

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

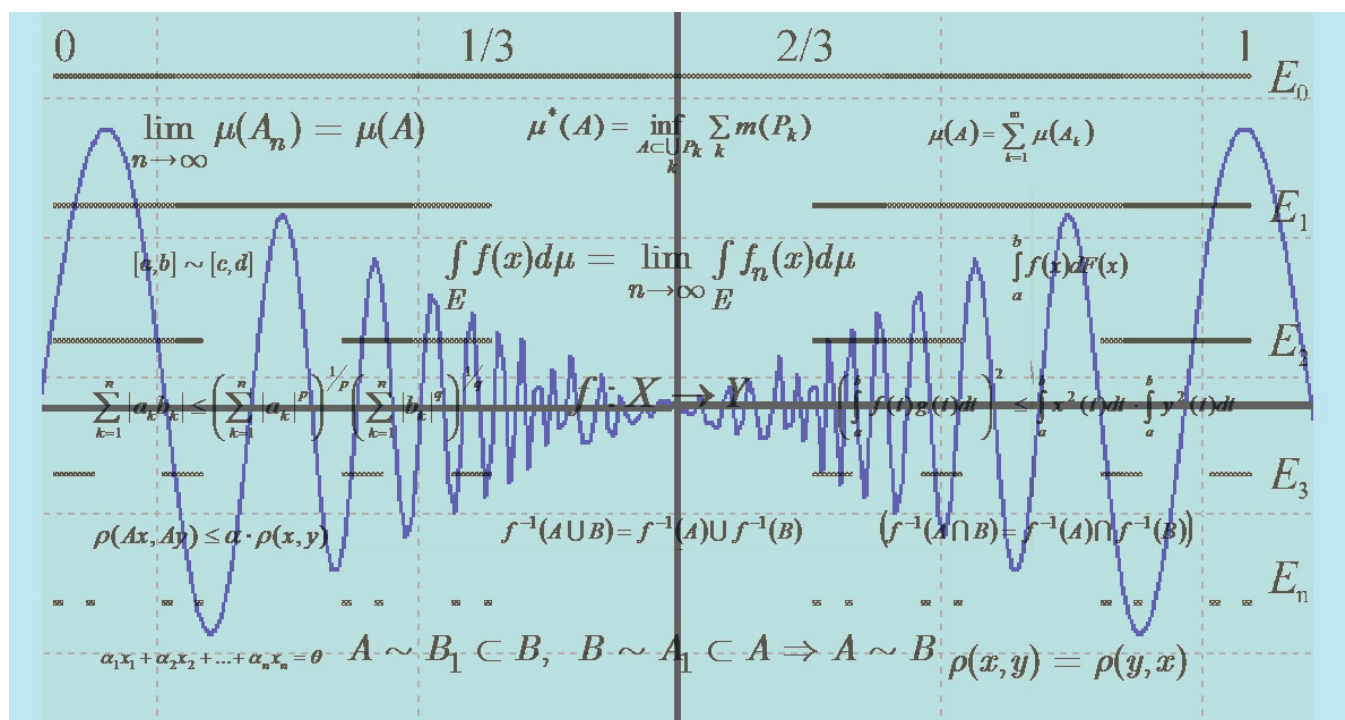
**AL-XORAZMIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT
UNIVERSITETI**

Yarmetov J.R., Xujamov J. U., Atamuratov A.A.

**FUNKSIONAL ANALIZ FANIGA OID MISOLLARNI
YECHISH**

Uslubiy qo'llanma

(I-qism)



URGANCH –2015

Ushbu uslubiy qo'llanma universitetning matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan yuqori kurs talabalarga va magistrantlarga mo'ljallangan. Unda funksional analiz fanining o'quv dasturida ko'rsatilgan mavzular bo'yicha misollarni yechish usullari va talabalar mustaqil yechishlari uchun topshiriqlar keltirilgan.

TUZUVCHILAR:

dots. J.U. Xo'jamov.

dots. J.R. Yarmetov

dots. A.A. Atamuratov

Ma'sul muxarrir:

dots. B.I. Abdullayev

TAQRIZCHILAR:

dots. M.D. Vaisova

dots. Yu.R. Saidov

Urganch davlat universiteti fizika-matematika fakulteti ilmiy-uslubiy kengashi tomonidan _____2015 yilda ko'rib chiqilgan va tasdiqlangan.

So‘z boshi

Ushbu uslubiy qo‘llanma Urganch davlat universiteti fizika-matematika fakultetida matematika mutaxassisligi bo‘yicha ta’lim olayotgan yuqori kurs talabalarga va magistrantlarga mo‘ljallangan. Unda funksional analiz fanining namunaviy dasturida ko‘rsatilgan mavzular bo‘yicha misollarni yechish usullari va talabalarning o‘zlari mustaqil yechishlari uchun topshiriqlar keltirilgan.

Keltirilgan mashqlar asosan yechilishi oson bo‘lgan mashqlar bo‘lib, talabalarda mavzular bo‘yicha boshlang‘ich tushuncha va misol yechish malaka va ko‘nikmasini hosil qilish uchun mo‘ljallangan. Aniqroq qilib aytganda, ushbu qo‘llanma «Matematik analiz» fanining 1-kurs materiallarini o‘zlashtirgan, «Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyalari nazariyasi» va «Funksional analiz» fanlarini o‘rganishni boshlovchilar uchun mo‘ljallangan.

Ushbu qo‘llanma funksional analiz fanidan mashg‘ulot olib borayotgan professor-o‘qituvchilar uchun talabalar mustaqil ishini tashkil etishda ham muxim manba bo‘ladi deb o‘ylaymiz.

1-§. To‘plamlar ustida amallar va akslantirishlar

1.To‘plamlar ustida amallar. To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich tushunchalardan biri hisoblanadi. Odatda bu tushuncha ta’rifsiz kiritiladi, buning sababi shundaki, bu tushunchaga beriladigan ta’rifning o‘zi ham yanada soddaroq tushunchaga asoslangan bo‘lishi kerak, ammo biz bunday tushunchaga ega emasmiz. Shuning uchun to‘plam ta’rifini qidirmasdan, uni misollar yordamida tushuntiramiz. Masalan, kutubxonadagi kitoblar to‘plami, stol ustidagi daftarlar to‘plami, auditoriyadagi talabalar to‘plami, shahardagi odamlar to‘plami, natural sonlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqdagi barcha nuqtalar to‘plami va hokazo. Umuman, to‘plam tushunchasi turli narsalarning majmuasi ekanini unutmaslik lozim.

Biz bu bo‘limda qism to‘plam, teng to‘plamlar, to‘plamning to‘ldiruvchisi, to‘plamlar birlashmasi, kesishmasi, simmetrik ayirmasi kabi tushunchalarni keltirib o‘tmoqchi emasmiz. Sizga bu tushunchalarni [1] va [2] adabiyotlardan o‘rganishni tavsiya qilamiz.

