

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI QISHLOQ VA SUV XO'JALIGI
VAZIRLIGI**

SAMARQAND QISHLOQ XO'JALIK INSTITUTI

QISHLOQ XO'JALIGIDA MENEJMENT FAKULTETI

**OLIY MATEMATIKA VA AXBOROT TEXNOLOGIYALARI
KAFEDRASI**

REFERAT

Mavzu: Matrisalar. Ularning turlari. Matrisalar ustida amallar.

Bajardi: Iqtisodiyot yo'nalishi 101 guruh talabasi Xalilov Sherali

Tekshirdi: Kenjayev Sh.

Mavzu: Matrisalar. Ularning turlari. Matrisalar ustida amallar.

Reja:

1. Matritsal haqida asosiy tushunchalar
2. Matritsalar ustida amallar
3. Teskari matritsa
4. Matritsaning rangi
5. Matritsalar ustida elementar shakl almashtirishlar
6. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish
7. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish. Kroneker-Kapelli teoremasi
8. Bir jinsli tenglamalar sistemasi va ularni yechish
9. Matritsallar yordamida iqtisodiy masalalar yechish
10. Iqtisodiy masalalar yechishda chiziqli tenglamalar sistemasidan foydalanish
11. Leontevning chiziqli iqtisodiy modeli. Tarmoqlararo balans tenglamalarni tuzish

1. Matritsal haqida asosiy tushunchalar

Ta'rif: m ta satr va n ta ustundan iborat bo'lib, mn ta element (son) dan tuzilgan quyidagi jadvalga:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa deb ataladi. Bu mn o'lchamli matritsadir.

Matritsalar determinantlardan tubdan farq qiladi. Determinantlarda satrlar soni ustunlar soniga doimo teng bo'ladi. Matritsalar esa satrlar soni ustunlar sonidan kichiq, katta yoki teng bo'lishi mumkin. Shuningdek, determinant har doim aniq sonni ifodalaydi, matritsa esa biror sonni ifodalamaydi, chunki u sonlardan tuzilgan jadvaldan iborat, xolos.

Ta'rif: Agar matritsadagi satrlar soni uning ustunlari soniga teng ($m = n$) bo'lsa, bunday matritsaga **kvadrat matritsa** deyiladi.

Kvadrat matritsaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlari birinchi diagonal, $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ elementlari esa ikkinchi diagonal elementlaridan iborat.

Agar matritsaning birinchi diagonal elementlari 1 lardan iborat bo'lsa, bunday matritsaga **birlik matritsa** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Agar B matritsaning barcha elementi A matritsaning mos elementlariga teng, ya'ni $a_{ki} = b_{ki}$ bo'lsa, bunday matritsalar **o'zaro teng matritsalar** deyiladi va $A=B$ shaklda yoziladi.

Agar matritsaning barcha elementlari biror sonlar to'plamiga yoki sonlar maydoniga tegishli bo'lsa, bunday matritsa shu to'plam yoki sonlar maydoni bilan nomlanadi, masalan, natural sonlar to'plamidagi yoki ratsional sonlar to'plamidagi matritsa, shuningdek, P maydonidagi matritsa, kompleks sonlar maydonidagi matritsa va hokazo.

Agar A matritsaning barcha satrlari (ustunlari) mos ustunlar (satrlar) qilib yozilsa, hosil bo'lgan yangi A^1 matritsani A ni **transpozitsiyalash** deb ataladi va u quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matritsa quyidagi xossalarga ega:

1- xossa. Agar A matritsaning ikkita satri (yoki ustuni) elementlari mos ravishda almashtirilsa, hosil bo'lgan matritsa determinantining ishorasi teskariga o'zgaradi:

$$D = - D_1$$

2- xossa. Agar A matritsaning ikkita satr (ustun) elementlari mos ravishda teng bo'lsa, matritsa determinantining qiymati O (nol) ga teng bo'ladi.

$$D = O$$

3- xossa. Agar A matritsaning ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlari mos ravishda proporsional bo'lsa, bu matritsaning determinanti nolga teng bo'ladi.

