

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIK ANALIZ VA ALGEBRA KAFEDRASI

Qodirova Munajat Pardayevnaning

Ko`phadning haqiqiy ildizlarini ajratish usullari

mavzusida yozgan

KURS ISHI

Qabul qildi: f.-m.f.n. M. Abulov

Qarshi – 2013

M u n d a r a j a.

K i r i sh.....	3
1. Ko`phadlar haqidagi asosiy tushunchalar va teoremlar.....	4
2. Ko`phadning haqiqiy ildizlarini ajratish usullari.....	10
2.1.Shturm teoremasi.....	10
2.2.Byudan-Fur'e teoremasi.....	16
2.3.Dekart teoremasi.....	19
X u l o s a	25
F o y d a l a n i l g a n a d a b i y o t l a r r o ` y x a t i	25

K i r i sh.

Fan va texnikada uchraydigan ko'pgina masalalar oxir- oqibatda ko'phadning ildizlarini va haqiqiy ildizlar sonini hamda ularni joylashish oraliqlarini topishga keladi. Shu sababli ham ko'phadning haqiqiy izlari sonini aniqlash va ular joylashgan oraliqlarni topish o'ily algebraning muhim masalalaridan birini tashkil etadi.

Birinchi paragrafda ko'phadlar haqida boshlang'ich tushunchalar berilgan. Ko'phadlarni qo'shish, ayirish va ko'paytirish hamda butun sonlar kabi qoldiqli bo'lish amalini ham bajarish mumkin ekanligi ko'rsatilgan.

Ikkinchi paragrafda haqiqiy koeffisientli ko'phadning haqiqiy ildizlarini sonini aniqlash va ular joylashgan oraliqlarni topish usulini beradigan Shturm teoremasi va uni isboti keltirilgan hamda uni qo'llashga misol ko'rilgan.

Uchinchi paragrafda esa Shturm usuludan ancha soda bo'lgan ya'ni ko'phadning haqiqiy ildizlari sonini aniqlaydigan Byudan –Fur'e teoremasi isbotlangan.

Ishning so'ngi paragrafida esa Dekart teoremasi isbotlandi va uni qo'llashga doir misol ko'rildi.

1. Ko'phadlar haqida boshlang'ich tushunchalar.

Ma'lumki n -darajali (n -butun musbat son) tenglamani umumiy ko'rinishi

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ko'rinishdan iborat.

Bu tenglamaning $a_0, a_1, \dots, a_n$ koefitsientlari umumiy holda ixtiyoriy kompleks sonlar, shu bilan birga $a_0 \neq 0$ deb olamiz, aks holda yuqoridagi tenglama n -darajali tenglama bo'lmay qoladi.

Ravshanki, agar tenglama berilgan bo'lsa, u holda doimo uni yechish talab etiladi. Boshqacha aytganda x noma'lumning shunday son qiymatlarini topish talab etiladiki, ular bu tenglikni ayniyatga aylantirsin, ya'ni ularni noma'lumlar o'rniga qo'yganda uni ayniyatga aylantirsin.

Biroq yuqoridagi tenglamani yechish masalasini bu tenglamaning chap tomoni turgan

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \tag{1}$$

ifodani o'rganishning umumiy masalasi bilan almashtirish mumkin.

Ushbu (1) ifoda x noma'lumning n -darajali ko'phadi (yoki polinomi) deyiladi.

Ko'phadlarni qisqacha yozish uchun $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $\varphi(x)$ va hokazo simvollardan foydalanamiz.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarda noma'lumlarning bir xil darajalari oldidagi koefitsientlar teng bo'lsa, bu ko'phadlar teng bo'ladi.

n -darajali (1) ko'phadga o'zining $a_0, a_1, \dots, a_n$ (bu yerda $a_0 \neq 0$) koefitsientlari bilan to'la aniqlanadigan biror formal ifoda deb ham qarash mumkin. Ko'phadning (1) ko'rinishdagi, ya'ni x noma'lumning darajalarini kamayib borish tartibi ko'rinishidagi yozuvidan tashqari yana noma'lumning o'sib boruvchi darajalari bo'yicha yozuvi

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0$$

ham qo'llaniladi.

Ravshanki , (1) ko'phadga matematik analiz fani nuqtai nazaridan ham qarash mumkin , ya'ni uni kompleks o'zgaruvchi x ning kompleks funksiyasi deb ham qarash mumkin. Kompleks koeffitsentli $f(x)$ va $g(x)$

ko'phadlar berilgan bo'lib , ular qulaylik uchun x ning o'sib boruvchi darajalari bo'yicha yozilgan bo'lsin:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n , \quad a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_sx^s , \quad b_s \neq 0$$

va masalan , $n \geq s$ bo'lsin , u holda ularning yig'indisi deb

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$$

ko'rinishdagi ko'phadga aytiladi. Bu ko'phadning koeffitsentlari $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning noma'lumning bir xil darajalari oldida turgan koeffitsentlarining yig'indisiga teng , ya'ni

$$c_i = a_i + b_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

shu bilan birga $n > s$ bo'lganda $b_{s+1} = b_{s+2} = \dots = b_n = 0$ deb hisoblash lozim. Agar $n > s$ bo'lsa bu yig'indining darajasi n ga teng bo'ladi , biroq $n = s$ da uning darajasi n dan kichik bo'lib qolishi ham mumkin , chunonchi $b_n = -a_n$ bo'lganda shunday bo'ladi. $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning ko'paytmasi deb ushbu

$$f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_{n+s}x^{n+s}$$

ko'phadga aytiladi. Uning koeffitsentlari quyidagicha aniqlanadi:

$$d_l = \sum_{k+i=l} a_k b_i , \quad l = 0, 1, 2, \dots, n+s \quad (3)$$

ya'ni d_l koeffitsent $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning indeksleri yig'indisi l ga teng bo'lgan koeffitsentlarning ko'paytmasi va barcha bunday ko'paytmalarning yig'indisiga teng ; xususan

$$d_0 = a_0 b_0 ,$$

$$d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 ,$$

$$d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 ,$$

.....

$$d_{n+s} = a_n b_s .$$

Oxirgi tenglikdan $d_{n+s} \neq 0$ tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, ikkita ko'phad ko'paytmasining darajasi bu ko'phadlar darajalarining yig'indisiga teng.

Demak, noldan farqli ko'phadlarning ko'paytmasi hech qachon nolga teng bo'lmasligi kelib chiqadi.

Endi bu kiritilgan amallarni xossalarini o'rganaylik.

Ko'phadlarni qo'shishning kommutativligi va assotsiativligi bu xossalarning sonlarni qo'shish uchun o'rinli ekanligidan kelib chiqadi, chunki noma'lumning har bir darajasi oldidagi koeffitsientlar alohida-alohida qo'shiladi.