1–misol. A, B, C to‘plamlar uchun $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ tenglikni to‘g‘riligini isbotlang.

Isboti. Bu tenglikni to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatish uchun

$A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ va $(A \cap B) \setminus (A \cap C) \subset A \cap (B \setminus C)$ munosabatlarni o‘rinli ekanini ko‘rsatamiz:

$$\forall x \in A \cap (B \setminus C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \setminus C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \cap B \\ x \notin A \cap C \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$$

Bundan esa $A \cap (B \setminus C) \subset (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\begin{aligned} \forall x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin A \cap C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \setminus C \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap (B \setminus C). \\ \Rightarrow (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\subset A \cap (B \setminus C). \end{aligned}$$

Demak, $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ tenglik o‘rinli ekan.

2–misol. A, B, C to‘plamlar uchun $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$ munosabat o‘rinli ekanini isbotlang.

Isboti. Buning uchun $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$ to‘plamdan olingan har qanday element $A \setminus C$ ga tegishli ekanini ko‘rsatamiz:

$$\forall x \in (B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \Rightarrow \begin{cases} x \in B \setminus C \\ x \notin B \setminus A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \notin C \\ x \in A \end{cases} \Rightarrow x \in A \setminus C.$$

Demak, $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.

3–misol. A_k, B_k ($k \in N$) to‘plamlar uchun quyidagi

$$\bigcup_k A_k \setminus \bigcup_k B_k = \bigcup_k (A_k \setminus B_k)$$

munosabat o‘rinli bo‘lmasligini ko‘rsating.

Isboti. Ushbu

$$\begin{aligned} \forall x \in \bigcup_k A_k \setminus \bigcup_k B_k &\Rightarrow \begin{cases} x \in \bigcup_k A_k \\ x \notin \bigcup_k B_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k_0 \in N, x \in A_{k_0} \\ x \notin B_k, \forall k \in N \end{cases} \\ &\Rightarrow \{x \in A_{k_0} \setminus B_k, \forall k \in N\} \Rightarrow x \in \bigcup_k (A_k \setminus B_k) \end{aligned}$$

Munosabatlardan $\bigcup_k A_k \setminus \bigcup_k B_k \subset \bigcup_k (A_k \setminus B_k)$ ekanligi kelib chiqadi.

$\bigcup_k (A_k \setminus B_k) \subsetneq \bigcup_k A_k \setminus \bigcup_k B_k$ munosabatga misol keltiramiz.

$A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{1, 2, 3, 4\}, B_1 = \{1, 4, 5\}, B_2 = \{3, 4, 6\}$ bo‘lsin. U holda

$A_1 \setminus B_1 = \{2\}$, $A_2 \setminus B_2 = \{1,2\}$, $(A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) = \{1,2\}$, $A_1 \cup A_2 = \{1,2,3,4\}$,
 $B_1 \cup B_2 = \{1,4,5,6\}$, $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) = \{2,3\}$ bo'lishi ravshan. Bunga muvofiq

$$(A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) \subsetneq (A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2).$$

Demak, $\bigcup_k A_k \setminus \bigcup_k B_k = \bigcup_k (A_k \setminus B_k)$ munosabat o'rinli emas.

4-misol. $A = \{(x, y) \in R^2; |x| + |y| \leq 3\}$ va $B = \{(x, y) \in R^2; |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$

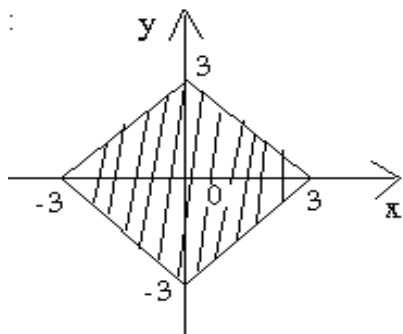
to'plamlarning simmetrik ayirmasini geometrik tasvirini keltiring.

Yechish. A to'plamni R^2 tekislikda tasvirlaymiz. Buning uchun quyidagi to'rtta holni ko'rib chiqamiz:

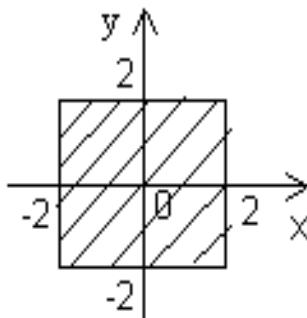
- 1) $x \geq 0, y \geq 0$ bo'lsa, $x + y \leq 3$ yoki $y \leq 3 - x$;
- 2) $x \geq 0, y \leq 0$ bo'lsa, $x - y \leq 3$ yoki $y \geq x - 3$;
- 3) $x \leq 0, y \geq 0$ bo'lsa, $-x + y \leq 3$ yoki $y \leq x + 3$;
- 4) $x \leq 0, y \leq 0$ bo'lsa, $-x - y \leq 3$ yoki $y \geq -x - 3$;

Bu to'rtta holatdagi to'plamlarni kesishtirsak, A to'plamning geometrik tasviri hosil bo'ladi (1- rasm).

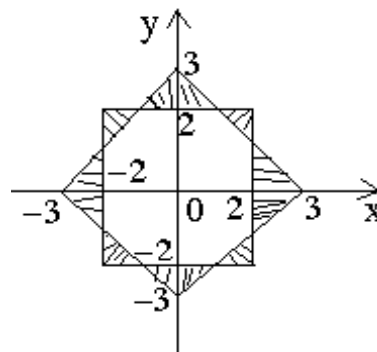
$B = \{x \in R, -2 \leq x \leq 2\} \times \{y \in R, -2 \leq y \leq 2\}$ bo'lgani uchun uning geometrik tasviri 2-rasmdan iborat bo'ladi. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ tenglikning o'rinli ekanini e'tiborga olsak, $A \Delta B$ ning geometrik tasviri 3-rasmdan iborat bo'ladi.



1-rasm.



2-rasm.



3-rasm.

1-mashq. Quyidagi tengliklarni to'g'riligini isbotlang.