$$D = O$$

4- xossa. Transpozitsiyalashdan hosil bo'lgan matritsa determinantining qiymati o'zgarmaydi:

$$D = D^1.$$

5- xossa. Agar A matritsaning biror satr elementlarining barchasi yig'indilardan iborat bo'lsa, uning determinantini quyidagi determinantlar yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'ladi:

$$D = D_1 + D_2, \text{ ya'ni:}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + c_1 & a_{32} + c_2 & a_{33} + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6-xossa. Agar A matritsaning biror satr (yoki ustun) elementlarida umumiy ko'paytuvchi mavjud bo'lsa, shu ko'paytuvchini uning determinanti oldiga chiqarish mumkin.

2. Matritsalar ustida amallar

Matritsalar ustida matritsalarini qo'shish, ayirish, uni biror songa ko'paytirish hamda matritsalarini o'zaro bir-biriga ko'paytirish kabi amallarni bajarish mumkin.

Bir xil o'lchamli ikkita $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalar berilgan bo'lsin.

Ta'rif: Berilgan ikkita A va B **matritsalarining yig'indisi** deb, shu matritsalarining mos elementlari yig'indisidan iborat bo'lgan C matritsaga aytiladi, ya'ni:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Ta'rif: Bir xil o'lchamli ikkita A va B **matritsalarining ayirmasi** deb, matritsalar mos elementlarining ayirmasidan iborat bo'lgan C matritsaga aytiladi, ya'ni:

$$C = A - B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{i1} & a_{i2} \dots a_{ij} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2j} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ b_{i1} & b_{i2} \dots b_{ij} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \dots a_{1j}-b_{1j} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \dots a_{2j}-b_{2j} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} \dots a_{ij}-b_{ij} \end{pmatrix}$$

Ta'rif: Ixtiuriy A **matritsani biror p songa ko'paytirish** deb, uning barcha elementlarini shu songa ko'paytirishga aytiladi, ya'ni:

$$p \cdot A = \begin{pmatrix} pa_{11} & pa_{12} & \dots & pa_{1j} \\ pa_{21} & pa_{22} & \dots & pa_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ pa_{i1} & pa_{i2} & \dots & pa_{ij} \end{pmatrix}$$

Ikkita A va B matritsalarini har doim ham ko'paytirib bo'lmaydi. Ularni ko'paytirish uchun A matritsaning ustunlari soni B matritsalarining satrlari soniga teng bo'lishi kerak, ya'ni $A = (a_{mi})$ va $B = (b_{in})$.

Ta'rif: m o'lchamli $A = (a_{mi})$ matritsaning n o'lchamli $B = (b_{in})$ matritsaga **ko'paytmasi** deb, mn o'lchamli shunday $C = (c_{mn})$ matritsaga aytiladiki, uning c_{mn} elementi A matritsaga 1 satri elementlarini B matritsa ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng.

Ikkita A va B matritsalar ko'paytmasi $C = AB$ ko'rinishida belgilanadi. Matritsa-larni ko'paytirish uchun birinchi ko'paytuvchining ustunlari soni ikkinchi ko'paytuvchining satrlari soniga teng bo'lishi lozimligidan foydalanib, quyidagi ikki matritsaning ko'paytmasini topamiz:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$$

3. Teskari matritsa

Quyidagi A kvadrat matritsa berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Berilgan A kvadrat matritsa uchun

$$AB = BA = E \quad (2)$$

shart bajarilsa, B matritsaga A matritsa **teskari matritsa** deyiladi. Teskari matritsa A^{-1} shaklida belgilanadi.

Agar A kvadrat matritsa bo'lib, uning determinanti 0 ga teng bo'lsa, ya'ni $\det A = 0$, unga teskari bo'lgan A^{-1} matritsa mavjud bo'lmaydi. Agar kvadrat matritsaning determinanti nolga teng bo'lmasa, ya'ni $\det A \neq 0$, A ga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'ladi.

