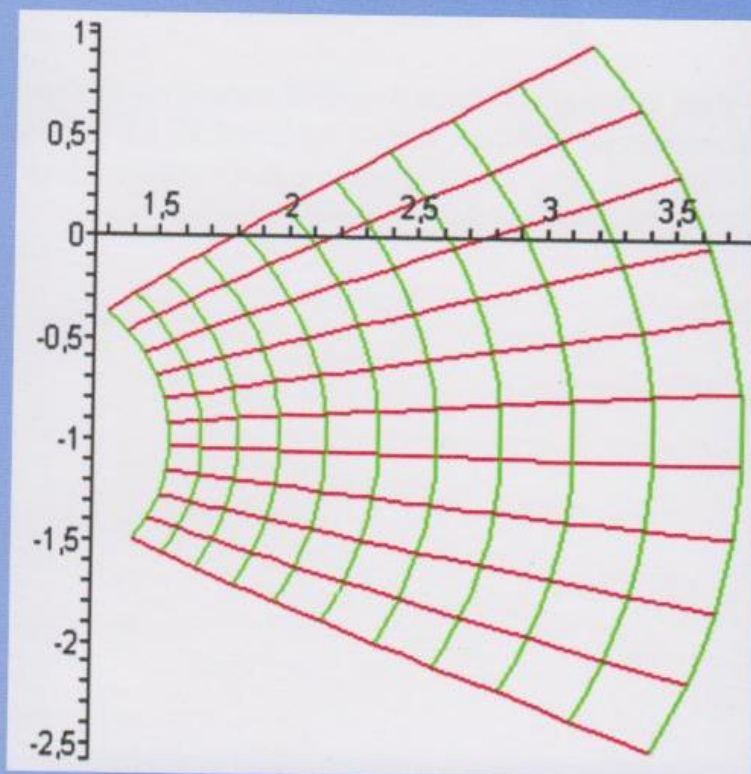


M.Vaisova, R.Sharipov

KOMPLEKS ANALIZ MASALALARINI YECHISHDA MAPLE DASTURIDAN FOYDALANISH

```
> conformal(sin(z)-I, z=1+I..2+2*I);
```



**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI**

**AL-XORAZMIY NOMLI URGANCH DAVLAT
UNIVERSITETI**

M.Vaisova, R.Sharipov

**KOMPLEKS ANALIZ MASALALARINI
YECHISHDA MAPLE DASTURIDAN
FOYDALANISH**
(uslubiy qo‘llanma)

*Ushbu uslubiy qo‘llanma Urganch davlat universiteti ilmiy-uslubiy
kengashining 2015-yil 24 iyundagi 8-sonli yig‘ilishi bayonnomasi qaror-
riga asosan nashr etishga tavsiya etilgan.*

Urganch – 2015

UDK: 004.4:51(072)

KBK:

M.Vaisova, R.Sharipov. Kompleks analiz masalalarini yechishda Maple dasturidan foydalanish. Uslubiy qo'llanma. Mas'ul muharrir **Ju-manazar Xo'jamov.** O'zR Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, al-Xo-razmiy nomli Urganch davlat universiteti. Urganch, Urganch davlat uni-versiteti noshirlik bo'limi, 2015. 52 bet.

Ushbu uslubiy qo'llanmada kompleks o'zgaruvchili funksiyalar-ning oddiy xossalari o'rganishda Maple matematik paketning qo'llani-lish uslub va usullari berilgan. Ko'p sondagi misollar analitik usulda va Maple amaliy dasturida yechib ko'rsatilgan hamda mustaqil yechish uchun topshiriqlar berilgan.

Mazkur uslubiy qo'llanmadan bu fanga qiziquvchi oliy o'quv yurti talabalar, magistrantlar, mustaqil tadqiqotchilar, ilmiy xodimlar foydala-nishlari mumkin.

Mas'ul muharrir

J.Xo'jamov, dots.

Taqrizchilar:

A.Atamuratov, dots.,

A.Reyimberganov, TATU Urganch filiali
"axborot texnologiyalari" kafedrasini mudiri,
dotsent.

ISBN: 978-9943-4517-4-2

© **UrDU noshirlik bo'limi, 2015.**

© **M.Vaisova, R.Sharipov.** Kompleks analiz masalalarini yechishda Maple dasturidan foydalanish. Uslubiy qo'llanma.

KIRISH

Ta'lim jarayonini tashkil etish, uni yetarli materiallar bilan ta'minlash, o'quv jihozlaridan maqsadli foydalanish, o'quvchi fikrini darsga doimiy jalb etish o'qituvchidan katta mahorat, bilim va ko'nikma talab etadi.

Keyingi yillarda matematik hamda boshqa murakkab masalalarni hal qilishda turli hil dasturlarning o'rni juda muhim ahamiyat kasb etmoqda. Shulardan biri Maple simvolli matematik dasturlash tilidir.

Maple – simvolli va sonli hisoblarni tez va samarali bajarish uchun mo'ljallangan hamda elektron hujjatlarni tayyorlash va grafik vizuallashtirish vositalariga ega bo'lgan kompyuter matematikasining yetakchi tizimlaridan biridir.

Ushbu qo'llanmaning maqsadi talabalarning mustaqil o'zlashtirishini tashkil etish, ularni matematik fanlarga oid masalalarni matematik paket Maple dasturi yordamida bajarish usullarini o'rgatish, Maple dasturi imkoniyatlarini ochib berish, darslarni o'tishda kompyuter texnologiyalaridan foydalanishni o'rgatish, shu bilan birga, talabalarning bu sohada qiziqishlarini oshirish, yechilgan misollarni Maple dasturlari yordamida tekshirish va o'z ustlarida mustaqil ishlashni o'rgatishdir.

Ushbu uslubiy qo'llanmada kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi masalalarini yechish uchun Maple matematik paketning qo'llanilish imkoniyatlari qaralgan. Kompleks sonlar ustida amallar, kompleks sonlarni kompleks tekislikda tasvirlash, kompleks sonlar ketma-ketligi limitini hisoblash, Maple dasturining grafik imkoniyatlaridan foydalangan holda, kompleks tekislikdagi sohalarni tasvirlash, kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning qiymatini hisoblash va bu funksiyalar yordamida sohalarni akslantirishga doir misollar yechib ko'rsatilgan.

Bu misollardan matematik masalalarni yechishda kompyuter matematikasining zamonaviy imkoniyatlarini qo'llash katta samara berishini ko'rish mumkin.

1. KOMPLEKS SONLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

1.1. Kompleks son tushunchasi

1-ta’rif. z kompleks son deb $z = x + iy$ ko‘rinishdagi ifodaga aytiladi, bunda x va y lar haqiqiy sonlar, i esa ($i^2 = -1$) mavhum birlikdir.

Odatda, x haqiqiy songa z kompleks sonning *haqiqiy qismi*, y haqiqiy songa esa z kompleks sonning *mavhum qismi* deyiladi va $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ kabi belgilanadi. Kompleks sonlar to‘plami $\mathbb{C}$ bilan belgilanadi.

2-ta’rif. Agar $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$ bo‘lsa, y holda $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks son $z_1 = x_1 + iy_1$ ga *qo‘shma kompleks son* deyiladi va $\bar{z}_1$ kabi belgilanadi.

Demak, $z = x + iy$ bo‘lsa, $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ bo‘ladi.

3-ta’rif. Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar berilgan bo‘lib, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ bo‘lsa, unda z_1 va z_2 kompleks sonlar *bir-biriga teng* deyiladi.

Kompleks sonlar uchun “katta” va “kichik” tushunchalari mavjud emas.

Aytaylik, ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar berilgan bo‘lsin. Ular ustidagi arifmetik amallarni aniqlaymiz.

4-ta’rif. Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlarning yig‘indisi deb $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ kompleks songa aytiladi.

5-ta’rif. Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlarning ko‘paytmasi deb $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ kompleks songa aytiladi.

6-ta’rif. Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlarning bo‘linmasi deb $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ kompleks songa aytiladi.

7-ta’rif. Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1$ va $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks

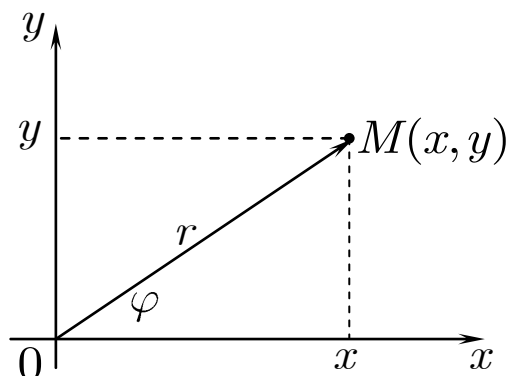
sonlarning ayirmasi deb $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ kompleks songa aytiladi.

8-ta’rif. z kompleks sonning n -darajasi deb $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_n$ ga ay-tiladi.

9-ta’rif. z kompleks sonning n -darajali ildizi $\sqrt[n]{z}$ deb, $w^n = z$ ni qanoatlantiruvchi w kompleks songa aytiladi.

1.2. Kompleks sonning geometrik tasviri

Tekislikda, Oxy Dekart koordinatalar sistemasida $z = x + iy$ kom-pleks son koordinatalari x va y bo‘lgan $M(x, y)$ nuqtani ifodalaydi (1-chizma).



1-chizma.

Shu $M(x, y)$ nuqta $z = x + iy$ kompleks sonning *geometrik tasviri deyiladi*. Demak, har bir kompleks son tekislikda bitta nuqtani ifodalay-di. Aksincha, tekislikdagi har bir nuqta haqiqiy qismi shu nuqtaning absissasiga, mavhum qismi esa ordinatasiga teng bo‘lgan kompleks sonni ifodalaydi.

Shunday qilib, tekislikning barcha nuqtalari to‘plami bilan barcha kompleks sonlar to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Bunda barcha haqiqiy sonlarning geometrik tasviri absissalar o‘qini, barcha sof mavhum sonlarning geometrik tasviri $((0,0)$ nuqtadan farqli) esa ordinatalar o‘qini ifodalaydi. Shuning uchun absissalar o‘qini *haqiqiy o‘q*, ordinatalar o‘qini esa *mavhum o‘q* deyiladi. Oxy tekislikni esa *kompleks tekislik* deyiladi va $\mathbb{C}$ harfi bilan belgilanadi.

1-chizmadagi $\overrightarrow{OM}$ vektorga $M(x, y)$ nuqtaning *radius vektori* deyilib, bu vektorning uzunligi r ga $z = x + iy$ kompleks sonning

moduli de-yiladi va $|z|$ kabi belgilanadi. $\overrightarrow{OM}$ vektor bilan Ox haqiqiy o'qning musbat yo'nalishi orasidagi φ burchak z kompleks sonning argumenti deyiladi va $\varphi = \arg z$ kabi belgilanadi.

Agar $z = x + iy$ kompleks son berilgan bo'lsa, uning moduli va argumenti quyidagi tengliklar yordamida hisoblanadi:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{agar } x \geq 0, y \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \\ \arctg \frac{y}{x} + 2\pi, & \text{agar } x \geq 0, y < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

1-chizmadan

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

ekanligini hosil qilamiz va bundan

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu ifoda z kompleks sonning trigonometrik ifodasi (shakli) deyiladi.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

tenglik Eyler formulasi deyiladi. Bundan

$$z = re^{i\varphi}$$

kompleks sonning ko'rsatkichli ko'rinishi kelib chiqadi.

1-teorema. Ikkita z_1 va z_2 kompleks son ko'paytmasining moduli shu kompleks sonlar modullarining ko'paytmasiga teng.

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Ikkita kompleks son ko'paytmasining argumenti shu kompleks sonlar argumentlarining yig'indisiga teng.

2-teorema. Ushbu

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \arg z \quad (n \in \mathbb{N})$$

tengliklar o'rinalidir.