1.1. $A \cap B = P \setminus ((P \setminus A) \cup (P \setminus B))$, bunda $A \subset P, B \subset P$

1.2. $A \cup B = P \setminus ((P \setminus A) \cap (P \setminus B))$, bunda $A \subset P, B \subset P$

1.3. $A \cap B = \bigcup_{k,j} (P_k \cap Q_j)$, bunda $A = \bigcup_k P_k, B = \bigcup_j Q_j$

1.4. $P \setminus \left(\bigcup_k A_k \right) = \bigcap_k (P \setminus A_k)$, bunda $A_k \subset P, k = 1, 2, 3, \dots$

1.5. $P \setminus \left(\bigcap_k A_k \right) = \bigcup_k (P \setminus A_k)$, bunda $A_k \subset P, k = 1, 2, 3, \dots$

1.6. $A \Delta B = (P \setminus A) \Delta (P \setminus B)$, bunda $A \subset P, B \subset P$

1.7. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

1.8. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

1.9. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

1.10. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

1.11. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

1.12. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1.13. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

$$1.14. A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$1.15. (A \cap B) \cup (A \cap CB) \cup (CA \cap B) = A \cup B$$

2-mashq. Quyidagi A va B to'plamlar simmetrik ayirmasini geometrik tasvirini keltiring.

$$2.1. A = \{(x, y) \in R^2 : |x| + 2|y| \leq 2\}, B = \{(x, y) \in R^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

$$2.2. A = \{(x, y) \in R^2 : 0 < xy < 1, x > 0\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq y \leq x^2 - 2x + 2\}$$

$$2.3. A = \{(x, y) \in R^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}, B = \{(x, y) \in R^2 : |x| \leq 3, |y| \leq 2\}$$

$$2.4. A = \{(x, y) \in R^2 : |x - 1| + |y| \leq 1\}, B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$2.5. A = \{(x, y) \in R^2 : |x - 1| + |y| \leq 1\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq 9\}$$

$$2.6. A = \{(x, y) \in R^2 : |x - 1| \leq 2, 0 < y \leq 2\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq (x - 1)^2 + y^2 \leq 3\}$$

$$2.7. A = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4, |y| \leq 3\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 9x^2 + 16y^2 \leq 144\}$$

$$2.8. A = \{(x, y) \in R^2 : y^2 \leq 2x\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 9x^2 - y^2 \leq 9\}$$

$$2.9. A = \{(x, y) \in R^2 : y^2 \leq 4x\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 2|x| + y^2 < 4\}$$

$$2.10. A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 - 2x + y^2 < 3\}, B = \{(x, y) \in R^2 : y^2 \leq 2(x - 1)\}$$

$$2.11. A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}, B = \{(x, y) \in R^2 : x \leq y^2 + 1, |x - 1| \leq 2\}$$

$$2.12. A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 \leq y\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 4x^2 + 25y^2 \leq 100\}$$

$$2.13. A = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 \leq y \leq \ln \frac{1}{x} \right\} B = \left\{ (x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$2.14. A = \{(x, y) \in R^2 : x - 1 \leq y \leq x + 1\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 0 < xy \leq 4\}$$

$$2.15. A = \{(x, y) \in R^2 : 0 < |xy| < 1\}, B = \{(x, y) \in R^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}$$

2. Akslantirishlar. X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar ma'lum bir f qoida bo'yicha X to'plamning har bir elementiga Y

to'plamning biror elementi mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plam Y to'plamga aks ettirilgan deyiladi va bu akslantirish

$$f: X \rightarrow Y \quad (1)$$

shaklda yoziladi.

Agar Y sifatida haqiqiy sonlar to'plami olinsa, u holda (1) akslantirishni X to'plamdagi funksiya deyiladi. (1) akslantirishdagi $x \in X$ elementga mos keluvchi $y \in Y$ elementga x elementning obrazi deyiladi.

Ta'rif. $E \subset X$ to'plamning f akslantirishdagi obrazi deb, $\{f(x) : x \in E\} \subset Y$ to'plamga aytiladi va u $f(E)$ kabi, $F \subset Y$ to'plamning f akslantirishdagi asli deb, $\{x \in X : f(x) \in F\}$ to'plamga aytiladi va $f^{-1}(F)$ kabi belgilanadi.

Teorema. A va B to'plamlar yig'indisining (ko'paytmasining) asli shu to'plamlar aslilarining yig'indisiga (ko'paytmasiga) teng, ya'ni $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ ($f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$).

5-misol. Haqiqiy sonlar o'qida $f(x) = x^3$ funksiya berilgan. $A = (-\infty; 8)$ to'plamning aslini toping.

Ta'rifga ko'ra $f^{-1}(A) = \{x \in R, f(x) \in A\}$ bo'lgani uchun

$$f(x) \in A \Rightarrow f(x) < 8 \Rightarrow x^3 < 8 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow f^{-1}(A) = (-\infty; 2).$$

6-misol. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & x \in [-4; 0) \\ 2-x, & x \in [0; 2] \end{cases}$ funksiya berilgan. $A = (-1; 1)$ to'plamni

aslini toping.

Ta'rifga ko'ra $f^{-1}(A) = \{x \in [-4; 2], -1 < f(x) < 1\}$

Quyidagi hollarni ko'rib chiqamiz:

1) $[-4; 0)$ to'plamda $-1 < \frac{1}{4}x^2 < 1$ tengsizlikni yechamiz. Bu tengsizlikning chap qismi doim o'rinli bo'lgani uchun uning o'ng qismini yechamiz. $\frac{1}{4}x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow (x-2)(x+2) < 0$. Bu tengsizlikni oraliqlar usulida yechsak, $x \in (-2; 2)$ bo'ladi. Bundan esa $(-2; 2) \cap [-4; 0) = (-2; 0)$ bo'lishi kelib chiqadi.

2) $[0; 2]$ kesmada $-1 < 2-x < 1$ tengsizlikni yechamiz:

$$\begin{cases} 2-x < 1 \\ 2-x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow x \in (1; 3) \Rightarrow [0; 2] \cap (1; 3) = (1; 2]$$

Demak, $f^{-1}(A) = (-2; 0) \cup (1; 2]$.

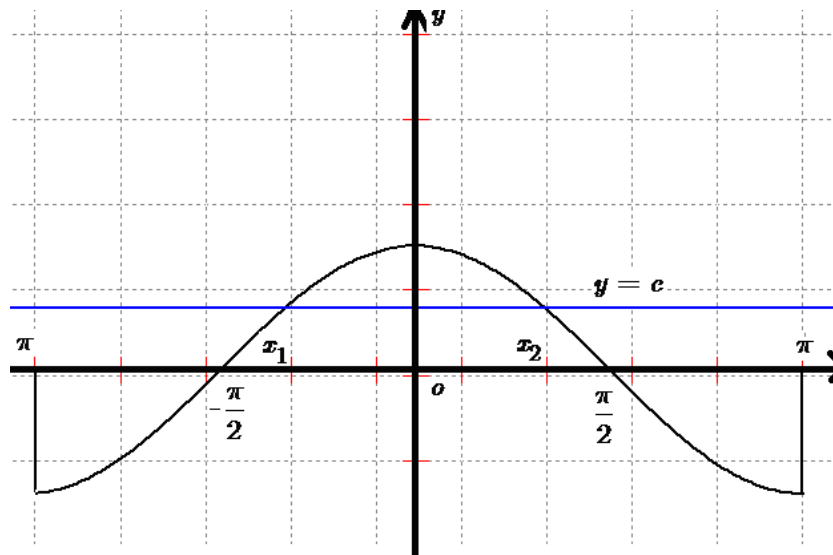
7-misol. $[-\pi; \pi]$ kesmada $f(x) = \cos x$ funksiya berilgan. $A = (-\infty; c)$ to'plamning aslini toping.