A ga teskari matritsani topish uchun berilgan matritsaning Δ determinantini topamiz:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (3)$$

(3) determinantni a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} orqali ifodalaymiz. Bu algebraik to'ldiruvchilardan yangi $\bar{A}$ matritsa tuzamiz:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Hosil bo'lgan $\bar{A}$ matritsaga **biriktirilgan matritsa** deyiladi. (4) matritsaning barcha elementlarini $\det A = \Delta$ ga bo'lamiz. Natijada, A matritsaga teskari bo'lgan B matritsa hosil bo'ladi:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \dots \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \dots \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \dots \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

A va B matritsalarining ko'paytmasi $AB = E$ yoki $AA^{-1} = E$ ko'rinishida bo'ladi.

Demak, berilgan A matritsaga teskari bo'lgan A^{-1} matritsani topish uchun quyidagi bosqich ishlar amalga oshiriladi:

- 1). Berilgan matritsaning determinanti $\det A = \Delta$ ni hisoblash kerak.
- 2). Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, $\det A$ ning barcha elementlari uchun $\bar{A}$ biriktirilgan matritsa tuziladi.
- 3). A matritsaning barcha elementlarini $\Delta = \det A$ ga bo'lish lozim.

4. Matritsaning rangi

Ta'rif: Matritsaning τ – tartibli minorlari ichida hech bo'lmaganda bittasi nolga teng bo'lmay, $(\tau+1)$ – tartibli barcha minorlari 0 (nol) ga teng bo'lsa, τ soniga berilgan **matritsaning rangi** deyiladi. Ushbu ta'rifni boshqacha keltirish ham mumkin, ya'ni:

Ta'rif: A matritsaning noldan farqi minorlarining eng yuqori tartibiga A **matritsaning rangi** deyiladi. Matritsaning rangini $\tau(A)$ yoki τ_A ko'rinishida yozish mumkin.

Quyidagi 3 ta satr va 4 ta ustunga ega bo'lgan matritsani ko'raylik.

5. Matritsalar ustida elementar shakl almashtirishlar

Har bir matritsaning rangini topishda bir nechta determinantlarni hisoblashga to'g'ri kelishini yuqorida ko'rib o'tdik. Bundan esa matritsa rangini topishda yengilroq yo'llarni topish zarurati tug'iladi. Bunday muammoni hal qilishda matritsalar ustida elementar shakl almashtirishlarni bajarish yordam beradi.

Ta'rif: A matritsada **elementar shakl almashtirish** deganda, quyidagi amallar tushuniladi.

- 1) A matritsaning biror satr (yoki ustun) elementlarini 0 dan farqli songa ko'paytirish;
- 2) Biror satr (yoki ustun) elementlariga biror songa ko'paytirilgan boshqa satr (yoki ustun) ning mos elementlarini qo'shish;
- 3) Ikkita satr (yoki ustun) elementlari o'rnini mos ravishda almashtirish.

Yuqoridagi shakl almashtirishlardan birortasi A matritsa ustida bajarilgach, hosil bo'lgan matritsa B harfi orqali belgilanadi va shakl almashtirish $A \rightarrow B$ ko'rinishida ifodalanadi.

6. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish

n ta no'malumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n} \mathbf{x}_n = y_1 \\ \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22} \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n} \mathbf{x}_n = y_2 \\ \\ \mathbf{a}_{n1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2} \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{nn} \mathbf{x}_n = y_n \end{array} \right. \quad 1)$$

(1) sistemaning no'malumlarini oldidagi koeffitsientlardan matritsa hamda ozod hadlar va noma'lumlardan ustun matritsalar tuzib, ularni quyidagicha belgilaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

Matritsalarini ko'paytirish qoidasidan foydalanib, (1) sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (3)$$

Agar $\det A = 0$ (ya'ni A matritsa xosmas) bo'lsa, A^{-1} mavjud. U holda, (3) ning ikkala tomonini A^{-1} ga ko'paytiramiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad (4)$$

(4) tenglikni quyidagicha yozish ham mumkin:

$$(A^{-1} \cdot A)X = A^{-1}B \quad (5)$$

Matritsa bilan unga teskari matritsaning ko'paytmasi birlik matritsaga, A matritsa bilan A^{-1} teskari matritsaning ko'paytmasi E birlik matritsaga, E birlik matritsaning X ustun matritsaga ko'paytmasi natijasida, X ustun matritsa hosil bo'lishini, ya'ni:

$$A^{-1} \cdot A = E \quad \text{va} \quad EX = X$$

ekanligini hisobga olsak, quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (6)$$

(6) tenglik $\det A \neq 0$ bo'lganda n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi yechimining matritsali ifodasidan iborat.

7. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish. Kroneker-Kapelli teoremasi

Ixtiyoriy n sondagi noma'lumli istalgan m sondagi quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini qaraylik:

[illegible]

Sistemadagi x_j lar noma'lumlar, a_{ij} lar noma'lumlar oldidagi koefitsientlar, b_i lar esa ozod hadlar. (1) tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo'lsa, bunday tenglamalar sistemasi **birqalikda** deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining A matritsasini hamda shu matritsaga ozod hadlarni alohida ustun sifatida birlashtirib, kengaytirilgan B matritsani tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \dots \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

A va B matritsalarining rangi $\tau_A \leq \tau_B$ tengsizlik bilan bog'langan.

Teorema (Kroneker-Kapelli teoremasi). Berilgan (1) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun sistema matritsasi A bilan kengaytirilgan matritsa B ning ranglari teng, ya'ni $r_A=r_B$ bo'lishi zaryr va etarlidir.

A matritsaning rangi B matritsaning rangiga teng bo'lib, u noma'lumlar soniga teng bo'lsa, unda berilgan sistema yagona echimga ega bo'ladi. A matritsaning rangi B matritsaning rangiga teng bo'lib, noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, sistema cheksiz ko'p echimga ega bo'ladi.

8. Bir jinsli tenglamalar sistemasi va ularni yechish

Ta’rif: Ozod hadlari 0 lardan iborat bo’lgan tenglamalar sistemasiga ***birjinsli tenglamalar sistemasi*** deyiladi va u umumiy holda quyidagicha belgilanadi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{a}_{11}\textbf{x}_1 + \textbf{a}_{12}\textbf{x}_2 + ... + \textbf{a}_{1n}\textbf{x}_n = 0 \\ \textbf{a}_{21}\textbf{x}_1 + \textbf{a}_{22}\textbf{x}_2 + ... + \textbf{a}_{2n}\textbf{x}_n = 0 \\ \\ \textbf{a}_{m1}\textbf{x}_1 + \textbf{a}_{m2}\textbf{x}_2 + ... + \textbf{a}_{mn}\textbf{x}_n = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

(1) sistemaning asosiy va kengaytirilgan matritsalarini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \dots \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots \dots \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

A va B matritsalarining ranglari har doim teng bo'ladi. Haqiqatdan ham B dagi nolli ustunni o'z ichiga oluvchi barcha minorlar nolga teng. B ning rangini aniqlashda bunday ustun hisobga olinmaydi. B matritsa qolgan ustunlari bilan A dan farq qilmaydi. Shu sababli $\tau_A = \tau_B$.

Demak, berilgan (1) bir jinsli sistema doimo yechiladigan sistemadir. (1) sistemani 0, 0,...0 qiymatlar qanoatlantiradi. Bundan ko'rinadiki, bir jinsli tenglamalar sistemasi har vaqt quyidagi yechimga ega:

$$0, 0, \dots, 0$$

Nol yechimga **trivial yechim** deyiladi.

Agar (1) sistemasining yechimlari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ lardan hech bo'lmaganda bittasi nolga teng bo'lmasa, bu yechim **nolmas yechim** deyiladi.

Agar matritsalarining rangi $\tau_A = \tau_B$ bo'lib, $\tau = n$ bo'lsa, berilgan bir jinsli sistema bitta yechimga, ya'ni nol yechimga ega bo'ladi.

Agar $\tau_A = \tau_B$ bo'lib, $\tau < n$ bo'lsa, sistemaning yechimlari cheksiz ko'p bo'lib, ularning bittasi nol yechim, qolganlari esa nolmas yechimdan iborat bo'ladi.