3-teorema. Ikkita kompleks son nisbati $\frac{z_1}{z_2}$ uchun

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

tengliklar o‘rinli.

Izoh. Kompleks sonlar argumentlariga doir keltirilgan tengliklarda kompleks son argumenti shu songa mos radius vektorning tekislikdagi holati ma’nosida tushuniladi.

Yuqoridagilardan z^n uchun

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Muavr formulasi kelib chiqadi.

1.3. Maple dasturida masalalarni yechish

Maple dasturida i mavhum birlik **I** simvoli bilan yoziladi, shuning uchun $x + iy$ kompleks son dasturga **x+y*I** ko‘rinishida kiritiladi.

Masalan,

> z[1]=-4-3*I; z[2]=-1+2*I;

$$z_1 = -4 - 3I$$

$$z_2 = -1 + 2I$$

Kompleks son (kompleks o‘zgaruvchili funksiya) haqiqiy $\operatorname{Re} z$ va mavhum $\operatorname{Im}(z)$ qismlardan tashkil topgan, shunga ko‘ra,

> Rez[1]:=Re(z[1]); Imz[1]:=Im(z[1]);

$$\operatorname{Re} z_1 := -4$$

$$\operatorname{Im} z_1 := -3$$

Kompleks sonning qo‘shmasi quyidagicha kiritiladi conjugate (z):

> conjugate (2+3*I);

$$2 - 3I$$

Kompleks sonlar ustida arifmetik amallarni bajarish quyidagi misollarda berilgan:

1. Kompleks sonlarni qo‘shish va ayirish

> (2+3*I)+(4+2*I);

$$6 + 5I$$

```
> (2+3*I)-(4+2*I);
```

$-2 + I$

2. Kompleks sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish

```
> (2+3*I)*(4+2*I);
```

$2 + 16 I$

```
> (2+3*I)/(4+2*I);
```

$\frac{7}{10} + \frac{2}{5} I$

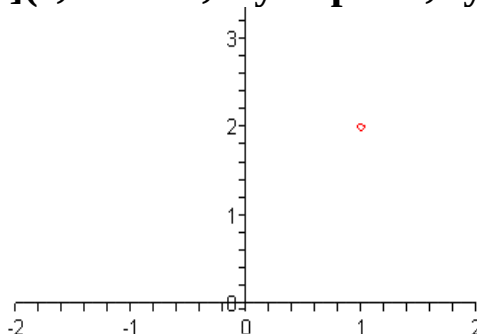
Maple dasturida kompleks sonni kompleks tekislikda tasvirlash uchun **plots** paketining **complexplot** funksiyasidan foydalaniladi. Buning uchun kompleks sonni kvadratik qavs ichida yozish

```
> z:=[1+2*I];
```

$z := [1 + 2 I]$

va keyin **complexplot[plots]** funksiyasi yordamida kompleks tekislikda nuqtani yasash zarur (2-chizma).

```
> complexplot[plots](z, x=-2..2, style=point, symbolsize=14);
```

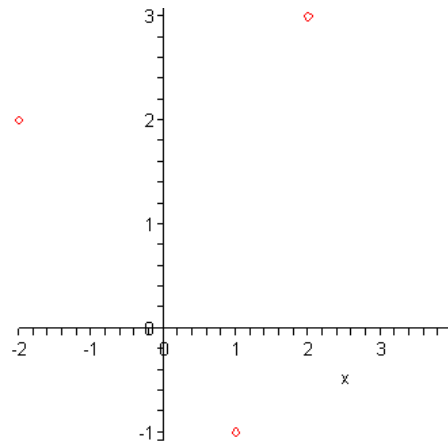


Bir vaqtning o‘zida bir nechta kompleks sonni ham tasvirlash mumkin.

```
> z1:=[2+3*I,-2+2*I,1-I];
```

$z1 := [2 + 3 I, -2 + 2 I, 1 - I]$

```
> complexplot(z1,x=-2..4,style=point, symbolsize=14);
```



Kompleks sonning moduli **abs(z)** funksiyasi yordamida aniqlanadi, masalan,

> abs(sqrt(3)+2*I);

$$\sqrt{7}$$

Kompleks sonning argumenti **argument(z)** funksiyasi yordamida aniqlanadi, masalan,

> argument(sqrt(3)+I);

$$\frac{1}{6}\pi.$$

Eslatma. Maple dasturida kompleks sonning argumentining qiymati $(-\pi, \pi)$ oraliqda olinadi.

Endi kompleks sonlar ustida amallarni bajarishga doir bir necha misollarni analitik va Maple dasturida yechilish uslublarini ko‘rib chiqamiz.

1-misol. $\frac{(1+i)(1-2i)}{1-i}$ ni hisoblang.

Yechish:

$$\frac{(1+i)(1-2i)}{1-i} = \frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(3-i)(1+i)}{1^2 - i^2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i.$$

Maple dasturida yechilishi:

> (1+I)*(1-2*I)/(1-I);

$$2 + I$$

Javob: $\frac{(1+i)(1-2i)}{1-i} = 2+i$

2-misol. $\frac{1+i}{1-i}$ kompleks sonning trigonometrik ko‘rinishini

toping.

Yechish: Oldin $\frac{1+i}{1-i}$ kompleks sonning haqiqiy va mavhum qism-larini topamiz:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i+i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

$x = \operatorname{Re} z = 0$, $y = \operatorname{Im} z = 1$, u holda kompleks son mavhum

o‘q-ning musbat yo‘nalishida yotadi va $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ dan

$\arg z = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ ga ega bo‘lamiz. Moduli

$r = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ ga teng.

Binobarin $i = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

Maple dasturida yechilishi:

`> abs((1+I)/(1-I))*('cos'(argument((1+I)/(1-I)))+ I*'sin'(argument
((1+I)/(1-I))));`

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + I \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$$

Javob: $\frac{1+i}{1-i} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

3-misol. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ kompleks sonning trigonometrik formasini toping.

Yechish: $x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $y = \operatorname{Im} z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, bu holda kompleks

son to‘rtinchi chorakda yotadi va $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi$ dan

$$\varphi = \arctg(-\sqrt{3}) + 2\pi = -\arctg\sqrt{3} + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

ni hosil qilamiz. Kompleks sonning moduli

$$r = \left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

ga teng. Demak, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$.

Maple dasturida yechilishi:

> abs(1/2-(sqrt(3)/2)*I)*('cos'(argument(1/2-(sqrt(3)/2)*I))
+I*'sin'(argument(1/2-(sqrt(3)/2)*I)));

$$\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + I \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)$$

Javob: $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

4-misol. $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ ni hisoblang.

Yechish: $-2 + 2i$ kompleks sonning moduli

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

va argumenti

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} + \pi = \arctg \frac{2}{-2} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

ga teng. Muavr formulasiga ko'ra

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

U holda,

$$k = 0 \text{ da } w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i,$$

$k = 1$ da

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot i$$

$k = 2$ da

$$w_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot i.$$

Maple dasturida yechilishi:

> solve(z^3=-2+2*I);

$$1 + I, \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}I, \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}I \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}I$$

$$\text{Javob: } w_1 = 1 + i, \quad w_2 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot i,$$

$$w_3 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot i$$

5-misol. $1 + i\sqrt{3}$ ni hisoblang.

Yechish: $1 + i\sqrt{3}$ kompleks sonning moduli 2 ga, argumenti $\frac{\pi}{3}$ ga

teng. Muavr formulasiga ko'ra $1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$1 + i\sqrt{3}^3 = 2^3 \left(\cos 3 \cdot \frac{\pi}{3} + i \sin 3 \cdot \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$= 8 \cos \pi + i \sin \pi = 8(-1 + i \cdot 0) = -8$$

Maple dasturida yechilishi:

> evalc((1+sqrt(3)*I)^3);

-8

1.4. Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Ifodani hisoblang.

a) $\frac{1+2i}{1-2i} - \frac{1}{2i}$; b) $\frac{2-3i}{(1+2i)(3i)}$.

2. Kompleks sonlarning trigonometrik shaklini toping.

a) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{1-i}{1+i}$.

3. Hisoblang.

a) $\sqrt{3+4i}$; b) $\sqrt[6]{-8}$.

4. Hisoblang.

a) $1+i^{10}$; b) $-4+3i^3$.

Javoblar: 1. a) $-\frac{3}{5} + \frac{13}{10}i$, b) $-\frac{7}{15} + \frac{4}{15}i$.

2. a) $\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$, b) $\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.

3. a) $\pm(2+i)$, b) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$; $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$; $\pm \sqrt{2}i$.

4. a) $32i$, b) $125 \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} + 3 \arctg \frac{3}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + 3 \arctg \frac{3}{4} \right) \right)$.

2. KOMPLEKS TEKISLIKDA CHIZIQ VA SOHALAR

2.1. Kompleks tekislikda chiziq tushunchasi

Egri chiziqni tekislikda nuqtaning uzluksiz harakati natijasida qoldirgan izi deb qarash mumkin. Harakatdagi nuqtaning koordinatalarini x va y deyilsa, ravshanki ular biror t o'zgaruvchining uzluksiz funksiyalari bo'ladi:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

ayni paytda, (x, y) juftlik kompleks sonni ifodalagani sababli, uni $z = x + iy$ ko'rinishda yozish mumkin. Natijada

$$z = x + iy = x(t) + iy(t) = z(t) \text{ bo'ladi.}$$

Demak, $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) funksiya $[\alpha, \beta]$ segmentni kompleks tekislik nuqtalariga akslantiradi va bu nuqtalar to'plami esa kompleks tekislikda egri chiziqni ifodalay ekan. Bunda $z_0 = z(\alpha)$ egri chiziqning boshlang'ich nuqtasi, $z_1 = z(\beta)$ esa egri chiziqning oxirgi nuqtasi bo'ladi.

Agar $z(\alpha) = z(\beta)$ bo'lsa, bunday egri chiziq **yopiq** deyiladi.

Agar $z = z(t)$ egri chiziqda t o'zgaruvchining ikkita turli t_1 va t_2 ($t_1 \neq t_2$) qiymatlariga mos keladigan $z(t_1)$ va $z(t_2)$ nuqtalar ham turlicha bo'lsa, u holda egri chiziq **Jordan chizig'i** deyiladi.

Agar $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar $[a, b]$ segmentda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib, $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ shartni qanoatlantirsa, $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ egri chiziq **silliqlik egri chiziq** deyiladi.

2.2. Kompleks tekislikda soha tushunchasi

Biror $z_0 \in \mathbb{C}$ nuqta va $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Ushbu $U(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ to'plamga $z_0 \in \mathbb{C}$ nuqtaning ε – **atrofi** deyiladi.

Shunga o'xshash $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ nuqtaning ε –atrofi tushunchasi kiritiladi:

$$\bar{U}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \bar{\mathbb{C}} : \rho(z, z_0) < \varepsilon\}$$

Ushbu

$$z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

$$z \in \bar{\mathbb{C}} : 0 < \rho(z, z_0) < \varepsilon$$

to'plam $z_0 \in \mathbb{C}$ ($z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$) nuqtaning ***o'yilgan atrofi*** deyiladi.

Faraz qilaylik, $\mathbb{C}$ da biror D to'plam berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar $z_0 \in D$ nuqta o'zining biror atrofi bilan shu D to'plamga tegishli bo'lsa, z_0 nuqta D to'plamning ichki nuqtasi deyiladi.

3-ta'rif. Barcha nuqtalari ichki nuqtalardan iborat to'plam ochiq to'plam deyiladi.

Agar $z_0 \in \mathbb{C}$ ($z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$) nuqtaning ixtiyoriy o'yilgan atrofida $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \bar{\mathbb{C}}$) to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, z_0 nuqta D to'plamning ***limit nuqtasi*** deyiladi.

