  $\bigcup_{\delta}^{+}(x_0)$  a'tirapında bolsa oyis (do'nes) bolsa,  $x_0$  noqat funktsiyanın' (funktsiya grafiginin') iyiliw noqatı dep ataladı.

1-mısal.  $y = x^3$  funktsiya grafigi ushın  $x = 0$  noqat iyiliw noqatı boladı;

2-mısal.  $y = \sin x$  funktsiya grafigi ushın  $x = \pi n, n \in Z$  noqatlar iyiliw noqatları boladı(42-su'wret).



42-su'wret

### 6.Funktsiya grafiginin' simmetriya ko'sherleri.

Eger sonday turaqlı  $x_0$  san bar bolıp qa'legen  $x \in X$  ushın  $x_0 - x \in X$ ,  $x_0 + x \in X$  bolg`anda  $f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$  ten'lik orınlansa  $x = x_0$  tuwrı sızıq  $y = f(x)$  funktsiya ushın vertikal simmetriya ko'sheri delinedi. Dara jag`dayda  $x_0 = 0$  bolg`anda jup funktsiya ushın  $Oy$  ko'sheri simmetriya ko'sheri boladı.

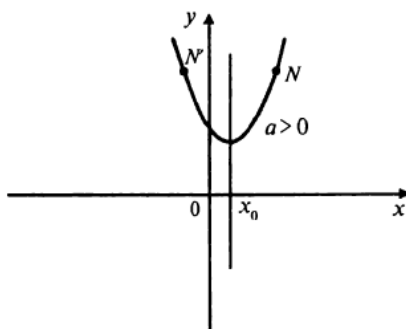
1-Mısal.  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) funksiya grafiginin` qanday vertikal ko`sherge salıstırg`anda simmetriyalılıg`ın anıqlan`.

Sheshiw.Simmetriyalılıq sha`rti boyınsha tekseremiz:

$$\begin{aligned} a(x_0 - x)^2 + b(x_0 - x) + c &= a(x_0 + x)^2 + b(x_0 + x) + c, \\ -2axx_0 - bx &= 2axx_0 + bx \end{aligned}$$

Bul ten`likti  $x_0$  g`a qarata sheshemiz:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ yag`nıy } x = -\frac{b}{2a} \text{ simmetriya ko`sheri(43-su`wret).}$$



43-su`wret

Eger qa`legen  $x \in D(f)$  ushın  $y_0 = \frac{1}{2}[f(x_0 - x) + f(x_0 + x)]$  birdeylik orınlı bolsa,  $(x_0; y_0)$  noqat  $f(x)$  funksiya grafigi ushın simmetriya orayı boladı.

Dara jag`dayda  $O(0;0)$  noqat taq funksiyanın` simmeriya orayı boladı.

2-mısal.  $y = ax + b$  funksiya grafiginin` simmetriya orayın tabın`.

Sheshiw. Simmetriya orayın tabıw sha`rtin jazamız:

$$\begin{aligned} 2y_0 &= a(x_0 - x) + b + a(x_0 + x) + b, \\ 2y_0 &= 2ax_0 + 2b \end{aligned}$$

Bul jerden  $y_0 = ax_0 + b$  boladı, bunda  $x_0$ -qa`legen noqat. Demek  $y = ax + b$  funksiya grafiginin` simmetriya orayı  $M(x_0; ax_0 + b)$  noqatta eken.

To`mendegi tastıyıqlawlar orınlı:

1.Eger  $y = f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) funksiyanın` grafigi  $x = a$  ha`m  $x = b$  ( $b > a$ ) parallel vertikal ko`sherlerge salıstırg`anda simmetriyalı bolsa,  $f(x)$  funksiya periodlı bolıp onın` periodı  $2b - 2a$  g`a ten`.