Teorema: Bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun sistema matritsasining rangi noma'lumlar sonidan kichiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

1- natija. Bir jinsli sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo'lsa, sistema noldan farqli yechimlarga ham ega bo'lishi mumkin.

2- natija. n noma'lumli n ta bir jinsli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun sistemaning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

9. Matritsallar yordamida iqtisodiy masalalar yechish

Oldingi boblarda matritsalar haqida atroflicha ma'lumot berildi. Bu paragrafda esa chiziqli algebraning asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan matritsa yordamida iqtisodga oid masalalar yechishga to'xtalamiz.

1-masala. Qandaydir korxonaning bir kunda to'rt xil mahsulot ishlab chiqarishi ma'lum bo'lsin. Agar mahsulot chiqarishning quyidagi asosiy xususiyatlari berilgan bo'lsa :

1 – jadval

Ishlab chiqariladigan mahsulot turi	Mahsulot miqdori (dona)	Xom ashyo sarfi (kg)	Mahsulotning tayyorlash vaqt me'yori (max/soat)	Mahsulot narxi (pul birligida)
1	40	6	5	60
2	60	3	3	40
3	50	7	7	80
4	70	5	6	50

bir kunlik umumiy ko'rsatkichlarni:

1) S – xom ashyo sarfini;

2) T – ish vaqti sarfini;

3) P – mahsulot ishlab chiqarish qiymatini aniqlang.

Masalaning yechilishi: Mahsulot ishlab chiqarishning berilgan asosiy xususi-yatlari asosida ishlab chiqarishni xarakterlovchi quyidagi vektorlarni tuzamiz:

$q = (40, 60, 50, 70)$ – assortiment vektori;

$s = (6, 3, 7, 5)$ – xom ashyo sarfi vektori;

$t = (5, 3, 7, 6)$ – ish vaqti sarfi vektori

$p = (60, 40, 80, 50)$ – narx vektori.

Biz izlayotgan ko'rsatgichlar, assortiment vektori bilan qolgan vektorlarning skalyar ko'paytmasini topish orqali aniqlanadi, ya'ni:

$$S = qs = 40 \cdot 6 + 60 \cdot 3 + 50 \cdot 7 + 70 \cdot 5 = 1120 \text{ kg};$$

$$T = qt = 40 \cdot 5 + 60 \cdot 3 + 50 \cdot 7 + 70 \cdot 6 = 1150 \text{ soat va}$$

$$P = qp = 40 \cdot 60 + 60 \cdot 40 + 50 \cdot 80 + 70 \cdot 50 = 14700 \text{ pul birligi.}$$

2 – masala: Korxona to'rt xildagi xom ashyoni ishlatib, to'rt xil mahsulot ishlab chiqarishi uchun ketgan xom ashyo sarfi quyidagi matritsa yordamida berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Bunda, 1, 2, 3, va 4- ustunlar mos ravishda ishlatilgan xom ashyo turlari, 1, 2, 3 va 4 -satrlar mos ravishda ishlab chiqarilgan mahsulot turlaridan iborat. Agar har bir xom ashyo tannarxi hamda uni tashib keltirish uchun ketgan xarajatlar mos ravishda 10, 12, 16, 18 va 3, 2, 1, 3 pul birligida bo'lsa, quyidagi ko'rsatgichlarni aniqlang:

a) Har bir tur mahsulotni ishlab chiqarish uchun ketgan xom ashyo va tashishga ketgan umumiy xarajatlarni;

b) Ishlab chiqarish rejasi 80, 50, 40 va 70 birlikda bo'lsa, ishlab chiqarishga ketadigan xom ashyo hamda tashishga sarflanadigan umumiy xarajatlarni.

