

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
Z.M. BOBUR NOMIDAGI ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI**

**Magistratura bo'limi
Matematika kafedrası**

**“TASDIQLAYMAN”
Bo'lim boshlig'i
N. I.Asqarov**

“ ” _____ 2015 yil

**“HIMOYAGA QO'YILDI”
Kafedra mudiri
R.A.Mullajonov**

“ ” _____ 2015 yil

**« INVOLYUTSION XOSSASIGA EGA BO'LGAN XUSUSIY HOSILALI
DIFFERENSIAL TENGLAMALAR »**

MAVZUSIDA

MAGISTRLIK DISSERETATSIYASI

**Bajardi: Usmonov Bahromjon Mannobxon o'g'li
“Matematika” yo'nalishi magistranti**

**Ilmiy rahbar: Mo'minov G'ulomjon
fizika-matematika fanlari doktori, kafedra professori**

ANDIJON-2015

M u n d a r i j a

K i r i s h.....	3
I Bob. Asosiy tushunchalar	
1.1-§.O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar.....	11
1.2-§.O'zgarmasni variatsiyalash usuli.....	15
1.3-§. Eyler va Lagrang tenglamalari.....	18
1.4-§. Involyutsiya va uning asosiy xossalari.....	24
I bob bo'yicha xulosa	28
II Bob.Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalar	
2.1-§. Differensial tenglamalar involyutsiyasi.....	29
2.2-§. Chiziqli differensial tenglamalar involyutsiyasi.....	31
2.3-§. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasining involyutsiyasi.....	42
2.4-§. Misollar yechish.....	44
II bob bo'yicha xulosa	57
III Bob. Involyutsiya xossasiga va maxsus potensialga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglama uchun aralash masala.	
3.1-§.Masalaning qo'yilishi va yechilish usuli.....	58
3.2-§.Masala xos qiymati va xos funksiyalarining xossalari.....	64
3.3-§.Masalaning klassik yechimi.....	68
III bob bo'yicha xulosa	71
X u l o s a	72
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.	74

Kirish

Dissertatsiya mavzusining asoslanishi va uning dolzarbligi: Ma'lumki hayot harakatdan iborat, shuning uchun harakat bilan bog'liq bo'lgan masalalarni o'rganish va xal qilish katta ahamiyatga ega. Bundan tashqari ko'plab murakkab jarayonlarning matematik modellari differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Yuqorida keltirilgan fikrlar mavzuning dolzarbligini ko'rsatadi.

Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan differensial tenglamalar haqida birinchi ish [24] adabiyotda ko'rsatilgan 1940 yilda Silberstein R. hamda I.Ya. Vinerning 1969 yilda e'lon qilingan "Дифференциальные уравнения с инволюциями" mavzusidagi maqolalaridir.

Xususiylashtirilgan differensial tenglamalar uchun aralash masalalarni Fur'ye usuli bilan yechishda yechimni ifodalovchi qator va bu qatorni differensiallash bilan hosil qilingan qatorlarni tekis yaqinlashishini ko'rsatishda masala shartida berilganlarga ko'proq talablar qo'yiladi.

Fur'ye usuli bilan topilgan yechimni ifodalovchi qator hamma vaqt ham tekis yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkinligini kuzatish mumkin. Bu holda qatorni ikki qismga ajratib olish taklifini fanga A.N.Krilov tomonidan kiritilgan bo'lib, quyida bu usul haqida qisqacha bayon qilingan.

Bunday kamchilikni to'ldirish uchun rus matematigi A.N.Krilov tomonidan "Fur'ye qatorlari yaqinlashtirishning tezlashtirish usuli" deb nomlangan usulni qo'llash mumkin. Bu usulning mohiyati shundaki, tekshirilayotgan qator tarkibidan sekin yaqinlashuvchi, ammo yig'indisi oshkor ko'rinishda hisoblanishi mumkin bo'lgan qator ajratiladi va demak bu qatorning silliqlik masalasi haqida bevosita fikr yuritish mumkin. Qatorning qolgan qismi esa tez yaqinlashuvchi bo'lib istalgancha hadlab differensiallash imkoniyatini beradi va hosil bo'lgan qatorlar tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Krilovning bu usuli B.A.Chernyatin tomonidan rivojlantirildi va issiqlik o'tkazuvchilik, to'lqin tebranishi va Shredinger tenglamalari bilan berilgan aralash masalalariga tadbiiq qilindi.

A.N.Krilov va B.A.Chernyatin usullari hozirga kelib, A.A.Andreev [3], M.Sh.Burlutskaya va A.P.Khromov [4-12] tomonidan involyutsiyaga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo'yilgan aralash masalalar yechimlarini topishga tadbiq qilinmoqda.

Hozirga kelib involyutsiyaga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamalarni o'rganish matematikaning yangi o'rganilayotgan sohalaridan bo'lib, uning rivojida M.Sh.Burlutskaya va A.P.Khromov larning tutgan o'rni beqiyosdir. Bu sohaning asoschilari A.N.Krilov va B.A.Chernyatin lar hisoblanadi. Bu soha bo'yicha ko'plab ishlar olib borish mumkin va ushbu dissertatsiyada ba'zi bir yangi izlanishlar natijalari bilan keltirilgan hamda yangi g'oyalar taklif qilingan.

Tadqiqot obyekti va predmeti: Differensial tenglamalar, involyutsiya xossasiga ega bo'lgan differensial tenglamalar, Shturm-Liuvill masalasi yordamida yechiladigan involyutsiya xossasiga ega bo'lgan xususiy xosilali differensial tenglamalar.

Tadqiqot maqsadi va vazifalari: Matematik modellari differensial tenglamalar bilan ifodalangan jarayonlarni yorituvchi differensial tenglamalarni ko'p hollarda analitik ko'rinishda yechimini topish imkoniyatlari juda ham kam. Shuning uchun mazkur ishda matematik modellari invoyutsiya xossasiga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamaga oid chegaraviy masalani tadqiq qilish bilan qaralayotgan masala yechimining mavjudligi ko'rsatiladi va Fur'ye usuli bilan klassik yechim quriladi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

- 1) Invoyutsiya xossasiga ega bo'lgan ko'plab birinchi va ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni yechishga oid misollar keltirildi;
- 2) Involutsiya xossasiga ega bo'lgan bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli tenglama yechimini qurish amalgam oshirildi;
- 3) Involutsiya xossasiga ega bo'lgan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun aralash masala yechimi topish Fur'ye usuli bilan oddiy differensial tenglamalar

uchun Shturm-Liuvill xos qiymatlari masalasi orqali ifodalandi va klassik yechim standart shaklda qurildi.

Tadqiqotning asosiy masalalari va farazlari: Ushbu dissertatsiya ishida quydagi masalalar ko'riladi.

- tadqiqot uchun zarur tushunchalar, ta'riflar va teoremlar isbotlari bilan bayon qilingan.
- Invol'yutsiya xossasiga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalar yechimini topish
- Invol'yutsiyaga ega bo'lgan xususiy xosilali tenglamalar uchun xos qiymat va xos funksiyalarni topish.
- Invol'yutsiyaga ega bo'lgan xususiy xosilali tenglamalar uchun klassik yechimni qurish

Tadqiqot mavzusi bo'yicha adabiyotlar sharhi(tahlili): [24] adabiyotda invol'yutsiya tushunchasiga oid boshlang'ich masala va uning yechimi keltirilgan bo'lib, bazi bir oddiy differensial tenglamalar uchun yechim topilgan. Men bu adabiyotdan dissertatsiyamning 2- bobida foydalandim va bir qancha misollarga yechim topdim.

[1]-[23] adabiyotlarda esa invol'yutsiya qatnashgan xususiy hosilali differensial tenglama, funksional operator, integral operator, aralash masala va boshqa masalalar qaralgan bo'lib, bu adabiyotlardan dissertatsiyamning 3- bobida foydalandim. Bu adabiyotlar yordamida invol'yutsiya qatnashgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Fur'ye usuli orqali klassik yechimni topishga muvaffaq bo'ldim.

Tadqiqotda qo'llanilgan uslub(metodika)ning tavsifi: Ushbu dissertatsiyada differensial tenglamalar, chiziqli algebra, haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va variatsion hisoblash usullari qo'llanilgan.

Tadqiqot natijalarining nazariy va amaliy ahamiyati: Dissertatsiya ishida olingan natijalar ilmiy-nazariy ahamiyatga ega. Ulardan optimal boshqaruv nazariyasi va spektral analiz nazariyasida matematik modellarni tadqiq etishda foydalanish mumkin

Ish tuzilmasining tavsifi:

Magistrlik dissertatsiyasi quyidagi tarkibiy qisimlardan iborat.

- Titul varoq
- Anotatsiya
- Mundarija
- Kirish
- Asosiy qism (uchta bobdan iborat)
- Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

Dissertatsiyaning birinchi bobi tayanch tushunchalardan tashkil topgan bo'lib, involyutsiya tushunchasini o'rganish uchun boshlang'ich ma'lumotlar: o'zgarmas koeffisientli chiziqli differensial tenglamalar, O'zgarmasni variatsiyalash usuli, involyutsiya va uning xossalari, Eyler va Lagranj tenglamalari bayon qilingan.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobida involyutsiya xossasini o'rganish uchun, oddiy differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumotlar, oddiy differensial tenglamalar involyutsiyasi chiziqli differensial tenglamalar involyutsiyasi, chiziqli differensial tenglamalar sistemasining involyutsiyasi keltirilgan va ularga doir bir qancha misollarni ishlab umumiy yechimlari keltirib chiqarilgan.

Dastavval agar $\alpha(\alpha(x))=x$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ involyutsoya eslagan holda involyutsiyalarga misollar keltiramiz.

Masalan $\alpha(x)=\sqrt[m]{1-x^m}$ $m \in N$, $\alpha(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$ funksiya va uning xususiy

hollari bo'lgan $\alpha(x)=1-x$, $\alpha(x)=\frac{1}{x}$, $\alpha(x)=\frac{x}{x-1}$, $\alpha(x)=\frac{x+1}{x-1}$ funksiyalar involyutsiyaga misol bo'la oladi. Shuning uchun birinchi darajali involyutsiyaga ega bo'lgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni umumiy holda

$$y'(x)=y(\alpha(x))$$

ko'rinishda berilishi mumkin. Agar x ni $\alpha(x)$ bilan almashtirsak

$$y'(\alpha(x))=y(x)$$

ifodani va differensial tenglamani differensiallash bilan

$$y''(x) = \alpha'(x)y'(\alpha(x)) = \alpha'(x)y(x),$$

ya'ni ikkinchi tartibli Eyler tipidagi

$$y''(x) - \alpha'(x)y(x) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Endi involyutsiya qatnashgan oddiy differensial tenglamalarni yechishga misollar keltiramiz:

1-misol. Ushbu

$$y'(x) = y(1-x)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Berilgan tenglamada x ni $1-x$ bilan almashtirsak,

$$y'(1-x) = y(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Berilgan tenglamani differensiallash bilan

$$y''(x) = -y'(1-x) = -y(x)$$

yoki

$$y''(x) + y(x) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ko'rinishga ega va bu yechimda x ni $1-x$ bilan almashtirosh va differensiallash bizga

$$y(1-x) = C_1 \cos(1-x) + C_2 \sin(1-x) \quad \text{va} \quad y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

tengliklarni beradi. Berilgan tenglamaga ko'ra

$$-C_1 \sin x + C_2 \cos x = C_1 \cos(1-x) + C_2 \sin(1-x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bir qator hisoblashlardan so'ng bu tenglikdan

$$\begin{cases} C_1 \cos 1 + C_2 \sin 1 = C_2, \\ C_1 \sin 1 - C_2 \cos 1 = -C_1 \end{cases}$$

Bundan $C_2 = \frac{1 + \sin 1}{\cos 1} C_1$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning

umumiy yechimini

$$y(x) = C_1 \left(\frac{1 + \sin 1}{\cos 1} \sin x + \cos x \right) = C(\sin x + \cos(1-x))$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin, bu yerda $C = \frac{1}{\cos 1} C_1$.

Javob: $y(x) = C(\sin x + \cos(1-x))$

Dissertatsiyaning uchinchi bobida taqdim etilayotgan ishning asosiy qismini tashkil qilgan bo'lib, bunda involyutsiya xossasiga ega bo'lgan xususiy hosilali eng sodda giperbolik tenglama uchun aralash masala qaralgan hamda masalaning klassik yechimi keltirilgan.

M.Sh.Burlutskaya va A.P.Khromov

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], t \in (-\infty, +\infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

ko'rinishdagi , aralash masalani qaraymiz. Bu yerda quyidagi shartlar :

- 1) β – haqiqiy son va $\beta \neq 0$;
- 2) $q(x) \in C^1[0, 1]$, $q(x) = q(1-x)$, $q(x)$ – haqiqiy funksiya;
- 3) $\varphi(x) \in C^1[0, 1]$ va $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) = 0$

bajariladi deb hisoblaymiz.

(1)-(2) masalaning yechimini topish uchun Fur'ye usulidan foydalanamiz.

Fur'ye usuliga ko'ra $u(x, t) = y(x) \cdot T(t)$ belgilash kiritamiz. Natijada (1) tenglama

$$\frac{1}{\beta i} y(x) \cdot T'(t) = y'(1-x) \cdot T(t) + q(x)y(x) \cdot T(t) \quad \text{yoki}$$

$$\frac{T'(t)}{\beta i T(t)} = \frac{y'(1-x) + q(x)y(x)}{y(x)}$$

ko'rinishda yozilishi mumkin. Oxirgi tenglikning chap qismi faqat t ga , o'ng qismi esa faqat x ga bog'liq funksiyalar bo'lgani uchun , bu tenglik o'zgarmas sondan iborat, ya'ni

$$\frac{T'(t)}{\beta i T(t)} = \frac{y'(1-x) + q(x)y(x)}{y(x)} = \lambda$$

Bundan $y(x)$ funksiya uchun

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (3)$$

$$y(0) = 0 \quad (4)$$

xos qiymatlar masalasini, $T(t)$ funksiya uchun esa $T(t) = ce^{\lambda i \beta t}$ ifodani hosil qilamiz.

2. (3)- (4) masalaning yechimini topamiz. (3) tenglamada x ni $1-x$ ga almashtirib, $y(x) = z_1(x)$, $y(1-x) = z_2(x)$ belgilashlar kiritsak,

$$z_1'(x) + q(1-x)z_2(x) = \lambda z_2(x),$$

$$-z_2'(x) + q(x)z_1(x) = \lambda z_1(x)$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Agar $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ belgilash kiritsak, bu

tenglamalarni vector matritsa usuli bilan

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

yoki $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ ga nisbatan

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) \quad (5)$$

Drak sistemasi ko'rinishida yozishimiz mumkin, bu yerda

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad z_2(x) = z_1(1-x).$$

Teskarisi ham o'rinli: agar $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ funksiya (5) sistemaning yechimi

bo'lib, $z_1(x) = z_2(1-x)$ tenglik bajarilsa, u holda $y(x) = z_1(x)$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

1-lemma. (5) tenglamaning umumiy yechimi

$$z(x) = z(x, \lambda) = TV(x, \lambda)c \quad (6)$$

ko'rinishga ega, bu yerda

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, V(x, \lambda) = \text{diag}(u_1(x)e^{-\lambda ix}, u_2(x)e^{\lambda ix}),$$

$$u_1(x) = \exp\left(i \int_0^x q(t) dt\right), \quad u_2(x) = \exp\left(-i \int_0^x q(t) dt\right),$$

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Eslatma 1). B matritsani diognal ko'rinishga keltiruvchi, ya'ni $T^{-1}BT = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

tenglikni qanoatlantiruvchi

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

matritsalar mavjud bo'lib, bu matritsalar teskari matritsalar mos ravishda

$$T_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, T_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, T_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, T_4^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega.

Eslatma 2). (5) tenglamaning umumiy yechimi komponentalari bo'yicha quyidagi ko'rinishga ega:

$$z_1(x) = c_1 u_1(x) e^{-\lambda ix} - c_2 i u_2(x) e^{\lambda ix},$$

$$z_2(x) = -c_1 i u_1(x) e^{-\lambda ix} + c_2 i u_2(x) e^{\lambda ix}$$

bu yerda $u_1(x) = \exp\left(i \int_0^x q(t) dt\right), u_2(x) = \exp\left(-i \int_0^x q(t) dt\right)$

2-lemma. (3) sistemaning umumiy yechimi

$$y(x) = y(x, \lambda) = c \varphi(x, \lambda) \quad (7)$$

ko'rinishga ega, bu yerda

$$\varphi(x, \lambda) = u_1(x) e^{-i \int_0^1 q(t) dt} e^{\lambda i(1-x)} - i u_2(x) e^{\lambda ix}, \quad c - \text{ixtiyoriy o'zgarmas son}$$

I Bob. Asosiy tushunchalar

Involutsiya xossasiga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalarni yechish jarayonida almashtirishlardan so'ng Eyler yoki Lagranj tenglamalari hosil bo'ladi. O'z navbatida bu tenglamalar almashtirishlar yordamida o'zgaras ko'effitsiyentli chiziqli tenglamalarga olib o'tilishi va yechilishi mumkin. Shuning uchun bu bobda asosiy tushunchalar qatorida o'zgaras ko'effitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar uchun Eyler va Lagranj tenglamalarini ko'rib chiqamiz.