2. Eger  $y = f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) funksiyanın grafiği  $A(a; y_0)$  ha'm  $B(b; y_1)$  ( $b > a$ ) noqatlarga salıstırğanda simmetriyalı bolsa,  $y = f(x)$  funksiyanı eki sızıqlı funksiya ha'm qandayda bir periodlı funksiya ( $T = 2b - 2a$ ) nın qosındısı ko`rinsinde su`wretlew mu`mkin. Dara jag`dayda  $y_0 = y_1$  bolsa  $f(x)$  periodlı funksiya boladı.

3. Eger  $y = f(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) funksiyanın grafiği  $A(a; y_0)$  noqat ha'm  $x = b$  ( $b \neq a$ ) tuwrı sızıqqa salıstırğanda simmetriyalı bolsa,  $f(x)$  periodlı funksiya bolıp, onın periodı  $4b - 4a$  g`a ten` boladı.

## Juwmaqlaw

Konkret sanlı funktsiyalardı u`yreniw derlik traditsiyalıq ko`z qarasta o`tkeriledi. Traditsiyalıq u`yreniw ushın xarakterli klassikalıq algebralıq apparat konkret funktsiyalardı izertlew ushın en` qolaylı boladı. Mısalı, kvadratlıq funktsiyanın` ulıwma anıqlamasın su`wretlew ushın qolaylı  $x \rightarrow ax^2 + bx + c$  ko`rinistegi belgilew bul funktsiyanın` klassikalıq qa`siyetlerin (o`siw, belgisinin` turaqlılıq aralıqları, ekstremumları h.t.b.) izertlew ushın qolaylı bolmaydı; bul maqset ushın traditsiyalıq  $f(x) = ax^2 + bx + c$  belgilew a`melde ju`da` qolaylı boladı.

Sonlıqtan funktsiyanı izertlew din` konkret metodikasını tarawındag`ı respublika ha`m du`nya ju`zinin` mektepleri toplag`an ha`m og`ada ko`p metodikalıq qollanbalarda ha`m maqalalarda sa`wlelendirilgen is ta`jiriybelerinen ha`zirgi zaman bag`darlamasına sa`ykes funktsiyanı izertlew a`meliyatını ushın paydalanıw mu`mkin. Ma`lim o`zgerisler tek bundag`ı qollanilatug`ın terminologiyada, sonday- aq, ayırım ma`seleni u`yreniw waqtın ha`m ornın o`zgeriwge baylanıslı bolıwı mu`mkin.

Funktsiya tu`sinigi haqqındag`ı temalardı oqıwshıllarg`a sin`diriw waqtında funktsiyanın` anıqlamasını, berilgen funktsiyag`a salıstırğ`anda quramalıraq ha`tteki sabaqlıqta keltirilmegen mısallardıń da grafiklerin sıziw maqsetke muwapıq boladı. Usı orında funktsiya tariyxına na`zer taslaytuğ`ın bolsaq funktsiya a`yyemgi tu`siniklerden bolıp, da`slep funktsional baylanıslarg`a a`meliyatlarda dus kelgen. Keyinirek bul baylanıslar sanlar tablitsası ko`rinisinde payda bolg`an. 100-178 jıllarda Klavdiy Ptolomey sinuslar tablitsasını du`zgen.

Abu Rayxan Beriniy sinuslar ha`m tangensler tablitsasını du`zgen. Tap usı sıyaqlı basqa ma`mleketlerde de a`ste-aqırın funktsiya tu`sinigi rawajlanıp bardı. 1673 jılda Golfrıt Vilgelm Leybnits (1649-1716) «funktsiya» degen atamanı kiritip onı qandayda bir wazıypanı atqarıwshı shama dep atadı ha`m ol birinshi bolıp  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  belgilewlerdi kiritdi.

Funktsiyanı izertlew din` konkret metodikasını tarawındaǵı respublika ha`m du`nya ju`zinin` mektepleri toplag`an ha`m og`ada ko`p metodikalıq qollanbalarda ha`m maqalalarda sa`wlelendirilgen is ta`jiriybelerinen ha`zirgi zaman bag`darlamasına sa`ykes funktsiyanı izertlew a`meliyatı ushın paydalanıw mu`mkin. Ma`lim o`zgerisler tek bundag`ı qollanılatus`ın terminologiyada, sonday- aq, ayırım ma`seleni u`yreniw waqtın ha`m ornın o`zgertiwge baylanıslı bolıwı mu`mkin.