Buning uchun quyidagi hollarni ko'rib chiqamiz:

- 1) agar $c > 1$ bo'lsa, u holda $f^{-1}(A) = [-\pi; \pi]$ bo'ladi.
- 2) agar $-1 \leq c \leq 1$ bo'lsa, u xolda $\cos x < c$ tengsizlikni yechamiz. Uni $[-\pi; \pi]$ kesmadagi yechimi $[-\pi; -\arccos c) \cup (\arccos c; \pi]$ iborat bo'ladi.
- 3) agar $c < -1$ bo'lsa, $f^{-1}(A) = \emptyset$ bo'ladi.

Demak,

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} [-\pi; \pi], & c > 1 \\ [-\pi, -\arccos c) \cup (\arccos c, \pi], & -1 \leq c \leq 1. \\ \emptyset, & c < -1 \end{cases}$$



4-rasm.

3-mashq. Quyidagi funksiyalar va $c \in R$ parametrlarning berilgan qiymatlari uchun $A = (-\infty, c)$ to'plamning aslini toping.

$$3.1. f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in [-3, 0] \\ 2 - x, & x \in (0, 3] \end{cases}, c = 1, c = 0$$

$$3.2. f(x) = \begin{cases} 4x, & x \in [-4, 0] \\ 4 - x^2, & x \in (0, 4) \end{cases}, c = 3, c = 0$$

$$3.3. f(x) = \begin{cases} 4x, & x \in [-4, -2] \\ 4 - x^2, & x \in (-2, 4] \end{cases}, c = 0, c = -5$$

$$3.4. f(x) = \begin{cases} 2|x|, & x \in [-2, 0] \\ x^2 - 4, & x \in (0, 3] \end{cases}, c = 0, c = 2$$

$$3.5. f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & x \in [-\pi, 0] \\ \sqrt{x}, & x \in (0, 4] \end{cases}, c = \frac{1}{2}, c = 1$$

$$3.6. f(x) = 4x^2 - 4x + 2, \quad c = 2, \quad c = 10$$

$$3.7. f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1, \quad c = -1, \quad c = -3$$

$$3.8. f(x) = x^4 - 5x^2 + 4, \quad c = 0, \quad c = -2$$

$$3.9. f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-2, 0) \\ 3 - x^2, & x \in [0, 3], \quad c = 0, c = 2 \end{cases}$$

$$3.10. f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [-3, -1] \\ 2x + 2, & x \in (-1, 2], \quad c = 0, c = 1 \end{cases}$$

$$3.11. f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-2, 0) \\ 2|x|, & x \in [0, 2], \quad c = -1, c = 2 \end{cases}$$

$$3.12. f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-2, 0) \\ 2^x, & x \in [0, 1], \quad c = \frac{1}{2}, c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$3.13. f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [1, 2], \quad c = \frac{1}{4}, c = 1 \end{cases}$$

$$3.14. f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \in [-4, 0) \\ x - 2, & x \in [0, 4], \quad c = 0, c = 1 \end{cases}$$

$$3.15. f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \in [-1, 0) \\ \cos x, & x \in [0, \pi], \quad c = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2-§. To‘plamlarning ekvivalentligi. Kantor-Bernshteyn teoremasi.

Ushbu mavzuga doir misollarni yechish uchun to‘plamlarni ekvivalentligi, sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar, to‘plamlarning quvvati kontinuum quvvatli to‘plam kabi tushunchalarni bilish lozim. Bu kabi muhim tushunchalarni [1] va [2] adabiyotlarning tegishli boblaridan o‘qishni tavsiya qilamiz.

1-ta’rif. Agar A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli akslantirish mavjud bo‘lsa, u holda bu to‘plamlar ekvivalent yoki teng quvvatli to‘plamlar deyiladi va $A \sim B$ kabi belgilanadi.

2-ta’rif. Natural sonlar to‘plami va unga ekvivalent bo‘lgan to‘plamlar sanoqli to‘plamlar deyiladi. Sanoqli bo‘lmagan cheksiz to‘plam sanoqsiz to‘plam deyiladi.

Endi to‘plamlarni quvvatini solishtirish uchun muhim bo‘lgan ba’zi teoremlarni keltiramiz.

1-teorema. Chekli yoki sanoqli to‘plamlarning soni chekli yoki sanoqli yig‘indisi ham chekli yoki sanoqli to‘plam bo‘ladi.

2-teorema. Agar A to‘plam sanoqsiz bo‘lib, B uning chekli yoki sanoqli qismi bo‘lsa, u holda $A \setminus B$ to‘plam A to‘plamga ekvivalent bo‘ladi.

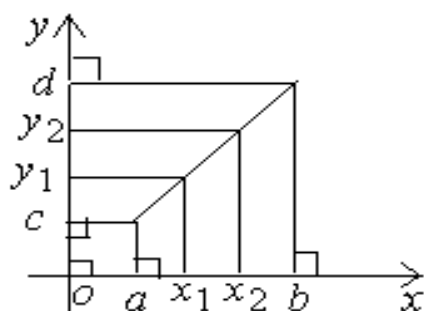
3-teorema (Kantor-Bernshteyn). Agar A va B to‘plamlarning har biri ikkinchisining qismiga ekvivalent bo‘lsa, u holda ular o‘zaro ekvivalent bo‘ladi.

1-misol. $[a, b] \sim [c, d]$ ($a < b$, $c < d$) ekanini ko‘rsating.

Buning uchun (a, c) va (b, d) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz (5-rasm).

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c} \Rightarrow y = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \Rightarrow y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-da}{b-a}$$

Endi $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ nuqtalarni olamiz. $[c, d]$ kesmada ularga mos keluvchi nuqtalar y_1, y_2 bo'lsin. U holda $y_1 - y_2 = \frac{d-c}{b-a}(x_1 - x_2)$ bo'ladi. Bunga ko'ra agar $x_1 \neq x_2$ bo'lsa, u holda $y_1 \neq y_2$ bo'ladi va aksincha, agar $y_1 \neq y_2$ bo'lsa, $x_1 \neq x_2$ bo'ladi. Biz $[a, b]$ va $[c, d]$ kesmalar o'rtasida bir qiymatli munosabat o'rnatdik. Demak, $[a, b] \sim [c, d]$ ekan.



5 –rasm.

2-misol. $[0, 1] \sim (0, 1)$ ekanini ko'rsating.