1.1-§. O'zgaras ko'effitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar.

Biz n – tartibli o'zgaras ko'effitsiyentli chiziqli

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F(t) \quad (1)$$

differensial tenglamani qaraymiz, bu yerda $a_1, a_2, \dots, a_n$ – o'zgaras kompleks sonlar, $f(t)$ qandaydir oraliqda berilgan t o'zgaruvchining kompleks funksiyasi.

(1) tenglamaning chap qismi n – tartibli chiziqli differensial operator deyiladi va $L[y]$ kabi belgilanadi. (1) tenglamaning o'zi esa

$$L[y] = f(t) \quad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

Dastlab n – tartibli bir jinsli o'zgaras ko'effitsiyentli tenglamani qaraymiz.

I. Bir jinsli tenglamalar. Har bir

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$$

operatorga yoki bir jinsli

$$L[y] = 0 \quad (3)$$

tenglamaga (3) tenglamaning yoki $L[y]$ operatorning xarakteristik ko'phadi deb nomlangan

$$D(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_0 \quad (4)$$

ko'phadni mos qo'yamiz.

1-lemma. Ixtiyoriy n marta uzluksiz differensiallanuvchi $f(t)$ funksiya uchun quyidagi:

$$L[e^{\lambda t} f(t)] = e^{\lambda t} \left(D(\lambda) f + \frac{D'(\lambda)}{1!} f' + \dots + \frac{D^{(n)}(\lambda)}{n!} f^{(n)} \right) \quad (5)$$

formula o'rinli.

Isboti. $L[y] = y^{(k)}$, ($0 \leq k \leq n$) bo'lsin, u holda $D(p) = p^k$ bo'lib, agar $l > k$ bo'lganda $D^{(l)}(\lambda) = 0$ bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} L[e^{\lambda t} f(t)] &= \frac{d^k}{dt^k} (e^{\lambda t} f(t)) = \sum_{l=0}^k C_k^l \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} (e^{\lambda t}) \cdot f^{(l)}(t) = \sum_{l=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!} \lambda^{k-l} e^{\lambda t} f^{(l)}(t) = \\ &= e^{\lambda t} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\lambda^l} (\lambda^k) \cdot f^{(l)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{l=0}^k \frac{D^{(l)}(\lambda)}{l!} f^{(l)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{l=0}^n \frac{D^{(l)}(\lambda)}{l!} f^{(l)}(t) \end{aligned}$$

Biz bu yerda ikki funksiya ko'payitmasining k - tartibli hosilasini hisoblashda Leybnits formulasidan foydalandik.

Demak (5) formula $L[y] = y^{(k)}$ xususiy hol uchun isbotlandi. (5) formulaning umumiy holda to'g'riligi $L[y]$ operatorning $L[y] = y^{(k)}$, ($0 \leq k \leq n$) ko'rinishdagi operatorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligidan kelib chiqadi.

Lemma isbotlandi.

2-lemma. λ - soni $D(p)$ xarakteristik ko'phadning k karrali ildizi bo'lsa, u holda $y_1 = e^{\lambda t}$, $y_2 = t e^{\lambda t}$, ..., $y_k = t^{k-1} e^{\lambda t}$ funksiyalar bir jinsli (3) tenglamaning yechimlari bo'ladi.

Isboti. λ - soni $D(p)$ xarakteristik ko'phadning k karrali ildizi bo'lgani uchun $D(\lambda) = D'(\lambda) = \dots = D^{(k-1)}(\lambda) = 0$, $D^{(k)}(\lambda) \neq 0$

(5) formulani $y_j = t^j e^{\lambda t}$ ($0 \leq j \leq k-1$) funksiyalarga tadbiq qilib,

$$L[y_{j+1}] = L[e^{\lambda t} t^j] = e^{\lambda t} \left(\frac{D^{(k)}(\lambda)}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^j) + \dots + \frac{D^{(n)}(\lambda)}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^j) \right) = 0$$

chunki $l > j$ bo'lganda $\frac{d^l}{dt^l}(t^j) = 0$. Lemma isbotlandi.

3-lemma. $r=0,1,2,...,k-1$ uchun $L\left[t^r e^{\lambda t}\right]\Big|_{t=0}=0$ bo'lsin. U holda λ soni xarakteristik ko'phadning karraligi k dan kichik bo'lmagan ildizi bo'ladi.

Isboti. 1-lemmaga ko'ra

$$L[t^r e^{\lambda t}] \Big|_{t=0} = e^{\lambda t} \left(D(\lambda) t^r + \frac{D'(\lambda)}{1!} \frac{d(t^r)}{dt} + \dots + \frac{D^{(r)}(\lambda)}{r!} \frac{d^r(t^r)}{dt^r} \right) \Big|_{t=0}$$

chunki $k > r$ bo'lganda $\frac{d^k}{dt^k}(t^r) = 0$. Bundan tashqari $k < r$ bo'lganda

$$\left. \frac{d^k}{dt^k}(t^r) \right|_{t=0} = 0. \text{ Shuning uchun}$$

$$L[t^r e^{\lambda t}] \Big|_{t=0} = e^{\lambda t} \frac{D^{(r)}(\lambda)}{r!} r(r-1)\dots 1 \Big|_{t=0} = D^{(r)} = 0 \quad (r=0,1,\dots,k-1)$$

Demak, λ xarakteristik ko'phadning k dan kichik bo'lmagan ildizi bo'ladi.

Lemma isbotlandi.

Endi bir jinsli (3) tenglamaga qaytamiz. Aytaylik $D(p)$ xarakteristik ko'phad m ($m \leq n$) ta turli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ildizlarga ega bo'lsin. Bu ildizlarning karraliklarini

$k_1, k_2, \dots, k_m$ bilan belgilaymiz. U holda 2-lemmaga ko'ra

[illegible]

funksiyalar ham bir jinsli (3) tenglamaning yechimlari bo'ladi. $k_1 + \dots + k_m = n$ bo'lgani uchun (6) formula (3) tenglamaning n ta $y_i(t)$ yechimlarini aniqlaydi.

4-lemma. Agar $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar (6) tengliklar bilan aniqlansa, u holda

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_n(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \dots & y_n'(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7)$$

Isboti. Faraz qilaylik (7) determinant nolga teng bo'lsin. U holda bu determinantning satrlari orasida

$$b_0 y_j^{(n-1)}(0) + b_1 y_j^{(n-2)}(0) + \dots + b_{n-1} y_j(0) = 0 \quad (8)$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

chiziqli bog'liqlik mavjud, bu yerda $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ koefitsiyentlarning barchasi bir vaqtda nolga teng emas.

$$L_1[y] = b_0 y^{(n-1)} + b_1 y^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} y$$

differensial operatorni qaraymiz. Bu operatorga darajasi $n-1$ dan ortmagan

$$D_1(p) = b_0 p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

xarakteristik ko'phad mos keladi.

$j=1, 2, \dots, k_1$ bo'lsin, u holda (8) munosabatni

$$L[t^r e^{\lambda_1 t}] \Big|_{t=0} = 0 \quad (j=1, \dots, k_1)$$

yoki

$$L[t^r e^{\lambda_1 t}] \Big|_{t=0} = 0 \quad (r=0, 1, \dots, k_1-1; r=j-1)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

3-lemmaga ko'ra λ_1 soni $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning karraligi k_1 dan kichik bo'lmagan ildizi bo'ladi. Xuddi shu kabi $j=k_1+1, \dots, k_1+k_2$ ko'rinishda tanlab λ_2 soni $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning karraligi k_2 dan kichik bo'lmagan ildizi bo'lishini va hakoza λ_m soni $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning karraligi k_m dan kichik bo'lmagan ildizi bo'lishini isbotlashimiz mumkin. Shuning uchun har bir ildizni karraligi bilan hisoblab $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning ildizlari soni $k_1 + \dots + k_m = n$ ga teng bo'ladi degan xulosaga

kelamiz. Ammo bu mumkin emas, chunki $D_1(p)$ xarakteristik ko'phadning darajasi $n - 1$ dan ortmaydi. Hosil bo'lgan ziddiyat lemmani isbotlaydi.

1.2-§. O'zgarmasni variatsiyalash usuli.

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalarning xususiy yechimlarini topish ko'p hollarda o'zgarmasni variatsiyalash usuli bilan amalga oshiriladi. Biz ikkinchi tartibli tenglama va matritsa ko'rinishida berilgan tenglamalar sistemasi uchun ko'rib o'tamiz.

Dastlab ikkinchi tartibli

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad (1)$$

tenglamani qaraymiz. Aytaylik $y_1(x), y_2(x)$ funksiyalar (1) tenglamaga mos bir jinsli qismi bo'lgan

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (2)$$

tenglamaning yechimlari bo'lsin. (1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \quad (3)$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $C_1(x), C_2(x)$ noma'lum funksiyalar.

$$y'(x) = [C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)] + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

$C_1(x), C_2(x)$ noma'lum funksiyalarni shunday tanlaymizki kvadrat qavs ichida joylashgan funksiya nolga teng bo'lsin, ya'ni

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (4)$$

bo'lsin. U holda

$$y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) \quad (5)$$

(3) va (5) ni (1) tenglamaga qo'yilsa va guruhlanga

$$C_1(x)[y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)] + C_2(x)[y_2''(x) + a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)] + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

tenglikni va bundan $y_1(x), y_2(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning yechimi

ekanligidan

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \quad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Natijada $C_1(x)$, $C_2(x)$ noma'lum funksiyalarni aniqlash uchun (4) va (6) dan iborat bo'lgan

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (7)$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. (7) sistemani Kramer qoidasi bo'yicha

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{\omega(x)}, \quad C_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{\omega(x)} \quad (8)$$

munosabatlarni hosil qilamiz, bu yerda

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad (9)$$

(8) tengliklarni $[x_0, x]$ kesmada integrallash va hosil bo'lgan $C_1(x)$, $C_2(x)$ noma'lum funksiyalarning ifodalarini (3) tenglikka qo'yib (1) tenglamaning

$$y(x) = \int_{x_0}^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} \cdot \frac{f(t)}{\omega(t)} dt \quad (10)$$

xususiy yechimini hosil qilamiz.

Misol. $y'' + \mu^2 y = g(x)$ tenglamaning $y(0, \mu) = 0$, $y'(0, \mu) = \mu$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topamiz.

Yechilishi. Berilgan tenglamaning mos bir jinsli qismi: $y'' + \mu^2 y = 0$ bo'lib, uning umumiy yechimi $y_1(x) = \cos \mu x$, $y_2(x) = \sin \mu x$ ildizlarga va bizda $f(x) = g(x)$ bo'lgani uchun (10) formulaga ko'ra berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y(x) = \int_0^x \begin{vmatrix} \cos \mu t & \sin \mu t \\ \cos \mu x & \sin \mu x \end{vmatrix} \cdot \frac{g(t)}{\omega(t)} dt = \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin \mu(x-t) g(t) dt$$

ko'rinishga ega bo'ladi, chunki

$$\omega = \begin{vmatrix} \cos \mu x & \sin \mu x \\ -\mu \sin \mu x & \mu \cos \mu x \end{vmatrix} = \mu$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi mos bir jinsli qismining umumiy yechimi bilan bu tenglama xususiy yechimlari yig'indisiga teng bo'lgani uchun, u

$$y(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin \mu(x-t) g(t) dt$$

ko'rinishga ega. $y(0, \mu) = 0$, $y'(0, \mu) = \mu$ boshlang'ich shartlarga ko'ra $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ ekanligini aniqlaymiz.

Javob. $y(x) = \sin \mu x + \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin \mu(x-t) g(t) dt$

Endi sistema uchun umumiyroq bo'lgan holni qaraymiz:

$$X' = A(t)X + f(t), \quad X(0) = x_0 \quad (11)$$

sistemaning umumiy yechimini topamiz. (11) sistema yechimini $X(t) = \Phi(t)c(t)$ ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $\Phi(t)$ bilan $X' = A(t)X$ sistemaning $\Phi(0) = E$ shartni qanoatlantiruvchi fundamental matritsasi belgilangan. U holda

$$X'(t) = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$$

bo'lib, (1) ga ko'ra

$$\Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)X + f(t),$$

yoki

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$$

Bundan

$$c(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

bo'lgani uchun berilgan sistemaning xususiy yechimi

$$x(t) = \Phi(t)c(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

va umumiy yechimi esa

$$X(t) = \Phi(t)c + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $X(0) = x_0$, $\Phi(0) = E$ boshlang'ich shartga ko'ra izlanayotgan yechim

$$X(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

dan iborat.

1.3-§. Eyler va Lagranj tenglamalari. Differensial tenglamalar orasida oddiy almashtirishlar vositasida o'zgaras ko'effitsiyentli tenglamalarga o'tuvchi o'zgaruvchi ko'effitsiyentli tenglamalar ham uchraydi.

$$a_0 t^n \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} t \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \quad (12)$$

ko'rinishdagi tenglamaga Eyler tenglamasi deyiladi, bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ o'zgaras sonlar. Agar (12) tenglamada t ni e^x bilan almashtirsak tenglamaning ko'rinishi o'zgarmaydi. Demak, (12) tenglamada x erkli o'zgaruvchini

$$x = \ln t, \quad t = e^x \quad (13)$$

almashtirish bilan kiritsak, u holda x ni $x + C$ bilan almashtirishda tenglama o'zgarmaydi, ya'ni hosil bo'lgan yangi tenglama x ni oshkor ko'rinishda saqlamaydi. Erkli o'zgaruvchini almashtirishda tenglama chiziqli tenglamaga o'tmaganligi uchun, biz o'zgaras ko'effitsiyentli chiziqli tenglamaga ega bo'lamiz.

Bu tasdiqni hisoblashlar vositasida bevosita tekshirishimiz mumkin. Biz y funksiyaning t bo'yicha hosilalarini (13) formula bo'yicha x bo'yicha hosilalari orqali ketma ket ifodalaymiz:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^{-x} \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = e^{-x} \frac{d}{dx} \left(e^{-x} \frac{dy}{dx} \right) = e^{-2x} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right);$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = e^{-x} \frac{d}{dx} \left[e^{-2x} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right) \right] = e^{-3x} \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - 3x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} \right);$$

Biz ko'ramizki, t bo'yicha olingan birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli hosilalarni qatnashgan ifodalar mos ravishda e^{-x} , e^{-2x} va e^{-3x} ko'paytuvchilarga ega. Faraz qilaylik t bo'yicha olingan k – tartibli hosila

$$\frac{d^k y}{dt^k} = e^{-kx} \left(\frac{d^k y}{dx^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dx} \right)$$

ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ – o'zgarmas sonlar. U holda t bo'yicha olingan $(k+1)$ – tartibli hosila

$$\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} = e^{-x} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k y}{dt^k} \right) = e^{-(k+1)x} \left(\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dx^k} + \dots - k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dx} \right)$$

ko'rinishga ega bo'ladi va yana qavs oldida $e^{-(k+1)x}$ ko'paytuvchi, qavslar ichida esa x bo'yicha birinchi tartibli hosiladan boshlab $(k+1)$ –tartibli hosilagacha ifodalarning chiziqli kombinatsiyalari joylashgan. Demak ko'rsatilgan xossa ixtiyoriy k natural soni uchun isbotlandi. Biz hisoblangan

hosilalarni (1) tenglamaga qo'ysak, har bir k uchun $\frac{d^k y}{dt^k}$ ifodani $a_k t^k = a_k e^{kx}$

ko'paytirishlozim bo'ladi va shu bilan birga x ni o'zida saqlovchi ko'rsatkichli ko'paytuvchilar qisqaradi hamda o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglama hosil bo'ladi.