Ko'phadlar uchun ayirish amali ham bajariladi: nol rolini nol soni o'ynaydi,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

ko'phad uchun qarama-qarshi ko'phad quyidagicha bo'ladi:

$$-f(x) = -a_0 - a_1x - \dots - a_{n-1}x^{n-1} - a_nx^n$$

ko'phadlarni ko'paytirishning kommutativligi sonlarni ko'paytirishning kommutativligidan va ko'phadlarni ko'paytirishga berilgan ta'rifda har ikkala ko'paytuvchilarning koeffitsientlari teng huquq bilan olinishidan kelib chiqadi. Ko'paytirishning assotsiativligini isbotlaylik.

Bizga

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{s-1}x^{s-1} + b_sx^s$$

$$h(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_{t-1}x^{t-1} + d_tx^t$$

ko'phadlar berigan bo'lsin, u holda $[f(x)g(x)]h(x)$ ko'paytmada x^i $i = 0, 1, \dots, n + s + t$ oldidagi koeffitsient bo'lib,

$$\sum_{j+m=i} \left(\sum_{k+l=j} a_k b_l \right) d_m = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l d_m$$

son $f(x)[g(x)h(x)]$ ko'paytmaga esa

$$\sum_{k+j=i} a_k \left(\sum_{l+m=j} b_l d_m \right) = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l d_m$$

son xizmat qiladi. Bu sonlar teng, shunday qilib, ko'phadlarni ko'paytirish assosativligi isbotlandi.

Ko'phadlarni qo'shish va ko'paytirishda distributivlik qonuni o'rinli:

$$\sum_{k+l=i} (a_k + b_k) d_l = \sum_{k+l=i} a_k d_l + \sum_{k+l=i} b_k d_l \quad (4)$$

Bu tenglikning chap tomoni x^i noma'lumning $[f(x) + g(x)]h(x)$ ko'phaddagi koeffitsenti, uning o'ng tomoni esa o'sha darajali noma'lumning x^i ning $f(x)h(x) + g(x)h(x)$ ko'phaddagi koeffitsentidir.

Ko'phadlarni ko'paytirishda bir rolini nolinchi darajali ko'phad deb ataluvchi 1 soni bajaradi.

Tasdiq. $f(x)$ nolinchi darajali ko'phad bo'lgandagina va faqat shu holdagina teskari ko'phad $f^{-1}(x)$ ga ega bo'lib,

$$f(x) f^{-1}(x) = 1 \quad (5)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Agar $f(x)$ ko'phad noldan farqli c sondan iborat bo'lsa, u holda c^{-1} son uning teskari ko'phadi bo'ladi. Agar $f(x)$ ko'phadning darajasi $n \geq 1$ bo'lib, $f^{-1}(x)$ ko'phad mavjud bo'lganda edi, u holda (5) tenglikning chap tomoni darajasi n dan kichik bo'lmagan holda, shu tenglikning o'ng tomonida nolinchi darajali ko'phad turgan bo'lar edi.

Buni esa bo'lishi mumkin emas.

Natija. Ko'phadlarni ko'paytirishga teskari amal-bo'lish amali mavjud emas.

Ushbu xossalariga ko'ra kompleks koeffitsentli ko'phadlar to'plami butun sonlar to'plami ga o'xshaydi. Bu o'xshashlik yana ko'phadlar uchun butun sonlar singari qoldiqli bo'lish algoritmi mavjudligida ham ko'rish mumkin.

Teorema. Ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun shunday $q(x)$ va $r(x)$

ko'phadlar topish mumkinki, ushbu

$$f(x) = g(x) q(x) + r(x) \quad (6)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda $r(x)$ ning darajasi $g(x)$ ning darajasidan kichik yoki $r(x) = 0$ bo'ladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi $q(x)$ va $r(x)$ ko'phadlar bir qiymatli aniqlanadi.

Isboti. Bu teoremani ikki qismga bo'lib isbotlaymiz. Avvalo $q(x)$ va $r(x)$ ko'phadlarni yagonaligini ko'rsatamiz, so'ngra esa bunday $q(x)$ va $r(x)$ ko'phadlarni mavjudligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik (6) tenglikdan tashqari

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x) \quad (6')$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $q_1(x)$ va $r_1(x)$ ko'phadlar ham mavjud bo'lsin hamda $r_1(x)$ ni darajasi $g(x)$ ning darajasidan kichik bo'lsin. (6) va (6') tengliklarni o'ng tomonlarini bir biriga tenglashtirib, natijada

$$g(x)[q(x) - q_1(x)] = r(x) - r_1(x)$$

tenglik ni hosil qilamiz.

Bu tenglikning o'ng tomonining darajasi $g(x)$ ning darajasidan kichik bo'lgan ko'phad, chap tomonda turgan ko'phadning darajasi esa $q(x) - q_1(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $g(x)$ ning darajasidan katta yoki unga teng bo'lgan ko'phad turibdi. Shu sababli $q(x) - q_1(x) = 0$, ya'ni $q(x) = q_1(x)$ bo'lishi lozim, bundan esa $r(x) = r_1(x)$ kelib chiqadi.

Demak farazimiz noto'g'ri. Teoremaning ikkinchi qismi isbotlandi.

Endi teoremaning birinchi qismini isbotlaymiz. $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlarning darajalari mos ravishda n va s bo'lsin.

Agar $n < s$ bo'lsa, u holda $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$ deb olamiz.

Shu sababli $n \geq s$ bo'lsin deb olaylik.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

$$g(x) = b_0x^s + b_1x^{s-1} + \dots + b_{s-1}x + b_s, \quad b_0 \neq 0$$

ko'phadlar berilgan bo'lsin.

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-s} g(x) = f_1(x) \quad (7)$$

deb olib, darajasi n dan kichik bo'lgan $f_1(x)$ ko'phadni hosil qilamiz. Hosil bo'lgan $f_1(x)$ darajasini n_1 va yuqori hadi koeffitsientini a_{10} orqali belgilaymiz. Agar hali ham $n_1 \geq s$ bo'lsa,

$$f_1(x) - \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} g(x) = f_2(x) \quad (7_1)$$

deb olamiz. $f_2(x)$ ko'phadning darajasini n_2 va yuqori hadi koeffitsentini a_{20} orqali belgilaymiz. Ravshanki , olishimizga ko'ra $n_2 < n_1$.So'ngra esa

$$f_2(x) - \frac{a_{20}}{b_0} x^{n_2-s} g(x) = f_3(x) \quad (7_2)$$

deb olamiz va hokazo.

$f_1(x), f_2(x), \dots$ ko'phadlarning darajalari kamayib borganligi ($n > n_1 > n_2 > \dots$) sababli , chekli sondagi qadamdan so'ng albatta, n_k darajasi s dan kichik bo'lgan shunday $f_k(x)$ ko'phadga kelamizki ,

$$f_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s} g(x) = f_k(x) \quad (7_{k-1})$$

bo'lib , yuqoridagi jarayonni shu yerda to'xtaydi. Endi $(7), (7_1), (7_2) , \dots, (7_{k-1})$ tengliklarni qo'shib , quyidagi

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s} \right) g(x) = f_k(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerdan esa quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s} ,$$

$$r(x) = f_k(x) .$$

Ushbu ko'phadlar olishimizga ko'ra (5) tenglikni qanoatlantiradi , hamda $r(x)$ ning darajasi esa $g(x)$ ning darajasidan kichik.