4-ta'rif. Agar D to'plamning barcha limit nuqtalari shu D to'plamga tegishli bo'lsa, D to'plam ***yopiq to'plam*** deyiladi va $\bar{D}$ kabi belgilanadi.

5-ta'rif. $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \bar{\mathbb{C}}$) to'plam berilgan bo'lsin. Agar $D_1 \cup D_2 = D$, $\bar{D}_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cap \bar{D}_2 = \emptyset$ shartlarni qanoatlantiruvchi, bo'sh bo'lmagan D_1 va D_2 to'plamlar mavjud bo'lmasa, D to'plam ***bog'lamlilik to'plam*** deyiladi.

6-ta'rif. Agar $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \bar{\mathbb{C}}$) to'plamning ixtiyoriy ikkita z_1 va z_2 nuqtalarini D to'plamda to'liq yotuvchi chiziq bilan tutashtirish mumkin bo'lsa, D to'plam ***chiziqli bog'lamlilik*** deyiladi.

7-ta'rif. Agar $D \subset \mathbb{C}$ to'plam ($D \subset \bar{\mathbb{C}}$) ham ochiq, ham bog'lamlilik bo'lsa, u ***soha*** deb ataladi.

Ochiq to'plamlar uchun bog'lamlilik tushunchasi bilan chiziqli bog'lamlilik tushunchasi ustma-ust tushadi.

8-ta'rif. $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \bar{\mathbb{C}}$) sohaning o'ziga tegishli bo'lmagan limit nuqtasi uning ***chegaraviy nuqtasi*** deyiladi. D sohaning barcha chegaraviy nuqtalari to'plamiga uning chegarasi deyiladi va ∂D ko'rinish-

da belgilanadi.

Agar D sohaning chegarasi bog‘lamli to‘plam bo‘lsa, D soha bir bog‘lamli deyiladi, aks holda u ko‘p bog‘lamli deyiladi.

2.3. Kompleks tekislikda to‘plamlarni tasvirlash

Bu masalaning katta qismi ham chiziqlarning ta’rifidan, ham Maple dasturining **conic** funksiyasidan foydalanib yechiladi, shuning uchun ixtiyoriy ikkinchi tartibli egri chiziqlar bilan yaratiladi, u holda quyidagi ko‘rinishdagi tenglamani aniqlaydigan chiziq bor:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Agar chiziqlarning chegarasi sohada yotsa, uni (qat’iy bo‘lmagan tengsizlik) tekis chiziq bilan tasvirlab bo‘ladi (**linestyle=1**), agar kirmasa (qat’iy tengsizlik) – **uzuk** chiziq bo‘ladi (**linestyle=3**).

Masalan $|z - z_0| = R$ aylanani geometrik tasvirlash uchun:

Shartga qarab topshiriqni kiritamiz:

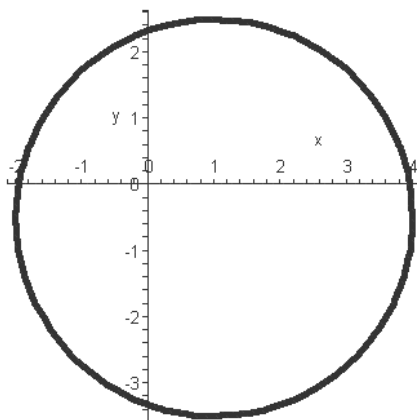
> z0:=1-0.5*I: R:=3: abs(z-z0)=R; z:=x+y*I:

$$|z + (-1. + 0.5 I)| = 3$$

Berilgan funksiyaning oshkormas tasvir uchun qayta nomlangan **implicitplot** funksiyasidan foydalanib berilgan munosabatning aksini topamiz.

> with(plots):

> implicitplot(abs(z-z0)=R, x=-5..5, y=-5..5, color=black, thickness=3);



Ko‘rib turganimizdek, aylana hosil bo‘ldi, endi uning tenglamasini

topamiz.

```
> evalc(abs(z-z0)=R); 1hs(%)^2=R^2;
```

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+0.5)^2} = 3$$

$$(x-1)^2 + (y+0.5)^2 = 9$$

Binobarin, $|z - z_0| = R$ markazi z_0 nuqtada, radiusi R bo'lgan aylana. Uning kanonik tenglamasi

$$(x - \operatorname{Re}(z_0))^2 + (y - \operatorname{Im}(z_0))^2 = R^2$$

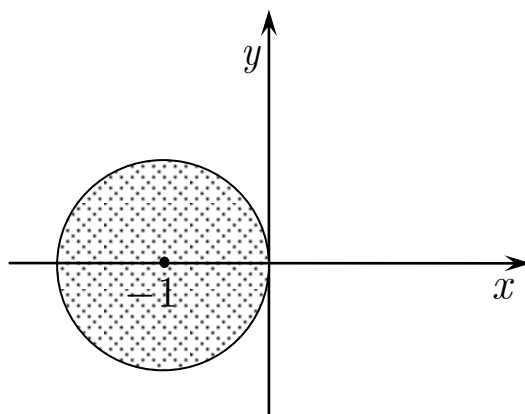
Endi bir necha misollarni analitik va Maple dasturida yechilish uslublarini ko'rib chiqamiz.

1-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating.

$$|z + 1| < 1.$$

Yechish: $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ekanligidan,

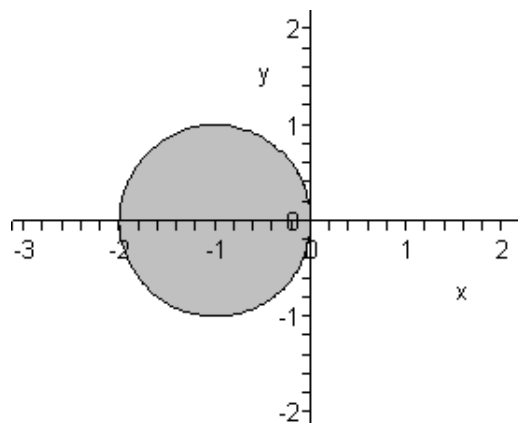
$|z + 1| = |x + 1 + iy| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$ bo'ladi, shuning uchun $|z + 1| < 1$ dan $\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} < 1$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan $(x + 1)^2 + y^2 < 1$ kelib chiqadi. Bu tengsizlik markazi $(-1; 0)$ nuqtada bo'lgan, radiusi 1 ga teng doiraning ichki qismini ifodalaydi.



2-chizma

Maple dasturida yechilishi:

```
> with(plots): implicitplot(abs((x+I*y)+1)=1,x=-3..3,y=-3..3,
filled=true, coloring=[grey,white], scaling=constrained,
numpoints=10000);
```



2-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating.

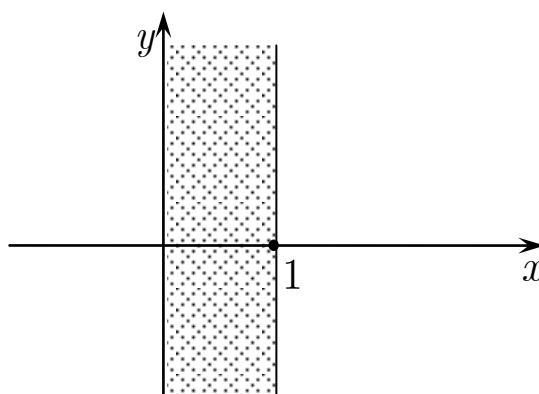
$$0 < \operatorname{Im}(iz) < 1.$$

Yechish:

$$z = x + iy$$

dan

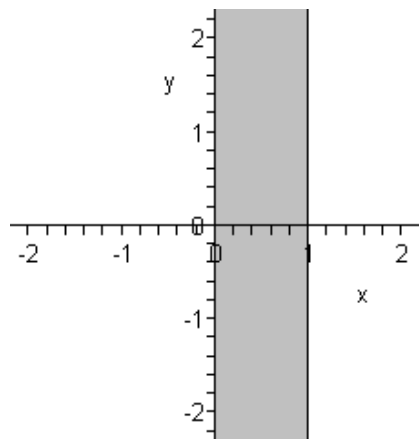
$\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Im}(i(x + iy)) = \operatorname{Im}(-y + ix) = x$ bo'lib, berilgan tengsizliklar $0 < x < 1$ tengsizliklarga keladi. $\mathbb{C}$ tekislikning haqiqiy qismi $0 < x < 1$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi z nuqtalar to'plami $x = 0$ va $x = 1$ gorizontal to'g'ri chiziqlar orasidagi tekislik qismidan iborat.



3-chizma

Maple dasturida yechilishi:

```
> with(plots):implicitplot(Im(I*(x+y*I))*(Im(I*(x+y*I))-1)=0,x=-3..3,y=-3..3,filled=true,coloring=[grey,white], scaling=constrained, numpoints=10000);
```



3-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating.

$$0 < \arg \frac{1-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}.$$

Yechish: $\arg \frac{1-z}{z+i} = \frac{\pi}{2}$ tenglamani va $\arg \frac{1-z}{z+i} = 0$

tenglamalarni qaraymiz:

$\arg \frac{1-z}{z+i} = \frac{\pi}{2}$ tenglamani $\operatorname{Re} \frac{1-z}{z+i} = 0$, $\operatorname{Im} \frac{1-z}{z+i} > 0$ bo'lgan

z nuqtalar qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \frac{i-z}{z+i} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - y^2 + 1}{x^2 + (1+y)^2} = 0 \\ \operatorname{Im} \frac{i-z}{z+i} > 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + (1+y)^2} > 0 \end{cases} \quad \text{bundan}$$

$x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$ kelib chiqadi.

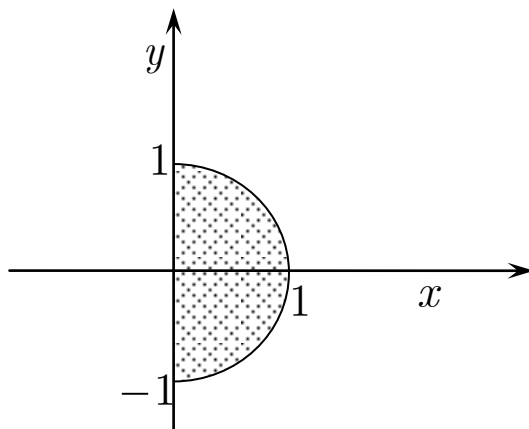
$\arg \frac{1-z}{z+i} = 0$ tenglamani $\operatorname{Re} \frac{1-z}{z+i} > 0$ va $\operatorname{Im} \frac{1-z}{z+i} = 0$ bo'lgan

z nuqtalar qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \frac{i-z}{z+i} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - y^2 + 1}{x^2 + (1+y)^2} > 0 \\ \operatorname{Im} \frac{i-z}{z+i} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + (1+y)^2} = 0 \end{cases} \quad \text{bundan}$$

$x^2 + y^2 < 1$, $x = 0$ kelib chiqadi. Bu $-1 < y < 1$ ni beradi.

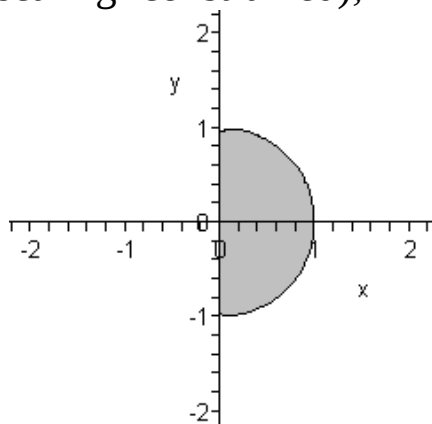
Binobarin, izlanayotgan soha tekislikning $\{x > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ -markazi koordinata boshida va radiusi 1 ga teng o'ng yarim doirani beradi:



4-chizma

Maple dasturida yechilishi:

```
with(plots): implicitplot((argument((1-(x+y*I))/(x+y*I+I)))
*(argument((1-(x+y*I))/(x+y*I+I))-Pi/2)=0,x=-3..3,y=-3..3,
view=[-3..3,-3..3], numpoints=100000, filled=true,
coloring=[grey,white], scaling=constrained);
```



4-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating.