1-misol. Ushbu

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + y = 0$$

tenglamani qaraymiz. $t = e^x$ almashtirish bizga

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

tenglamani beradi. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi: $k^2 + 2k + 1 = 0$ bir xil

$k_1 = k_2 = -1$ ildizga ega bo'lgani uchun x o'zgaruvchi bo'yicha umumiy yechim

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$$

ko'rinishga ega. Kiritilgan almashtirishga ko'ra t o'zgaruvchi bo'yicha umumiy yechim

$$y = \frac{1}{t}(C_1 + C_2 \ln t)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Biz almashtirilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi karrali ildizlarga ega bo'lmagan holda $e^{kx} = (e^x)^k$ xususiy yechimga ega bo'ladi va demak dastlabki tenglamada bu yechim t^k ko'rinishga ega bo'ladi. Shuning uchun bevosita xususiy yechimni bu ko'rinishda izlash va uni (12) tenglamaga qo'yish mumkin. Agar

$$t^m \frac{d^m(t^k)}{dt^m} = k(k-1)\dots(k-m+1)t^k, \quad m \leq k$$

ekanligini e'tiborga olib bu ko'rinishdagi ifodalar (12) tenglamaga qo'yilsa va hosil bo'lgan tenglik x^k ga qisqartirilsa k ni aniqlash uchun n – darajali

$$k(k-1)\dots(k-n+1) + a_1 k(k-1)\dots(k-n+2) + \dots + a_{n-2} k(k-1) + a_{n-1} k + a_n = 0 \quad (14)$$

algebraic tenglamani hosil qilamiz. Avvalgi mulohazalardan (14) tenglama x o'zgaruvchi bo'yicha topilgan xarakteristik tenglama bilan ustma ust tushadi. (14) tenglamaning har bir k oddiy ildiziga (12) tenglamaning t^k xususiy yechimi, (14) tenglamaning ikki karrali k ildiziga (1) tenglamaning t^k va $t^k \ln t$ xususiy yechimlari mos keladi va hakoza. $k = \alpha \pm i\beta$ qo'shma kompleks

ildiziga $t^{i\beta} = e^{i\beta \ln t}$ tenglikka binoan (12) tenglamaning ikkita $y = t^\alpha \cos(\beta \ln t)$ va $y = t^\alpha \sin(\beta \ln t)$ xususiy yechimilari mos keladi.

2-misol. Ushbu

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

tenglamani qaraymiz. Bu tenglamaning xususiy yechimini $y = t^k$ ko'rinishda izlaymiz va berilgan tenglamadan

$$k(k-1) + 3k + 5 = 0$$

yoki

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

xarakteristik tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama $k = -1 \pm 2i$ qo'shma kompleks ildizlarga ega bo'lgani uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \frac{1}{t} [C_1 \cos(2 \ln t) + C_2 \sin(2 \ln t)]$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Differensial tenglamalar orasida oddiy almashtirishlar vositasida o'zgarmas koeffitsiyentli tenglamalarga o'tuvchi o'zgaruvchi koeffitsiyentli tenglamalar orasida Lagranj tenglamasi deb nomlangan

$$(at+b)^n \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 (at+b)^{n-1} \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} (at+b) \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \quad (15)$$

ko'rinishdagi tenglamalar ham uchraydi bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ o'zgarmas sonlar. (15) Lagrang tenglamasida x erkli o'zgaruvchini

$$x = \ln(at+b), \quad at+b = e^x \quad (16)$$

tengliklar yordamida almashtirilsa o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglama hosil bo'ladi.

Bir jinsli bo'lmagan Eyler tenglamasining o'ng tomoni $P(t)$ ko'phadning chekli sondagi arifmetik amallardan tashkil topgan $\sum e^{\alpha t} P(t)$ ifodasidan iborat bo'lsa, u holda almashtirish natijasida hosil bo'lgan o'zgarmas koeffitsiyentli bir

jinsli tenglamaning o'ng tomoni $\sum t^\alpha P(\ln t)$ ko'rinishga o'tsa bunda ham xususiy yechimlarni topish bilan integrallashni amalga oshirilishi mumkinligini eslatamiz.

Endi Eyler va Lagrang tenglamalarini yechishga oid misollardan namunalar keltiramiz.

4-misol. Quyidagi tenglamani yeching.

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0$$

Yechilishi. Berilgan tenglamaning xususiy yechimini $R = r^k$ ko'rinishda izlaymiz. Natijada

$$k^2 + k - n(n+1) = 0,$$

xarakteristik tenglama tenglamani hosil qilamiz. Uning ildizlari

$$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4n(n+1)+1}}{2}, \quad k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4n(n+1)+1}}{2}$$

bo'lgani uchun tenglamaning umumiy yechimi

$$R = \frac{1}{\sqrt{r}} [C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha}], \quad \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{4n(n+1)+1}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

5-misol. Quyidagi tenglamani yeching.

$$t^2 y'' - 4ty' + 6y = t$$

Yechilishi. Berilgan tenglamada $x = \ln t$, $t = e^x$ almashtirishi qo'llash bilan bu tenglama bir jinsli bo'lmagan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = e^x$$

tenglamaga o'tadi. Bu tenglama mos bir jinsli qismining umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Xususiy yechimini esa $y = Ae^x$ ko'rinishda izlaymiz va bu xususiy yechim $y = \frac{1}{2}e^x$ bo'lgani uchun almashtirish natijasida hosil bo'lgan tenglamaning yechimi

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$$

bo'lib, (13) almashtirishga ko'ra berilgan tenglamaning yechimi

$$y = C_1 t^2 + C_2 t^3 + \frac{1}{2} t$$

funksiyadan iborat bo'ladi.

6-misol. Quyidagi tenglamani yeching.

$$t^2 y'' - ty' + 2y = t \ln t$$

Yechilishi. (13) almashtirish bu tenglamani

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y = x e^x$$

tenglamaga o'tadi. Bu tenglama mos bir jinsli qismining xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$

o'zaro qo'shma $k = -1 \pm i$ kompleks ildizlarga ega bo'lgani uchun uning umumiy yechimi

$$y = e^{-x} [C_1 \cos x + C_2 \sin x]$$

ko'rinishga ega. Xususiy yechimini esa $y = (Ax + B)e^x$ ko'rinishda izlaymiz va bu xususiy yechim $y = x e^x$ bo'lgani uchun almashtirish natijasida hosil bo'lgan tenglamaning yechimi

$$y = e^{-x} [C_1 \cos x + C_2 \sin x] + x e^x$$

bo'lib, (13) almashtirishga ko'ra dastlabki tenglamaning yechimi

$$y = \frac{1}{t} [C_1 \cos \ln t + C_2 \sin \ln t] + t \ln t$$

funksiyadan iborat.

1.4-§. Invol'yutsiya tushunchasi va uning asosiy xossalari.

Qandaydir f akslantirish berilgan bo'lib, bu akslantirishda P nuqtaning tasviri $P' = f(P)$ nuqta bo'lsin. O'z navbatida $P'' = f(P')$, $P'' = P$ ya'ni $f \circ f(P) = P$ bo'lsin. Demak, f akslantirish invol'yutiv akslantirish bo'lishi uchun quyidagi shartlarning biri o'rinli bo'lishi kerak:

1) ixtiyoriy P nuqta uchun

$$f(f(P)) = P \quad (17)$$

tenglikning bajarilishi yoki

2) ixtiyoriy P nuqta uchun $P' = f(P)$ munosabat bilan birgalikda

$$P = f^{-1}(P') \quad (18)$$

munosabat bajarilishi, ya'ni har qanday akslantirish o'ziga teskari akslantirish bilan ustma ust tushishi lozim.

Shu sababli ko'plab geometric adabiyotlarda, masalan [1] da o'ziga teskari akslantirishlar bilan bir xil bo'lgan akslantirishlarga *invol'yutiv akslantirishlar* deyiladi. Shuningdek geometriyada butun son o'qida aniqlangan haqiqiy argumentli (1) tenglikni qanoatlantiruvchi $f(x)$ funksiyaga *kuchli invol'yutsiya* deyiladi.

Kuchli invol'yutsiyalar to'plamini Y bilan belgilasak, u holda har bir $f(x) \in Y$ funksiyaning grafigi $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylasgan bo'ladi. Agar G bilan Oxy tekislikning $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgan funksiyalar to'plami bo'lib, bunda har bir x element uchun bu to'plamning x absissaga ega bo'lgan yagona nuqtasi mos kelsa, u holda G to'plam Y to'plamdagi birorta $f(x)$ invol'yutiv akslantirishning grafigi bo'ladi.

Kuchli invol'yutiv akslantirish bo'ladigan $f(x)$ akslantirishni quyidagi tartibda hosil qilishimiz mumkin. Faraz qilaylik haqiqiy o'zgaruvchili $g(x, y)$ funksiya barcha tartiblangan (x, y) haqiqiy nuqtalar to'plamida aniqlangan bo'lib,

$g(x, y) = 0$ tenglikdan $g(y, x) = 0$ tenglik kelib chiqsin. Ma'lumki, xususiy holda $g(x, y) = g(y, x)$ tenglik bajarilsa, odatda $g(x, y)$ funksiyaga simmetrik funksiya deyiladi. Agar har bir x uchun $g(x, y) = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi $y = f(x)$ funksiya mos kelsa, u holda $y = f(x) \in Y$ bo'ladi. misollar keltiramiz:

1. $g(x, y) = x + y - C$ bo'lsin. U holda $g(x, y) = 0$ tenglikdan $g(y, x) = 0$ tenglik kelib chiqqanligi uchun $y = f(x) = x - C$ bo'ladi;

2. $g(x, y) = x^3 + y^3 - C$ bo'lsin. U holda $g(x, y) = 0$ tenglikdan $g(y, x) = 0$ tenglik kelib chiqqanligi uchun $y = f(x) = \sqrt[3]{x - C}$ bo'ladi. Yuqorida bayon etilganlardan tashqari $f(x) \in Y, f(x) \equiv x$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi involyutiv funksiyalarning to'plamining elementlari monoton lamayuvchi funksiyalardir, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (19)$$

munosabatlar o'rinli. Endi quyidagi tasdiqni keltiramiz.

1-teorema. $f(x) \equiv x$ munosabatni qanoatlantiruvchi har bir uzliksiz $f(x)$ – kuchli involyutsiya yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.

Isboti. $\varphi(x) = f(x) - x$ kuchli involyutsiya xossasiga ega bo'lgan uzluksiz monoton funksiya bo'lgani uchun uning grafigi $y = x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik joylashgandir, ya'ni bu funksiya (19) munosabatni qanoatlantiradi. Ma'lumki, (19) tenglik yagona $x = x_0$ nuqta uchun o'rinli bo'lgani uchun $f(x_0) - x_0 = 0$, ya'ni $f(x_0) = x_0$. Teorema isbotlandi.

Demak, $f(x)$ – kuchli involyutsiya bo'lsa, u holda u yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lishini ko'rib o'tdik. Endi involyutsiyaning turlarini ko'rib chiqamiz. Buning uchun $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ kasr chiziqli almashtirishni qaraymiz.

Kasr chiziqli almashtirish proyektiv tekislikning har bir M nuqtasini uning M' nuqtasiga o'tkazsin, ya'ni $M(x_0)$ va $M'(x'_0)$ nuqtalari uchun

$$f(M) = M', f(M') = M$$

tengliklar bajarilsin va shu bilan birgalikda $x_0 \neq x'_0$ bo'lsin. Aytilganlarga ko'ra koordinatalar bo'yicha

$$x'_0 = \frac{\alpha x_0 + \beta}{\gamma x_0 + \delta}, \quad x_0 = \frac{\alpha x'_0 + \beta}{\gamma x'_0 + \delta}$$

tengliklarni yozamiz. O'z navbatida bu tengliklardan

$$\begin{cases} \gamma x_0 x'_0 + \delta x'_0 - \alpha x_0 - \beta = 0, \\ \gamma x_0 x'_0 + \delta x_0 - \alpha x'_0 - \beta = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Sistemaning birinchi tenglamasidan ikkinchi tenglamasini hadlab ayirib

$$\delta(x'_0 - x_0) + \alpha(x'_0 - x_0) = 0, \quad \text{yoki} \quad (\delta + \alpha)(x'_0 - x_0) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Ammo $x_0 \neq x'_0$ bo'lgani uchun $\delta = -\alpha$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ kuchli involyutiv akslantirish bo'lganligi uchun, u

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$$

ko'rinishda bo'lishi lozim. Endi bu involyutsiyaning qo'zg'almas nuqtalarini topamiz.

$f(x) = x$ tenglik bajarilishi uchun

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha} = x,$$

ya'ni

$$\gamma x^2 - 2\alpha x - \beta = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

$$\Delta = \alpha^2 + \beta\gamma$$

belgilash kiritamiz. U holda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

- a) agar $\Delta > 0$ bo'lsa, u holda qaralayotgan involyutsiya ikkita haqiqiy qo'zg'almas nuqtalarga ega bo'ladi va bu involyutsiya giperbolik involyutsiya deyiladi;
- b) agar $\Delta = 0$ bo'lsa, u holda qaralayotgan involyutsiya yagona

haqiqiy qo'zg'almas nuqtaga ega bo'ladi va bu involyutsiya parabolik involyutsiya deyiladi;

- c) agar $\Delta < 0$ bo'lsa, u holda qaralayotgan involyutsiya haqiqiy qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lmaydi va bu involyutsiya elliptik involyutsiya deyiladi;

Bu mulohazalardan f – kuchli involyutsiya bo'lishi uchun u parabolik involyutsiya bo'lishi lozim. Demak, quyidagi tasdiq o'rinli.

2-teorema. Agar

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$$

akslantirishda $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$ bo'lsa, u holda bu akslantirish kuchli involyutsiya bo'ladi.

I bob bo'yicha xulosa:

I bobda involyutsiya tushunchasiga olib keladigan asosiy tushunchalar keltirilgan bo'lib, o'zgarmas ko'effisienli chiziqli differensial tenglamalar, o'zgarmasni varaiatsiyalash usuli, Eyler va Lagranj tenglamalari va unga doir misollar yechilishi bilan keltirilgan. Bundan tashqari involyutsiya tushunchasiga ta'rif berilgan va involyutsiyaga oid bir nechta teoremlar isbotlari bilan keltirilgan. Kuchli involyutsiya bo'lish shartlari, kasr chiziqli involyutsiya va uning turlari haqida bayon qilingan.

II Bob. Involutsiya xossasiga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalar

2.1-§.Differensial tenglamalar involutsiyasi.

Dastlab biz differensial tenglamalar involutsiyasining ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif. Agar $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ akslantirishlar involutsiyalar bo'lsa, u holda

$$F(x, y(f_1(x)), y(f_2(x)), \dots, y(f_m(x)), y^{(n)}(f_1(x)), y^{(n)}(f_2(x)), \dots, y^{(n)}(f_m(x))) = 0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga involutsiya xossasiga ega bo'lgan tenglamalar deyiladi.

Endi involutsiya xossasiga ega bo'lgan differensial tenglamalar uchun ba'zi mulohazalarni keltiramiz.

1-teorema. Agar

$$y' = F(x, y(x), y(f(x))) \quad (2)$$

tenglama uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $f(x)$ – yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan uzluksiz differensiallanuvchi funksiya;

2) $F(x, y(x), y(f(x)))$ – barcha argumentlari bo'yicha aniqlangan va bu argumentlar bo'yicha uzluksiz differensiallanuvchi funksiya;

3) (2) tenglama $y(f(x))$ argumentga nisbatan bir qiymatli yechimga ega, ya'ni

$$y(f(x)) = G(x, y(x), y'(x)) \quad (3)$$

U holda

$$y''(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y(x)} \cdot y'(x) + \frac{\partial F}{\partial y(f(x))} \cdot f'(x) \cdot F(x, y(x), y'(f(x))) \quad (4)$$

munosabat o'rinli bo'lib, bu yerda $y(f(x))$ (3) tenglik bilan beriladi hamda (2) tenglamaning

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = F(x_0, y_0, y'_0) \quad (5)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'ladi.

Isboti. Dastlab (4) tenglama (2) tenglamani differensiallash yo'li bilan hosil qilinishini ko'rsatamiz. Buning uchun (2) tenglamani x bo'yicha differensiallaymiz:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y(x)} \cdot y'(x) + \frac{\partial F}{\partial y(f(x))} \cdot y'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y(x)} \cdot y'(x) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial y(f(x))} \cdot F(x, y(f(x)), y(f(f(x)))) \cdot f'(x) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y(x)} \cdot y'(x) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial y(f(x))} \cdot F(x, y(f(x)), y(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

ya'ni (4) tenglama o'rinli ekanligini ko'ramiz. Teoremani isbotlashda (2) ning o'ng tomonidagi ifodadan hamda involyutsiyaning $f(f(x)) = x$ xossasidan foydalandik. Boshlang'ich shartlardan (5) ni hosil qilish uchun esa

$$y'(f(x)) = F(x, y(f(x)), y(x)) \quad (6)$$

tenglamada x ning o'rniga $x = x_0$ qiymarni qo'yamiz va $f(x_0) = x_0$ ekanligini e'tiborga olamiz. Teorema isbotlandi.