$q(x)$ ko'phad $f(x)$ ni $g(x)$ ga bo'lishdan chiqqan bo'linma , $r(x)$ esa bu bo'lishdan hosil bo'lgan bo'linma deb ataladi.

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar haqiqiy koeffitsentli ko'phadlar bo'lsa , u holda barcha $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ ko'phadlarning koeffitsentlari , shu sababli bo'linma $q(x)$ ning ham , qoldiq $r(x)$ ning ham koeffitsentlari haqiqiy sonlar bo'linadi.

2. Ko'phadning haqiqiy ildizlarini ajratish.

2.1. Shturm teoremasi.

Haqiqiy koeffisientli $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlarini sonini topish masalasini ko'raylik. Quyida biz musbat ildizlar soni, manfiy ildizlar soni va avvaldan berilgan a va b sonlar orasidagi ildizlar sonini topish masalasini ko'ramiz. Bu masalalarga bir muncha sodda bo'lgan Shturm metodini qo'llab javob beramiz. Noldan farqli bo'lgan haqiqiy sonlarning birorta tartiblangan sistemasi, masalan

$$1, 3, -2, -5, 6, 1, 3, -1, -1, 4, 1 \quad (1)$$

berilgan bo'lsin, Bu sonlarni ishoralarini yozib chiqaylik:

$$+, +, -, -, +, +, +, -, -, +, + \quad (2)$$

Biz bu ishoralar sistemasida qarama-qarshi ishoralar 4 marta almashganini, ketma-ket turganini ko'ramiz. Shu sababli (1) tartiblangan sistemada 4 marta ishora o'zgaradi (almashadi) deyiladi. Demak noldan farqli haqiqiy sonlarning ixtiyoriy tartiblangan chekli sistemasi uchun ishora almashishlar sonini har doim topish mumkin. Haqiqiy koeffisientli $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lsin va u karrali ildizga ega emas deb faraz qilaylik. Agar $f(x)$ ko'phad karrali ildizlarga ega bo'lsa, u holda uni o'zi bilan hosilasining eng katta umumiy bo'luvchisiga bo'lib yuborib har doim karrali ildizga ega bo'lmagan ko'phadni hosil qilishimiz mumkin.

Agar quyidagi shartlar bajarilsa noldan farqli ko'phadlarning tartiblangan chekli sistemasi

$$f(x) = f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x) \quad (3)$$

$f(x)$ ko'phadning Shturm sistemasi deyiladi.

1). (3) sistemaning qo'shni ko'phadlari umumiy ildizga ega emas.

2). Oxirgi $f_s(x)$ ko'phad haqiqiy ildizga ega emas.

3). Agar α son (3) sistemaning oraliq ko'phadlaridan biri bo'lgan $f_k(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizi bo'lsa, $(1 \leq k \leq s-1)$ u holda $f_{k-1}(\alpha)$ va $f_{k+1}(\alpha)$ qarama-qarshi ishoraga ega bo'ladi.

4). Agar α son $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizi bo'lsa, u holda x o'sa borib α dan o'tganda $f(x)f_1(x)$ ko'paytma o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi.

$f(x)$ ko'phad shunday (3) Shturm sistemasiga ega deb faraz qilaylik. (Ixtiyoriy ko'phadning Shturm sistemasiga egaligi masalasini keyinroq ko'ramiz).

Agar c haqiqiy son berilgan $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlaridan ibrat bo'lmasa, u holda haqiqiy sonlarning

$$f(c) = f_0(c), f_1(c), f_2(c), \dots, f_s(c)$$

sistemasini olamiz, undan barcha nolga tenglarini o'chiramiz va $W(c)$ orqali qolgan sistemaning ishora o'zgarishlar sonini belgilaylik.

Ta'rif. $W(c)$ ni $f(x)$ ko'phadning (3) Shturm sistemasida $x = c$ bo'lgandagi ishora o'zgarishlar soni deyiladi.

Teorema. (Shturm teoremasi) Agar a va b ($a < b$) haqiqiy sonlar karrali ildizi bo'lmagan $f(x)$ ko'phadning ildizlari bo'lmasa, u holda $W(a) \geq W(b)$ bo'ladi va $W(a) - W(b)$ ayirma $f(x)$ ko'phadning a va b orasida joylashgan haqiqiy ildizlari soniga teng bo'ladi.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun x o'sishi bilan $W(x)$ son qanday o'zgarishini kuzatish etarli. x o'sa borib o'z yo'lida (3) Shturm sistemasining birorta ham ko'phadining ildizlarini uchratmasa, bu sistema ko'phadlarining ishoralari o'zgarmaydi, demak $W(x)$ ham o'zgarmay qoladi. Shu sababli Shturm sistema ta'rifidagi 2) shartga asosan faqat ikkita holni ko'rish kifoya: x birorta oraliq $f_k(x)$, $(1 \leq k \leq s-1)$ ko'phadning ildizlaridan o'tishi va x ning $f(x)$ ko'phadning o'zining ildizidan o'tishi.

α son $f_k(x)$, $1 \leq k \leq s-1$ ko'phadning ildizi bo'lsin. U holda 1) shartga ko'ra,

$f_{k-1}(\alpha)$ va $f_{k+1}(\alpha)$ lar noldan farqli. Demak, shunday ε musbat kichik son topish mumkinki, $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ oraliqda $f_{k-1}(x)$ va $f_{k+1}(x)$ ko'phadlar ildizga ega emas va demak ular ushbu oraliqda ishora saqlaydi. Bundan tashqari 3) asosan bu shoralar qarama-qarshidir. Bundan esa, ushbu

$$f_{k-1}(\alpha - \varepsilon), f_k(\alpha - \varepsilon), f_{k+1}(\alpha - \varepsilon) \quad (4)$$

va

$$f_{k-1}(\alpha + \varepsilon), f_k(\alpha + \varepsilon), f_{k+1}(\alpha + \varepsilon) \quad (5)$$

sonlar sistemalarining har biri $f_k(\alpha - \varepsilon)$ va $f_k(\alpha + \varepsilon)$ sonlar qanday ishoraga ega bo'lishdan qat'iy nazar faqat bittagina ishora o'zgarishiga ega bo'ladilar.

Masalan, agar $f_{k-1}(x)$ ushbu qaralayotgan oraliqda manfiy bo'lsa, $f_{k+1}(x)$ esa musbat bo'lsa hamda $f_k(\alpha - \varepsilon) > 0$, $f_k(\alpha + \varepsilon)$ bo'lsa, u holda (4) va (5) sistemalariga ushbu

$$-, +, +; -, -, +$$

ishoralar sistemasi mos keladi. Demak, x Shturm sistemasidagi birorta oraliq ko'phadining ildizidan o'tganda bu sistemaning ishora o'zgarishi faqat joyini o'zgartiradi (ya'ni suriladi), yangidan paydo bo'lmaydi va yuqolib ham ketmaydi, shu sababli $W(x)$ son o'zgarmay qoladi.