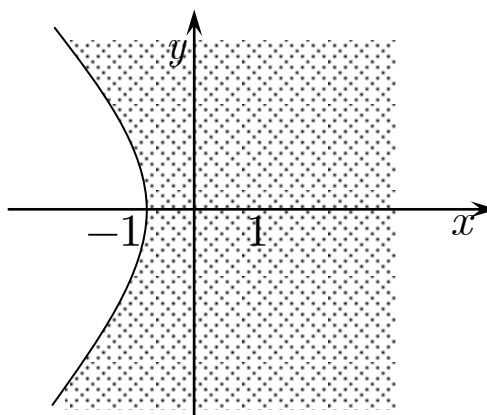
$$|z - 2| - |z + 2| < 2.$$

Yechish: Quyidagi $z \in \mathbb{C} : |z - 2| - |z + 2| = 2$ to'plam soha chegarasi bo'ladi. Agar $z = x + iy$ desak, unda

$$\begin{aligned}
|z-2| - |z+2| &= |x+iy-2| - |x+iy+2| = \\
&= |x-2+iy| - |x+2+iy| = \\
&= \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \text{ bo'lib,} \\
\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} &= 2 \text{ tenglamaga kelimiz.}
\end{aligned}$$

Bu tenglamani yechib, $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, $x < -\frac{1}{2}$ ni hosil qilamiz,

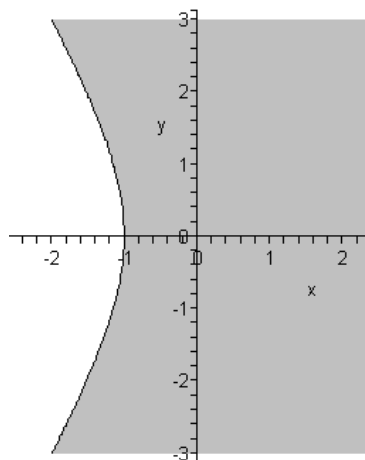
ya'ni bu $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ giperbolaning chap shoxchasi. Izlanayotgan soha esa bu shoxchadan o'ng tomonda joylashgan tekislik qismi bo'ladi.



5-chizma

Maple dasturida yechilishi:

```
> implicitplot(abs((x+I*y)-2)-abs((x+I*y)+2)=2,x=-3..3,y=-3..3,
filled=true, coloring=[grey,white], scaling=constrained,
numpoints=10000);
```



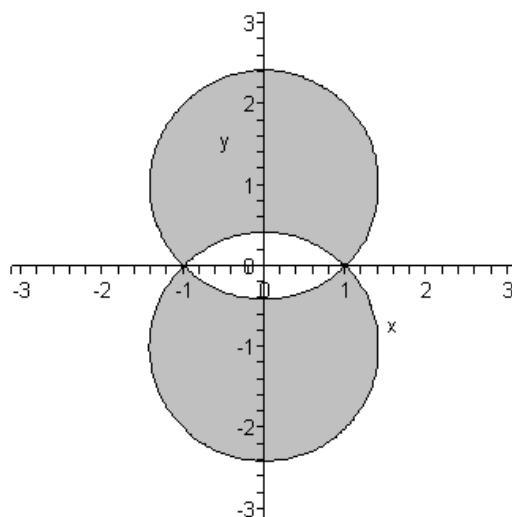
5-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi

nuqtalar to'plamini ko'rsating.

$$|2z| > |1 + z^2|.$$

Yechish: bu analitik usulda yechish juda murakkab tengsizlikka keladi, shuning uchun uni Maple dasturida oson tasvirlash mumkin:

> implicitplot(abs(2*(x+I*y))-abs(1+(x+I*y)^2)=0,x=-3..3,y=-3..3, filled=true, coloring=[white,gray], scaling=constrained, numpoints=10000);



6-misol. Kompleks tekislikda quyidagi shartni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating. $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Yechish: Agar $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ bo'lsa, u holda $|z - z_1| = |z - z_2|$ dan $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$ yoki

$$-2xx_1 + x_1^2 - 2yy_1 + y_1^2 = -2xx_2 + x_2^2 - 2yy_2 + y_2^2,$$

$$2y(y_2 - y_1) = 2x(x_1 - x_2) + (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2),$$

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \text{ ni hosil qilamiz.}$$

Bu $|z - z_1| = |z - z_2|$ ni qanoatlantiruvchi, burchak koeffitsiyenti

$$k = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \text{ va } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \text{ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqdan}$$

iborat.

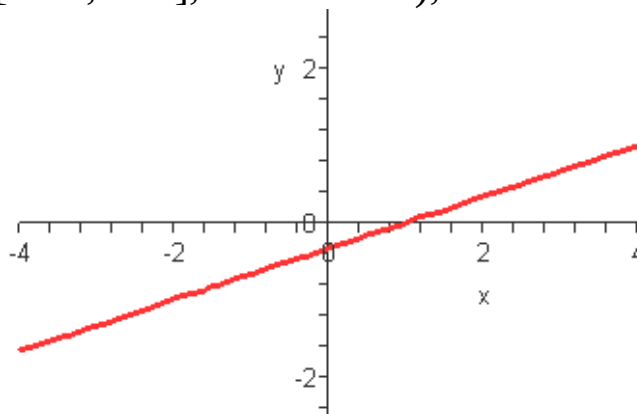
Masalani Maple dasturida yechish uchun biror kompleks sonni olamiz:

$$z_1 = 5 - 2i \text{ va } z_2 = 3 + 4i, \text{ unda } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = (4; 1)$$

nuqtadan o'tuvchi, burchak koeffisienti esa $k = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{5 - 3}{4 + 2} = \frac{1}{3}$

ga teng to'g'ri chiziq hosil bo'ladi.

```
> implicitplot(abs(x+I*y-5+2*I)=abs(x+I*y-3-4*I),x=-8..8,
y=-4..4,view=[-4..4,-4..4], thickness=2);
```



2.4. Mustaqil yechish uchun misollar

Kompleks tekislikda quyidagi munosabatlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini ko'rsating.

1. $|\operatorname{Re} z| < 1$

2. $|z + i| > 1$

3. $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$

4. $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0$

5. $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$

6. $|z + 1| + |z - 1| = 4$

7. $|1 + z| < |1 - z|$

8. $|z - 1| = \operatorname{Re} z$

Javoblar: 1. $-1 < x < 1$ yo'lak.

2. Markazi $z = -i$ nuqtada va radiusi 1 ga teng bo'lgan doiraning tashqarisi.

3. Haqiqiy o'qdan yuqorida joylashgan, uchi $z = 0$ nuqtada bo'lgan hamda $\arg z = 0$ va $\left\{ \arg z = \frac{\pi}{3} \right\}$ nurlar bilan chegaralangan cheksiz sektor.

4. Markazi $z = 0$ nuqtada va radiusi 1 ga teng bo'lgan aylana.

5. $y^2 = 1 - 2x$ parabola bilan chegaralangan va $z = 1$ nuqtani saqlovchi yarim tekislik.

6. $\left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \right\}$ - ellips.

7. $\{x < 0\}$ - yarim tekislik.

8. Mavhum o'q direktrisasi bo'lgan va fokusi $z = 1$ nuqtaga joylashgan parabola: $y^2 = 2x - 1$.

3. KOMPLEKS SONLAR KETMA-KETLIGI VA ULARNING LIMITI TUSHUNCHASI

3.1. Kompleks sonlar ketma-ketligi

Ta'rif. Har bir $n \in \mathbb{N}$ natural songa bitta z_n kompleks son mos qo'yil-sa, kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Kompleks sonlar ketma-ketligi qisqacha z_n orqali belgilanadi. $z_n = x_n + iy_n$ ekanligidan har bir kompleks sonlar ketma-ketligi ikkita haqiqiy sonlar ketma-ketligini aniqlaydi: x_n va y_n .

Teorema. $z_n = x_n + iy_n$ ketma-ketlik $\alpha = a + bi$ kompleks songa yaqinlashuvchi bo'lishi uchun x_n ketma-ketlik a soniga, y_n ketma-ketlik b soniga yaqinlashishi zarur va yetarli.

Bu teoremadan kompleks sonlar ketma-ketligi uchun haqiqiy sonlar ketma-ketligi uchun o'rinli bo'lgan barcha ketma-ketlik limiti xossalari bajarilishi kelib chiqadi, ya'ni

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (z'_n + z''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n + \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} cz_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} z_n;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (z'_n \cdot z''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z'_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n;$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z'_n}{z''_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} z''_n}, \text{ agar } \lim_{n \rightarrow \infty} z''_n \neq 0 \text{ bo'lsa.}$$

3.2. Kompleks sonlar ketma-ketligi limitini hisoblash

1-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + 1 + i + 1 - i \right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}i + 1 - i \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + 1 + i \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} + 1 \right) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} - 1 \right) = 1 - i; \end{aligned}$$

Maple dasturida yechilishi:

> Limit((1/(2*n))*(1+I)+1-i,n=infinity)=limit((1/(2*n))*(1+I)+1-i,n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I}{n} + (1 - I) \right) = 1 - I$$

Javob: $1 - i$.

2-misol. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + ni}{i - 2} \frac{1 - 3ni}{n^2 + 1}$ limitni hisoblang.

Yechish: limitning 4-xossasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + ni}{i - 2} \frac{1 - 3ni}{n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5ni + 3n^2}{i - 2} \frac{1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{5}{n}i + 3}{i - 2 + \frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} - \frac{5}{n}i + 3 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(i - 2 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{3}{i - 2} = \frac{3(i + 2)}{(i - 2)(i + 2)} = \frac{3(i + 2)}{-5} = -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i. \end{aligned}$$

Maple dasturida yechilishi:

> Limit(((2+n*I)*(1-3*n*I))/((I-2)*n^2+1),n=infinity)=
limit(((2+n*I)*(1-3*n*I))/((I-2)*n^2+1),n=infinity);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2 + In)(1 - 3In)}{(-2 + I)n^2 + 1} \right) = -\frac{6}{5} - \frac{3}{5}I$$

Javob: $-\frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$.

3.3. Mustaqil yechish uchun misollar

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} + i \frac{2n}{n-1} \right); \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}i + \frac{2}{n}(2-i) \right); \\ \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-i}{1+i} \frac{4+5ni}{n^2+1}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5+i}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

Javoblar: 1. a) $1 + 2i$; b) $1 - \frac{1}{2}i$; 2. a) $\frac{5}{2}(1+i)$; b) e^{5+i} .

4. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR

4.1. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, ularning limiti, uzluksizligi

1-ta'rif. Agar D sohadan olingan har bir $z = x + iy$ kompleks son-ga bir yoki bir necha $w = u + iv$ kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda *kompleks o'zgaruvchili funksiya* berilgan deyiladi.

2-ta'rif. Agar har bir z argumentga funksiyaning bitta qiymati mos kelsa, $w = f(z)$ kompleks o'zgaruvchili funksiya bir qiymatli deyiladi. Agar funksiyaning bir nechta qiymati mos keladigan z argument mavjud bo'lsa, u holda bunday funksiya ko'p qiymatli deyiladi.

3-ta'rif. Agar z argumentning turli qiymatlariga funksiyaning turli qiymatlari mos kelsa, $w = f(z)$ kompleks o'zgaruvchili funksiya bir

varaqli deyiladi. Agar z ning turli qiymatlariga funksiyaning bir xil qiymatlari mos kelsa, funksiya ko'p varaqli deyiladi.