Endi $y(x)$ funksiyani oshkormas holda saqllovchi

$$y' = F(y(f(x))) \quad (7)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamalarni qaraymiz.

2-teorema. Agar (7) tenglamada quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $f(x)$ – yagona qo'zg'almas x_0 nuqtaga ega bo'lgan uzluksiz differensiallanuvchi kuchli involyutsiya;

2) $F(y(f(x)))$ – butun son o'qida aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi qat'iy monoton funksiya bo'lsin. U holda

$$y''(f(x)) = F'(y(f(x))) \cdot F(y(x)) \cdot f'(x) \quad (8)$$

oddiy differensial tenglamaning

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = F(y_0)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi (7) tenglamaning $y(x_0) = y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat bo'ladi.

Isboti. Berilgan tenglamani x bo'yicha differensiallaymiz. Natijada

$$y''(x) = F'(y(f(x))) \cdot y'(f(x)) \cdot f'(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Ammo

$$f(f(x)) = x; \quad y'(x_0) = y'(f(x_0)) = F(y(f(x_0))) = F(y(x_0))$$

bo'lgani uchun

$$y'(f(x)) = F(y(f(f(x)))) = F(y(x))$$

va shu bilan birga

$$y' = F(y(f(x)))$$

tenglikdan

$$y(f(x)) = F^{-1}(y'(x))$$

kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Yuqorida keltirilgan teoremlardan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar yuqoridagi 1-chi va 2-chi teoremlarda

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}, \quad \alpha^2 + \beta\gamma > 0$$

akslantirishlar giperbolik involyutsiya bo'lib, (2) va (7) tenglamalar $(-\infty, \alpha/\gamma)$ yoki $(\alpha/\gamma, +\infty)$ oraliqlarda aniqlangan bo'lsa, u holda bu teoremlar o'z kuchini saqlaydi.

Eslatma.1) Agar x_0 nuqta $f(x)$ involyutsiyaning qo'zg'almas nuqtasi bo'lib, $x > x_0$ bo'lsa, (2) va (7) tenglamalar kechikkan argumentli differensial tenglamalar bo'ladi.

2) Agar x_0 nuqta $f(x)$ involyutsiyaning qo'zg'almas nuqtasi bo'lib, $x < x_0$ bo'lsa, (2) va (7) tenglamalar ortgan argumentli differensial tenglamalar bo'lad.

2.2-§. Chiziqli differensial tenglamalar involyutsiyasi.

Biz endi

$$Ly(x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = y(f(x)) + \varphi(x) \quad (9)$$

ko'rinishdagi differensial tenglama

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n \quad (10)$$

boshlang'ich shartlar bilan berilgan bo'lsin. Bu yerda $f(x)$ involyutiv xossaga ega bo'lgan funksiya.

1-teorema. Aytaylik (9) tenglamaning $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ koeffitsiyentlari, qo'zg'almas x_0 nuqtaga ega bo'lgan kuchli involyutsiya hosil qiluvchi $f(x)$ funksiya hamda $\varphi(x)$ funksiyalar $C^n(-\infty, +\infty)$ funksiyalar sinfiga tegishli. Agar

$$M = \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} \quad (11)$$

ko'rinishdagi operator bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=0}^n a_k(f(x)) M^k Ly(x) - y(x) = \sum_{k=0}^n a_k(f(x)) M^k \varphi(x) - \varphi(f(x)) \quad (12)$$

chiziqli oddiy differensial tenglamaning

$$M^k Ly(x) \Big|_{x=x_0} = y_k + M^k \varphi(x) \Big|_{x=x_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (13)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi (9) tenglamaning (10) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bilan bir xil bo'ladi.

Isboti. (9) differensial tenglamani n marta ketma ket differensiallash yo'li bilan uning ko'rinishini o'zgartiramiz.

$$Ly(x) \equiv a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

bo'lgani uchun (9) tenglamani

$$Ly(x) = y(f(x)) + \varphi(x)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglikni

$$y(f(x)) = Ly(x) - \varphi(x) \equiv M^0 Ly(x) - M^0 \varphi(x)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamani har ikkala qismini x bo'yicha differensiallab,

$$y'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{d}{dx} M^0 Ly(x) - \frac{d}{dx} M^0 \varphi(x),$$

yoki (11) operatorning aniqlanishiga ko'ra

$$y'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} M^0 Ly(x) - \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} M^0 \varphi(x) = M^1 Ly(x) - M^1 \varphi(x)$$

tenglikka kelamiz. (11) munosabatni eltiborga olgan holda yana differensiallashni davom ettiramiz:

$$y''(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{d}{dx} M^1 Ly(x) - \frac{d}{dx} M^1 \varphi(x)$$

va bundan

$$y''(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} M^1 Ly(x) - \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} M^1 \varphi(x) = M^2 Ly(x) - M^2 \varphi(x)$$

tenglikni yozamiz. Bu jarayonni davom ettirib,

$$y^{(n)}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} M^{n-1} Ly(x) - \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx} M^{n-1} \varphi(x) = M^n Ly(x) - M^n \varphi(x)$$

tenglikka kelamiz. Hosil qilingan tengliklar mos ravishda

$$a_0(f(x)), a_1(f(x)), \dots, a_n(f(x))$$

ifodalarga ko'paytirilib qo'shilsa

$$\sum_{k=0}^n a_k(f(x)) y^k(f(x)) = \sum_{k=0}^n a_k(f(x)) M^k Ly(x) - \sum_{k=0}^n a_k(f(x)) M^k \varphi(x) \quad (14)$$

tenglik hosil bo'ladi. Ammo (9) tenglamada $f(f(x)) = x$ ekanligi e'tiborga olinsa, u holda (9) va (14) tenglamalardan (12) tenglama hosil bo'ladi.

Boshlang'ich shartlarni esa differensiallash yo'li bilan yuqorida keltirilgan ifodalardan hosil qilishimiz mumkin.

Haqiqatdan ham, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ uchun

$$y^{(k)}(f(x)) = M^k Ly(x) - M^k \varphi(x) \quad \text{va} \quad y^{(k-1)}(f(x_0)) = y^{(k-1)}(x_0) = y_k$$

ekanligidan

$$M^k Ly(x) \Big|_{x=x_0} = y_k + M^k \varphi(x) \Big|_{x=x_0}$$

bo'ladi. Teorema isbotlandi.

1-misol (Zilbershteyin). Quyidagi tenglamani yeching:

$$y'(x) = y\left(\frac{1}{x}\right)$$

Yechilishi. Berilgan tenglamani yechish uchun $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ almashtirish kiritamiz. U holda

$$y(x) = y(e^t) = g(t)$$

bo'lgani uchun

$$y\left(\frac{1}{x}\right) = y(e^{-t}) = g(-t)$$

bo'ladi va bundan tashqari $t = \ln x$ bo'lgani uchun

$$y'(x) = g'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} g'(t) = e^{-t} g'(t)$$

bo'lib, Zilbershteyn tenglamasi

$$g'(t) = e^t g(-t)$$

ko'tinishni oladi. Hosil bo'lgan tenglamani yana bir bor differensiallash bilan

$$g''(t) = e^t g(-t) - e^t g'(-t) = g'(t) - g(t),$$

ya'ni

$$g''(t) - g'(t) + g(t) = 0$$

o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - k + 1 = 0$$

va uning ildizlari

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bo'lgani uchun hosil qilingan oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$g(t) = e^{\frac{t}{2}} \left[C_1 \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right]$$

bo'ladi. Bu tenglamadan

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2} g(t) + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{t}{2}} \left[-C_1 \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} + C_2 \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} \right] = \\ &= e^{\frac{t}{2}} \left[\frac{C_1 + \sqrt{3}C_2}{2} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \frac{C_2 - \sqrt{3}C_1}{2} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right] \end{aligned}$$

bo'lgani uchun

$$e^{-t}g'(t)=g(-t)$$

tenglikka ko'ra

$$e^{-\frac{t}{2}}\left[C_1\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}-C_2\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right]=e^{\frac{t}{2}}\left[\frac{C_1+\sqrt{3}C_2}{2}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2}+\frac{C_2-\sqrt{3}C_1}{2}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right]$$

Bu tenglikdan $C_1=\frac{C_1+\sqrt{3}C_2}{2}$, $-C_2=\frac{C_2-\sqrt{3}C_1}{2}$, ya'ni $C_1=\sqrt{3}C_2$

ekanligini aniqlaymiz. Demak,

$$\begin{aligned}g(t) &= C_2 e^{\frac{t}{2}} \left[\sqrt{3} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right] = 2C_2 e^{\frac{t}{2}} \left[\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right] = \\ &= C e^{\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{t\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}$$

bu yerda $C = 2C_2$.

Ammo $g(t)=y(x)$, $t=\ln x$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning yechimi

$$y(x)=C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)$$

dan iborat.

2-misol .Quyidagi tenglamani yeching:

$$f'(x)+\alpha^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

Yechilishi. Berilgan tenglamani yechish uchun $x=e^t$, $f(x)=g(t)$ almashtirish kiritamiz. U holda

$$f(x)=f(e^t)=g(t)$$

bo'lgani uchun

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(e^{-t})=g(-t)$$

bo'ladi va bundan tashqari $t=\ln x$ ekanligi e'tiborga olinsa

$$f'(x) = g'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} g'(t) = e^{-t} g'(t)$$

bo'lib, berilgan tenglama

$$e^{-t} g'(t) + \alpha^2 g(-t) = 0,$$

yoki

$$g'(t) = -\alpha^2 e^t g(-t)$$

ko'tinishni oladi. Hosil bo'lgan tenglamani yana bir bor differensiallash bilan

$$g''(t) = -\alpha^2 e^t g(-t) + \alpha^2 e^t g'(-t) = g'(t) - \alpha^4 g(t),$$

ya'ni

$$g''(t) - g'(t) + \alpha^4 g(t) = 0$$

o'zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - k + \alpha^4 = 0$$

va uning ildizlari

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{1 - \alpha^4}}{2}$$

bo'lgani uchun hosil qilingan oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$g(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}} [C_1 + C_2 t], & \text{agar } |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bo'lsa,} \\ e^{\frac{t}{2}} \left[C_1 \cos \frac{t\sqrt{4\alpha^4 - 1}}{2} + C_2 \sin \frac{t\sqrt{4\alpha^4 - 1}}{2} \right], & \text{agar } |\alpha| > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bo'lsa,} \\ C_1 e^{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha^4}}{2} t} + C_2 e^{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha^4}}{2} t}, & \text{agar } |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Ammo $g(t) = f(x)$, $t = \ln x$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning yechimi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} [C_1 + C_2 \ln|x|], & \text{agar } |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bo'lsa,} \\ \sqrt{x} \left[C_1 \cos \frac{\sqrt{4\alpha^4 - 1} \ln|x|}{2} + C_2 \sin \frac{\sqrt{4\alpha^4 - 1} \ln|x|}{2} \right], & \text{agar } |\alpha| > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bo'lsa,} \\ C_1 x^{\frac{1+\sqrt{1-4\alpha^4}}{2}} + C_2 x^{\frac{1-\sqrt{1-4\alpha^4}}{2}}, & \text{agar } |\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega.

Yuqorida keltirilgan misollarni yechilishidan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

2-teorema. Ushbu

$$y'(x) = \alpha x^\beta y\left(\frac{1}{x}\right), \quad 0 < x < +\infty, \quad y(1) = y_0 \quad (15)$$

ko'rinishdagi tenglamani integrallash mumkin.

Isboti. Berilgan tenglamani x bo'yicha differensiallash natijasida

$$y''(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} y\left(\frac{1}{x}\right) - \alpha^2 x^{-2} y(x) \quad (16)$$

tenglama hosil bo'ladi. Berilgan (15) tenglamadan

$$y\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\alpha} x^{-\beta} y'(x)$$

bo'lgani uchun bu tenglamani bir qator murakkab bo'lmagan hisoblaslar yordamida

$$x^2 y''(x) - \beta x y'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \quad (17)$$

Eyler tenglamasi ko'rinishida ifodalashimiz mumkin.

(17) tenglamada $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ almashtirish kiritamiz. U holda

$$y(x) = y(e^t) = g(t)$$

bo'lgani uchun

$$y\left(\frac{1}{x}\right) = y(e^{-t}) = g(-t)$$

bo'ladi va bundan tashqari $t = \ln x$ ekanligi e'tiborga olinsa

$$y'(x) = g'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} g'(t),$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(t) + \frac{1}{x^2} g''(t)$$

tengliklar hosil bo'ladi. Bu tengliklarga ko'ra (17) tenglama

$$g''(t) - (\beta - 1)g'(t) + \alpha^2 g(t) = 0 \quad (18)$$

ko'rinishni oladi.

Endi $y(1) = y_0$ boshlang'ich shart e'tiborga olinsa, u holda $x = e^t, x_0 = 1$ bo'lgani uchun $t = 0$ bo'lganda $g(0) = y(1) = y_0$ va

$$y'(x) = \alpha x^\beta y\left(\frac{1}{x}\right)$$

berilgan tenglamadan $y'(1) = \alpha y_0$ bo'lgani uchun $g'(t) = xy'(x)$ tenglikdan $g'(0) = y'(1) = \alpha y_0$ ekanligini ko'ramiz.

Demak, (18) tenglamani

$$g(0) = y_0, \quad g'(0) = \alpha y_0 \quad (19)$$

boshlang'ich shartlar bo'yicha integrallash mumkin. Teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremada hosil bo'lgan differensial tenglamani integrallaylik.

3-misol. Ushbu

$$g''(t) - (\beta - 1)g'(t) + \alpha^2 g(t) = 0$$

(18) tenglamani

$$g(0) = y_0, \quad g'(0) = \alpha y_0$$

(19) boshlang'ich shartlar bo'yicha yeching.

Yechilishi. Xarakteristik tenglama

$$k^2 - (\beta - 1)k + \alpha^2 = 0$$

ko'rinishdagi kvadrat tenglama bo'lib, uning diskriminanti

$$\Delta = (\beta - 1)^2 - 4\alpha^2$$

Quyidagi holler bo'lishi mumkin:

1-hol. $\Delta > 0$ bo'lsa, u holda xarakteristik tenglama ikkita haqiqiy

$$k_1 = \frac{1}{2}(\beta + 1 - \sqrt{\Delta}), \quad k_2 = \frac{1}{2}(\beta + 1 + \sqrt{\Delta})$$

ildizlarga ega. Bu holda (18) tenglamaning umumiy yechimi

$$g(t) = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$$

bo'lgani uchun

$$g'(t) = C_1 k_1 e^{k_1 t} + C_2 k_2 e^{k_2 t}$$

bo'lib, (19) chegaraviy shartlarga asosan

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0, \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 = \alpha y_0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yozamiz. Bu sistemani yechib, noma'lum

$$C_1 = \frac{\alpha - k_1}{k_2 - k_1} y_0, \quad C_2 = \frac{\alpha - k_2}{k_2 - k_1} y_0$$

koeffitsiyentlarni aniqlaymiz. Demak,

$$g(t) = \frac{y_0}{k_2 - k_1} \left[(\alpha - k_1) e^{k_1 t} - (\alpha - k_2) e^{k_2 t} \right]$$

(18),(19) masalaning yechimi bo'ladi. Endi $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ belgilashlarni va

$$k_1 = \frac{1}{2}(\beta + 1 - \sqrt{\Delta}), \quad k_2 = \frac{1}{2}(\beta + 1 + \sqrt{\Delta})$$

ekanligi e'tiborga olinsa, u holda (15) masalaning yechimi

$$y(x) = \frac{y_0}{\sqrt{\Delta}} \left[(\alpha - k_1) x^{k_1} - (\alpha - k_2) x^{k_2} \right],$$

yoki to'laroq holda

$$y(x) = \frac{y_0 x^{\frac{\beta+1}{2}}}{2\sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2}} \left[\left(\beta + 1 - 2\alpha + \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2} \right) x^{\frac{\sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2}}{2}} + \right. \\ \left. + \left(2\alpha + \beta + 1 - \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2} \right) x^{-\frac{\sqrt{(\beta+1)^2 - 4\alpha^2}}{2}} \right]$$

ko'rinishda ega bo'ladi.