Masalaning yechilishi: Ishlatilgan xom ashyoning tannarxi va uni tashish narxining matritsasini tuzamiz:

$$S = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 16 & 18 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) A matritsaning S^{-1} transponirlangan matritsaga ko'paytmasini topamiz, ya'ni:

$$A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 12 & 2 \\ 16 & 1 \\ 18 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 242 & 36 \\ 210 & 31 \\ 206 & 37 \\ 322 & 49 \end{pmatrix}$$

Xosil bo'lgan matritsannig birinchi ustuni – mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo uchun ketgan xarajatlar, ikkinchi ustun esa xom ashyoni tashish uchun ketgan transport xarajatlardan iborat.

b) Korxona mahsulot ishlab chiqarishining $q = (80, 60, 40, 70)$ vektor rejasida sarf bo'lgan umumiy xarajatlarni topish uchun satr matritsani AS^{-1} matritsaga ko'paytiramiz:

$$q \cdot AS^{-1} = (80, 60, 40, 70) \cdot \begin{pmatrix} 242 & 36 \\ 210 & 31 \\ 206 & 37 \\ 322 & 49 \end{pmatrix} = 62740, 9650.$$

Ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan 62740 element – xom ashyo uchun ketgan xarajat, 9650 esa umumiy xarajatlardir.

3 – masala. Beshta korxona besh xildagi xom ashyoni ishlatib, to'rt xil mahsulot ishlab chiqaradi. Shu korxonalarning kunlik ishlab chiqarish ko'rsatkichi va har bir korxonaning yillik ish kunlari hamda xom ashyolarning narxi quyida keltirilgan:

2 - jadval

Mahsulot turlari	Korxonalar unumdorligi (mahsulot, kun)					Xom ashyo xillari sarfi			Yilning ish kunlari miqdori					Xom ashyo narxi		
	1	2	3	4	5	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3
1	5	4	3	6	8	3	2	3	260	250	230	240	235	60	80	70
2	3	5	7	4	7	4	4	6								
3	6	7	6	5	0	5	5	3								
4	4	5	6	7	6	6	7	8								

Jadval asosida quyidagilarni aniqlang:

1) Korxonalardan har birining ishlab chiqargan mahsulot turlari bo'yicha yillik unumdorligini.

2) Korxonalardan har birining xom ashyo xillariga bo'lgan yillik ehtiyojini.

3) Ularning mahsulot ishlab chiqarishlarida xom ashyo xillari va miqdori bo'yicha sotib olish uchun ketgan xarajatlarining yillik miqdorini.

Masalaning yechilishi: Mahsulot ishlab chiqarish bo'yicha korxonalar unumdorligi matritsasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Berilgan matritsadagi 5 ta ustunning har biri biror korxonaning mahsulot turlari bo'yicha kunlik unumdorligi, 4 ta satr elementlari esa mos ravishda, mahsulot turlaridir.

Biror korxonaning ishlab chiqargan mahsulotlari turlari bo'yicha yillik unumdorligini topish uchun shu korxonaning yillik ish kunlarini mos korxona ustuniga ko'paytirish orqali topiladi. Masalan, 1-korxonaning yillik unumdorligi $260 \cdot 5$, $260 \cdot 3$, $260 \cdot 6$, $260 \cdot 4$ bo'lib, 1300, 780, 1500, 1040 bo'ladi. Har bir korxona uchun yillik unumdorlik shu yo'l bilan topiladi. Topilgan qiymatlarni quyidagi matritsaga joylashtiramiz:

$$A_{\text{yil}} = \begin{pmatrix} 1300 & 1000 & 690 & 1440 & 1880 \\ 780 & 1250 & 1610 & 960 & 1645 \\ 150 & 1750 & 1380 & 1200 & 0 \\ 1040 & 1250 & 1380 & 1680 & 1410 \end{pmatrix}$$

Ishlatilgan xom ashyolar sarfi matritsasini tuzamiz:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Bunda, ustunlar – ishlab chiqarilgan mahsulot turlari, satrlar esa ishlatilgan xom ashyo xillari.