$w = u + iv$ va $z = x + iy$ ligidan, $w = f(z)$ kompleks o'zgaruvchili funksiyaning berilishi ikkita $u = u(x, y)$ va $v = v(x, y)$ haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalarning berilganini bildiradi. Bundan $u = u(x, y)$ funk-siya $w = f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi, $v = v(x, y)$ funksiya esa *mavhum qismi* deyiladi.

D sohada $w = f(z)$ kompleks o'zgaruvchili funksiya berilgan va $z_0 \in D$ bo'lsin.

4-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ son topilib, $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in D$ lar uchun $|f(z) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $w = f(z)$ funksiya-ning $z \rightarrow z_0$ dagi limiti deyiladi.

Funksiya limiti qisqacha $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ kabi yoziladi. $A = \infty$ yoki $z_0 = \infty$ bo'lgan hollarda limitning ta'rifi huddi haqiqiy analizdagi kabi ta'riflanadi.

$w = f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ dagi limitining mavjudligi quyidagi ikki shartga teng kuchli:

1) $z_0 = x_0 + iy_0$ nuqtada funksiyaning haqiqiy va mavhum qismla-rining limitlari mavjud: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b$, bu

yerda $A = a + ib$;

2) $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |A|$ va $\lim_{z \rightarrow z_0} \arg f(z) = \arg A$ limitlar mavjud.

5-ta'rif. $w = f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ bo'lsa, oxirgi shart $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f(z_0) = 0$ shartga ekvivalent.

$w = f(z)$ funksiyaning uzluksizligi uning haqiqiy va mavhum qismlarining uzluksizligiga teng kuchli.

4.2. Kompleks o'zgaruvchili elementar funksiyalar

Ba'zi kompleks o'zgaruvchili elementar funksiyalarni ko'rib chiqamiz:

1) kompleks o'zgaruvchili chiziqli funksiya $w = az + b$, bu yerda $a, b \in \mathbb{C}$.

Xossalari: bir qiymatli, bir varaqli va uzluksiz. w ning qiymati z ni $\arg a$ burchakka burish va $|a|$ marta cho'zish va b birlik parallel ko'chirish bilan hosil qilinadi. Agar $a \neq 1$ bo'lsa, u holda $z_0 = \frac{b}{1-a}$ qo'zg'al-mas nuqta bo'ladi.

3) $w = z^n$ darajali funksiya.

Xossalari: uzluksiz, bir qiymatli, kompleks tekislikning $\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi sohalarida bir varaqli. w ning qiymati z ni $\arg z$ burchagini n marta kattalashtirish va uzunligini $|z|$ marta uzaytirish bilan hosil qilinadi.

4) $w = \sqrt{z}$ kvadrat ildiz funksiya.

Xossalari: uzluksiz, ikki qiymatli, bir varaqli. w ning bitta qiymati z dan $\arg z$ burchagini ikki marta kichraytirish va uzunligini $\sqrt{|z|}$ marta kichraytirishdan hosil qilinsa, ikkinchi qiymati birinchi qiymatining koordinatalar boshiga nisbatan simmetrigidan olinadi.

5) Kompleks o'zgaruvchili kasr chiziqli funksiya $w = \frac{az + b}{cz + d}$,
 $ad \neq cb, c \neq 0$.

Xossalari: $z \neq -\frac{d}{c}$ da uzluksiz, bir qiymatli, bir varaqli.

6) Kompleks o'zgaruvchili ko'rsatkichli funksiya $w = e^z$.

$$1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

kompleks sonlar qatori absolyut yaqinlashuvchi. Bu qatorning yig'indisini e^z orqali belgilaymiz va uni kompleks o'zgaruvchili ko'rsatkichli funksiya deb ataymiz:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

e^z uchun ko'rsatkichli funksiyaning asosiy xossasi o'rinli:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Kompleks o'zgaruvchili ko'rsatkichli funksiya $T = 2\pi i$ davrli davriy funksiyaning ifodalaydi.

7) Kompleks o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalar.

Kompleks o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalar quyidagi qatorlar yig'indisi sifatida ta'riflanadi:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Bu qatorlarning har biri absolyut yaqinlashuvchi ekanligidan, funksiya har bir kompleks son uchun aniqlanadi. Ko'rsatkichli va trigonometrik funksiyalar quyidagi formula orqali bog'langan:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Bu formulaga *Eyler formulasi* deyiladi. Undan quyidagi formula kelib chiqadi:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Bu formulalarni qo'shish va ayirish orqali yana ikkita formulani hosil qilamiz:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Bu formulalardan kompleks o'zgaruvchili trigonometrik funksiyalarning huddi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar kabi 2π davrga egaligi kelib chiqadi.

tgz va $ctgz$ funksiyalar ham haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar kabi aniqlanadi:

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Maple paketida $tgz, ctgz$ funksiyalar **tan(z), cot(z)** ko'rinishda yozi-ladi.

8) Giperbolik funksiyalar.

Kompleks o'zgaruvchili giperbolik funksiyalar quyidagi qatorlar yig'indisi sifatida ta'riflanadi:

$$shz = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$chz = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Bu qatorlarning har biri absolyut yaqinlashuvchi ekanligidan, funk-siya har bir kompleks son uchun aniqlanadi. Ko'rsatkichli funktsiyaning ta'rifidan

$$e^z = chz + shz, \quad e^{-z} = chz - shz,$$

$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

formulalar kelib chiqadi. Giperbolik funksiyalar trigonometrik funktsiya larning xossalriga o'xshash xossalarni qanoatlantiradi, masalan:

$$ch(z_1 + z_2) = chz_1 chz_2 + shz_1 shz_2, \quad ch^2 z - sh^2 z = 1.$$

Kompleks o'zgaruvchili giperbolik funksiyalarning davri $T = 2\pi ni$ ga teng. Kompleks o'zgaruvchili giperbolik funksiyalar va trigonometrik funksiyalar orasida quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$chiz = \cos z, \quad \cos iz = chz, \quad shiz = i \sin z, \quad \sin iz = ish z.$$

$$\text{Giperbolik } shz, \quad chz, \quad thz = \frac{shz}{chz}, \quad cthz = \frac{chz}{shz} \text{ funksiyalar}$$

Maple paketida **sinh(z), cosh(z), tanh(z), coth(z)** orqali yoziladi;

9) Kompleks o'zgaruvchili logarifmik funktsiya.

Ko'rsatkichli funktsiyaga teskari funktsiya logarifmik funktsiya deyiladi va Lnz bilan belgilanadi. Shuning uchun, agar $w = Lnz$ bo'lsa, u

holda $e^w = z$ bo'ladi. $w = x + iy$ deb belgilaymiz. Oxirgi tenglikdan $e^{x+iy} = |z| \cos \arg z + i \sin \arg z$, $e^x \cos y + i \sin y =$
 $= |z| \cos \arg z + i \sin \arg z$,

$$e^x = |z|, x = \ln|z|, \begin{cases} \cos y = \cos \arg z, \\ \sin y = \sin \arg z \end{cases}, y = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

larni hosil qilamiz. Bu yerdan $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ ni olamiz.

Logarifmik funksiyaning ko'p qiymatliligi e^z funksiyaning davriyligidan kelib chiqadi;

10) Teskari trigonometrik funksiyalar.

$\operatorname{Arc} \sin z, \operatorname{Arc} \cos z, \operatorname{Arctg} z, \operatorname{Arcctg} z$ teskari trigonometrik funksiyalar $\sin z, \cos z, \operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$ funksiyalarga teskari funksiya sifatida aniqlanadi. Ma-salan, agar $w = \operatorname{Arc} \cos z$ bo'lsa, u holda

$$\cos w = z, \quad \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z, \quad e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0.$$

U holda $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, $iw = \operatorname{Ln} z \pm \sqrt{z^2 - 1}$, demak, bu holda

$$w = \operatorname{Arc} \cos z = -i \operatorname{Ln} z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Teskari trigonometrik funksiyalarning bir qiymatli bosh tarmoqlari $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$ kabi belgilanadi.

Maple paketida teskari trigonometrik funksiyalar bir qiymatli funksiya sifatida hisoblanadi va quyidagicha yoziladi:

$\arcsin(z)$, $\arccos(z)$, $\operatorname{arctan}(z)$, $\operatorname{arccot}(z)$.

11) Teskari giperbolik funksiyalar.

$\operatorname{Arcsh} z, \operatorname{Arch} z, \operatorname{Arcthz}, \operatorname{Arccthz}$ teskari giperbolik funksiyalar $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cthz}$ funksiyalarga teskari funksiyalar sifatida aniqlanadi.

Maple paketida teskari giperbolik funksiyalar bir qiymatli funksiya sifatida hisoblanadi va quyidagicha yoziladi:

$\operatorname{arcsinh}(z)$, $\operatorname{arccosh}(z)$, $\operatorname{arctanh}(z)$, $\operatorname{arccoth}(z)$.

12) Umumlashgan darajali funksiya va umumlashgan ko'rsatkichli funksiya.

$$z^a = e^{aLnz} = e^{a \ln|z| + i \arg z + 2\pi k} = e^{a \ln|z|} \cdot e^{ai \arg z} \cdot e^{i2\pi ka}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$a^z = e^{zLna} = e^{z \ln|a| + i \arg a} \cdot e^{iz2\pi k}, k \in \mathbb{Z}.$$

Bu funksiyalar ham ko'p qiymatli bo'lib, Maple paketida bir qiymatli funksiya sifatida hisoblanadi.

4.3. Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning qiymatini Maple dasturidan foydalanib topish

Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning qiymatini Maple paketida **evalc()** funksiya yordamida topiladi. Bunda ko'p qiymatli funksiyalar uchun faqat bosh qiymatlari aniqlanadi, shuning uchun zarur hollarda hosil qilingan javobga ko'p qiymatli javobni qo'shish kerak bo'ladi.

Funksiya qiymatini topishga doir misollar

1-misol. $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$ ni hisoblang.

Yechish: $e^{1+\frac{\pi}{2}i} = e \cdot e^{\frac{\pi}{2}i} = e \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = ie.$

2-misol. $\sin i\pi$ ni hisoblang.

Yechish; $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$\sin i\pi = \frac{e^{i \cdot i\pi} - e^{-i \cdot i\pi}}{2i} = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i} = i \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2} = i \sinh \pi.$$

Maple dasturida yechilishi:

> evalc(sin(I*pi));

$I \sinh(\pi)$

3-misol. $\cos 2 + i$ ni hisoblang.

Yechish: $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}\cos 2 + i &= \frac{e^{i 2+i} + e^{-i 2+i}}{2} = \frac{e^{2i-1} + e^{-2i+1}}{2} = \\ &= \frac{e^{-1} \cos 2 + i \sin 2 + e \cos 2 - i \sin 2}{2} = \cos 2 \cosh 1 - i \sin 2 \sinh 1\end{aligned}$$

Maple dasturida yechilishi:

> evalc(cos(2+I));

$$\cos(2) \cosh(1) - I \sin(2) \sinh(1)$$

4-misol. $tg \ 2 + i$ ni hisoblang.

Yechish: $tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i e^{iz} + e^{-iz}}$ formuladan foydalanib

hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}tg \ 2 + i &= \frac{e^{i 2+i} - e^{-i 2+i}}{i e^{i 2+i} + e^{-i 2+i}} = \frac{e^{2i-1} - e^{-2i+1}}{i e^{2i-1} + e^{-2i+1}} = \\ &= \frac{-\sinh 1 \cos 2 + i \cosh 1 \sin 2}{i \cosh 1 \cos 2 + \sinh 1 \sin 2} = \frac{\cos 2 \sin 2 + i \cosh 1 \sinh 1}{\sinh^2 1 + \cos^2 2}\end{aligned}$$

Maple dasturida yechilishi:

> evalc(tan(2+I));

$$\frac{\sin(2) \cos(2)}{\cos(2)^2 + \sinh(1)^2} + \frac{I \sinh(1) \cosh(1)}{\cos(2)^2 + \sinh(1)^2}$$

5-misol. $Ln \ 1 - i$ ni hisoblang.