Buning uchun $x_n = \frac{1}{n}$ ($n = \overline{1, \infty}$) ketma –ketlik olamiz va ushbu

$$\phi(x) = \begin{cases} x_{n+2}, & x = x_n, n \in N, n \geq 2 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ x, & x \neq x_n, x \neq 0, n \in N \\ \frac{1}{3}, & x = 0 \end{cases}$$

funksiyani tuzib olamiz. Tuzilgan $\phi(x)$ funksiya $[0,1]$ segmentni $(0,1)$ oraliqqa o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Demak, $[0,1] \sim (0,1)$ ekan.

3-misol. Koeffitsientlari ratsional sonlardan iborat bo'lgan barcha ko'phadlar to'plami $\mathfrak{R}$ sanoqli to'plam ekanini ko'rsating.

Buning uchun darajasi n dan oshmaydigan ratsional koeffitsientli barcha ko'phadlar to'plamini P_n bilan belgilaymiz:

$$P_n = \left\{ f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_k \in Q, k = \overline{0, n} \right\}$$

P_n va Q^{n+1} to'plamlar o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatamiz. P_n to'plamdan ixtiyoriy $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ element olamiz. Ushbu

$\varphi(f) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ akslantirish P_n to'plamni Q^{n+1} to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Chekli sondagi sanoqli to'plamlarning Dekart ko'paytmasi yana sanoqli to'plam bo'lgani uchun Q^{n+1} sanoqli to'plam bo'ladi. Demak, P_n sanoqli to'plam bo'lgani uchun $\mathfrak{R} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n$ to'plam ham sanoqli to'plam bo'ladi.

4 -mashq.

4.1. Butun sonlar to'plami natural sonlar to'plamiga ekvivalent ekanini ko'rsating.

4.2. Musbat ratsional sonlar to'plami natural sonlar to'plamiga ekvivalent ekanini ko'rsating.

4.3. Ratsional sonlar to'plami natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lishini isbotlang.

4.4. $[0,1]$ kesma va $[a,b]$ ($a < b$) kesma orasida bir qiymatli moslik o'rnatish.

4.5. $(0,1)$ oraliq va $(0,+\infty)$ oraliq o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish.

4.6. $[0,1]$ kesma va $R = (-\infty, +\infty)$ to'plam o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish.

4.7. $[a,b]$ ($a < b$) va $R = (-\infty, +\infty)$ to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish.

4.8. $[0,+\infty)$ va $R = (-\infty, +\infty)$ to'plamlar o'zaro ekvivalentmi?

4.9. $[a,b]$ ($a < b$) kesmani $R = (-\infty, +\infty)$ to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantiradigan uzluksiz funksiya mavjudmi?

4.10. $[a,b]$ ($a < b$) kesmani (c,d) ($c < d$) oraliqqa o'zaro bir qiymatli akslantiruvchi uzluksiz funksiya mavjudmi?

4.11. $[a,b]$ ($a < b$) kesmani va $A = [0,1] \cup [3,4]$ to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantiruvchi uzluksiz funksiya mavjudmi?

4.12. $[0,1]$ kesma bilan $\Gamma = \{(x,y) \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$ aylana o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish.

4.13. $A = \{(x,y) \in R^2; x^2 + y^2 < r^2\}$ va $B = \{(x,y) \in R^2; x^2 + y^2 \leq r^2\}$ ($r > 0$) to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish.

4.14. Tekislik va sfera o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish.

4.15. $A = [0,1] \cap Q$ va $B = ([0,1] \cap Q) \times ([0,1] \cap Q)$ to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish.

5-mashq.

- 5.1. Uchlari ratsional koordinatali nuqtalarida bo'lgan, tekislikdagi barcha kesishmaydigan uchburchaklar to'plamini quvvatini toping.
- 5.2. Uchlari ratsional koordinatali nuqtalarida bo'lgan, tekislikdagi barcha kesishmaydigan to'rtburchaklar to'plamini quvvatini toping.
- 5.3. Markazi ratsional koordinatali nuqtada va radiusi ratsional son bo'lgan tekislikdagi barcha kesishmaydigan aylanalar to'plamining quvvati sanoqli ekanligini isbotlang.
- 5.4. $[a, b] (a < b)$ kesmadagi monoton bo'lgan funksiyaning uzilish nuqtalari to'plami ko'pi bilan sanoqli ekanligini isbotlang.
- 5.5. Butun sonlar o'qida monoton bo'lgan funksiyaning uzilish nuqtalari to'plami ko'pi bilan sanoqli ekanini isbotlang.
- 5.6. Kantor-Bernshteyn teoremasi yordamida $A = [0,1]$ va $[0,1] \times [0,1]$ to'plamlarni ekvivalent ekanligini ko'rsating.
- 5.7. Natural sonlardan tuzilgan qa'tiy o'suvchi ketma – ketliklar to'plami sanoqlimi?
- 5.8. Natural sonlardan tuzilgan ketma – ketliklar to'plami sanoqlimi?
- 5.9. $[0,1]$ kesmadagi o'nli kasr ko'rinishidagi yozuvida 3 raqami qatnashmaydigan sonlar to'plamining quvvatini toping.
- 5.10. $[0,1]$ kesmadagi, o'nli kasr ko'rinishidagi yozuvida faqat 0,1,3,5 raqamlari qatnashadigan sonlar to'plamining quvvatini toping?
- 5.11. Musbat ratsional sonlardan tuzilgan qa'tiy o'suvchi ketma-ketliklar to'plamini quvvatini toping.

5.12. Sonlar o'qida o'zaro kesishmaydigan kesmalar to'plamining quvvatini toping.

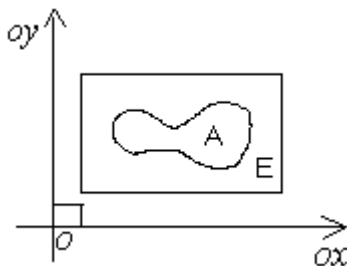
5.13. Tekislikda o'zaro kesishmaydigan kvadratlar to'plamining quvvatini toping.

5.14. $[a, b] (a < b)$ kesmadagi uzluksiz, qa'tiy o'suvchi funksiyalar to'plamini quvvatini toping.

5.15. $[a, b] (a < b)$ kesmada monoton bo'lgan funksiyalar to'plamini quvvatini toping.

3-§. O'lchovli to'plamlar.

Tekislikdagi chegaralangan A to'plam uchun tashqi o'lchov tushunchasini kiritamiz. A to'plam chegaralangan bo'lgani uchun u biror E (tomonlari Ox va Oy o'qlariga parallel) to'g'ri to'rtburchakning qism to'plamidan iborat bo'ladi (6 -rasm).



6-rasm.

E to'g'ri to'rtburchakdagi barcha (tomonlari Ox va Oy o'qlariga parallel) to'g'ri to'rtburchaklar sistemasini G bilan belgilaymiz. G sistema yarim halqa tashkil qiladi. Haqiqatan, har qanday $R_1 \subset G$, $R_2 \subset G$ to'g'ri to'rtburchaklar uchun $R_1 \cap R_2$ ham to'g'ri to'rtburchak (agar ular kesishmasa, bo'sh to'plam) ekanligi ravshan, ya'ni $R_1 \cap R_2 \subset G (\emptyset \subset G)$.