B matritsani A matritsaga ko'paytirib, xom ashyo xillari bo'yicha korxonalarning kunlik sarflarini topamiz:

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 81 & 97 & 103 & 101 & 88 \\ 89 & 110 & 119 & 111 & 93 \\ 83 & 103 & 117 & 113 & 114 \end{pmatrix}$$

B matritsani A_{yil} matritsaga ko'paytirish orqali har bir korxonaning xom ashyo xillariga bo'lgan yillik ehtiyojini aniqlaymiz:

$$BA_{yil} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1300 & 1000 & 690 & 1440 & 1880 \\ 780 & 1250 & 1610 & 960 & 1645 \\ 1560 & 1750 & 1380 & 1200 & 0 \\ 1040 & 1250 & 1380 & 1680 & 1410 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21064 & 24250 & 23690 & 24000 & 20680 \\ 23140 & 27500 & 27370 & 25740 & 21855 \\ 21580 & 25680 & 26910 & 26760 & 24910 \end{pmatrix}$$

Matritsadan ko'rinadiki, uning beshta ustuni mos ravishda beshta korxonaning uch xil xom ashyoga bo'lgan ehtiyojlaridir. Masalan, 3–korxonaning xom ashyo xillariga bo'lgan ehtiyojlari mos ravishda 23690, 27370 va 26910 dan iborat.

Korxonaning xom ashyo narxi matritsasi quyidagicha bo'ladi:

$$P = (60, 80, 70).$$

P satr matritsani BA_{yil} matritsaga ko'paytirish orqali har bir korxonaning xom ashyo yillik zahirasi uchun sarflanadigan umumiy xarajatini topamiz:

$$P \cdot BA_{yil} = (60 \ 70 \ 80) \cdot \begin{pmatrix} 21064 & 24250 & 23690 & 24000 & 20680 \\ 23140 & 27500 & 27370 & 25740 & 21855 \\ 21580 & 25680 & 26910 & 26760 & 24910 \end{pmatrix}$$

10. Iqtisodiy masalalar yechishda chiziqli tenglamalar sistemasidan foydalanish

Ko'pgina masalalar berilgan shartlar asosida tenglamalar sistemasini tuzish orqali oson hal qilinadi. Shunday masalalardan ba'zilarini ko'rib o'tamiz. Iqtisodiy masalalar yechishda chiziqli tenglamalar sistemasining ahamiyati katta.

Masala. Ishlab chiqarish korxonasi uch xildagi xom ashyoni ishlatib, uch turda mahsulot ishlab chiqaradi. Mahsulot ishlab chiqarishning berilgan xarakteristikalari jadvali quyidagicha:

1 - jadval

Xom ashyo xillari	Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari			Xom ashyo zahirasi
	1	2	3	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Masalaning yechilishi: Korxonada ishlab chiqarilishi lozim bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1 , x_2 va x_3 lar bilan belgilaymiz. Birinchi turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan birinchi xil xom ashyo sarfini $5x_1$, ikkinchi xil mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan birinchi xil xom ashyo sarfini $12x_2$ va uchinchi xil uchun xom ashyo sarfini $7x_3$ bilan belgilaymiz. U holda, uch turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun birinchi xil xom ashyoning umumiy sarfi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$$

Shuningdek, ikkinchi va uchinchi xil xom ashyolar sarfining tenglamalari tuziladi:

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660 \quad \text{va} \quad 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

Natijada, masala shartlari asosida quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000 \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660 \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070 \end{cases}$$

Bunday chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari bizga ma'lum. Uning yechimlari $x_1 = 70$, $x_2 = 120$ va $x_3 = 30$ dan iborat. Bu yechimlar mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlaydi.

11. Leontevning chiziqli iqtisodiy modeli. Tarmoqlararo balans tenglamalarni tuzish

Balans tenglamalarini tuzish masalasi ko'p tarmoqli moddiy ishlab chiqarishni tahlil qilish va rejalashtirish natijasida kelib chiqadi. Bu masalaning xarakterli tomoni shundan iboratki, u balans matritsasining modeli orqali ifodalanadi.