2-hol. $\Delta = 0$ bo'lsa, u holda xarakteristik tenglama ikkita teng haqiqiy

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}(\beta + 1)$$

ildizlarga ega bo'lgani uchun (18) tenglamaning umumiy yechimi

$$g(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{\beta+1}{2}t}$$

bo'lgani uchun va

$$g'(t) = \left[\frac{(C_1 + C_2 t)(\beta + 1)}{2} + C_2 \right] e^{\frac{\beta+1}{2}t}$$

bo'lib, (19) chegaraviy shartlaega asosan

$$\begin{cases} C_1 = y_0, \\ C_2 + C_1 \cdot \frac{\beta+1}{2} = \alpha y_0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yozamiz. Bu sistemani yechib, noma'lum

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{\alpha - \beta - 1}{2} y_0$$

koeffitsiyentlarni aniqlaymiz. Demak,

$$g(t) = \frac{y_0}{2} [2 + (2\alpha - \beta - 1)t] e^{\frac{\beta+1}{2}t}$$

(18),(19) masalaning yechimi bo'ladi. Endi $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ belgilashlarni va ekanligi e'tiborga olinsa, u holda (15) masalaning yechimi

$$y(x) = \frac{y_0 x^{\frac{\beta+1}{2}}}{2} [2 + (2\alpha - \beta - 1) \ln|x|]$$

ko'rinishda ega bo'ladi.

3-hol. $\Delta < 0$ bo'lsa, u holda xarakteristik tenglama ikkita lompleks

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\beta + 1 \pm i \sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)} \right)$$

ildizlarga ega. Bu holda (18) tenglamaning umumiy yechimi

$$g(t) = e^{\frac{\beta+1}{2}t} \left[C_1 \cos \frac{t \sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} + C_2 \sin \frac{t \sqrt{4\alpha^2 - (\beta + 1)}}{2} \right]$$

bo'lgani uchun $g(0)=y_0, g'(0)=\alpha y_0$ boshlang'ich shartlar e'tiborga olinsa, u holda

$$g'(t) = e^{\frac{\beta+1}{2}t} \cdot \frac{\beta+1}{2} \left[C_1 \cos \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} + C_2 \sin \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} \right] + e^{\frac{\beta+1}{2}t} \left[-C_1 \sin \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} + C_2 \cos \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} \right] \cdot \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2}$$

bo'lib, (19) chegaraviy shartlaega asosan

$$\begin{cases} C_1 = y_0, \\ \frac{\beta+1}{2} C_1 + \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} C_2 = \alpha y_0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yozamiz. Bu sistemani yechib, noma'lum

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{2\alpha - \beta - 1}{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}} y_0$$

koeffitsiyentlarni aniqlaymiz. Demak, (18),(19) masalaning yechimi

$$g(t) = \frac{y_0 \sqrt{x^{\beta+1}}}{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}} \left[\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)} \cos \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} + (2\alpha^2 - \beta - 1) \sin \frac{t\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}}{2} \right]$$

bo'ladi. Endi $x = e^t$, $y(x) = g(t)$ belgilashlarni e'tiborga olinsa, u holda (15) masalaning yechimi

$$y(x) = \frac{y_0 \sqrt{x^{\beta+1}}}{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)}} \left[\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)} \cos \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)} \ln|x|}{2} + (2\alpha^2 - \beta - 1) \sin \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (\beta+1)} \ln|x|}{2} \right]$$

ko'rinishda ega bo'ladi.

2.3-§. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasining involyutsiyasi.

Biz endi involyutsiya xossasiga ega bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini ko'rib chiqamiz. Quyidagi tasdiq o'rinli.

Teorema. Agar $y - n$ o'lchamli vector, A va $B - n \times n$ o'lchamli matritsalar bo'lsa, u holda

$$y'(x) = Ay(x) + By(c - x) \quad (20)$$

sistemaning

$$y(c/2) = y_0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$y''(x) = (A - BAB^{-1})y'(x) + (BA^2B^{-1} - B^2)y(x) \quad (21)$$

sistemaning

$$y(c/2) = y_0, \quad y'(c/2) = (A + B)y_0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat.

Isboti. Berilgan sistemani x bo'yicha differensiallab,

$$y''(x) = Ay'(x) - By'(c - x)$$

tenglamani hosil qilamiz. (20) tenglamada $x \rightarrow c - x$ almashtirish bajarsak,

$$y(c - x) = Ay(c - x) + By(x) \quad (22)$$

tenglikni hosil qilamiz. (22) ni (21) ga qo'yib

$$y''(x) = Ay'(x) - BAy(c - x) - B^2y(x) \quad (23)$$

tenglamani hosil qilamiz. Ammo (12) tenglamadan

$$y(c - x) = B^{-1}(y'(x) - Ay(x)) = B^{-1}y'(x) - B^{-1}Ay(x)$$

bo'lgani uchun (23) bir qator sodda hisoblashlardan keyin (21) ko'rinishni oladi.

Ikkinchi tomondan $y(c/2) = y_0$ bo'lgani uchun $y'(c/2) = (A + B)y_0$ tenglik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Xususiyl holda A va B kommutativ matritsalar bo'lsa, ya'ni $AB = BA$ bo'lsa, u holda $A = BAB^{-1}$, $B^{-1}A = AB^{-1}$ bo'lib,

$$A = BAB^{-1} = A - A = O, \quad BA^2B^{-1} = BA \cdot AB^{-1} = BAB^{-1}A = A^2$$

bo'lgani uchun isbotlangan teoremdan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $y - n$ o'lchamli vector, A va $B - n \times n$ o'lchamli kommutativ matritsalar bo'lsa, u holda

$$y''(x) = (A^2 - B^2)y(x)$$

sistemaning

$$y(c/2) = y_0, \quad y'(c/2) = (A + B)y_0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi (20):

$$y'(x) = Ay(x) + By(c - x)$$

sistemaning

$$y(c/2) = y_0$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasining yechimidan iborat.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + 2y_2(x) + 5y_1(4 - x) + 2y_2(4 - x), \\ y_2'(x) = 3y_1(x) + y_2(x) + 3y_1(4 - x) + 5y_2(4 - x) \end{cases}$$

sistemaning

$$y(2) = y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi

$$\begin{cases} z_1'' + 24z_1 + 16z_2 = 0, \\ z_2'' + 24z_1 + 24z_2 = 0 \end{cases}$$

sistemaning

$$z(2) = y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z'(2) = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \end{pmatrix}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimidan iborat ekanligi yuqorida keltirilgan natijadan kelib chiqadi, chunki keltirilgan misolda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

kommutativ matritsalar va

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -24 & 16 \\ -24 & -24 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

ekanligini e'tiborga olishimiz kifoya.

2.4-§. Misollar yechish.

Biz bu bo'limda involyutsiya xossasiga ega bo'lgan birinchi va ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechishga oid misollar yechishdan namunalar keltiramiz.

Dastavval agar $\alpha(\alpha(x)) = x$ bo'lsa, u holda $\alpha(x)$ involyutsoya eslagan holda involyutsiyalarga misollar keltiramiz.

Masalan $\alpha(x) = \sqrt[m]{1-x^m}$ $m \in N$, $\alpha(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ funksiya va uning xususiy

hollari bo'lgan $\alpha(x) = 1-x$, $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $\alpha(x) = \frac{x}{x-1}$, $\alpha(x) = \frac{x+1}{x-1}$ funksiyalar

involyutsiyaga misol bo'la oladi. Shuning uchun birinchi darajali involyutsiyaga ega bo'lgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni umumiy holda

$$y'(x) = y(\alpha(x))$$

ko'rinishda berilishi mumkin. Agar x ni $\alpha(x)$ bilan almashtirsak

$$y'(\alpha(x)) = y(x)$$

ifodani va differensial tenglamani differensiallash bilan

$$y''(x) = \alpha'(x)y'(\alpha(x)) = \alpha'(x)y(x),$$

ya'ni ikkinchi tartibli Eyler tipidagi

$$y''(x) - \alpha'(x)y(x) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Endi involyutsiya qatnashgan oddiy differensial tenglamalarni yechishga misollar keltiramiz:

1-misol. Ushbu

$$y'(x) = y(1-x)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Berilgan tenglamada x ni $1-x$ bilan almashtirsak,

$$y'(1-x) = y(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Berilgan tenglamani differensiallash bilan

$$y''(x) = -y'(1-x) = -y(x)$$

yoki

$$y''(x) + y(x) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

ko'rinishga ega va bu yechimda x ni $1-x$ bilan almashtirosh va differensiallash bizga

$$y(1-x) = C_1 \cos(1-x) + C_2 \sin(1-x) \quad \text{va} \quad y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

tengliklarni beradi. Berilgan tenglamaga ko'ra

$$-C_1 \sin x + C_2 \cos x = C_1 \cos(1-x) + C_2 \sin(1-x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bir qator hisoblashlardan so'ng bu tenglikdan

$$\begin{cases} C_1 \cos 1 + C_2 \sin 1 = C_2, \\ C_1 \sin 1 - C_2 \cos 1 = -C_1 \end{cases}$$

Bundan $C_2 = \frac{1 + \sin 1}{\cos 1} C_1$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning

umumiy yechimini

$$y(x) = C_1 \left(\frac{1 + \sin 1}{\cos 1} \sin x + \cos x \right) = C (\sin x + \cos(1-x))$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin, bu yerda $C = \frac{1}{\cos 1} C_1$.

$$\textbf{Javob:} \quad y(x) = C (\sin x + \cos(1-x))$$

2-misol. Ushbu

$$y'(x) = \frac{1}{y(a-x)}$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Berilgan tenglamada x ni $a - x$ bilan almashtirsak,

$$y'(a - x) = \frac{1}{y(x)}$$

tenglikni hosil qilamiz. . $\alpha(x) = a - x$ akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi

$a - x = x$ tenglikdan $x = \frac{a}{2}$ bo'lgani uchun berilgan tenglama uchun

boshlang'ich shartlarni $y\left(\frac{a}{2}\right) = y_0, y'\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{y\left(a - \frac{a}{2}\right)} = \frac{1}{y_0}$ ko'rinishida

olishimiz mumkin. Berilgan tenglamani differensiallash bilan

$$\frac{y''(x)y(x) - y'^2(x)}{y(x)} = 0$$

tenglamaga kelimiz. Bu tenglamani

$$\left(\frac{y'(x)}{y(x)}\right)' = 0$$

ko'rinishda yozib integrallash bilan

$$y'(x) = \frac{1}{y_0^2} y(x)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yana bir bor integrallash bilan

$$y(x) = C \exp\left(\frac{x}{y_0^2}\right)$$

umumiy yechimni va $y\left(\frac{a}{2}\right) = y_0$ boshlang'ich shartga ko'ra $C = y_0 \exp\left(-\frac{a}{2y_0^2}\right)$

ekanligini aniqlaymiz. Shuning uchun berilgan tenglamaning yechimi

$$y(x) = y_0 \exp\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{y_0^2}\right)$$

ko'rinishga ega.

$$\textbf{Javob: } y(x) = y_0 \exp\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{y_0^2}\right)$$

3-misol. Ushbu

$$y'(x) = y\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Berilgan tenglamada x ni $\frac{x}{x-1}$ bilan almashtirsak,

$$y'\left(\frac{x}{x-1}\right) = y(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Berilgan tenglamani differensiallash bilan

$$y''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} y'\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{(x-1)^2} y(x)$$

yoki bundan

$$(x-1)^2 y''(x) + y(x) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaning yechimini $y = (x-1)^k$ ko'rinishida izlasak, xarakteristik tenglama $k(k-1)+1=0$ ko'rinishda bo'lib, uning oldizlari

$k = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ bo'lgani uchun bu tenglamaning umumiy yechimini

$$y(x) = \sqrt{x-1} [C_1 \cos \sqrt{3} \ln \sqrt{x-1} + C_2 \sin \sqrt{3} \ln \sqrt{x-1}]$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin.

Endi bu funktsiyani berilgan tenglamaga qo'yamiz. Buning uchun x ni $\frac{x}{x-1}$

bilan almashtirsak bu funktsiya

$$y\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \left[C_1 \cos \sqrt{3} \ln \sqrt{x-1} - C_2 \sin \sqrt{3} \ln \sqrt{x-1} \right]$$

funksiyaga, va bu funksiyaning hosilasi

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \left[(C_1 + \sqrt{3}C_2) \cos \sqrt{3} \ln \sqrt{x-1} + (C_2 - \sqrt{3}C_1) \sin \sqrt{3} \ln \sqrt{x-1} \right]$$

bo'lgani uchun berilgan tenglamaga ko'ra

$$2C_1 = C_1 + \sqrt{3}C_2, \quad 2C_2 = C_2 - \sqrt{3}C_1$$

Bundan $C_1^2 + C_2^2 = 0$ bo'lgani uchun berilgan tenglamaning yechimi $y(x) = 0$ dan iborat.

$$\textbf{Javob: } y(x) = 0$$

4-misol. Ushbu

$$y'(x) = y\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Berilgan tenglamada x ni $\frac{x+1}{x-1}$ bilan almashtirsak,

$$y'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = y(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Berilgan tenglamani differensiallash bilan

$$y''(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} y'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{(x-1)^2} y(x)$$

yoki bundan

$$(x-1)^2 y''(x) + 2y(x) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaning yechimini $y = (x-1)^k$ ko'rinishida izlasak,

xarakteristik tenglama $k(k-1)+2=0$ ko'rinishda bo'lib, uning oldizlari

$k = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$ bo'lgani uchun bu tenglamaning umumiy yechimini

$$y(x) = \sqrt{x-1} [C_1 \cos \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1} + C_2 \sin \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1}]$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin.

Endi bu funktsiyani berilgan tenglamaga qo'yamiz. Buning uchun x ni $\frac{x+1}{x-1}$

bilan almashtirsak bu funktsiya

$$\begin{aligned} y\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} [(C_1 \cos \sqrt{7} \ln 2 + C_2 \sin \sqrt{7} \ln 2) \cos \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1}] + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} [(C_1 \sin \sqrt{7} \ln 2 - C_2 \cos \sqrt{7} \ln 2) \sin \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1}] \end{aligned}$$

uning hosilasi esa

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} [(C_1 + \sqrt{7}C_2) \cos \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1} + (C_2 - \sqrt{7}C_1) \sin \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1}]$$

bo'lgani uchun berilgan tenglamadan

$$\begin{cases} C_1 + \sqrt{7}C_2 = 2\sqrt{2}(C_1 \cos \sqrt{7} \ln 2 + C_2 \sin \sqrt{7} \ln 2) \\ C_2 - \sqrt{7}C_1 = 2\sqrt{2}(C_1 \sin \sqrt{7} \ln 2 - C_2 \cos \sqrt{7} \ln 2) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan $C_2 = C_1 \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{7}}{\alpha - \sqrt{7}}}$

munosabatni hosil qilamiz, bu yerda

$$\alpha = 2\sqrt{2} \sin(\sqrt{7} \ln 2) - 4 \sin(2\sqrt{2} \ln 2) - 2\sqrt{14} \cos(\sqrt{7} \ln 2).$$

Shuning uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C \sqrt{x-1} [(\alpha + \sqrt{7}) \cos \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1} + (\alpha - \sqrt{7}) \sin \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1}]$$

ko'rinishga ega.

$$\textbf{Javob: } y(x) = C \sqrt{x-1} [(\alpha + \sqrt{7}) \cos \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1} + (\alpha - \sqrt{7}) \sin \sqrt{7} \ln \sqrt{x-1}],$$

bu yerda

$$\alpha = 2\sqrt{2} \sin(\sqrt{7} \ln 2) - 4 \sin(2\sqrt{2} \ln 2) - 2\sqrt{14} \cos(\sqrt{7} \ln 2)$$

5-misol. Ushbu

$$y''(x) = y\left(\frac{1}{x}\right)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. Berilgan tenglamani x bo'yicha ketma-ket differensiallab

$$y'''(x) = -\frac{1}{x^2} y'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y^{(IV)}(x) = \frac{2}{x^3} y'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} y''\left(\frac{1}{x}\right)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Endi berilgan tenglamada $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ almashtirish bajarsak, tenglama

$$y''\left(\frac{1}{x}\right) = y(x)$$

ko'rinishni oladi. Agar bu tenglikni hisobga olsak, yuqorida hosil qilingan ikki tengliklardan

$$y^{(IV)}(x) = -\frac{2}{x} y'''(x) + \frac{1}{x^4} y(x)$$

ya'ni

$$x^4 y^{(IV)}(x) + 2x^3 y'''(x) - y(x) = 0$$

Eyler tenglamasini hosil qilamiz. Bu tenglama uchun xarakteristik tenglama

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) - 1 = 0,$$

yoki

$$k(k-1)(k-2)(k-1) - 1 = 0$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu tenglamani

$$(k^2 - 2k)^2 + (k^2 - 2k) - 1 = 0$$

ko'rinishda yozsak,

$$k^2 - 2k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad k^2 - 2k = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Bu tengliklarning har ikkala qismiga 1 ni qo'shish natijasida

$$(k-1)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, (k-1)^2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bundan xarakteristik tenglama ikkita haqiqiy va ikkita kompleks:

$$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 \pm \frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}, k_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = 1 \pm i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2}$$

ildizlarga ega bo'lgani uchun berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = x \left[C_1 ch \left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2} \ln|x| \right) + C_2 sh \left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2} \ln|x| \right) \right] + \\ + x \left[C_3 \cos \left(\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2} \ln|x| \right) + C_4 \sin \left(\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{2} \ln|x| \right) \right]$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

6-misol. Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan birinchi va ikkinchi tartibli

$$y'(x) = y(f(x)) + \varphi(x),$$

$$y''(x) = y(f(x)) + \varphi(x) \quad (24)$$

tenglamalarni oddiy differensial tenglamalarga keltiring va misollarga tadbiq qiling, bu yerda $f(x)$ –involyutsiya, ya'ni $f(f(x)) = x$, $\varphi(x)$ – berilgan funksiya.