Endi $P \subset G, P_0 \subset G$ to'g'ri to'rtburchaklar uchun $P_0 \subset P$ bo'lsin. U holda to'g'ri to'rtburchakning ta'riflanishidan shunday $P_1, P_2, \dots, P_n$ to'g'ri to'rtburchaklar topiladiki, P to'plam $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ to'g'ri to'rtburchaklarning yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni $P = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$. Endi G yarim halqada m to'plam funksiyasini aniqlaymiz. Agar $P = \emptyset$ bo'lsa, $m(P) = 0$ deymiz. Agar P (yopiq, ochiq yoki yarim ochiq) to'g'ri to'rtburchak bo'lsa, u holda $m(P)$ bilan uning yuzasining son qiymatini belgilaymiz. Masalan,

$$P = \{(x, y) \in R^2, a < x < b, c < y < d, (a < b, c < d)\}$$

bo'lsa, $m(P) = (b - a)(d - c)$ bo'ladi.

$m(P)$ to'plam funksiyasini ba'zi xossalarini isbotsiz keltiramiz.

1⁰. $\forall P \in G$ uchun $m(P) \geq 0$;

2⁰. Agar $P = \bigcup_{k=1}^n P_k, P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j, P_k \in G, k = 1, 2, \dots, n$ bo'lsa, u

holda $m(P) = \sum_{k=1}^n m(P_k)$ bo'ladi.

G yarim halqani o'zida saqllovchi minimal halqani G_0 bilan belgilaylik.

$G \subset G_0$ bo'lgani uchun har qanday $P \in G_0$ uchun shunday

$$P_1, P_2, \dots, P_n \in G, P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j \quad (1)$$

to'rtburchaklar mavjudki, $P = \bigcup_{k=1}^n P_k$ bo'ladi. Endi G_0 da $m'(P)$ to'plam

funksiyasini quyidagicha aniqlaymiz $m'(P) = \sum_{k=1}^n m(P_k)$.

Bu $m'(P)$ o'lchov $P \in G_0$ to'plamning (1) ko'rinishiga bog'liq emas. Faraz qilaylik $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ $P_k \in G$ ($k = \overline{1, \infty}$) soni chekli yoki sanoqli to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi bo'lib, $A \subset E$ to'plamni qoplasin: $A \subset \bigcup_k P_k$. Ma'lumki, bunday to'g'ri to'rtburchaklar sistemasini cheksiz ko'p usul bilan tuzish mumkin. Shuning uchun $\sum_k m(P_k)$ yig'indi ham cheksiz ko'p qiymatga ega va har bir P_k uchun $m(P_k) \geq 0$ bo'lganligi uchun bu yig'indi quyidan chegaralangan bo'ladi.

1-ta'rif. A to'plamning tashqi o'lchovi deb $\inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum_k m(P_k)$ songa aytiladi va $\mu^*(A)$ kabi belgilanadi. Bunda aniq quyi chegara A to'plamni qoplovchi to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi bo'yicha olinadi.

2-ta'rif. Agar $P \subset E$ to'plam uchun shunday

$$P_1, P_2, \dots, P_n \in G, P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j \text{ to'g'ri to'rtburchaklar topilib, } \bigcup_{k=1}^n P_k = P$$

bo'lsa, P to'plam elementar to'plam deyiladi.

3-ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $B \subset E$ elementar to'plam topilib, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A to'plam Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam deyiladi.

Ixtiyoriy n -o'lchamli fazoda ham Lebeg o'lchovi tushunchasi huddi shunday kiritiladi. O'lchovning additivlik, σ -additivlik, uzluksizligi, yarim halqadan halqaga davom qilishi kabi xossalarni [1] va [2] adabiyotlardan batafsil o'rganishni tavsiya qilamiz.

1-misol. $A = \{x \in R : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$ to'plam o'lchovli to'plam ekanini ko'rsating va o'lchovini toping (7-rasm).

Ma'lumki, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday B elementar to'plam topilib, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A to'plam o'lchovli to'plam deyiladi. Ushbu $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, $\delta = \frac{1}{n}$ sonlarni aniqlab, quyidagicha to'plamlar ketma-ketligini tuzamiz:

$$P_k^\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : (k-1)\delta \leq x_2 \leq k\delta, 0 \leq x_1 \leq 1 - (k-1)\delta \right\}, k = \overline{1, n}.$$

Endi P_k^ε to'g'ri to'rtburchaklar birlashmasidan iborat bo'lgan

$B_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^n P_k^\varepsilon$ elementar to'plam tuzamiz (8-rasm). Agar

$$Q_k^\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : (k-1)\delta \leq x_2 \leq k\delta, 1 - k\delta \leq x_1 \leq 1 - (k-1)\delta \right\}$$

bo'lsa, u holda

$$A \Delta B_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus A \subset \bigcup_{k=1}^n Q_k^\varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'ladi (9-rasm). $\bigcup_{k=1}^n Q_k^\varepsilon$ - elementar to'plam bo'lgani uchun

$$\mu^*(A \Delta B_\varepsilon) \leq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^n Q_k^\varepsilon\right) = \sum_{k=1}^n m(Q_k^\varepsilon) = n\delta^2 = \delta \leq \varepsilon.$$

Demak, A o'lchovli to'plam ekan. Endi uni o'lchovini topamiz.

$$\begin{aligned} \mu(B_\varepsilon) &= m'(B_\varepsilon) = \sum_{k=1}^n m(P_k^\varepsilon) = \delta^2 + 2\delta^2 + \dots + n\delta^2 = \delta^2(1 + 2 + \dots + n) = \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

va $A \subset B_\varepsilon$ bo'lgani uchun $\mu(A) \leq \inf_{\varepsilon} \mu(B_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}.$

Demak, $\mu(A) \leq \frac{1}{2}$.

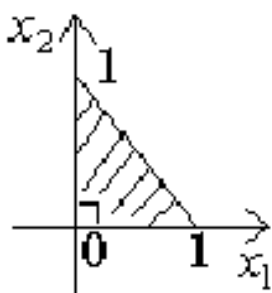
Endi $C_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{n-1} (P_k^\varepsilon \setminus Q_k^\varepsilon)$ elementar to'plamni qaraymiz. $C_\varepsilon \subset A$ bo'lgani

uchun $\mu(A) \geq \sup_\varepsilon \mu(C_\varepsilon)$ bo'ladi. Agar

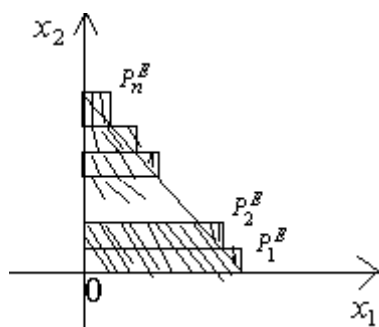
$$\mu(C_\varepsilon) = m'(C_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n-1} m(P_k^\varepsilon \setminus Q_k^\varepsilon) = \delta^2 + 2\delta^2 + \dots + (n-1)\delta^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

ekanini hisobga olsak, $\mu(A) \geq \sup_\varepsilon \mu(C_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}$ bo'ladi.