Moddiy ishlab chiqarish n ta tarmoqdan iborat bo'lsin. U holda, mahsulot ishlab chiqarishning vaqt birligidagi (masalan, bir yillik) rejalashtirilgan hajmini

$$x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n$$

lar yordamida ifodalaymiz. Tarmoqlararo balans masalasida moddiy ishlab chiqarish bir nechta tarmoqlar to'plamidan iborat bo'lib, bu tarmoqlarning har biri biror mahsulot ishlab chiqaradi yoki biror xizmat ko'rsatadi. Ishlab chiqarish jarayonida biror tarmoq boshqa tarmoqning mahsulotlarini, masalan, xom ashyo, tayyor materiallar, har xil jihozlar, yoqilg'i, energiya kabilarni ishlatadi, ba'zi bir xizmat turlaridan foydalanadi.

i tarmoqning j tarmoq x_j miqdordagi mahsulot ishlab chiqarishga ketgan sarfi hajmini q_{ij} bilan, i tarmoqning o'zida sarflanadigan qismini esa q_{ii} bilan belgilaymiz.

i tarmoq mahsulotining bir qismi moddiy ishlab chiqarishga sarflanib, qolgan qismi boshqa maqsadlar, masalan, xalq iste'moliga, eksportga, mablag'lar yig'imi (zahira) kabilarga sarflanadi. i tarmoqning moddiy ishlab chiqarishga sarflanmagan qismiga *so'nggi mahsulot* (yoki *pirovard mahsulot*) deyiladi.

Ularni $y_1, y_2, \dots, y_n$ bilan belgilaymiz. Har bir tarmoq mahsulotining taqsimlanishini jadvalda quyidagicha keltirish mumkin:

4 - jadval

Moddiy ishlab chiqarish tarmoq raqami	Mahsulot hajmi	Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari				Xom ashyo zahirasi
		1	2	...	n	
1	x_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1n}	y_1
2	x_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2n}	y_2

(3) dan $a_{ij} = \frac{q_{ij}}{x_j}$ koeffisientlar **texnologik koeffisientlar** deb ataladi.

$$a_{ij} = \frac{q_{ij}}{x_j} \quad (5)$$

Yuqorida keltirilgan texnologik koeffisientlar (ya'ni a_{ij}) quyidagi n -tartibli kvadrat matritsani hosil qiladi:

Ushbu (6) matritsa moddiy ishlab chiqarish rejalashtirilayotgan davrda mahsulot ishlab chiqarishning texnik shartini ifodalaydi. Shuning uchun A matritsa ***ishlab chiqarish texnikasi*** yoki ***bevosita xarajatlar matritsasi*** deb nomlanadi.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \dots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

(7) uchun quyidagi belgilashlarni bajarsak, ya'ni:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$X = AX + Y \quad \text{yoki} \quad X - AX = Y. \quad (9)$$

(9) tenglamalarga asoslanib, E birlik matritsa qatnashgan ushbu natijaga kelish mumkin:

$$(E \cdot A) X = Y \quad \text{yoki} \quad Y = (E \cdot A) \quad (10)$$

Bu tenglama 1936 yil amerikalik iqtisodchi olim V.V.Leontev tomonidan matematik model sifatida qaralganligi uchun (10) ga **Leontevning chiziqli iqtisodiy modeli** deyiladi.

(10) tenglamadagi (EA) matritsaga teskari $P = (EA)^{-1}$ matritsani topamiz va uni (10) ga chap tomonidan ko'paytirib, quyidagi tenglikka kelamiz:

$$(E \cdot A)^{-1} \cdot (E \cdot A) \cdot X = (E \cdot A)^{-1} \cdot Y \quad \text{yoki} \quad X = (E \cdot A)^{-1} \cdot Y \quad (11)$$

$$P = (EA)^{-1} \quad (12)$$

(12) matritsaga **to'la xarajatlar matritsasi** deyiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Abdalimov V. Oliy matematika. – Toshkent: O'qituvchi, 1994.
2. Abdalimov V., Solixov Sh. Oliy matematika qisqa kursi.- Toshkent: O'qituvchi, 1983.
3. Abdalimov V. Oliy matematikadan misol va masalalar to'plami. - Toshkent: Milliy ensiklopediya, 2003