

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI QISHLOQ VA SUV XO'JALIGI
VAZIRLIGI**

SAMARQAND QISHLOQ XO'JALIK INSTITUTI

QISHLOQ XO'JALIGIDA MENEJMENT FAKULTETI

**OLIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARI
KAFEDRASI**

REFERAT

Mavzu: Determinantlar va ularning asosiy xossalari

Bajardi: Iqtisodiyot yo'nalishi 101 guruh talabasi Abduzoxirov Akbar

Tekshirdi: Kenjayev Sh.

Mavzu: Determinantlar va ularning asosiy xossalari

Reja:

1. Determinant
2. Determinantning xossalari
3. Determinantni hisoblash usullari
4. Minor va algebraik to'ldiruvchi
5. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer formulasi

1. Determinant

a) *Ikkinchi tartibli determinant*

Ta'rif:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (1)$$

ko'rinishidagi ifodaga **ikkinchi tartibli determinant** (ya'ni aniqlovchi) deyiladi. a_{11} , a_{12} , a_{21} va a_{22} sonlar determinantning **elementlaridan** iborat bo'lib, a_{11} va a_{22} lar determinantning **bosh diagonal**, a_{12} va a_{21} lar esa determinantning **yordamchi diagonal** elementlarini tashqil etadi.

Determinant Δ (delta) harfi bilan belgilanadi. Ikkinchi tartibli determinant a_{11} , a_{12} hamda a_{21} , a_{22} elementlardan iborat bo'lgan 2 ta satr va a_{11} , a_{21} hamda a_{12} , a_{22} elementlardan iborat bo'lgan 2 ta ustundan tashqil topgan.

(1) tenglikdan ko'rinadiki, ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish kerak.

Determinantning satrlari soni har doim ustunlar soniga teng bo'ladi va satr (yoki ustun) lar soni uning tartibini bildiradi. Elementlaridagi ikki xonali indekslardan birinchisi - satr nomerini, ikkinchis esa ustun nomerini anglatadi. Masalan, a_{21} son ikkinchi satr va birinchi ustun elementidan iborat.

Ikkinchi tartibli determinantlarni yechishga doir ba'zi misollarni ko'raylik.

b) *Uchinchi tartibli determinant*

Ta'rif: Elementlari uchta satr va uchta ustunni tashkil etgan quyidagi simvolga uchinchi tartibli determinant deyiladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

a_{11} , a_{22} va a_{33} sonlar determinantning bosh diagonalining, a_{13} , a_{22} , a_{31} lar esa yordamchi diagonalining elementlaridir. Uchinchi tartibli determinantlar (undagi

elementlarning qanday sonlar bo'lishidan qat'iy nazar) 9 ta elementdan tashqil topgan bo'ladi.

2. Determinantning xossalari

1 - xossa. Determinantning barcha satrlari mos ustunlar, ustunlar esa mos satrlar-ga almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2 - xossa. Determinantning ikkita ixtiyoriy satrlari (ustunlari) ning o'rinlari almashtirilsa, uning ishorasi o'zgaradi, ya'ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3 - xossa. Determinantdagi biror satr (ustun) ning barcha elementlarida umumiy ko'paytuvchi mavjud bo'lsa, bu ko'paytuvchini determinant belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Agar har bir satr (ustun) ning umumiy ko'paytuvchisi mavjud bo'lsa, ularning barchasi determinant belgisi oldiga chiqarilib, o'zaro ko'paytiriladi. Agar birorta satrda, shu bilan birgalikda, ustunda ham umumiy ko'paytuvchi mavjud bo'lsa, u holda, satr yoki ustundagi umumiy ko'paytuvchilardan biri determinant belgisi oldiga chiqariladi.