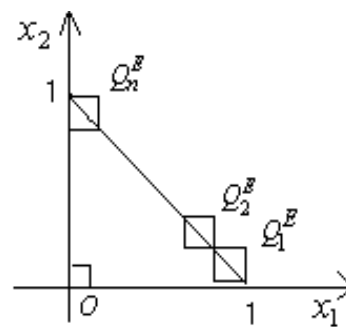
Demak, $\mu(A) = \frac{1}{2}$.



7-rasm.



8-rasm.



9-rasm.

2-misol. Agar A ($A \subset [0,1]$) to'plam o'nli kasr ko'rinishida yozilganda ketma-ket 2 marta 3 raqami qatnashmaydigan sonlar to'plami bo'lsa, uning o'lchovini toping.

Buning uchun K orqali $[0,1]$ kesmaga qarashli va o'nli kasr ko'rinishidagi $0,33\dots$, $0,\dots33\dots$, va hokazo sonlar to'plamini belgilaymiz. Bu yerda nuqtalar bilan ixtiyoriy raqamlar belgilangan. U holda $A \subset [0;1] \setminus K$ bo'ladi. Endi $[0; 1]$ kesmani teng yuz bo'lakka bo'lamiz va $[0,33; 0,34]$ kesmani chiqarib tashlaymiz, qolgan 99 bo'lakning har birini 100 bo'lakka bo'lamiz va ularning har biridan 34-

o'rindagisini chiqarib tashlaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom qildiramiz. Natijada K to'plamga, ya'ni sanoqli sondagi chiqarib tashlangan to'plamlar birlashmasiga ega bo'lamiz. Demak,

$$\mu(K) = 0,01 + 99 \cdot 0,0001 + \dots = 0,01 \cdot \frac{1}{1 - 0,99} = 1.$$

K va $[0,1]$ to'plamlar o'lchovli bo'lgani uchun $[0,1] \setminus K = A$ to'plam ham o'lchovli bo'ladi.

$$\mu(A) = \mu([0,1] \setminus K) = 1 - \mu(K) = 1 - 1 = 0.$$

3-misol. Quyidagi

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}; \frac{2n+1}{2n+2} \right)$$

to'plamning o'lchovli ekanligini ko'rsating va o'lchovini toping.

A to'plam sanoqli sondagi o'lchovli to'plamlar birlashmasidan iborat bo'lgani uchun u o'lchovli bo'ladi. Ushbu

$$A_1 = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right), A_2 = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{6} \right), \dots$$

to'plamlar o'zaro kesishmasligi va o'lchovning σ -additivligiga ko'ra

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

6-mashq.

6.1. $A = [-4;6] \cap Q$, $B = [0;10] \setminus Q$ bo'lsa, $A \Delta B$ to'plamning o'lchovini toping.

6.2. $A = [0;10] \cap Q$, $B = [-2;2] \cup [8;12]$ bo'lsa, $A \Delta B$ to'plamning o'lchovini toping.

6.3. $A = [-10;0] \cup [2;10]$, $B = [-4;4] \cup [8;12]$ bo'lsa, $A \Delta B$ to'plamning o'lchovini toping.

6.4. $A = [-5; 5] \cup \left\{ \frac{5n+1}{n}, n \in N \right\}$, $B = [0; 8]$ bo'lsa, $A \Delta B$ to'plamning o'lchovini toping.

6.5. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{20}; \frac{1}{n} + \frac{1}{20} \right)$ to'plamning o'lchovini toping.

6.6. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!}; \frac{1}{n!} \right)$ to'plamning o'lchovini toping.

6.7. $A = \left\{ x; \exists n \in N, \frac{1}{2^n} < x < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10^n} \right\}$ to'plamning o'lchovi 1 dan kattami?

6.8. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}; \frac{3n+1}{3n+2} \right)$ to'plamning o'lchovi $\frac{2}{9}$ dan katta ekanini ko'rsating.

6.9. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{20}; \frac{1}{2^n} + \frac{1}{20} \right)$ to'plamning o'lchovini toping.

6.10. $[0; 1]$ kesmadagi, o'nli kasr ko'rinishida yozganda 3 raqami qatnashmaydigan sonlar to'plamning o'lchovini toping.

6.11. $A = \left\{ x; \operatorname{tg} \frac{1}{x} < 0, 0 < x < 1 \right\}$ to'plamning o'lchovini toping.

6.12. $A = \left\{ (x, y) \in R^2, x^2 > y \right\} \cap ([-4; 4] \times [-4; 4])$ to'plamning o'lchovini toping.

6.13. $A = \left\{ (x, y) \in R^2, y \geq x^2 \right\} \cap ([-2; 2] \times [-2; 2])$ to'plamning o'lchovini toping.

6.14. Kamida bitta ichki nuqtaga ega bo'lgan to'plamning o'lchovi 0 ga teng bo'lishi mumkinmi?

6.15. $A = [0;2] \cup ([4;10] \cap Q) \cup ([10;13] \setminus Q) \cup \left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ to'plamni o'lchovini toping.

7-mashq.

7.1. E to'plam $[0;1]$ kesmaning o'lchovi 0 ga teng bo'lgan qism to'plami. $\bar{E}$ ning ham o'lchovi 0 ga teng bo'ladimi?

7.2. $[0;1]$ kesmada zich, o'lchovi 0 ga teng bo'lgan sanoqsiz to'plam mavjudmi?

7.3. $[a,b]$ kesmada o'lchovi $b-a$ ga teng bo'lgan, $[a,b]$ dan farqli yopiq to'plam tuzish mumkinmi?

7.4. $[0;1]$ kesmaning hech qayerida zich bo'lmagan, o'lchovi 0,9 ga teng bo'lgan mukammal to'plam tuzing.

7.5. $[0;1]$ kesmaning hech qayerida zich bo'lmagan, o'lchovi a ($0 < a < 1$) ga teng bo'lgan mukammal to'plam tuzing.

7.6. $[0;1]$ kesmada $\mu(A_1) + \mu(A_2) > 1$ shartni qanoatlantiruvchi ikkita o'lchovli A_1, A_2 to'plamlar berilgan. $\mu(A_1 \cap A_2) > 0$ ekanini isbotlang.