Yechish: $Lnz = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ dan foydalanib to-pamiz:

$$Ln \ 1 - i = \ln|1 - i| + i \arg 1 - i + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\arg 1 - i = \arctg \frac{-1}{1} + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$$

ekanligidan,

$$\operatorname{Ln} 1 - i = \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}.$$

Maple dasturida yechilishi:

> Ln(1-i)=ln(abs(1-I))+I*(argument(1-I)+2*pi*k);

$$\operatorname{Ln}(1 - i) = \frac{1}{2} \ln(2) + \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right) I$$

6-misol. -1^i ni hisoblang.

Yechish: $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{a \ln|z| + i \arg z + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ formulaga

ko'ra hisoblaymiz.

$$-1^i = e^{i \operatorname{Ln} -1} = e^{i \ln 1 + i \pi + 2k\pi} = e^{i \pi + 2k\pi} = e^{-\pi + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

Maple dasturida yechilishi:

> evalc((-1)^I);

$$e^{(-\pi)}$$

7-misol. $\operatorname{Arc} \sin \frac{4}{3}i$ ni hisoblang.

Yechish: $\operatorname{Arc} \sin z = -i \operatorname{Ln} i z + \sqrt{z^2 - 1}$ formuladan

foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arc} \sin \frac{4}{3}i &= -i \operatorname{Ln} i \left(\frac{4}{3}i + \sqrt{-\frac{16}{9} - 1} \right) = -i \operatorname{Ln} i \left(\frac{4}{3}i + \sqrt{-\frac{25}{9}} \right) = \\ &= i - 1^k \ln 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4.4. Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi funksiyalarning qiymatini toping.

1) e^{2-3i}

3) $\sin \left(\frac{\pi}{4} + i \right)$

2) $e^{\frac{\pi}{4}i}$

4) $\operatorname{ch} 2i$

- | | |
|--|------------------------------------|
| 5) $\cos 2 + i$ | 10) $\operatorname{Ln} 1 + i$ |
| 6) $\operatorname{tg} 2 - i$ | 11) $\operatorname{Arcsin} i$ |
| 7) $\operatorname{cth} 2 + i$ | 12) $\operatorname{Arc} \cos 1$ |
| 8) $-2^{\sqrt{2}}$ | 13) $\operatorname{Arctg} 1 + 2i$ |
| 9) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ | 14) $\operatorname{Arcth} 1 - i$. |

Javoblar: 1) $e^2 \cos 2\pi - 3 + i \sin 2\pi - 3$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 1 + i \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} 1$; 4) $\cos 2$; 5) $\cos 2 \operatorname{ch} 1 - i \sin 2 \operatorname{sh} 1$;

6) $\frac{\sin 4}{2 \cos^2 2 + \operatorname{sh}^2 1} - i \frac{\operatorname{sh} 2}{2 \cos^2 2 + \operatorname{sh}^2 1}$;

7) $\frac{\operatorname{sh} 4}{\operatorname{ch} 4 - \cos 2} - i \frac{\sin 2}{\operatorname{ch} 4 - \cos 2}$;

8) $2^{\sqrt{2}} \cos 2k + 1 - \pi\sqrt{2} + i \sin 2k + 1 - \pi\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

9) $\frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

10) $\frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

11) $k\pi - i \ln \sqrt{2} + (-1)^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$;

12) $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

13) $\frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2k + 1 - \pi \right) + \frac{i}{4} \ln 5$, $k \in \mathbb{Z}$;

14) $\frac{1}{4} \ln 5 + \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi \right) i$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR YORDAMIDA BAJARILADIGAN KONFORM AKSLANTIRISHLAR

5.1. Konform akslantirishlar

$w = f(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}$ to'plamda berilgan bo'lsin. Bu D to'plamda z_0 nuqtani olib unga shunday Δz orttirma beraylikki, $z_0 + \Delta z \in D$ bo'lsin, natijada $f(z)$ funksiya ham z_0 nuqtada

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi.

1-ta'rif. Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiya-ning z_0 nuqtadagi hosilasi deb aytiladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya z_0 nuqtada kompleks analiz ma'nosida differensiallanuvchi deyiladi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya biror $D \subset C$ sohada berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtaning biror $U(z_0, \varepsilon) \subset D$ atro-fida C-differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ nuqtada gollomorf (yoki analitik) deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya D sohada golomorf deyiladi.

5-ta'rif. Agar $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z = 0$ nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya ∞ nuqtada golomorf deyiladi.

6-ta’rif. Agar $\overline{f(z)}$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada golomorf bo’lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada antigolomorf deyiladi.

7-ta’rif. Agar $w = f(z)$ akslantirish:

1) markazi z_0 nuqtada bo’lgan cheksiz kichik aylanani cheksiz kichik aylanaga o’tkazish xossasiga;

2) z_0 nuqtadan o’tuvchi har qanday ikkita chiziq orasidagi burchakning miqdorini ham, yo’nalishini ham saqlash xossasiga ega bo’lsa, $w = f(z)$ akslantirish z_0 nuqtada konform akslantirish deyiladi.

Agar $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtaning biror atrofida golomorf bo’lib, $f'(z_0) \neq 0$ bo’lsa, $w = f(z)$ akslantirish z_0 nuqtada konform bo’ladi.

Agar $w = f(z)$ akslantirish D sohada bir varaqli bo’lib, sohaning har bir nuqtasida konform bo’lsa, u D sohada konform akslantirish deyiladi.

Konform akslantirishlar nazariyasida, asosan, quyidagi ikki masala o’rganiladi:

3) $D \subset \mathbb{C}_z$ sohada $w = f(z)$ akslantirish berilgan holda $f(D)$ ni topish;

4) Ikkita $E \subset \mathbb{C}_z$ va $F \subset \mathbb{C}_w$ sohalar berilgan holda E ni F ga konform akslantiradigan $w = f(z)$ ni topish:

Bu masalalarni hal qilishda quyidagi teoremlardan foydalaniladi.

Teorema (Riman). Agar $E \subset \mathbb{C}_z$ va $F \subset \mathbb{C}_w$ sohalar chegarasi 2 ta nuqtadan kam bo’lmagan bir bog’lamli sohalar bo’lsa, E sohani F sohaga konform akslantiruvchi $w = f(z)$ funksiya mavjud.

Teorema (Sohaning saqlanish prinsipi). Agar $w = f(z)$ funksiya D sohada golomorf bo’lib, $f(z) \neq \text{const}$ bo’lsa, $f(D)$ ham soha bo’ladi.

5.2. Maple dasturida konform akslantirishlar bajarish

$w = f(z)$ kompleks o’zgaruvchili funksiya z kompleks o’zgaruvchili tekislikdagi to’plamni w kompleks o’zgaruvchili tekislikdagi to’plamga akslantiradi. Bu tekisliklarni qo’shib kompleks o’zgaruvchili

funksiyani bitta tekislikdagi to'plamlarni akslantiruvchi akslantirish deb qarash mumkin. To'rtburchak sohalarni akslantirish **conformal**($z, z = a_1 + b_1 \cdot I, a_2 + b_2 \cdot I$) funksiyasi yordamida amalga oshiriladi, bu yerda $a_1 + b_1 \cdot I$ va $a_2 + b_2 \cdot I$ nuqtalar tomonlari ordinata o'qlariga parallel bo'lgan to'g'ri to'rtburchak uchlaridir.

1-misol. $-2 \leq \operatorname{Re} z \leq -1, \quad 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$ kvadratning $w = 2z + 5 + i$ chiziqli funksiya yordamidagi akslantirilgan sohani toping.

Yechish: Avvalo, $w = 2z + 5 + i$ ni z ga nisbatan yechamiz, natija-da $z = \frac{w - 5 - i}{2}$ bo'ladi. Uni haqiqiy va mavhum qismlarini topamiz:

$$z = \frac{u}{2} + i \frac{v}{2} - \frac{5}{2} - \frac{i}{2} = \frac{u - 5}{2} + i \frac{v - 1}{2}$$

$$x + iy = \frac{u - 5}{2} + i \frac{v - 1}{2}$$

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{u - 5}{2}; \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{v - 1}{2}$$

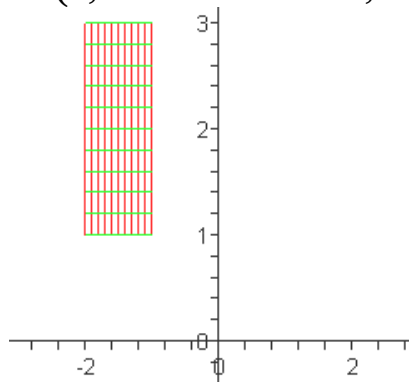
$$\text{Endi } -2 \leq \operatorname{Im} z \leq -1 \text{ dan } -2 \leq \frac{u - 5}{2} \leq -1 \text{ va } 1 \leq u \leq 3 \text{ ni}$$

hamda $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$ dan $1 \leq \frac{v - 1}{2} \leq 3$ va bundan $3 \leq v \leq 7$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib izlanayotgan soha $1 \leq \operatorname{Re} w \leq 3, \quad 3 \leq \operatorname{Im} w \leq 7$ dan ibo-rat.

Maple dasturida yechilishi:

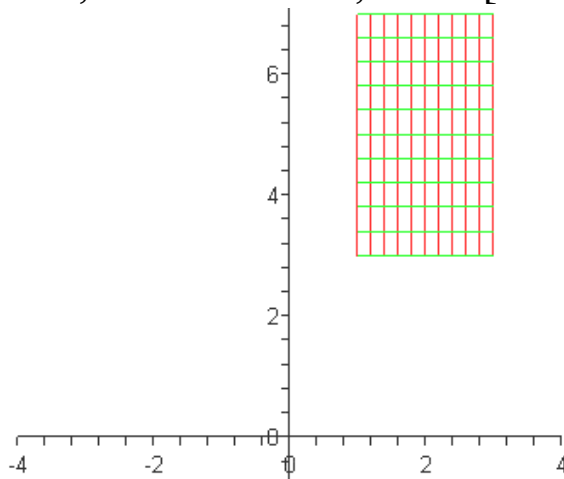
Dastlab, berilgan to'plamni grafik ko'rinishini beramiz:

> with(plots): conformal(z, z=-2+I..-1+3*I, view=[-4..4,-1..4]);



Endi akslangan to‘plamni grafik ko‘rinishini quyidagicha aniqlaymiz:

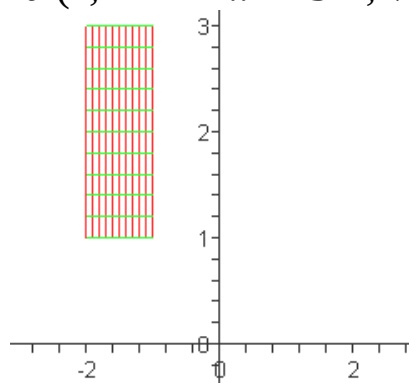
```
> conformal(2*z+5+I, z=-2+I..-1+3*I, view=[-4..4,-1..8]);
```



2-misol. $2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$, $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$ kvadratning $w = z^2$ chiziqli funksiya yordamidagi akslantirilgan sohani toping.