Endi α $f(x)$ ko'phadning o'zining ildizi bo'lsin. 1) ko'ra α $f_1(x)$ uchun

ildizbo'lmaydi. Shu sababli shunday ε son topiladiki $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ oraliqda $f_1(x)$ ildizga ega bo'lmaydiba shu sababli $f_1(x)$ bu oraliqda ishora saqlaydi. Agar bu ishora musbat bo'lsa, u holda x 4) shartga ko'ra α dan o'tganda $f(x)$ o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, ya'ni

$$f(\alpha - \varepsilon) < 0, f(\alpha + \varepsilon) > 0.$$

Demak,

$$f(\alpha - \varepsilon), f_1(\alpha - \varepsilon) \text{ va } f(\alpha + \varepsilon), f_1(\alpha + \varepsilon) \quad (6)$$

sonlar sistemasiga

$$-, + \text{ va } +, +$$

ishoralar sistemalari mos keladi, boshqacha qilib aytganda Shturm sistemasida bitta ishora o'zgarishi yo'qoladi. Agar $f_1(x)$ ning $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ oraliqdagi ishorasi manfiy bo'lsa, yana 4) ga ko'ra $x = \alpha$ dan o'tganda $f(x)$ ko'phad o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartiradi, ya'ni $f(\alpha - \varepsilon) > 0, f(\alpha + \varepsilon) < 0$, (6) sonlar sistemasiga endi

$$+, -, \text{ va } -, -$$

ishoralar sistemalari mos keladi, ya'ni Shturm sistemasida yana bitta ishora o'zgarishi yo'qoladi. Demak, $W(x)$ son x o'sa borib $f(x)$ ko'phad ildizlaridan o'tgandagina o'zgaradi, shu bilan birga bu holda u roppa -rosa bitytaga kamayadi.

Teorema isbotlandi.

Tasdiq. Karrali ildizga ega bo'lmagan, haqiqiy koeffisientli har qanday $f(x)$ ko'phad Shturm sistemasiga ega bo'ladi.

Isboti. Quyidagi usul bilan Shturm sistemasini tuzaylik

$f(x) = f'(x)$ deb olaylik. Shturm sistemasi ta'rifidagi 4) shartni bajarilishini ko'rsataylik. Agar α son $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda $f'(\alpha) \neq 0$ bo'ladi va demak $f'(\alpha) > 0$ bo'lsa, u holda α nuqta atrofida $f'(x) > 0$ va shu sababli $f(x)$ x ni qiymati α dan o'tganda ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi va demak $f_1(x)f(x)$ ko'paytma ham o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi. Agar $f'(\alpha) < 0$ bo'lsa, u holda α nuqta atrofida $f'(x) < 0$ bo'ladi va $f(x)$ x ni qiymati α dan o'tganida ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartiradi va demak $f_1(x)f(x)$ ham o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi.

So'ngra $f(x)$ ni $f_1(x)$ ga bo'lamiz va bu bo'lishdan chiqqan qoldiqni teskari ishora bilan olib, $f_2(x)$ deb olamiz:

$$f(x) = f_1(x)q_1(x) + r_1(x),$$

$$f_2(x) = -r_1(x).$$

$f_3(x)$ deb esa quyidagi ko'phadni olamiz:

$$f_1(x) = f_2(x)q_2(x) + r_2(x),$$

$$f_3(x) = -r_2(x).$$

va hakazo. $f_{k-1}(x)$ va $f_k(x)$ lar topilgan bo'lsin, u holda $f_{k+1}(x)$ quyidagicha topamiz:

$$f_{k-1}(x) = f_k(x)q_k(x) + r_k(x),$$

$$f_{k+1}(x) = -r_k(x). \quad (5)$$

Bu proses $f(x)$ va $f'(x)$ ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'lgan birorta $f_s(x)$ da to'xtaydi. Olishimizga ko'ra $f(x)$ va $f'(x)$ ko'phadlar o'zaro tub bo'lgani uchun $f_s(x)$ birorta nolinchi darajali ko'phad bo'ladi.

Biz tuzgan

$$f(x) = f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$$

ko'phadlar sistemasi Shturm sistemasining ta'rifidagi 2) shartni bajarishini, ya'ni $f_s(x)$ haqiqiy ildizga ega emasligini va 1) shartni bajarilishini ko'rsataylik: faraz qilaylik $f_k(x)$ va $f_{k+1}(x)$ umumiy α ildizga ega bo'lsin. U holda (5) ga asosan, α

$$f_{k-1}(x) \text{ uchun ham ildiz bo'ladi va hakazo } f_{k-2}(x), f_{k-3}(x), \dots, f_1(x), f_0(x)$$

lar uchun ham ildiz bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ va $f'(x)$ ni o'zaro tub ekanligiga ya'ni $f(x)$ ni karrali ildizga ega emasligiga ziddir.

3). shartni bajarilishi (5) dan kelib chiqadi. Agar $f_k(\alpha) = 0$ bo'lsa, u holda

$$f_{k-1}(\alpha) = -f_{k+1}(\alpha) \text{ bo'ladi.}$$

Tasdiq isbotlandi.

Misol. $f(x) = x^3 - 3x - 1$ ko'phadning Shturm sistemasini tuzing va haqiqiy ildizlarini ajrating.

Yechish. Avvalo berilgan ko'phad uchun Shturm sistemasini quramiz, uni qurushda yuqoridagi tasdiqdan foydalanamiz.

$$f_0(x) = f(x) \text{ deb olamiz, } f_1(x) \text{ deb esa } f'(x) \text{ ni hosilasini olamiz, ya'ni}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \text{ ni, bu holda } f_1(x) = x^2 - 1 \text{ deb olamiz (Shturm sistemasidagi}$$

ko`phadlarni topishda musbat songa ko`paytirish yoki bo`lish mumkin).  $f_2(x)$  deb  $f_0(x)$  ni  $f_1(x)$  ga bo`lib qoldiqni teskari ishora bilan olamiz :

$$f_0(x) = f_1(x)(x+1) - (2x+1).$$

Demak, $f_2(x) = 2x+1$ deb olamiz. $f_3(x)$ ni topish uchun $f_1(x)$ ni $f_2(x)$ ga bo`lamiz va hosil bo`lgan qoldiqni teskari ishora bilan olamiz:

$$f_1(x) = f_2(x)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}.$$

Bu holda $f_3(x) = 1$ bo`ladi.

Shunday qilib,

$$f_0(x) = x^3 - 3x - 1, \quad f_1(x) = x^2 - 1, \quad f_2(x) = 2x + 1, \quad f_3(x) = 1.$$

Endi oraliqlarda ishora almashishlar sonini hisoblash uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

	f_0	f_1	f_2	f_3	W
$-\infty$	-	+	-	+	3
0	-	-	+	+	1
$+\infty$	+	+	+	+	0
1	-		+	+	1
2	+	+	+	+	0
-1	+		-	+	2
-2	-	+	-	+	3

Ushbu jadvaldan quyidagilarni aytish mumkin.