4- xossa. Ikkita satr (ustun) elementlari mos ravishda o'zaro teng yoki proporsional bo'lgan determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

5- xossa. Hech bo'lmaganda bitta satr (ustun) elementlari nollardan iborat bo'lgan determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

6- xossa. Biror satr (ustun)ning har bir elementi ikkita qo'shiluvchining algebraik yig'indisidan iborat bo'lsa, bunday determinantni ikkita determinant yig'indisi (ayirmasi) shaklida yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \pm s_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \pm s_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \pm s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & s_1 \\ a_{21} & a_{22} & s_2 \\ a_{31} & a_{32} & s_3 \end{vmatrix}$$

7- xossa. Agar biror satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini ixtiyoriy umumiy ko'paytuvchiga ko'paytirib qo'shilsa (ayrilsa), determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} \pm ba_{31} & a_{22} \pm ba_{32} & a_{23} \pm ba_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \pm b \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \pm b \cdot 0 = \Delta. \end{aligned}$$

Bunda oxirgi determinantning ikkinchi va uchinchi satrlarining elementlari mos ravishda teng bo'lganligi sababli, uning qiymati 0 ga teng bo'ladi.

3. Determinantni hisoblash usullari

A)Uchinchi tartibli determinantni **uchburchak usulida** hisoblash.

Determinantni bu usulda echish uchta bosqichdan iborat.

Birinchi bosqichda bosh diagonalda yotgan a_{11} , a_{22} va a_{33} elementlar, so'ngra teng yonli uchburchakni tashqil etuvchi a_{13} , a_{21} va a_{32} elementlar, shunday uchburchakni tashqil etuvchi a_{12} , a_{23} va a_{31} elementlar o'zaro ko'paytiriladi hamda ko'paytmalar yig'indisi topiladi. Ikkinchi bosqichda

yordamchi diagonalda yotgan a_{13} , a_{22} va a_{31} elementlar, keyin teng yonli uchburchakni tashqil etuvchi a_{11} , a_{23} va a_{32} elementlar, so'ngra a_{12} , a_{21} va a_{33} elementlar ko'paytirilib, ko'paytmalar yig'indisi topiladi. Uchinchi bosqichda esa hosil bo'lgan birinchi yig'indidan ikkinchisi ayriladi. Buni quyidagi sxemada ifodalaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Ushbu sxema bo'yicha quyidagi determinantni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31}) - (a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33}). \quad (3)$$

B) Determinantni **Sarrius usulida** yechish

Determinantni Sarrius usulida hisoblash ikki xil yo'l bilan amalga oshiriladi:

1. Determinantning o'ng yoniga birinchi va ikkinchi ustun elementlari qo'shimcha yozilib, 1- sxema yordamida yechiladi.

2. Determinantning ost tomoniga birinchi va ikkinchi satr elementlari qo'shimcha yozilib, 2-sxema yordamida hisoblanadi:

1-sxema

yoki

2-sxema

4. Minor va algebraik to'ldiruvchi

Ta'rif: Berilgan Δ determinantga tegishli bo'lgan biror elementning **minori** deb, shu element joylashgan satr va ustunning o'chirilishi natijasida o'chirilmay qolgan elementlardan tuzilgan determinantga aytiladi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1)$$

determinantning a_{ij} elementining minori M_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) bilan belgilanadi. Shu determinantning a_{22} elementi minori esa quyidagi

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

sondan iborat bo'ladi.

Determinantning biror a_{ij} elementi turgan satr va ustun raqamlarining yig'indisi $(i + j)$ ning juft yoki toq bo'lishiga qarab, shu element juft yoki toq joyda turganligi aniq-lanadi. Masalan, a_{22} element determinantda juft joyda turibdi, chunki u ikkinchi satr va ikkinchi ustunda joylashgan, ya'ni $i+j = 2+2 = 4$ son juft sonidir. a_{32} element esa toq joy-da joylashgan, chunki $3 + 2 = 5$ toq son.

Ta'rif: Determinantdagi ixtiyoriy elementning **algebraik to'ldiruvchisi** deb, uning juft yoki toq o'rinda turganligiga bog'liq ravishda musbat yoki manfiy ishora bilan olingan minoriga aytiladi.

Ixtiyoriy a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} bilan belgilanadi. a_{ij} ning turgan joyi toq bo'lsa, olinadigan ishora manfiy, juft bo'lsa, musbat bo'ladi. Algebraik to'ldiruvchi umumiy holda bunday ifodalanadi:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M \quad (3)$$

Masalan, (1) determinantdagi a_{23} element toq o'rinda turganligi sababli, uning algebraik to'ldiruvchisi manfiy bo'ladi va quyidagicha yoziladi:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

a_{33} elementining algebraik to'ldiruvchisi musbat ishora bilan olinadi, chunki u juft o'rinda joylashgan .