Yechilishi. 1. Dastlab (24) da berilgan birinchi tartibli tenglamani oddiy differensial tenglamaga keltirish uchun, bu tenglamani

$$y(f(x)) = y'(x) - \varphi(x)$$

ko'rinishda yozib differensiallash natijasida

$$y'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} [y'(x) - \varphi(x)] = \frac{1}{f'(x)} [y''(x) - \varphi'(x)] \quad (25)$$

tenglikni hosil qilamiz. Endi (24) tenglamada qaralayotgan involyutsiyani e'tiborga olib, $x \rightarrow f(x)$ almashtirish bajarilsa,

$$y'(f(x)) = y(x) + \varphi(f(x)) \quad (26)$$

tenglik hosil bo'ladi.(25) va (26) tengliklardan involyutsiya xossasiga ega bo'lgan (24) tenglamani yechish masalasini ikkinchi tartibli

$$\frac{1}{f'(x)} \cdot y''(x) - y(x) = \frac{1}{f'(x)} \varphi'(x) + \varphi(f(x)) \quad (27)$$

oddiy differensial tenglamani integrallash masalasiga olib kelish mumkin ekan.

Misollar keltiramiz:

a) agar (24) tenglamada $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lsa, u holda hosil bo'lgan

$$y'(x) = y\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi(x) \quad (28)$$

tenglamani integrallash masalasi (27) ga ko'ra

$$x^2 y'' + y = x^2 \varphi'(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right) \quad (29)$$

bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli Eyler tenglamasini integrallash masalasiga keltirilishi mumkin.

Dastlab (29) tenglama mos bir jinsli qismining umumiy yechimini topamiz. Mos bir jinsli qismining xarakteristik tenglamasi

$$k(k-1)+1=0, \text{ yoki } k^2 - k + 1 = 0$$

ko'rinisda bo'lib

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ildizlarga ega bo'lgani uchun mos bir jinsli qismining umumiy yechimini

$$y(x) = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} = \sqrt{x} \left[C_1 e^{\ln x \cdot \frac{i\sqrt{3}}{2}} + C_2 e^{\ln x \cdot \frac{-i\sqrt{3}}{2}} \right] = \sqrt{x} \left[\tilde{C}_1 \cos 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + \tilde{C}_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right]$$

ko'rinishida ifodalashimiz mumkin.

Demak,

$$y(x) = \sqrt{x} \left[C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right] \quad (30)$$

Endi o'zgarmasni variantsiyalash usuli bilan berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$C_1'(x) \left(\sqrt{x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + C_2'(x) \left(\sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) = 0,$$

$$-C_1'(x) \left(\sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + C_2'(x) \left(\sqrt{x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) = \frac{2}{x\sqrt{3}} \left[x^2 \varphi'(x) - \varphi \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

Bu tenglamalardan

$$C_1'(x) = -\frac{2}{x^{3/2}\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \left[x^2 \varphi'(x) - \varphi \left(\frac{1}{x} \right) \right],$$

$$C_2'(x) = \frac{2}{x^{3/2}\sqrt{3}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \left[x^2 \varphi'(x) - \varphi \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

Hosil bo'lgan tenglamalarni integrallab,

$$C_1(x) = C_{10} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^x z^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln z \left[z^2 \varphi'(z) - \varphi \left(\frac{1}{z} \right) \right] dz,$$

$$C_2(x) = C_{20} + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^x z^{-\frac{3}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln z \left[z^2 \varphi'(z) - \varphi \left(\frac{1}{z} \right) \right] dz$$

tengliklarni va (30) ga ko'ra (29) tenglamaning umumiy yechimi bo'lgan

$$y(x) = C_{10} \sqrt{x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x + C_{20} \sqrt{x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x +$$

$$+ \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}} \int_1^x z^{-\frac{3}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{x}{z} \left[z^2 \varphi'(z) - \varphi \left(\frac{1}{z} \right) \right] dz$$

funksiyani topamiz.

b) agar (24) tenglamada $f(x) = 1 - x$ bo'lsa, u holda hosil bo'lgan

$$y'(x) = y(1-x) + \varphi(x)$$

tenglamani integrallash masalasi (27) ga ko'ra

$$y'' + y = \varphi'(1-x) - \varphi(1-x)$$

bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamani integrallash masalasiga keltirilishi mumkin. Yuqoridagi usul bilan bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = C_{10} \cos x + C_{20} \sin x + \int_{1/2}^x \sin(x-z) [\varphi'(z) - \varphi(1-z)] dz$$

ko'rinishga ega ekanligini ko'ramiz.

2. Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan ikkinchi tartibli

$$y''(x) = y(f(x)) + \varphi(x), \quad (31)$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $f(x)$ – involyutsiya, ya'ni $f(f(x)) = x$, $\varphi(x)$ – berilgan funksiya.

(31) tenglamani yechish uchun, bu tenglamani

$$y(f(x)) = y''(x) - \varphi(x)$$

ko'rinishda yozib ikki bor differensiallash natijasida

$$\begin{aligned} y'(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} [y'(x) - \varphi(x)] = \frac{1}{f'(x)} [y''(x) - \varphi'(x)] \\ y''(f(x)) &= \frac{1}{f'^2(x)} y^{IV} - \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) y''' - \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) \varphi'(x) - \\ &\quad - \frac{1}{f'^2(x)} \varphi''(x) \end{aligned} \quad (32)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Endi (31) tenglamada qaralayotgan involyutsiyani e'tiborga olib, $x \rightarrow f(x)$ almashtirish bajarilsa,

$$y''(f(x)) = y(x) + \varphi(f(x)) \quad (33)$$

tenglik hosil bo'ladi. (32) va (33) tengliklardan involyutsiya xossasiga ega bo'lgan ikkinchi tartibli (31) tenglamani yechish masalasini to'rtinchi tartibli

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'^2(x)} y^{IV} - \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) y''' - y = \frac{1}{f'^2(x)} \varphi''(x) - \\ - \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \right) \varphi'(x) - \varphi(f(x)) \end{aligned} \quad (34)$$

oddiy differensial tenglamani integrallash masalasiga olib kelish mumkin ekan.

Misollar keltiramiz:

a) agar (31) tenglamada $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lsa, u holda hosil bo'lgan

$$y''(x) = y \left(\frac{1}{x} \right) + \varphi(x)$$

tenglamani integrallash masalasi (34) ga ko'ra

$$x^4 y^{IV} + 2x^3 y''' - y = x^4 \varphi''(x) + 2x^3 \varphi'(x) + \varphi \left(\frac{1}{x} \right)$$

bir jinsli bo'lmagan to'rtinchi tartibli Eyler tenglamasini integrallash masalasiga keltirilishi mumkin.

b) agar (31) tenglamada $f(x) = 1 - x$ bo'lsa, u holda hosil bo'lgan

$$y''(x) = y(1 - x) + \varphi(x)$$

tenglamani integrallash masalasi (34) ga ko'ra

$$y^{IV} - y = \varphi''(x) + \varphi(1 - x)$$

bir jinsli bo'lmagan to'rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamani integrallash masalasiga keltirilishi mumkin.

c) xuddi yuqoridagi kabi usullar bilan

$$y'''(x) = y(1 - x) + \varphi(x)$$

tenglamani integrallash masalasini

$$y^{VI} + y = \varphi'''(x) - \varphi(1 - x)$$

oltinchi darajali oddiy differensial tenglamani integrallash masalasiga keltirilishi mumkin.

7-misol. Ushbu

$$y'(x) = y\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)$$

tenglamani yeching.

Yechilishi. . Berilgan tenglamada x ni $\sqrt[3]{1-x^3}$ bilan almashtirsak,

$$y\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right) = y(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Berilgan tenglamani differensiallash bilan

$$y''(x) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} y'\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} y(x)$$

yoki bundan

$$\sqrt[3]{(1-x^3)^2} y''(x) + x^2 y(x) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechishning qolgan bosqichlari bizga ma'lum emas.

II bob bo'yicha xulosa:

II bobda differensial tenglamalar involyutsiyasi, chiziqli differensial tenglama va tenglamalar sistemasining involyutsiyasi kabi tushunchalarga to'xtalib o'tilgan bo'lib, bunday tenglamalarni yechishda ko'p hollarda Eyler va Lagranj tenglamalarini yechishga to'g'ri keldi. Bundan tashqari involyutsiya xossasiga ega bo'lgan birinchi va ikkinchi tartibli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarni yechishga doir namunalar keltirib o'tildi. Bunday tenglamalarni yechishning afzalligi shundaki, ko'p xollarda oshkormas differensial tenglamalarni yechishga to'g'ri keladi. Oddiy usul bilan bu tenglamalarni har doim ham yechib bo'lmaydi, shuning uchun maxsus involyutsiya tushunchasini tadbiq qilgan holda bu tenglamalarni oddiy tenglamalarga keltirib olinadi va umumiy yechim topiladi.

III Bob. Involutsiya xossasiga va maxsus potensialga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglama uchun aralash masala.

Biz ushbu bobda involyutsoya va maxsus ko'rinishdagi potensialga ega bo'lgan differensial tenglama uchun aralash masalani tadqiq qilamiz.

3.1-§.Masalaning qo'yilishi va yechilish usuli.

Biz quyidagi:

$$\frac{1}{\beta i} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1-x} + q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty; +\infty), \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = 0 \quad (2)$$

aralash masalani qaraymiz. Bu yerda quyidagi shartlar :

- 1) β – haqiqiy son va $\beta \neq 0$;
- 2) $q(x) \in C^1[0,1]$, $q(x) = q(1-x)$, $q(x)$ – haqiqiy funksiya;
- 3) $\varphi(x) \in C^1[0,1]$ va $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(1) = 0$

bajariladi deb hisoblaymiz.

(1) tenglama $v(x) = 1-x$ involutsiyani o'zida saqlovchi eng soda xususoy hosilali differensial tenglamadir. Involyutsoyaga ega bo'lgan tenglamalar ustida ko'plab tadqiqotlar olib borilmoqda (masalan [1] va unda keltirilgan adabiyot-larga qarang) .

(1)-(2) masalaning yechimini topish uchun Fur'ye usulidan foydalanamiz. Biz keltirgan shartlar masalaning klassik yechimini, ya'ni har ikkala argument bo'yicha uzluksiz differensialanuvchi yechimni topish imkoniyatini beradi. $\varphi(x)$ funksiya nisbatan qo'yilgan shartlar tabiiy bo'lib , bu funksiya (1)-(2) chegaraviy masaladan kelib chiquvchi xos funksiani qanoatlantiradi. $q(x)$ funksiya qo'yolgan shart esa masalani tadqiq qilishdagi ko'plab muammolarni osonlashtiradi va yechim ko'rinishining yaxshi shaklini beradi.

Ishda [2] ning usullaridan foydalaniladi va bu usul funksional qatorni hadlab differensiallashdan chetlanishga imkoniyat yaratadi.

Fur'ye usuliga ko'ra $u(x,t)=y(x)\cdot T(t)$ belgilash kiritamiz. Natijada (1) tenglama

$$\frac{1}{\beta i} y(x) \cdot T'(t) = y'(1-x) \cdot T(t) + q(x)y(x) \cdot T(t)$$

yoki

$$\frac{T'(t)}{\beta i T(t)} = \frac{y'(1-x) + q(x)y(x)}{y(x)}$$

ko'rinishda yozilishi mumkin. Oxirgi tenglikning chap qismi faqat t ga, o'ng qismi esa faqat x ga bog'liq funksiyalar bo'lgani uchun, bu tenglik o'zgarmas sonidan iborat, ya'ni

$$\frac{T'(t)}{\beta i T(t)} = \frac{y'(1-x) + q(x)y(x)}{y(x)} = \lambda$$

Bundan $y(x)$ funksiya uchun

$$y'(1-x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad (3)$$

$$y(0) = 0 \quad (4)$$

xos qiymatlar masalasini, $T(t)$ funksiya uchun esa $T(t) = ce^{\lambda i \beta t}$ ifodani hosil qilamiz.

2. (3)- (4) masalaning yechimini topamiz. (3) tenglamada x ni $1-x$ ga almashtirib, $y(x) = z_1(x)$, $y(1-x) = z_2(x)$ belgilashlar kiritsak,

$$z_1'(x) + q(1-x)z_2(x) = \lambda z_2(x),$$

$$-z_2'(x) + q(x)z_1(x) = \lambda z_1(x)$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Agar $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ belgilash kiritsak, bu

tenglamalarni vector matritsa usuli bilan

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

yoki $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ ga nisbatan

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) \quad (5)$$

Drak sistemasi ko'rinishida yozishimiz mumkin, bu yerda

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, P(x) = \begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(1-x) \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad z_2(x) = z_1(1-x).$$

Teskarisi ham o'rinli: agar $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ funksiya (5) sistemaning yechimi bo'lib, $z_1(x) = z_2(1-x)$ tenglik bajarilsa, u holda $y(x) = z_1(x)$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

1-lemma. (5) tenglamaning umumiy yechimi

$$z(x) = z(x, \lambda) = TV(x, \lambda)c \quad (6)$$

ko'rinishga ega, bu yerda

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, V(x, \lambda) = \text{diag}(u_1(x)e^{-\lambda ix}, u_2(x)e^{\lambda ix}),$$

$$u_1(x) = \exp\left(i \int_0^x q(t) dt\right), \quad u_2(x) = \exp\left(-i \int_0^x q(t) dt\right),$$

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Eslatma 1). B matritsani diognal ko'rinishga keltiruvchi, ya'ni

$T^{-1}BT = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ tenglikni qanoatlantiruvchi

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T_4 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

matritsalar mavjud bo'lib, bu matritsalar teskari matritsalar mos ravishda

$$T_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, T_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, T_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}, T_4^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega.

Eslatma 2). (5) tenglamaning umumiy yechimi komponentalari bo'yicha quyidagi ko'rinishga ega:

$$z_1(x) = c_1 u_1(x) e^{-\lambda ix} - c_2 i u_2(x) e^{\lambda ix}, \quad z_2(x) = -c_1 i u_1(x) e^{-\lambda ix} + c_2 i u_2(x) e^{\lambda ix}$$

bu yerda

$$u_1(x) = \exp\left(i \int_0^x q(t) dt\right), \quad u_2(x) = \exp\left(-i \int_0^x q(t) dt\right)$$

Isboti. Dastlab (5) sistemadagi $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsani kanonik ko'ronoshga

keltiramiz. B matritsaning xarakteristik tenglamasi $|B - kE| = 0 \Leftrightarrow k^2 + 1 = 0$ tenglama $\pm i$ ildizlarga ega bo'lgani uchun uning kanonik shakli $D = \text{diag}(i, -i)$ ko'rinishda bo'lib bunga $T^{-1}BT = D$ tenglik orqali erishiladi.

Agar $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ almashtirish matritsasi bo'lsa, u holda bu tenglikni

$$\begin{aligned} BT = TD &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a_{21} & -a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}i & -a_{12}i \\ a_{21}i & -a_{22}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ko'rinishda ifodalashimiz mumkin. Oxirgi tenglikdan $a_{11} = 1, a_{21} = -i, a_{12} = -i, a_{22} = 1$ bo'lgani uchun almashtirish

matritsasi $T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ dan iborat. Bu matritsaga teskari matritsani topamiz.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -i & 1 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & i & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i/2 & 1/2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & 1 & i/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

bo'lgani uchun bu tenglikdan $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ekanligini aniqlaymiz. Endi

(5) tenglamada $z = Tv$ almashtirish kiritamiz. U holda

$$BTv'(x) + P(x)Tv(x) = \lambda Tv(x)$$

tenglik hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan tenglikni chapdan T^{-1} matritsaga ko'paytirilsa

$$T^{-1}BTv'(x) + T^{-1}P(x)Tv(x) = \lambda T^{-1}Tv(x),$$

yoki

$$Dv'(x) + T^{-1}P(x)Tv(x) = \lambda v(x),$$

yoki nihoyat

$$v'(x) + P_1(x)v(x) = \lambda D^{-1}v(x) \quad (7)$$

tenglamani hosil qilamiz, bu yerda

$$P_1(x) = D^{-1}T^{-1}P(x)T = D^{-1}q(x),$$

chunki $q(x) = q(1-x)$ simmetriklikdan $P_1(x)$ ham diagonal matritsa bo'ladi.