Oqıtıwshı materialdı oqıwshılarg`a qarag`anda a`dewir ko`birek ko`lemde biliwi kerekligi anıq. Bunnan tısqari, sıızıqlı funktsiyanı u`yreniwdi oqıwshılar materialdın` ko`lemi de, onı bayanlaw da`rejesi de pu`tkilley basqasha bolatus`ın joqarı klasslarda, akademiyalıq litseylerde dawam ettiredi.

Funktsiyanın` grafikalıq su`wretleniwi ha`reket funktsional baylanıstı ko`z aldımızǵa keltiriwge g`ana emes al funktsiyanın` qa`siyetlerin u`yreniwdi an`satlastırıwǵa da imkaniyat jaratadı. Bul jumıstın` tiykarg`ı bo`legi bes paragrafke bo`lingen. Birinshi paragrafte sıızıqlı funktsiyanın` grafigi haqqında tu`sinik berilgen, ekinshi paragrafinde kvadrat funktsiyanın` grafigi ha`m onı jasaw usılları ko`rip o`tilgen, u`shinshi paragrafi bo`lshek da`rejeli funktsiyalardın` grafigi haqqında tu`sinik berilgen, to`rtinshi paragrafi ko`rsetkishli funktsiyanın` grafigine arnalg`an, besinshi paragrafinde funktsiya grafiginin` xarakterli noqatları haqqında ayıtılıp, olardıń funktsiyanın` grafigin jasawdag`ı a`hmiyeti haqqında ken` tu`rde mısallar ja`rdeminde bayan etilgen .

Bul mag`lıwmatlar tiykarında ulıwma bilim beriw mektep oqıwshıları, litsey ha`m ka`sip - o`ner kolledji talabaları funktsiyanın` grafiklerin jasaw uqıplılıqlarına iye boladı.

## **Paydalilg`an a`debiyatlar.**

1. Abdullayeva B.S., Rajabov F., Masharipova S. Oliy matematika asoslari. Darslik. T.: Iqtisod-Moliya, 2011 y.
2. Abduhamedov A.U va boshq Algebra va matematik analiz asoslari 1-2 qism Akademik litseylar uchun darslik N.2005 j
3. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz. T.: «O`zbekiston» 1-t, 1994y.
4. Alixonov S. Matematika o`qitish metodikasi. T.: «O`qituvchi», 1992 y.
5. Вирченко Н. А., Ляшко И. И., Швецов К. И. График функции: Справочник. Киев, «Наука думка» 1979
6. Gaziev.A Israylov I. M.Yaxshibaeva Funktsiyalar va grafiklar. T.: «Voriz-Nashriyot», 2006
7. Гельфанд И. М., Глаголева Э. Г., Шноль Э. Э. Функции и графики. М., 1968
8. Гурский И. П. Функции и построение графиков. Пособие для учителей. М., 1968
9. Jo`raev T., Sa`dullaev A., Xudayberganov G., Mansurov H., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. 1-2-t, «O`zbekiston» T.: 1995, 1998 y.
10. Soatov Yo.U. Oliy matematika asoslari. 1-2-3-t, «O`qituvchi» T.: 1992-1995 y.
11. Tolipov A. Elementar funktsiyalar T., 1992
12. Toshmetov O`., Turgunbaev R., Saydamatov E. Matematik analiz. 1-ism, T. TDPU 2008 y.
13. Hamedova N. A. va boshqalar. «Matematika». OO`Yu uchun darslik, T.: «Turon iqbol» 2007 y.
14. Tojiev Sh. I. Oliy matematika asoslaridan masalalar echish. «O`zbekiston» T.: 2002 y.
15. <http://www.pedagog.uz/>
16. <http://www.Ziyonet.uz/>
17. <http://window.edu.ru/window/>