$W(-\infty) - W(+\infty) = 3$ ekanligidan berilgan $f(x)$ ko`phadning 3 ta haqiqiy ildizi bor.

$W(-\infty) - W(0) = 2$ ekanligidan uni 2 ta ildizi manfiy, $W(0) - W(+\infty) = 1$ ekanligidan

esa 1 ta ildizi musbat ekanligi kelib chiqadi. Bu ildizlar $(-2, -1)$; $(-1, 0)$; $(1, 2)$

oraliqlarda joylashgan.

2.2. Byudan-Fur`e teoremasi.

Shturm teoremasi ko'phadning haqiqiy ildizlari soni haqidagi masalani batamom hal qiladi. Ammo Shturm sistemasini tuzish jarayonida hisoblashlarning uzundan – uzoqligi uning muhim kamchiligidan iborat, bunga yuqorida keltirilgan misollardan ham ko`rish mumkin. Shu sababli, hozir haqiqiy ildizlarning sonini aniq bermasa ham, bu sonni yuqoridan chegaralovchi (baholovchi) ikkita teorema isbotlaylik. Grafikdan foydalanib haqiqiy ildizlar soni quyidan chegaralangach, tatbiq qilinadigan bu teoremlar Shturm metodiga murojaat etmay turib ham haqiqiy ildizlarning aniq sonini topishga ba'zan imkon beradi.

n – darajali haqiqiy koeffitsientli $f(x)$ ko'phad berilgan bo'lsin, shu bilan birga n karrali ildizlarga ega bo'lishi ham mumkin deylik. Uning ketma – ket hosilalari

$$f(x) = f^{(0)}(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x) \quad (1)$$

sistemasini qaraylik; ulardan oxirgisi $f(x)$ ko'phadning a_0 yuqori koeffitsientini $n!$ ga ko'paytmasiga teng bo'lgani uchun har doim o'zgarmas ishora saqlaydi. Agar c haqiqiy son (1) sistemadagi birorta ham ko'phadning ildizi bo'lmasa, u holda $S(c)$ orqali ushbu

$$f(c), f'(c), f''(c), \dots, f^{(n-1)}(c), f^{(n)}(c)$$

tartiblangan sonlar sistemasidagi ishora o'zgarishlar sonini belgilaymiz. Shunday qilib, (1) sistema ko'phadlarining birortasini ham nolga aylantirmaydigan barcha x lar uchun aniqlangan butun sonli funksiya $S(x)$ ni qarash mumkin.

$S(x)$ son x o'sishi bilan qanday o'zgarishini o'rganaylik. x (1) ko'phadlarning birortasining ildizlaridan o'tmaguncha $S(x)$ son o'zgara olmaydi. Shunga ko'ra biz bu ikki holni ko'rishimiz zarur: x son $f(x)$ ko'phadning ildizidan o'tishi va x son $f^{(k)}(x)$, $1 \leq k \leq n-1$ hosilalardan birortasining ildizidan o'tishi. α son $f(x)$

ko'phadning l karrali ildizi bo'lsin, $l \geq 1$, ya'ni

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(l-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(l)}(\alpha) \neq 0$$

bo'lsin. ε shunday kichik musbat son bo'lsinki, $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ oraliq $f(x), f'(x), \dots, f^{(l-1)}(x)$ ko'phadlarning α dan tashqari birorta ham ildizini o'z ichiga olmasin, shuningdek $f^{(l)}(x)$ ko'phadning ham birorta ildizini o'z ichiga olmasin.

$$f(\alpha - \varepsilon), f'(\alpha - \varepsilon), \dots, f^{(l-1)}(\alpha - \varepsilon), f^{(l)}(\alpha - \varepsilon)$$

sonlar sistemasida har qaysi ikki qo'shni son qarama – qarshi ishoraga ega bo'lgani holda

$$f(\alpha + \varepsilon), f'(\alpha + \varepsilon), \dots, f^{(l-1)}(\alpha + \varepsilon), f^{(l)}(\alpha + \varepsilon)$$

sonlarning barchasi ham bir xil ishoraga ega ekanligini isbotlaylik, (1) sistemaning har bir ko'phadi o'zidan oldingi ko'phadning hosilasidan iborat bo'lgani uchun x son $f(x)$ ning α ildizidan o'tganda, bu ildizning karrasidan qat'iy nazar, o'tishdan oldin $f(x)$ va $f'(x)$ lar har xil ishoraga ega bo'lib, o'tib bo'lgach esa ularning ishoralari bir xil bo'lishini isbotlashimiz yetarlidir. Agar $f(\alpha + \varepsilon) > 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ ko'phad $(\alpha - \varepsilon, \alpha)$ oraliqda kamayuvchi, shuning uchun ham

$f'(\alpha - \varepsilon) < 0$; $f(\alpha - \varepsilon) < 0$ bo'lganda esa $f(x)$ o'suvchi va shuning uchun ham $f'(\alpha - \varepsilon) > 0$. Demak, har ikki holda ham ishoralar turlicha.

Ikkinchi tomondan, agar $f(\alpha + \varepsilon) > 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ $(\alpha, \alpha + \varepsilon)$ oraliqda o'suvchi va shu sababli $f'(\alpha + \varepsilon) > 0$; shunga o'xshash $f(\alpha + \varepsilon) < 0$ dan $f'(\alpha + \varepsilon) < 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, α ildizdan o'tgach, $f(x)$ va $f'(x)$ larning ishoralari bir xil bo'lishi kerak.

Isbotlashga asosan x son $f(x)$ ko'phadning l karrali ildizidan o'tishida

$$f(x), f'(x), \dots, f^{(l-1)}(x), f^{(l)}(x)$$

sistema l ta ishora o'zgartirishini yo'qotishi kelib chiqadi.

Endi α

$$f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x), \dots, f^{(k+l-1)}(x), 1 \leq k \leq n-1, l \geq 1$$

hosilalarning ildizi bo'lib, na $f^{(k-1)}(x)$ ning va na $f^{(k+1)}(x)$ ning ildizi bo'lmasin.