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalari oydinlashgach, determinantni satr yoki ustun elementlarini yoyish orqali hisoblash usulini ko'rib o'tamiz.

Har qanday determinant shu determinantning ixtiyoriy satr yoki ustun elementlari bilan shu elementlar algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalarining yig'indisiga teng. Masalan, (1) determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyish talab qlinsin, ya'ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (4)$$

Agar (3) ni hisobga olsak, (4) tenglikni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} . \quad (5)$$

(5) -determinantni satr elementlari bo'yicha yoyib, hisoblash formulasidir.

5. Chiziqli tenglamalar sistemasi. Kramer formulasi

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2. \end{cases} \quad (1)$$

Bunda a_{11} , a_{12} , a_{21} va a_{22} lar noma'lumlar oldidagi koeffisientlar, b_1 va b_2 lar esa ozod hadlardan iboratdir.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning algebraik qo'shish, o'rniga qo'yish, taqqoslash kabi usullari maktab matematika kursidan ma'lum.

Agar tenglamalar sistemasi faqatgina bitta yechimga ega bo'lsa, bunday sistemaga ***birgalikdagi sistema*** deyiladi.

Birgalikdagi sistemaga ***aniq sistema***, cheksiz ko'p yechimga ega bo'lgan birgalikdagi yechimga ega bo'lmagan sistemaga ***aniqmas sistema***, bitta ham yechimga ega bo'lmagan sistemaga esa ***birgalikda bo'lmagan sistema*** deb ataladi.

(1) sistemaning noma'lumlari oldidagi koeffisientlardan determinant tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Δ determinantning birinchi ustuni elementlari o'rniga mos ravishda ozod hadlarni qo'yib, Δ_{x_1} determinantni, ikkinchi ustun elementlari o'rniga mos ravishda ozod hadlarni qo'yib, Δ_{x_2} detemmerinantni tuzamiz.

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Agar (2) determinant nolga teng bo'lmasa, (1) sistema yagona

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$$

yechimga ega bo'ladi. Bu formulani chiqarish yo'lini ko'rib utamiz.

(1) sistemadagi birinchi tenglamaning ikkala tomonini (a_{22}) ga, ikkinchi tenglamani esa ($-a_{12}$) ga ko'paytiramiz.

Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasidagi tenglamalarning mos hadlarini algebraik qo'shish usuli yordamida o'zaro qo'shsak:

$$(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \quad (4)$$

hosil bo'ladi. Shuningdek, berilgan sistemadagi birinchi tenglamaga ($-a_{21}$) ni, ikkinchisiga (a_{11}) ni ko'paytirib, ikkala tenglamani o'zaro qo'shsak

$$(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) x_1 = a_{11} b_2 - a_{21} b_1 \quad (5)$$

tenglama hosil bo'ladi. (4) va (5) ayirmalar determinantlardan iborat. (2), (4), (5) lardan:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta, \quad (6)$$

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta x_1, \quad (7)$$

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta x_2. \quad (8)$$

(6), (7) va (8) belgilashlardan foydalanib, (4) va (5) tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 \cdot \Delta = \Delta x_1 \\ x_2 \cdot \Delta = \Delta x_2 \end{cases} \quad (9)$$

Bulardan
$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad \text{va} \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \quad (10)$$

hosil bo'ladi.

Demak, berilgan sistema (10) formula bilan aniqlanadigan bitta x_1 va x_2 yechimga ega ekan.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yuqoridagi usulda yechishga **Kramer usuli** yoki **Kramer qoidasi** deyiladi. (10) formula esa **Kramer formulasi** dan iboratdir.

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi uch noma'lumli uchta tenglamadan iborat bo'lsa, Kramer formulalari quyidagicha, (11) ko'rinishida bo'ladi.

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}. \quad (11)$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdalimov V. Oliy matematika. – Toshkent: O'qituvchi, 1994.
2. Abdalimov V., Solixov Sh. Oliy matematika qisqa kursi.- Toshkent: O'qituvchi, 1983.
3. Abdalimov V. Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami. - Toshkent: Milliy ensiklopediya, 2003
4. Sultonov J.S. Oliy matematika/Oliy algebra/: Uslubiy qo'llanma. -Samarqand, 2008.