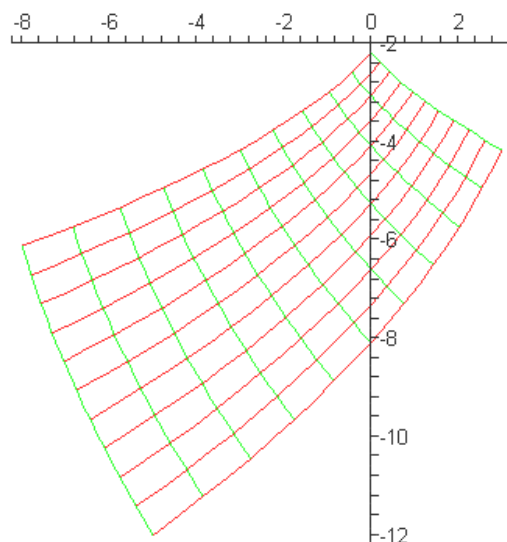
Yechish: dastlab, berilgan to‘plamni grafik ko‘rinishini beramiz:

```
> with(plots): conformal(z, z=-2+I..-1+3*I, view=[-4..4,-1..4]);
```



Endi akslangan to‘plamni grafik ko‘rinishini quyidagicha aniqlaymiz:

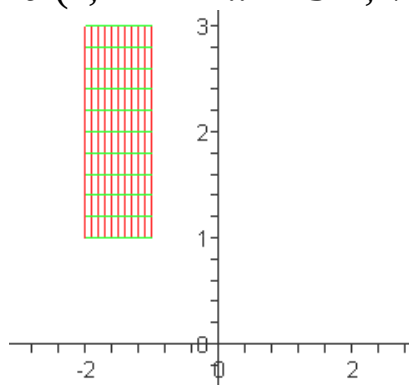
```
> conformal(z^2, z=-2+I..-1+3*I);
```



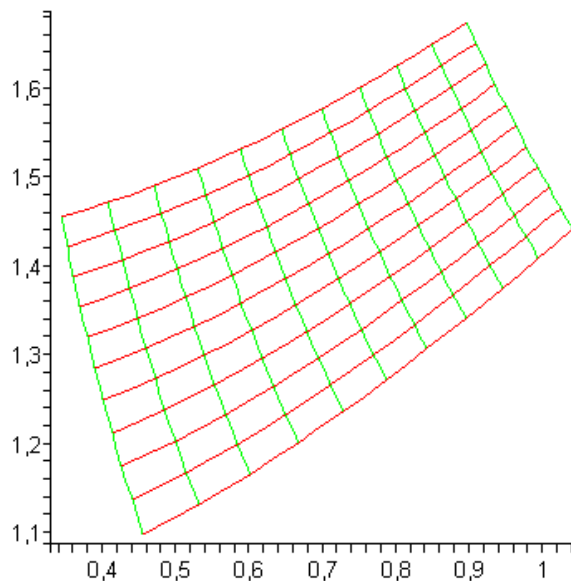
3-misol. $2 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$, $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 3$ kvadratning $w = \sqrt{z}$ chiziqli funksiya yordamidagi akslantirilgan sohani toping.

Yechish: Dastlab berilgan to‘plamni grafik ko‘rinishini beramiz.

> with(plots): conformal(z, z=-2+I..-1+3*I, view=[-4..4,-1..4]);



Endi akslangan to‘plamni grafik ko‘rinishini quyidagicha aniqlaymiz:> conformal(sqrt(z), z=-2+I..-1+3*I);



4-misol. $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, \quad 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$ kvadratning $w = \frac{2z - i}{z - 1 - i}$ kasr chiziqli funksiya yordamidagi akslantirilgan sohani toping.

Yechish: 1-misoldagi kabi oldin $w = \frac{2z - i}{z - 1 - i}$ ni z ga nisbatan yechamiz, natijada $(z - 1 - i)w = 2z - i$

$$\begin{aligned} zw - w - iw &= 2z - i \\ (w - 2)z &= w + iw - i \end{aligned}$$

$z = \frac{w + i(w - 1)}{w - 2}$ ni topamiz. Uni haqiqiy va mavhum qismlarini

topamiz: $x = \operatorname{Re} z = \frac{u^2 - 2u + v^2 + v}{(u - 2)^2 + v^2}$

$$y = \operatorname{Im} z = \frac{u^2 - 3u + v^2 - 2v + 2}{(u - 2)^2 + v^2}$$

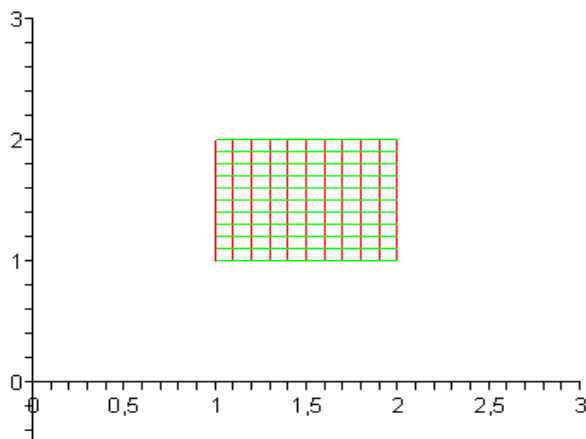
Shartga ko'ra, $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, \quad 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$ tengsizliklardan

$$u = \operatorname{Re} w \quad \text{va} \quad v = \operatorname{Im} w \quad \text{lar uchun} \quad \begin{cases} v \geq 4 - 2u \\ (u - 3)^2 + (v - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{5}{4} \end{cases} \quad \text{va}$$

$$\begin{cases} v \leq \frac{u-2}{2} \\ (u - \frac{5}{2})^2 + (v+1)^2 \geq \frac{5}{4} \end{cases} \text{ tengsizliklarni hosil qilamiz.}$$

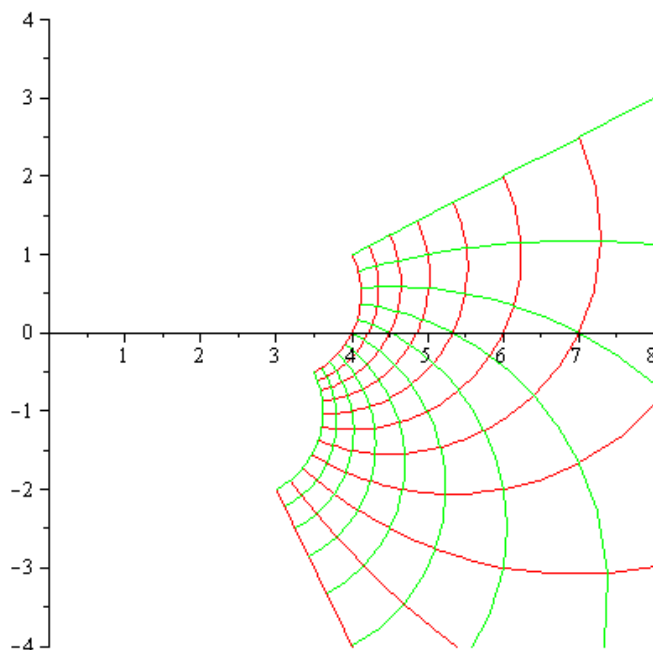
Bu akslangan sohani beradi.

Maple dasturida yechilishi: Dastlab, berilgan to'plamni grafik ko'rinishini beramiz: `> with(plots): conformal(z, z=1+I..2+2*I, view=[0..3,-1..3]);`



Endi akslangan to'plamni grafik ko'rinishini quyidagicha aniqlaymiz.

`> conformal((2*z-I)/(z-1-I), z=1+I..2+2*I, view=[0..8,-4..4]);`



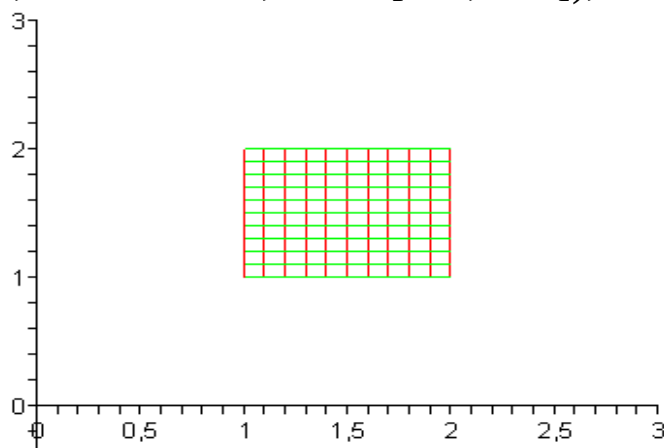
5-misol. $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$ kvadratning $w = e^z$ ko'rsatkichli funksiya yordamidagi akslantirilgan sohani toping.

Yechish: $z = x + iy$ hamda $w = \rho e^{i\psi}$ deb olamiz. Unda $w = e^z$ tenglikdan $\begin{cases} \rho = e^x \\ \psi = y \end{cases}$ ni hosil qilamiz. Berilgan shartlardan $e^1 \leq \rho \leq e^2$ va $1 \leq \psi \leq 2$ ni olamiz. Bularni e'tiborga olsak izlanayotgan soha $w \in \mathbb{C} : e \leq \rho \leq e^2, 1 < \psi \leq 2$ ko'rinishda bo'ladi.

Maple dasturida yechilishi:

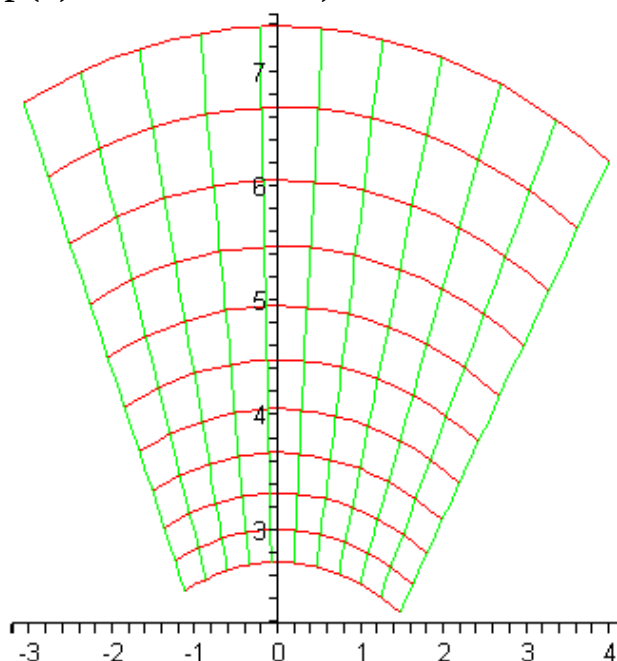
Dastlab, berilgan to'plamni grafik ko'rinishini beramiz:

> conformal(z, z=1+I..2+2*I, view=[0..3,-1..3]);



Endi akslangan to'plamni grafik ko'rinishini quyidagicha aniqlaymiz:

> conformal(exp(z), z=1+I..2+2*I);

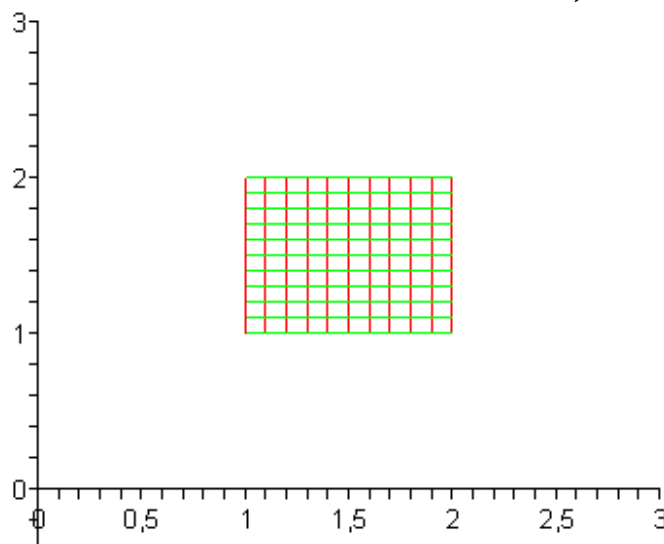


6-misol. $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$, $1 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$ kvadratning $w = \sin z - i$ funksiya yordamidagi akslantirilgan sohani toping.