Yuqorida isbotlanganga asosan x ning α o'tishi

$$f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x), \dots, f^{(k+l-1)}(x), f^{(k+l)}(x)$$

sistemada l ta ishora o'zgartirishini yo'qolishiga sabab bo'ladi. Albatta, bu o'tish $f^{(k-1)}(x)$ va $f^{(k)}(x)$ lar orasida yangi ishora o'zgarishini hosil qilishi ham mumkin, ammo $l \geq 1$ bo'lgani uchun x son α dan o'tganda

$$f^{(k-1)}(x), f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x), \dots, f^{(k+l-1)}(x), f^{(k+l)}(x)$$

sistemadagi ishora o'zgarishlar soni yo o'zgarmaydi, yoki kamayadi. Shu bilan

birga u $f^{(k-1)}(x)$ va $f^{(k+1)}(x)$ ko'phadlar $x \in \alpha$ qiymatdan o'tayotganda o'z ishoralarini o'zgartirmaganliklari sababli, faqat juft songagina kamayishi mumkin. Hosil qilingan natijalardan, agar a va b ($a < b$) (1) sistemaning birorta ham ko'phadi uchun ildiz bo'lmasa, u holda $f(x)$ ko'phadning a va b orasida joylashgan va har biri, uning karrasi qancha bo'lsa, shuncha marta hisoblangan haqiqiy ildizlarining soni $S(a) - S(b)$ ayirmaga teng yoki bu ayirmadan juft songa kam bo'lishi kelib chiqadi.

a va b sonlarga qo'yilgan cheklanishlarni bir oz kamaytirish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz. c haqiqiy son garchi (1) sistemaning boshqa ko'phadlari uchun ildiz vazifasini bajarishi mumkin bo'lsa ham, $f(x)$ ko'phadning ildizi bo'lmasin.

$S_{(+)}(c)$ orqali

$$f(c), f'(c), f''(c), \dots, f^{(n-1)}(c), f^{(n)}(c) \quad (2)$$

sonlar sistemasida quyidagi usulda hisoblangan ishora o'zgarishlar sonini belgilaymiz: agar

$$f^{(k)}(c) = f^{(k+1)}(c) = \dots = f^{(k+l-1)}(c) = 0 \quad (3)$$

bo'lib, ammo

$$f^{(k-1)}(c) \neq 0, f^{(k+l)}(c) \neq 0, \quad (4)$$

bo'lsa, u holda $f^{(k)}(c), f^{(k+1)}(c), \dots, f^{(k+l-1)}(c)$ larning ishorasini $f^{(k+l)}(c)$ ning ishorasi qanday bo'lsa, shunday deb hisoblaymiz; bu shubhasiz, (2) sistemadagi ishora o'zgarishlar sonini hisoblashda nollar o'chirilgan deb faraz qilinishiga teng kuchlidir. Ikkinchi tomondan, $S_{(-)}(c)$ orqali (2) sistemada quyidagi usulda hisoblangan ishora o'zgarishlar sonini belgilaylik: agar (3) va (4) shartlar bajarilsa, u holda $f^{(k+i)}(c), 0 \leq i \leq l-1$ ko'phadning ishorasini: agar $l-i$ ayirma juft bo'lsa, $f^{(k+i)}(c)$ ning ishorasi bilan bir xil, bu ayirma toq bo'lsa $f^{(k+i)}(c)$ ning ishorasiga qarama – qarshi deb hisoblaymiz.

Endi a va b ($a < b$) (1) sistemaning qandaydir boshqa ko'phadlarining ildizlari vazifasini bajarsalarda, $f(x)$ ko'phadning ildizlari bo'lmasin. $f(x)$ ko'phadning a va b ($a < b$) lar orasida joylashgan haqiqiy ildizlari sonini aniqlamoqchi bo'lsak,

quyidagicha ish tutamiz. ε shunday yetarlicha kichik musbat son bo'lsinki, $(a, a + 2\varepsilon)$ oraliq $f(x)$ ko'phadning ildizlarini va shuningdek (1) sistemaning qolgan barcha ko'phadlarining a dan boshqa ildizlarini o'z ichiga olmasin; ikkinchi tomondan, η shunday yetarlicha kichik son bo'lsinki, $(b - 2\eta, b)$ oraliq ham $f(x)$ ko'phadning ildizlarini va (1) sistemaning b dan farqli qolgan barcha ildizlarini o'z ichiga olmasin. U holda $f(x)$ ko'phadning bizni qiziqtirayotgan haqiqiy ildizlarining soni, bu ko'phadning $a + \varepsilon$ va $b - \eta$ lar orasida joylashgan haqiqiy ildizlarining soniga teng; ya'ni yuqorida isbotlanganiga asosan $S(a + \varepsilon) - S(b - \eta)$ ayirmaga teng yoki bu ayirmadan juft songa kichik bo'ladi.

Ammo

$$S(a + \varepsilon) = S_+(a), \quad S(b - \eta) = S_-(b)$$

ekanligini osonlikcha ko'rsatish mumkin. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

Byudan – Fur'e teoremasi. Agar a va b ($a < b$) haqiqiy sonlar haqiqiy ko'effitsientli $f(x)$ ko'phadning ildizlari bo'lmasa, u holda bu ko'phadning a va b lar orasida joylashgan va har biri uning karrasi qancha bo'lsa, shuncha marta hisoblangan haqiqiy ildizlarining soni, $S_+(a) - S_-(b)$ ayirmaga teng yoki bu ayirmadan juft songa kam bo'ladi.

2.3. Dekart teoremasi.

∞ simvol orqali x noma'lumning shunday katta qiymatini belgilaymizki, (1) sistema barcha ko'phadlarining unga mos keluvchi qiymatlarining ishoralari ko'phadlarning yuqori ko'effitsientlari ishoralari bilan ustma – ust tushadi. Bu ko'effitsientlar ishoralari ustma – ust tushadigan $a_0, na_0, n(n-1)a_0, \dots, n!a_0$ sonlardan iborat bo'lgani uchun, $S(\infty) = S_-(\infty) = 0$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan,

$$f(0) = a_n, \quad f'(0) = a_{n-1}, \quad f''(0) = a_{n-2}2!, \quad f'''(0) = a_{n-3}3!, \dots, \quad f^{(n)}(0) = a_0 n!.$$

(bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_n$ - $f(x)$ ko'phadning ko'effitsientlari) bo'lgani sababli

$S_+(0)$ $f(x)$ ko'phadning ko'effitsientlaridan tuzilgan sistemadagi ishora

o'zgarishlar soni bilan ustma – ust tushadi, bunda nolga teng ko'effitsientlar

hisobga olinmaydi. Shunday qilib, $(0, \infty)$ oraliqqa Byudan – Fur`e teoremasini qo'llab, ushbu teoremaga kelamiz:

Dekart teoremasi. $f(x)$ ko'phadning har biri uning karrasi qancha bo'lsa, shuncha marta hisoblangan musbat ildizlarining soni bu ko'phadning koeffitsientlaridan tuzilgan sistemasidagi ishora o'zgarishlar soniga teng (bunda nolga teng bo'lgan koeffitsientlar hisobga olinmaydi) yoki bu sondan juft songa kam bo'ladi.

Shubhasiz, $f(x)$ ko'phadning manfiy ildizlari sonini topish uchun Dekart teoremasini $f(-x)$ ko'phadga qo'llash kifoyadir. Shu bilan birga $f(x)$ ko'phadning birorta ham koeffitsienti nolga teng bo'lmasa, u holda $f(-x)$ ko'phadning koeffitsientlaridan tuzilgan sistemasidagi ishora o'zgarishlarga, $f(x)$ ko'phadning koeffitsientlaridan tuzilgan sistemasidagi ishora saqlanishlar mos keladi va aksincha. Shunday qilib, agar $f(x)$ ko'phad nolga teng bo'lgan koeffitsientlarga ega bo'lmasa, u holda uning manfiy idizlari soni (ularni karralari bilan birga hisoblaganda) koeffitsientlar sistemasidagi ishora saqlanishlar soniga teng yoki undan juft songa kam bo'ladi.