Endi (7) sistemani komponentalari bo'yicha yozsak bu sistema ikkita

$$v_1'(x) - iq(x)v_1(x) = -\lambda v_1(x), \quad v_2'(x) + iq(x)v_2(x) = \lambda v_2(x)$$

tenglamalarga ajraladi. Bu tenglamalarning umumiy yechimlari mos ravishda

$$v_1(x) = v_1(x, \lambda) = c_1 u_1(x) e^{-\lambda i x}, \quad v_2(x) = v_2(x, \lambda) = c_2 u_2(x) e^{\lambda i x}$$

Bu yerda $u_1(x), u_2(x)$ lemma shartida aniqlangan funksiyalar, c_1, c_2 – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

Nihoyat (7) tenglamaning yechimini matritsa ko'rinishida yozib (6) formulani hosil qilamiz. Lemma isbotlandi.

2-lemma. (3) sistemaning umumiy yechimi

$$y(x) = y(x, \lambda) = c \varphi(x, \lambda) \quad (8)$$

ko'rinishga ega, bu yerda

$$\varphi(x, \lambda) = u_1(x) e^{-i \int_0^1 q(t) dt} e^{\lambda i (1-x)} - i u_2(x) e^{\lambda i x}, \quad c - \text{ixtiyoriy o'zgarmas son}$$

Isboti. Agar $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ funksiya (5) sistemaning yechimi bo'lsa va

$z_2(x) = z_1(1-x)$ bo'lsa, u holda $y(x) = z_1(x)$ funksiya (3) sistemaning yechimi bo'lishi yuqorida ko'rsatolgan edi. Xususiyl holda bundan

$$z_2(1) = z_1(0) \quad (9)$$

tenglikni hosil qilamiz. (6) va (9) dan

$$c_1 u_1(0) - i c_2(0) = -c_1 i u_1(1) e^{-\lambda i} + c_2 u_2(1) e^{\lambda i}$$

yoki

$$c_1 [u_1(0) + i u_1(1) e^{-\lambda i}] = c_2 [u_2(1) e^{\lambda i} + i u_2(0)] \quad (10)$$

$u_1(0)=1, u_2(0)=1, u_2(1)e^{-i\int_0^1 q(t)dt} = u_1^{-1}(1)$ bo'lgani uchun (10) dan

$$c_1[1+iu_1(1)e^{-\lambda i}] = c_2u_2(1)e^{\lambda i}[1+iu_1(1)e^{-\lambda i}]$$

Bundan $c_1 = c_2u_2(1)e^{\lambda i}$ bo'lgani uchun

$$y(x) = z_1(x) = c_1u_1(x)e^{-\lambda ix} - c_2iu_2(x)e^{\lambda ix} = c_2\varphi(x, \lambda)$$

bo'lib, bu (8) ni isbotlaydi.

Endi masalaning xos qiymati va xos funksiyalarini topamiz.

3-lemma. (3)-(4) chegaraviy masalaning xos qiymati

$$\lambda_n = 2\pi n + a, n \in N, \text{ bu yerda } a = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t)dt, \quad (11)$$

va unga mos xos funksiya

$$y_n(x) = p(1-x)e^{2\pi ni(1-x)} - ip(x)e^{2\pi nix}, \quad (12)$$

bu yerda $p(x) = u_2(x)e^{a_0x}$.

Isboti. (4) va (8) ga ko'ra xos qiymatlarni topish uchun $\varphi(0, \lambda) = 0$, yoki

$$u_1(0)e^{-i\int_0^1 q(t)dt} e^{\lambda i(1-0)} - iu_2(0)e^{\lambda i0} = 0,$$

yoki

$$e^{i(\frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t)dt)} = e^{i\lambda}$$

Bu tenglikdan

$$\lambda_n = 2\pi n + a, n \in Z$$

xos qiymatlarni topamiz, bu yerda $a = \frac{\pi}{2} + \int_0^1 q(t)dt$.

Endi masalaning $y_n(x) = \varphi(x, \lambda_n)$ xos funksiyalarini topamiz.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \exp\left(i\int_0^x q(t)dt\right) = \exp\left(i\int_0^1 q(t)dt - i\int_x^1 q(t)dt\right) = \\ &= \exp\left(a - i\int_0^{1-x} q(t)dt\right) = e^{ix}u_2(1-x) \end{aligned}$$

Biz bu yerda yana $q(x)$ potensialni simmetrikligidan foydalandik.

Demak, yuqoridagi belgilashlarga asosan

$$\begin{aligned} y_n(x, \lambda_n) &= u_1(x) e^{-i \int_0^1 q(t) dt} e^{\lambda_n i(1-x)} - i u_2(x) e^{\lambda_n i x} = u_1(x) e^{-ia} \cdot e^{2n\pi i(1-x)} \cdot e^{ia(1-x)} - \\ &- i u_2(x) \cdot e^{2\pi n i x} \cdot e^{a i x} = u_2(1-x) e^{ia(1-x)} e^{2\pi n i(1-x)} - i u_2(x) e^{a i x} e^{2\pi n i x} = \\ &= p(1-x) e^{2\pi n i(1-x)} - i p(x) e^{2\pi n i x} \end{aligned}$$

Lemma isbotlandi.

3.2-§. Masala xos qiymati va xos funksiyalarining xossalari.

Dastlab $\{y_n(x)\}$ funksiyalar sistemasining xossalarini tekshiramiz.

4-lemma. $\{y_n(x)\}$ funksiyalar sistemasi $L_2[0,1]$ fazoda to'liq ortonormal sistemani tashkil qiladi.

Isboti. Xos funksiyalari $\{y_n(x)\}$ bo'lgan L operatorni qaraymiz:

$$Ly \equiv y'(1-x) + q(x)y(x), \quad y(0) = 0$$

Bu operatorga qo'shma bo'lgan L^* operatorni topamiz. Aytaylik $z(x) \in W_2^1[0,1]$ bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} (Ly, z) &= \int_0^1 [y'(1-x) + q(x)y(x)] \overline{z(x)} dx = \int_0^1 y'(1-x) \overline{z(x)} dx + \int_0^1 q(x)y(x) \overline{z(x)} dx = \\ &= \int_0^1 y'(x) \overline{z(1-x)} dx + \int_0^1 q(x)y(x) \overline{z(x)} dx = y(1) \overline{z(0)} + \int_0^1 y(x) \overline{z'(1-x) + z(x)q(x)} dx \end{aligned}$$

Bundan $L^* z(x) = z'(1-x) + \overline{q(x)} z(x)$, $z(0) = 0$, ammo $q(x)$ haqiqiy funksiya bo'lgani uchun, u holda $L = L^*$ bo'lib bundan xos funksiyalarning ortogonalligi kelib chiqadi.

Endi $\{y_n(x)\}$ funksiyalar sistemasining to'laligini ko'rsatamiz.

Aytaylik $f \in L[0,1]$ bo'lib, f funksiya $y_n, n \in \mathbb{Z}$ funklsiyaga orthogonal bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned}
(y_n, f) &= \int_0^1 y_n(x) \overline{f(x)} dx = \int_0^1 \overline{f(x)} [p(1-x)e^{2\pi i(1-x)} - ip(x)e^{2\pi ix}] dx = \\
&= \int_0^1 \overline{f(1-x)} p(x) e^{2\pi ix} - i \int_0^1 \overline{f(x)} p(x) e^{2\pi ix} dx = \int_0^1 [\overline{f(1-x)} - i \overline{f(x)}] p(x) e^{2\pi ix} = 0
\end{aligned}$$

$\{e^{2\pi ix}\}$ trigonometrik sistema tola bo'lgani uchun oxirgi tenglikdan

$$f(1-x) + if(x) \equiv 0, x \in [0,1] \quad (13)$$

ayniyatga ega bo'lamiz. (13) tenglikda x ni $1-x$ ga almashtirib hosil bo'lgan tenglikni i ga ko'paytirib

$$if(x) + i^2 f(1-x) \equiv 0 \quad (14)$$

ayniyatga ega bo'lamiz. (13) va (14) tengliklarni hadlab qo'shib $f(x) \equiv 0$ ekanligini ko'ramiz. Lemma isbotlandi.

Eslatma. 4-lemmadan (11) xos qiymatlar bir karralliligi kelib chiqadi.

5-lemma. Aytaylik $y_n^0(x) = \frac{y_n(x)}{\|y_n\|}$ bo'lsin, bu yerda $\|y_n\| - L_2[0;1]$ fazodagi norma. U holda $y_n^0(x) = \gamma y_n(x)$, bu yerda

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{2}}[1], \quad [1] = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Isboti.

$$\begin{aligned}
\|y_n\|^2 &= \int_0^1 y_n(x) \overline{y_n(x)} dx = \int_0^1 p(1-x) \overline{p(1-x)} dx + \int_0^1 p(x) \overline{p(x)} dx + \\
&\quad + i \int_0^1 p(1-x) \overline{p(x)} e^{-4\pi i n x} dx - \int_0^1 p(x) \overline{p(1-x)} e^{4\pi i n x} dx
\end{aligned}$$

Uchinchi va to'rtinchi integrallarni bo'laklab integrallash, ularga kiruvchi eksponentialarni chegaralanganligi hamda $\|p(x)\| = 1$ ekanligini e'tiborga olsak $\|y_n\|^2 = 2 + O(1/n)$ ekanligini ko'ramiz, bundan esa lemmaning tasdig'i kelib chiqadi.

L operatorning $L_2[0;1]$ fazodagi aniqlanish sohasini D_L bilan belgilaymiz.

6-lemma. Agar $f(x) \in D_L$ bo'lsa, u holda bu funksiyaning $\{y_n(x)\}$ xos funksiyalar bo'yicha Fur'ye qatori $[0;1]$ kesmada absolyut va tekis yaqinlashadi.

Isboti. $f(x)$ funksiyaning $\{y_n(x)\}$ xos funksiylari bo'yicha Fur'ye qatori

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (f, y_n) \gamma_n^2 y_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (f, y_n^0) \gamma_n^2 y_n^0(x)$$

ko'rinishga ega. Aytaylik μ_0 haqiqiy soni L operatorning xos qiymati bo'lmasin. E birlik operator uchun $(L - \mu_0 E)f = g$ bo'lsin. U holda $f = R_{\mu_0} g$ bu yerda $R_{\lambda} - L$ operatorning rezolventasi. Shu bilan birga

$$(L - \mu_0 E)y_n^0 = (\lambda_n - \mu_0)y_n^0,$$

bundan $y_n^0 = (\lambda_0 - \mu_0)R_{\mu_0} y_n^0$ va

$$(f, y_n^0) = (R_{\mu_0} g, y_n^0) = (g, R_{\mu_0} y_n^0) = \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} (g, y_n^0)$$

Shuning uchun

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (f, y_n^0) \gamma_n^0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} (g, y_n^0) \gamma_n^0(x)$$

$$\frac{1}{\lambda_0 - \mu_0} = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ va } \sum_{-\infty}^{\infty} |(g, y_n^0)|^2 < \infty \text{ bo'lgani uchun lemmaning tasdig'i}$$

Koshi Bunyakovskiy tengsizligi va $y_n^0(x)$ xos funksiyaning chegaralanganligidan kelib chiqadi.

6-lemmadan $\sum |c_n|$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi. Shuning uchun

$f_0(x) = \sum c_n e^{2\pi i x}$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz va davri 1 ga teng

bo'lgan davriy funsiyadir, bu yerda $c_n = (f(x), y_n(x)) \gamma_n^2$.

7-lemma. $x \in [0;1]$ bo'lganda

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [i\varphi(x) + \varphi(1-x)] \quad (15)$$

formula o'rinli.

Isboti. 6-lemmaga ko'ra $x \in [0;1]$ bo'lganda

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi, y_n) \gamma_n^2 y_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n [p(1-x)e^{2\pi i(1-x)} - ip(x)e^{2\pi i x}],$$

bundan

$$\varphi(x) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x) \quad (16)$$

va

$$\varphi(1-x) = p(x)f_0(x) - ip(1-x)f_0(1-x) \quad (17)$$

(16) va (17) dan

$$i\varphi(x) + \varphi(1-x) = 2p(x)f_0(x) \quad (18)$$

(18) dan esa (15) kelib chiqadi.

Eslatma. $f_0(x)$ funksiya davriy bo'lgani uchun $[0;1]$ kesmadagina berilgan qiymati bilan butun son o'qida bir qiymatli aniqlanadi. Shuning uchun $f_0(x)$ funksiya qator bilan emas balki (15) formula bilan beriladi.

8-lemma. Agar $\varphi(x) \in C^1[0;1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ bo'lsa, u holda $f_0(x)$ funksiya butun son o'qida uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi.

Isboti. (15) formuladan $f_0(x)$ funksiyaning $[0;1]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchanligi (kesma chetlarida bir tonlamali hosilalar tushuniladi) kelib chiqadi. $f_0(x)$ davriy funksiya bo'lgani uchun, bu funksiya $x = n, n \in \mathbb{N}$ nuqtalardan boshqa butun $(-\infty, +\infty)$ son o'qida uzluksiz differensiallanuvchi bo'ladi. $f_0'(n-0) = f_0'(n+0)$ ekanligini ko'rsatamiz. $f_0(x)$ funksiyaning davriyligiga ko'ra

$$f_0'(0+0) = f_0'(0-0) \quad (19)$$

ekanligini ko'rsatish yetarli. (18) ifodani differensiallab

$$i\varphi'(x) - \varphi'(1-x) = 2p'(x)f_0(x) + 2p(x)f_0'(x) \quad (20)$$

tenglikni hosil qilamiz. (20), lemma shartlari va

$$f_0(0) = f_0(1), f_0'(1-0) = f_0'(0-0)$$

shartlardan

$$2p'(0)f_0(0) + 2p(0)f_0'(0+0) = i\varphi'(0), \quad 2p'(1)f_0(0) + 2p(1)f_0'(0-0) = -i\varphi'(0)$$

tengliklarga va bulardan

$$2[p'(0) + ip'(1)]f_0(0) + 2[p(0)f_0'(0+0) + ip'(1)f_0'(0-0)] = 0 \quad (21)$$

tenglikni hosil qilamiz. Shu bilan birga

$$p(0)=1, p(1)=\exp\left(-i\int q(t)dt\right)e^{ia}=e^{\pi i/2}=i, u_2'(x)=-iq(x)u_2(x),$$

$$p'(0)=-iq(0)+ia, p'(1)=q(1)=a$$

hamda $q(0)=q(1)$. U holda $p'(0)+ip'(1)=0$ bo'lib (21) dan (19) kelib chiqadi. Lemma isbotlandi.

Eslatma. $\varphi'(1)=0$ shart tabiiy, chunki barcha xos funksiyalar bu shartni qanoatlantiradi.

3.3-§.Masalaning klassik yechimi. Fur'ye usuliga ko'ra (1),(2) masalaning $u(x,t)$ yechimi formal ko'rinishda

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi, y_n^0) y_n^0(x) e^{\lambda_n \beta i t} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t}, \quad (22)$$

qator ko'rinishida ifodalanadi, bu yerda $c_n = (f(x), y_n(x)) \gamma_n^2$.

9-lemma. Barcha $x \in [0;1]$ va $t \in (-\infty, +\infty)$ lar uchun (22) qator absolyut va tekis yaqinlashadi va uning uchun quyidagi

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} = e^{a \beta i t} [p(1-x) f_0(1-x+\beta t) - ip(x) f_0(x+\beta t)] \quad (23)$$

formula o'rinli, bu yerda $p(x)=u_2(x)e^{iax}$.

Isboti. (22) qatorning yaqinlashishi 6-lemmadan kelib chiqadi. Keyin

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n y_n(x) e^{\lambda_n \beta i t} &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n [p(1-x) e^{2\pi i(1-x)} - ip(x) e^{2\pi i x}] e^{\lambda_n \beta i t} = \\ &= e^{a \beta i t} \left[p(1-x) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i(1-x+\beta t)} - ip(x) \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i(x+\beta t)} \right] \end{aligned}$$

Bundan (23) kelib chiqadi.