Maple dasturida yechilishi:

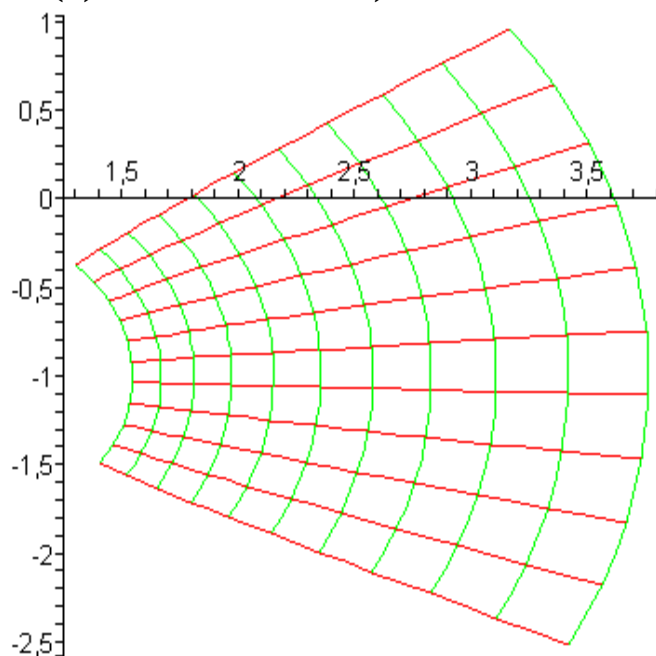
Dastlab, berilgan to'plamni grafik ko'rinishini beramiz:

> conformal(z, z=1+I..2+2*I, view=[0..3,-1..3]);



Endi, akslangan to'plamni grafik ko'rinishini quyidagicha aniqlaymiz:

> conformal(sin(z)-I, z=1+I..2+2*I);



7-misol. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ aylananing $w = \frac{1}{z}$ funksiya yordamidagi akslantirilgan sohani toping.

Yechish: oldin $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1$ ifodani x va y lar bo'yicha

to'la kvadratga keltiramiz:

> with(student):

> completesquare(x^2+y^2+2*x-2*y+1,x);

$$(x + 1)^2 + y^2 - 2y$$

> completesquare(%,y);

$$(y - 1)^2 - 1 + (x + 1)^2$$

Bu ko'rinishdagi aylana tenglamasi kompleks tekislikda $|z - (-1 + i)| = 1$ ko'rinishga ega va markazi $(-1;1)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng bo'ladi.

Endi, aylana tenglamasida $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ va $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ almashtirish olamiz. Maple'da $\bar{z}$ ni **z1** kabi belgilaymiz:

> simplify(subs({x=(z+z1)/2,y=(z-z1)/(2*I)},x^2+y^2+2*x-2*y+1));

$$z z1 + z + z1 + I z - I z1 + 1$$

Avvalo, $w = \frac{1}{z}$ ni z ga nisbatan yechib, $z = \frac{1}{w}$ va $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$ larni

topamiz va ifodaga qo'yamiz:

> simplify(subs({z=1/w,z1=1/w1},%));

$$\frac{1 + w1 + w + I w1 - I w + w w1}{w w1}$$

Endi, $w = u + iv$ va $\bar{w} = u - iv$ almashtirish olib, w va $\bar{w}$ lar bo'yicha to'la kvadratga keltiramiz:

> simplify(subs({w=u+I*v,w1=u-I*v},numer(%)));

$$1 + 2u + 2v + u^2 + v^2$$

> with(student): completesquare
(completesquare(1+2*u+2*v+u^2+v^2,u),v);

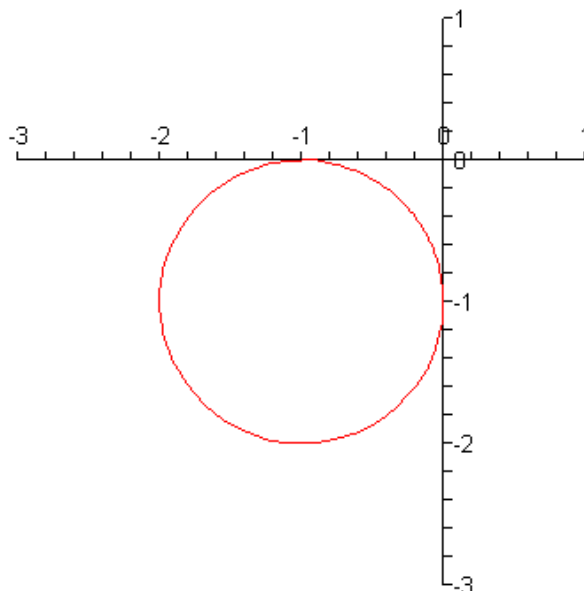
$$(v + 1)^2 - 1 + (u + 1)^2$$

markazi $(-1;1)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng aylana hosil bo'ldi.

$w = \frac{1}{z}$ akslantirish yordamida aylananing aksini topish uchun berilgan aylana tenglamasini parametrik ko'rinishda $x = -1 + \cos t$,

$y = 1 + \sin t$ olib, **complexplot()** funksiya yordamida kompleks tekislikda tasvirlash mumkin:

```
> with(plots):complexplot(1/(-1+cos(t)+I*(1+sin(t))),t=0..2*Pi,
view=[-3..1,-3..1]);
```



8-misol. i , 1 , $1 + i$ nuqtalarni, mos ravishda, 0 , ∞ , 1 nuqtalarga aks-lantiruvchi kasr chiziqli funktsiyani toping.

Yechish: 1 nuqtani ∞ nuqtalarga akslantiruvchi kasr chiziqli $w = \frac{az + b}{cz + d}$ funksiya maxraji $z - 1$ ga teng bo'ladi. Boshqa parametrlarni aniqlash uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} \frac{ai + b}{i - 1} = 0 \\ \frac{a(1 + i) + b}{(1 + i) - 1} = 1 \end{cases}$$

```
> solve({(a*I+b)/(I-1)=0,(a*(1+I)+b)/(1+I-1)=1},{a,b});
{b = 1, a = I}
```

Demak, $w = \frac{iz + 1}{z - 1}$.

5.3. Mustaqil yechish uchun misollar

1. $1 \leq \operatorname{Re} z \leq 3$, $2 \leq \operatorname{Im} z \leq 4$ kvadratning $w = \frac{z - i}{z}$ kasr chiziqli

funksiya yordamidagi aksini toping.

2. $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 4$ kvadratning $w = 2z + i$ funksiya yordamidagi aksini toping

3. $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 4$ kvadratning $w = e^z$ ko'rsatkichli funksiya yordamidagi aksini toping.

4. $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, 1 \leq \operatorname{Im} z \leq 4$ kvadratning $w = \cos z$ funksiya yordamidagi aksini toping.

5. $x^2 + y^2 = 1$ aylananing $w = \frac{1}{z}$ funksiya yordamidagi aksini toping.

6. Quyidagi shartni qanoatlantiruvchi kasr chiziqli akslantirishni toping.
 $w(0) = 4, w(1 + i) = 2 + 2i, w(2i) = 0.$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Аладьев В.З. Системы компьютерной математики: MAPLE: искусство программирования. М., Лаборатория базовых знаний, 2006, 792 с.
2. Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. Программирование и разработка приложений в Maple. Гродно, Таллин, 2007, 458 с.
3. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. М., “СОЛОН-Пресс”, 2006, 720 с.
4. С.А.Лактионов, Калюкина Н.Д. Функции комплексного переменного в пакете Maple. СибГИУ, Новокузнецк, 2010, 39 с.
5. Ключка Т.В., Парфенава Н.Д. Решение задач комплексного анализа средствами Maple. Учебно-методическое пособие, ХНУ имени В.Н.Каразина, 2009. 68 с.
6. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т.1, М., “Наука”, 1985.
7. Худойберганов Г., Ворисов А.К, Мансуров Х.Т. Комплекс анализ. Т., “Университет”, 1998.
8. Садуллаев А., Худойберганов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Туйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами (комплекс анализ). 3-қисм. “Ўзбекистон”, 2000.
9. Волковский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., “Наука”, 1975.
10. Евграфов М.М. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. М., “Наука”, 1969.
11. Сирожиддинов С.Х, Салохитдинов М.С., Мақсудов Ш. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси. Т., “Ўқитувчи”, 1979.
12. Привалов И.И. Введение в теории функций комплексного переменного. М., “Наука”, 1977.
13. Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И. Лекции по ТФКП. М., “Наука”, 1984.
14. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного М., “Наука”, 1972.

MUNDARIJA

1. KOMPLEKS SONLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.....	5
1.1. Kompleks son tushunchasi	5
1.2. Kompleks sonning geometrik tasviri	6
1.3. Maple dasturida masalalarni yechish	8
1.4. Mustaqil yechish uchun misollar.	14
2. KOMPLEKS TEKISLIKDA CHIZIQ VA SOHALAR.....	15
2.1. Kompleks tekislikda chiziq tushunchasi	15
2.2. Kompleks tekislikda soha tushunchasi	15
2.3. Kompleks tekislikda to‘plamlarni tasvirlash.....	17
2.4. Mustaqil yechish uchun misollar	24
3. KOMPLEKS SONLAR KETMA-KETLIGI VA ULARNING LIMITI TUSHUNCHASI.....	25
3.1. Kompleks sonlar ketma-ketligi	25
3.2. Kompleks sonlar ketma-ketligi limitini hisoblash	26
3.3. Mustaqil yechish uchun misollar	27
4. KOMPLEKS O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR	27
4.1. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar, ularning limiti, uzluksizligi	27
4.2. Kompleks o‘zgaruvchili elementar funksiyalar	29
4.3. Kompleks o‘zgaruvchili funksiyaning qiymatini Maple dasturidan foydalanib topish	33
4.4. Mustaqil yechish uchun misollar	35
5. KOMPLEKS O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR YORDAMIDA BAJARILADIGAN KONFORM AKSLANTIRISHLAR	37
5.1. Konform akslantirishlar	37
5.2. Maple dasturida konform akslantirishlar bajarish.....	38
5.3. Mustaqil yechish uchun misollar	47
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR	49

Mohira Vaisova, Rasul Sharipov

**KOMPLEKS ANALIZ MASALALARINI
YECHISHDA MAPLE DASTURIDAN
FOYDALANISH**
(uslubiy qo'llanma)

Muharrir: **Yo'ldoshev Ro'zimboy**
Texnik muharrir: **Sherali Yo'ldoshev**
Musahhih: **Tamara Turumova**

UrDU noshirlik bo'limi O'zbekiston matbuot va axborot
agentligining 2009-yil 19-avgustdagi №148 raqamli buyrug'i
bilan qayta ro'yxatdan o'tkazilgan.

Terishga berildi: 26.08.2015.

Bosishga ruxsat etildi: 5.09.2015.

Ofset qog'ozi. Qog'oz bichimi 60x84 ¹/₁₆.

Tayms garniturası. Adadi 50. Buyurtma №.56.

Hisob-nashriyot tabag'i 2,5.

Shartli bosma tabag'i 2,3.

UrDU noshirlik bo'limida tayyorlandi.

Manzil: 220110. Urganch shahri,

H. Olimjon ko'chasi, 14-uy.

Telefon: (0-362)-224-66-01.

UrDU bosmaxonasida chop etildi.

Manzil: 220110. Urganch shahri,

H. Olimjon ko'chasi, 14-uy.

Telefon: (0-362)-224-66-01.