Dekart teoremasining Byudan – Furrye teoremasiga tayanmaydigan yana bitta isbotini keltiramiz. Avval ushbu lemmani isbotlaylik.

Lemma. Agar $c > 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ ko'phad koeffitsientlari sistemasidagi ishora o'zgarishlar soni $(x-c)f(x)$ ko'paytma koeffitsientlari sistemasidagi ishora o'zgarishlar sonidan toq songa kam bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan ham, yonma – yon turgan bir xil ishorali barcha hadlarni qavslarga yig'ib, a_0 yuqori koeffitsienti musbat bo'lgan $f(x)$ ko'phadni quyidagicha yozamiz:

$$f(x) = (a_n x^n + \dots + b_1 x^{k_1+1}) - (a_1 x^{k_1} + \dots + b_2 x^{k_2+1}) + \dots + (-1)(a_s x^{k_s} + \dots + b_{s+1} x^t) \quad (5)$$

Bu yerda $a_0 > 0$, $a_1 > 0, \dots, a_s > 0$ xuddi shu vaqtda $b_1, b_2, \dots, b_s$ lar musbat yoki nolga teng; ammo b_{s+1} ni qat'iy musbat deb hisoblaymiz, ya'ni x^t , $t \geq 0$ koeffitsientlari noldan farqli $f(x)$ ko'phadga kirgan x noma'lumning eng kichik darajasidan iborat. Bunda

$$(a_0x^n + \dots + b_1x^{k_1+1})$$

qavs tasodifan faqat bittagina qo'shiluvchidan iborat bo'lib qolishi mumkin, chunonchi, $k_1 + 1 = n$ bo'lsa, xuddi shunday bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash mulohaza (5) formulaning qolgan qavslari uchun ham o'rinli bo'ladi.

Endi $(x - c)f(x)$ ko'paytma teng bo'lgan ko'phadni yozaylik, shu bilan birga faqat x ning $n+1, k_1+1, \dots, k_s$ va t darajalari qatnashgan hadlarnigina ajratib yozamiz. U holda ushbu

$$(x - c)f(x) = (a_0x^{n+1} + \dots) - (a_1'x^{k_1+1} + \dots) + \dots + (-1)^s(a_s'x^{k_s+1} + \dots - cb_{s+1}x^t) \quad (6)$$

ifodani hosil qilamiz, bunda $a_i' = a_i + cb_i, i = 1, 2, \dots, s$ va shunga ko'ra, $c > 0$ bo'lgani uchun barcha a_i lar qat'iy musbat. Shunday qilib, $f(x)$ ko'phadning koeffitsientlari sistemasida a_0x^n va $-a_1x^{k_1}$ hadlar orasida (xuddi shu kabi $-a_1x^{k_1}$ va $a_2x^{k_2}$ va h.k. hadlar orasida) bitta ishora o'zgarishi bo'lgan, $(x - c)f(x)$ ko'phadga esa bularga mos kelgan a_0x^{n+1} va $-a_1'x^{k_1+1}$ hadlar orasida (mos ravishda $-a_1'x^{k_1+1}$ va $a_2'x^{k_2+1}$ va h.k. hadlar orasida) yoki bitta, yoki bittadan ko'p, lekin u vaqtda albatta juft sonda ishora o'zgarishi bo'ladi. Shu bilan birga bu ishora o'zgarishlarning aniq o'rnini bizni qiziqtirmaydi; masalan, shunday bo'lishi mumkinki, (6)da x^{k_1+2} oldingi koeffitsienti xuddi $-a_i'$ koeffitsient kabi manfiy va shuning uchun ham bu ikkita qo'shni koeffitsient orasida ishora o'zgarishi mavjud emas, ya'ni birinchi qavsda ishora o'zgarishlar qayerdadir oldinda joylashgan. Endi shuni qayd qilaylikki, (5)dagi oxirgi qavs bitta ham ishora o'zgarishga ega emas edi, xuddi shu vaqtda (6) dagi qavs ishora o'zgarishlarga ega, shu bilan birga ular toq sonda; buning uchun $f(x)$ va $(x - c)f(x)$ ko'phadlarning oxirgi noldan farqli koeffitsientlari, ya'ni $(-1)^s b_{s+1}$ va $(-1)^{s+1} b_{s+1}c$ lar har xil ishoraga ega ekanligini e'tiborga olish kifoya. Shunday qilib, $f(x)$ dan $(x - c)f(x)$ ga o'tishda, koeffitsientlar sistemasidagi ishora o'zgarishlarning umumiy soni albatta ortadi, shu bilan birga toq songa ortadi (bir nechta qo'shiluvchining yig'indisi, agar ulardan bitasi toq qolganlari esa juft bo'lsa, albatta toq bo'ladi!).

Lemma isbotlandi.

Dekart teoremasini isbotlash uchun $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ orqali $f(x)$ ko'phadning barcha musbat ildizlarini belgilaymiz. Shunday qilib,

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k) \varphi(x),$$

bu yerda endi $\varphi(x)$ - haqiqiy koeffitsientli, musbat haqiqiy ildizga ega bo'lmagan ko'phad. Bundan $\varphi(x)$ ko'phadning birinchi va oxirgi noldan farqli koeffitsientlari bir xil ishoraga ega ekanligi, ya'ni bu ko'phadning koeffitsientlari sistemasi juft sondagi ishora o'zgarishlarga ega ekanligi kelib chiqadi. Endi yuqorida isbotlangan lemmani ushbu

$$\varphi(x), (x - \alpha_1) \varphi(x), (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \varphi(x), \dots, f(x)$$

ko'phadlarga ketma – ket qo'llab, koeffitsientlar sistemasidagi ishora o'zgarishlar sonini har gal toq songa, ya'ni bir plyus juft songa ortishini ko'ramiz va shunga ko'ra $f(x)$ ko'phad koeffitsientlari sistemasidagi ishora o'zgarishlarining soni k dan juft songa katta.

Dekart va Byudan – Fur'e teoremlarini ushbu

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$$

ko'phadga qo'llaylik. Koeffitsientlar sistemasidagi ishora o'zgarishlar soni uchga teng va shuning uchun ham Dekart teoremasiga asosan, $h(x)$ uchta yoki bitta musbat ildizga ega bo'lishi mumkin. Boshqa tomondan, $h(x)$ nolga teng bo'lgan koeffitsientlarga ega emas va koeffitsientlar sistemasida ikkita ishora saqlanishlar bo'lgani uchun $h(x)$ yoki ikkita manfiy ildizga, yoki bo'lmasa bitta ham manfiy ildizga ega emas. Shunday qilib, ikki soni berilgan ko'phad manfiy ildizlarining aniq soni ekanligini hosil qilamiz.