Teorema. Agar $\varphi(x) \in C^1[0;1]$, $\varphi(0)=\varphi'(1)=0$. $q(x) \in C[0,1]$, $q(x)=q(1-x)$ bo'lsa, u holda (1),(2) masalaning klassik yechimi mavjud va u

$$u(x,t) = e^{a \beta i t} [p(1-x) f_0(1-x+\beta t) - ip(x) f_0(x+\beta t)], \quad (24)$$

ko'rinishga ega, bu yerda $p(x) = \exp\left(aix - i \int_0^x q(t) dt \right)$, $f_0(x)$ davri 1 ga teng bo'lgan davriy funksiya bo'lib $[0,1]$ kesmada

$$f_0(x) = \frac{1}{2p(x)} [i\varphi(x) + \varphi(1-x)] \quad (25)$$

Isboti. Yuqorida agar (25) tenglik bilan berilgan $f_0(x)$ funksiyaning butun son o'qida 1 ga teng davr bo'yicha davom ettirsak, u holda son o'qining barcha nuqtasida uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lishi ko'rsatilgan edi. Endi (24) formula bilan berilgan $u(x,t)$ funksiya (1),(2) aralash masalaning yechimi bo'lishini ko'rsatamiz.

Dastlab $u(x,t)$ funksiya (1) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta i} u(x,t) &= ae^{a\beta it} [p(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(x)f_0(x+\beta t)] + \\ &+ \frac{1}{i} e^{a\beta it} [p(1-x)f_0'(1-x+\beta t) - ip(x)f_0'(x+\beta t)], \\ u_\xi(\xi,t) \Big|_{\xi=1-x} &= ae^{a\beta it} \left[\begin{aligned} &-p'(1-\xi)f_0(1-\xi+\beta t) - p(1-\xi)f_0'(1-\xi+\beta t) - \\ &-p'(1-x)f_0(\xi+\beta t) - ip(\xi)f_0'(\xi+\beta t) \end{aligned} \right]_{\xi=1-x} \\ &= e^{a\beta it} \left[\begin{aligned} &-p'(x)f_0(x+\beta t) - p(x)f_0'(x+\beta t) - \\ &-p'(1-x)f_0(1-x+\beta t) - ip(1-x)f_0'(1-x+\beta t) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Hisoblanganlarni (1) formulaga qo'yib

$$e^{a\beta it} \left[\begin{aligned} &f_0(1-x+\beta t)[ap(1-x) + ip'(1-x) - p(1-x)q(x)] + f_0(x+\beta t) \cdot \\ &\cdot [-aip(x) + p'(x) + ip(x)q(x)] + f_0'(1-x+\beta t) \left[\frac{1}{i} p(1-x)f_0 + ip(1-x) \right] + \\ &+ f_0'(x+\beta t)[-p(x) + p(x)] \end{aligned} \right]$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi ikkita kvadrat qavslardagi ifodalar nolga teng. $p(x)$ va $p'(x)$ ifodalarining oshkor ko'rinishlarini qo'ysak birinchi va ikkinchi kvadratdagi ifodalarining ham nolga tengligini ko'ramiz. Demak $u(x,t)$ funksiya (1) tenglamani qanoatlantiradi.

Shu bilan birga $x \in [0,1]$ bo'lganda

$$u(x,0) = p(1-x)f_0(1-x) - ip(x)f_0(x) = \varphi(x)$$

ya'ni boshlang'ich shart bajariladi.

Nihoyat,

$$u(0, t) = e^{a\beta it} [p(1)f_0(\beta t) - ip(0)f_0(\beta t)] = 0,$$

ya'ni chegaraviy shart ham bajariladi. Teorema isbotlandi.

III bob bo'yicha xulosa:

III bobda biz involyutsiya xossasiga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishni ko'rib chiqilgan. Bunday tenglamalarni yechish uchun avvalo Fur'ye usuli tadbqiq qilingan bo'lib, bu usulda yechimni ikkita oddiy funksiyalar ko'paytmasi orqali ifodalash kiritilgan. Bu holda tenglama ikkita oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keladi. Bu sistemalarni yechishda xos qiymat va xos funksiyalarni topishga to'g'ri ke ba'ladi. Bundan tashqari chiziqli algebraning ba'zi tushunchalari: Teskari matritsa, diagonal matritsa va h.k. lar yechimni izlashda qo'l keladi. Shunday qilib yechim qator ko'rinishida izlanadi. Topilgan qatorni berilgan differensial tenglamaning umumiy yechim bo'lishi uchun uni tekis yaqinlashishga tekshiriladi. Yuqoridagi shartni qanoatlantirsa bu qator yechim bo'ladi aks holda yechim mavjud bo'lmaydi. Bu jarayon o'ta murakkab bo'lgani uchun hamma masalaning ham yechimini topishga muvaffaq bo'lavermaymiz. Xulosa qilib aytganda biz yuqorida keltirgan usul har doim ham kutilgan natija beravermaydi.

X u l o s a

Magistrlik dissertatsiyasida involyutsiya xossasisiga ega bo'lgan differensial tenglamalar bayon etilgan bo'lib, dastlab involyutsiya, kasr chiziqli akslantirishlar uchun involyutsiya hosil bo'lishining yetarli shartlari, involyutsiya hosil qiluvchi tenglamalarni yuqori tartibli Eyler tenglamalariga keltirish usullari turli xil misollar vositasida bayon etildi.

Dissertatsiyada involyutsiya xossasiga ega bo'lgan differensial tenglamalarning eng sodda hollarini muhokama qilamiz va ularning xususiyatlarini o'rganamiz. Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan differensial tenglamalar haqida birinchi ish [3] adabiyotda ko'rsatilgan 1940 yilda Philosific Magazine jurnalining 30- tomining 7-seriyasida e'lon qilingan Silberstein R.ning “Solution of the equation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ” mavzudagi hamda И.Я. Винер ning Дифференциальные уравнения jurnalining 1969 yil 5-tomida e'lon qilingan “Дифференциальные уравнения с инволюциями” mavzusidagi maqolalaridir. Ammo internet sayitlarida bu sohalar bo'yicha e'lon qilingan maqolalarni deyarli uchratmadik va mustaqil tarzda

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$y(x) = C\sqrt{x} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right)$$

funksiyadan iborat bo'lishini aniqladik, shundan so'ng И.Я. Винер [12] ning maqolasi bo'yicha

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

ko'rinishdagi tenglamalar taxlil qilindi. Shu bilan birga ikkinchi tartibli involyutsiya xossasiga ega bo'lgan $f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ tenglamaning umumiy yechimi aniqlash masalari ko'rildi. Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

tenglama birinchi bor Zilbershteyin tomonidan taxlil qilingan bo'lib, taqdim etilayotgan ishda

$$f'(x) = p(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga o'tkazish masalasi ko'plab misollarda qarab o'tildi. Tadqiqotlarni involyutsiya xossasiga ega bo'lgan bir jinsli bo'lmagan

$$f'(x) = p(x)f\left(\frac{1}{x}\right) + g(x) + \frac{1}{g(x)}$$

tenglamalar ustida ham olib borish mumkin deb o'ylaymiz.

Umuman dissertatsiyada olingan asosiy natijalar:

- a) involyutsiya va uning xossalarini ifodalovchi birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar tadqiq qilinishi;
- b) involyutsiya xossasiga ega bo'lgan Zilbershteyin tipidagi ikkinchi tartibli differensial tenglamasining yechimi keltirilishi;
- c) involyutsiya xossasiga ega bo'lgan

$$f'(x) = p(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga oid ko'plab misollarni ko'rilganligi;

- d) involyutsiya qatnashgan birinchi tartibli xususiy hosillali differensial tenglama uchun aralash masala qaralgan va bu masalaning klassik yechimi Furiy'e usuli bo'yicha keltirib chiqarish amalga oshirilishi.

Andijon Davlat Universiteti Fizika-matematika fakul'teti
5A130102 - "Differensial tenglamalar" magistratura
mutaxassisligi bo'yicha bitiruvchisi Usmonov Baxromning
"INVOLYUTION XOSSASIGA EGA BO'LGAN XUSUSIY
HOSILALI DIFFERENTIAL TENGLAMALAR" mavzusidagi
magistrlik dissertatsiyasiga

TAQRIZ

Magistrlik dissertatsiyasida involyutsiya xossasiga ega bo'lgan differensial tenglamalar bayon etilgan bo'lib, dastlab involyutsiya, kasr chiziqli akslantirishlar uchun involyutsiya hosil bo'lishining yetarli shartlari, involyutsiya hosil qiluvchi tenglamalarni yuqori tartibli Eyler tenglamalariga keltirish usullari turli xil misollar vositasida bayon etildi.

Dissertatsiyada involyutsiya xossasiga ega bo'lgan differensial tenglamalarning eng sodda hollarini muhokama qilamiz va ularning xususiyatlarini o'rganamiz. Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan differensial tenglamalar haqida birinchi ish [3] adabiyotda ko'rsatilgan 1940 yilda Philosific Magazine jurnalining 30- tomining 7-seriyasida e'lon qilingan Silberstein R.ning "Solution of the equation $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ " mavzudagi hamda И.Я. Винер ning Дифференциальные уравнения jurnalining 1969 yil 5-tomida e'lon qilingan "Дифференциальные уравнения с инволюциями" mavzusidagi maqolalaridir. Ammo internet sayitlarida bu sohalar bo'yicha e'lon qilingan maqolalarni deyarli uchratmadik va mustaqil tarzda

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$y(x) = C\sqrt{x} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ln|x|\right)$$

funksiyadan iborat bo'lishini aniqladik, shundan so'ng И.Я. Винер [12] ning maqolasi bo'yicha

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

ko'rinishdagi tenglamalar taxlil qilindi. Shu bilan birga ikkinchi tartibli involyutsiya xossasiga ega bo'lgan $f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ tenglamaning umumiy yechimi aniqlash masalari ko'rildi. Invol'yutsiya xossasiga ega bo'lgan

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

tenglama birinchi bor Zilbershteyin tomonidan taxlil qilingan bo'lib, taqdim etilayotgan ishda

$$f'(x) = p(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga o'tkazish masalasi ko'plab misollarda qarab o'tildi. Tadqiqotlarni involyutsiya xossasiga ega bo'lgan bir jinsli bo'lmagan

$$f'(x) = p(x)f\left(\frac{1}{x}\right) + g(x) + \frac{1}{g(x)}$$

tenglamalar ustida ham olib borish mumkin deb o'ylaymiz.

Umuman dissertatsiyada olingan asosiy natijalar:

- b) involyutsiya va uning xossalarini ifodalovchi birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar tadqiq qilinishi;
- c) involyutsiya xossasiga ega bo'lgan Zilbershteyin tipidagi ikkinchi tartibli differensial tenglamasining yechimi keltirilishi;
- c) involyutsiya xossasiga ega bo'lgan

$$f'(x) = p(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$$

ko'rinishdagi tenglamalarga oid ko'plab misollarni ko'rilganligi;

- d) involyutsiya qatnashgan birinchi tartibli xususiy hosillali differensial tenglama uchun aralash masala qaralgan va bu masalaning klassik yechimi Furiy'e usuli bo'yicha keltirib chiqarish amalga oshirilishi.

Taqrizchi :

ADU matematika kafedrasi dotsenti,
f. m. f. n. G.Mo'minov

Foydalanilgan adabiyotlar

RO'YXATI

1. Бурлуцкая М.Ш, Хромов А.П. Классические решение для смешанной задаче с инволюцией. // Докл.РАН. 2010. Т.435 № 2 ,с.151-154.
2. Бурлуцкая М.Ш. , Хромов А.П. О классическом решении смешанной задачи для уравнения первого порядка с инволюцией. // Вестник Воронежского университета ,Серия Физика.Математика 2010 № 2 ,с.26-33.
3. Бурлуцкая М.Ш. , Хромов А.П. Классическое решение для смешанной задаче для уравнений первого порядка с инволюцией . // Докл.АН. 2011. Т.441, № 2, с.151-154.
4. Бурлуцкая М.Ш. , Хромов А.П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией . // Жур.выч.мат.и мат.физ. 2011.Т.51, № 12, с.2233-2246.
5. Бурлуцкая М.Ш. Смешанная задача с инволюцией на графе из двух ребер с циклом. // Докл.РАН. 2012. Т.447. № 5.С.479=482.
6. Бурлуцкая М.Ш. , Хромов А.П. Классическом решение методом Фурье смешанных задач при минимальные требованиях на исходные данные//Изв.Сарат.университета.Нов.сер.Математика.Механика.Информатика.2014.Т.14, вып.2, с.171-198.
7. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Классическое решение смешанной задаче с инволюцией . // Докл.АН. 2010.Т.435, № 2, с.151-154.
8. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Смешанная задача для гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией. // Докл. РАН. 2011. Т.441 № 2 ,с.151-154.
9. Бурлуцкая М.Ш. Уточненные асимптотические формулы решений системы Дирака. Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронеж.зимний мат. шк. Воронеж, 2011,с.53-54.
10. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально дифференциальных операторов. //

Изв. Саратовского университета. Нов.сер.Математика. Механика. Информатика.2009.Т.9, вып.4, ч.1.С. 3-10.

11. Бурлуцкая М.Ш.,Курдюмов В.П.,Луканина А.С., Хромов А.П. Функционально дифференциальный оператор с инволюцией. // Докл.АН. 2007.Т.414. № 4. С. 443-446.

12. Винер И.Я. *Дифференциальные уравнения с инволюциями.* // Дифференциальные уравнения. Том 5, 1969

13. Корнеев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложения по собственным функциями интегральных операторов с ядрами, допускающее разрывы на диагоналях. // Мат.сб.2001.Т.192.№ 10. С. 33-50.

14. Корнеев В.В., Хромов А.П. Оператор интегрирования с инволюцией , имеющее степенную особенность // Изв.Сарат.ун- та. Нов.сер. Математика. Механика. Информатика.2008.Т.8, вып.4, С. 18-33.

15. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнения математической физики, имеющих приложения в технических вопросах Л.,1950.368 с.

16. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального оператора переменной структуры. //Изв.Сарат.ун- та. Нов.сер.Математика. Механика. Информатика.2007.Т.7, вып.2, С. 20-25.

17. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами разрывными на диагоналях. // Изв.АН.Сер.Математика.2012.Т.76, № 6, С. 106-121

18. Холова В.В.,Хромов А.П. Интегральный оператор с негладкой инволюцией. //Известия Саратовского университета. Нов.сер. Математика, Механика, Информатика. 2013.Т.13 вып1 ч.1.С.40-45.

19. Хромов А.П. Об асимптотике решений уравнения Дирака. Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронеж. зимний мат. шк. Воронеж, 2011 ,с.346-347.

20. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях. // Математ.заметки. 1998.Т. 64, № 6.С.932-949.
21. Хромов А.П. Смешанная задача для дифференциального уравнения с инволюцией и потенциалом специального вида. // Известия Саратовского университета, Нов.сер. Математика, Механика, Информатика. 2010, ,т.10. вып № 4 ,с.17-22.
22. Хромов А.П., Бурлуцкая М.Ш. Обоснования метода Фурье в смешанных задачах с инволюций. //Известия Саратовского ун-та. Нов.сер. Математика, Механика, Информатика. 2011.Т.11 вып 4, с.3-12.
23. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных.М.,1991.112с.
24. Silberstein R. *Solution of the equation $f'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$* . // Phil. Mag.^{7th} Series, 30(1940), p.185-186.

Ilmiy jurnallardagi maqolalar:

25. G'.M.Mo'minov, B.M.Usmonov "Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan oddiy differensial tenglamalarga oid misollar yechish" Andijon Davlat Universiteti ilmiy xabarnoma №1 2015-yil
26. G'.M.Mo'minov, B.M.Usmonov "Involyutsiya qatnashgan oddiy differensial tenglamalarga oid misollar yechish" Andijon Davlat Universiteti Fizika-Matematika fakulteti "PEDOGOGIK O'QISHLARI" 2015-yil
27. B.M.Usmonov, A. O'.Mirzayev , F.N.Azimjonov "Involyutsiya xossasiga ega bo'lgan xususiy hosilali differensial tenglamani yechishning bir usuli haqida" Andijon Davlat Universiteti Fizika-Matematika fakulteti "PEDOGOGIK O'QISHLARI" 2015-yil

Internet saytlar :

1. [www. Journal of differential equation.com](http://www.Journal of differential equation.com)
2. www.Journal of mathematical analysis and application.com
3. www. Springer Voronej Gosudarstvenniy Universiteta.ru
4. www. Differential equation and application.com
5. www. Bulletin America Mathematical Soc .us
6. www. Proc.Amer.Math.Soc. Nehari Z. Some criteria of univalence.us
7. www. Trans. Math. Monogr. B. Ya. Levin Distrubution of zeros of entire functions
8. www. Journal of Dynamical and Control Systems,
9. www. Известник Саратовского университета Математика Механика Информатика.ru