Musbat ildizlarning sonini aniq hisoblash uchun Byudan – Fur'e teoremasidan foydalanamiz, shu maqsadda uni $(1, \infty)$ oralig'iga qo'llaymiz, chunki 1 soni $h(x)$ ko'phad musbat ildizlarining quyi chegarasi ekanligi ko'rsatish mumkin. $h(x)$ ning hosilalari ketma – ketligi oldingi mavzumizda keltirilgan edi. Ularning $x = 1$ va $x = \infty$ lardagi ishoralarini topaylik:

$h(x)$	$h'(x)$	$h''(x)$	$h'''(x)$	$h^{IV}(x)$	$h^V(x)$	Ishora
						o'zgarishlar

							soni
$x = 1$	-	+	+	+	+	+	1
$x = \infty$	+	+	+	+	+	+	0

Bundan hosilalar sistemasi x ning 1 dan ∞ ga o'tishida bitta ishora o'zgarish yo'qotishi kelib chiqadi va shunga ko'ra $h(x)$ faqat bitta musbat ildizga ega bo'ladi.

Bu misolga asoslanib shuni qayd qilamizki, umuman ko'phadning haqiqiy ildizlari sonini izlashni uning grafigini yasashdan va Dekart hamda Byudan – Fur'e teoremlarini qo'llashdan boshlash kerak, hech iloji bo'lmagan taqdirdagina Shturm sistemasini tuzishga o'tish kerak.

Ko'phadning barcha ildizlari haqiqiy ekanligi avvaldan ma'lum bo'lgan xususiy holda Dekart teoremlarini birmuncha aniqlashtirish uchun imkon tug'iladi. Xuddi shunday hol, masalan, simmetrik matritsaning xarakteristik ko'phadi uchun ro'y beradi. Chunonchi:

Agar $f(x)$ ko'phadning barcha ildizlari haqiqiy bo'lib, ozod had noldan farqli bo'lsa, u holda bu ko'phad musbat ildizlarining soni k_1 uning koeffitsientlari sistemasidagi ishora o'zgarishlar soni s_1 ga teng, manfiy ildizlari soni k_2 esa $f(-x)$ ko'phadning koeffitsientlari sistemasidagi ishora o'zgarishlar soni s_2 ga teng bo'ladi.

Haqiqatan ham, farazimizga asosan

$$k_1 + k_2 = n \quad (7)$$

bu yerda n son $f(x)$ ko'phadning darajasi va Dekart teoremasiga ko'ra

$$k_1 \leq s_1, \quad k_2 \leq s_2 \quad (8)$$

$$s_1 + s_2 = n \quad (9)$$

ekanligini isbotlaylik. Isbotni n bo'yicha induksiya orqali olib boramiz. $n = 1$ uchun $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 \neq 0$ bo'lgani sababli,

$$f(x) = a_0x + a_1, \quad f(-x) = -a_0x + a_1$$

ko'phadlarning faqat bittasidagina ishora o'zgarish mavjud bo'ladi, ya'ni bu hol

uchun $s_1 + s_2 = 1$. (9) formula darajalari n dan kichik bo'lgan ko'phadlar uchun isbotlangan deb faraz qilaylik. Agar

$$f(x) = a_0 x^n + a_{n-1} x^l + \dots + a_n$$

(bu yerda $l \leq n-1$, $a_{n-1} \neq 0$) bo'lsa, u holda

$$g(x) = a_{n-1} x^l + \dots + a_n$$

belgilash kiritmiz. U vaqtda

$$f(x) = a_0 x^n + g(x),$$

$$f(-x) = (-1)^n a_0 x^n + g(-x)$$

bo'ladi. Agar s'_1 va s'_2 mos ravishda $g(x)$ va $g(-x)$ ko'phadlarning koeffitsientlari sistemasidagi ishora o'zgarishlar soni bo'lsa, u holda induktiv farazimizga asosan ($l \geq 1$ ekanligi ravshan).

$$s'_1 + s'_2 \leq l.$$

Agar $l = n-1$ bo'lsa, u holda birinchi o'rindagi, ya'ni $f(x)$ uchun a_0 va $a_1 = a_{n-1}$ lar orasidagi ishora o'zgarishi $f(x)$ va $f(-x)$ ko'phadlarning faqat bittasidagina mavjud bo'ladi, shunga ko'ra

$$s_1 + s_2 = s'_1 + s'_2 + 1 \leq l + 1 = n.$$

Agar $l \leq n-2$ bo'lsa, $f(x)$ va $f(-x)$ ko'phadlarning har qaysisida ham birinchi o'rinda ishora o'zgarishlar bo'lishi mumkin, lekin bu holda ham

$$s_1 + s_2 \leq s'_1 + s'_2 + 2 \leq l + 2 \leq (n-2) + 2 = n$$

bo'ladi.

(7), (8) va (9) larni solishtirib,

$$k_1 = s_1, \quad k_2 = s_2$$

ekanligini hosil qilamiz, shuni isbotlash talab qilingan edi.

X u l o s a .

Tabiatda, fan va texnikada uchraydigan ko`pgina masalalar ko`phad ildizlarini hisoblashga, haqiqiy ildizlar sonini aniqlashga hamda ularni ajratishga keladi. Shu sababli ham “Ko`phadlarning haqiqiy ildizlarini ajratish” mavzusidagi ushbu ish muhim ahamiyatga ega.

Ushbu ishni bajarish davomida quyidagi xulosalarga kelindi:

1. Ko`phadning haqiqiy ildizlar sonini Shturm usulidan foydalanib hisoblash mumkin.
2. Har qanday karrali ildizga ega bo`lmagan haqiqiy koeffisientli ko`phad Shurm sistemasiga ega bo`ladi.
3. Ko`phadning haqiqiy ildizlari sonini aniqlashda uni Shurm sistemasini tuzishda hisoblashlar juda ko`pligi sababli, unga nisbatan ancha soda bo`lgan Byudan-Fur`e va Dekart teoremasidan foyhalanish mumkin.

F o y d a l a n i l g a n a d b i y o t l a r r o`y x a t i.

1. А.Г.Курош. Олий алгебра курси Т.Ўқитувчи. 1976й. 494б.
2. Ж.Ҳожиёв, А.С.Файнлейб. Алгебра ва сонлар назарияси курси. Т.Ўзбекистон. 2001 й. 304б.
3. Л.Б.Шнеперман. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. I и II часть. Минск.»Выш.шк.» 1987 г. 272с.
4. А.И.Кострикин. Введение в алгебру. М.Наука. 1977г. 496с.
5. Ван дер Варден .Алгебра. М.Наука. 1976г. 648с.
6. Д.К.Фаддеев и И.С.Соминский Сборник задач по высшей алгебре. М.Наука. 1974г. 304с.
7. <http://www.mcme.ru>, <http://lib.mexmat.ru>.