7.7. $A_1, A_2, \dots, A_n$ to'plamlar $[0;1]$ segmentning o'lchovli qismlari bo'lib,

$\mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n) > n-1$ bo'lsa, $\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) > 0$ tengsizlikni

isbotlang.

7.8. $E \subset \mathbb{R}$ musbat o'lchovli to'plam bo'lsin. U holda $x_1 \cdot x_2$ ko'paytmasi irratsional son bo'ladigan shunday $x_1, x_2 \in E$ sonlar topilishini isbotlang.

7.9. $\mathbb{R}^2$ tekislikda A no‘plamni quyidagicha aniqlaymiz: $[0,1] \times [0,1]$ kvadratni $x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ to‘g‘ri chiziqlar yordamida 9 ta bir hildagi yopiq kvadratchalarga ajratamiz. Markazida joylashgan ochiq kvadratchani chiqarib tashlaymiz. Qolgan 8 ta kvadratchani ham huddi shunday 9 ta kvadratchalarga ajratib markazda joylashganini chiqarib tashlaymiz. Bu jarayonni sanoqli marta davom ettirib qolgan to‘plamni A orqali belgilaymiz va bu to‘plamga Serpinskiy gilami deyiladi. Serpinskiy gilamining Lebeg o‘lchovini toping.

7.10. $\mathbb{R}^2$ tekislikda A no‘plamni quyidagicha aniqlaymiz: $[0,1] \times [0,1]$ kvadratni $x = \frac{1}{3}, x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ to‘g‘ri chiziqlar yordamida 9 ta bir hildagi yopiq kvadratchalarga ajratamiz. Berilgan kvadrat uchlariga yopishgan 4 ta kvadratni birinchi rangdagi kvadratchalar deymiz va ularning birlashmasini A_1 orqali belgilaymiz. Har bir birinchi rangdagi kvadrachalarni yana 9 ta teng kvadratchaga ajratib bo‘lingan kvadratning uchiga yopishgan 16 ta kvadratchalar birlashmasini A_2 orqali belgilaymiz va hokazo shu jarayonni cheksiz davom ettirib $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ to‘plamlar ketma-ketligini hosil qilamiz.

$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ to‘plamga Serpinskiy qabristoni deyiladi. Serpinskiy

qabristonining Lebeg o‘lchovini toping.

7.11. $D-[0;1]$ segmentdagi Kantor to‘plami bo‘lsa,

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0;1], y \in D\}$ to‘plamni o‘lchovini toping.

7.12. $D \subset [0;1]$ segmentdagi Kantor to'plami bo'lsa, $E = ([0;1] \setminus D) \times ([0;1] \setminus D)$ to'plamni o'lchovini toping.

7.13. $E \subset R$ – o'lchovli to'plam bo'lib, $\mu(E) = p > 0$. U holda ixtiyoriy q ($0 < q < p$) soni uchun $\mu(E_1) = q$ bo'ladigan $E_1 \subset E$ o'lchovli to'plam mavjudligini isbotlang.

7.14. $[0;1] \times [0;1]$ to'plamning hech qayerida zich bo'lmagan, o'lchovi a ($0 < a < 1$) ga teng bo'lgan mukammal to'plam tuzing.

7.15. $[0;1]$ kesmani o'zaro kesishmaydigan, o'lchovli A va B to'plamlarga quyidagi $\forall (a,b) \subset [0;1]$ uchun

$$m((a,b) \cap A) > 0, m((a,b) \cap B) > 0$$

shartlar bajariladigan qilib ajratish mumkinmi?

4-§. O'lchovli funksiyalar

$E \subset R^n$ o'lchovli to'plamda aniqlangan $f(x)$ haqiqiy funksiya berilgan bo'lsin. $E\{f > a\}$ orqali $f(x) > a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in E$ elementlar to'plamini belgilaymiz. huddi shunga o'xshash qilib, $E\{f \geq a\}, E\{f \leq a\}, E\{f = a\}, E\{a < f < b\}$ to'plamlarni kiritamiz.

1-ta'rif. Agar har qanday $a \in R$ soni uchun $E\{f > a\}$ to'plam o'lchovli bo'lsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda o'lchovli deyiladi.

1-teorema. a) Agar $f(x)$ funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda har qanday haqiqiy a va b sonlar uchun

1) $E\{f \geq a\}$ 2) $E\{f \leq a\}$ 3) $E\{f = a\}$ 4) $E\{a < f < b\}$ 5) $E\{f < a\}$

to'plamlarning har biri ham o'lchovli bo'ladi.

b) Agar 1), 2), 4), 5) to'plamlarning birortasi o'lchovli bo'lsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda bu funksiya E to'plamning ixtiyoriy o'lchovli E_1 qismida ham o'lchovli bo'ladi.

3-teorema. $\{E_k\}$ soni chekli yoki sanoqli, birorta yopiq sharda joylashgan, o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya bu to'plamlarning har birida o'lchovli bo'lsa, u holda bu funksiya $E = \bigcup_k E_k$ to'plamda ham o'lchovli bo'ladi.

Bu teoremlarni isbotini [1], [2] adabiyotlardan o'rganishingizni tavsiya qilamiz. Endi o'lchovli funksiyalarning ba'zi xossalarini keltirib o'tamiz.

1. Ikkita $f_1(x)$ va $f_2(x)$ o'lchovli funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, bo'linmasi ($f_2(x) \neq 0$ bo'lgan holatda) ham o'lchovli funksiya bo'ladi.

2. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklari o'lchovli E to'plamning deyarli barcha nuqtalarida $f(x)$ funksiyaga yaqinlashsa, ya'ni $\mu\left(\left\{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya ham o'lchovli bo'ladi.

3. Agar $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar E to'plamda bir-biriga ekvivalent ($\mu(\{x \in E : f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$) bo'lib, ulardan biri o'lchovli bo'lsa, ikkinchisi ham o'lchovli bo'ladi.

2-ta'rif. Chekli o'lchovli E to'plamda $\{f_n(x)\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi va $f(x)$ o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin. Agar $\forall \delta > 0$ soni uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0$ bo'lsa, o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda $f(x)$ funksiya o'lchov bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

4. Agar $\{f_n(x)\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f(x)$ funksiya deyarli yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlik $f(x)$ funksiya o'lchov bo'yicha ham yaqinlashadi.

5. Agar $\{f_n(x)\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f(x)$ funksiya o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, bu ketma-ketlikdan $f(x)$ funksiya deyarli yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

6. Agar $\{f_n(x)\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi chekli o'lchovli E to'plamda $f(x)$ funksiya deyarli yaqinlashsa, u holda $\forall \delta > 0$ soni uchun shunday $E_\delta \subset E$ o'lchovli to'plam topiladiki,

a) $\mu(E_\delta \setminus E) < \delta$,

b) $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi E_δ to'plamda $f(x)$ funksiya tekis yaqinlashadi.

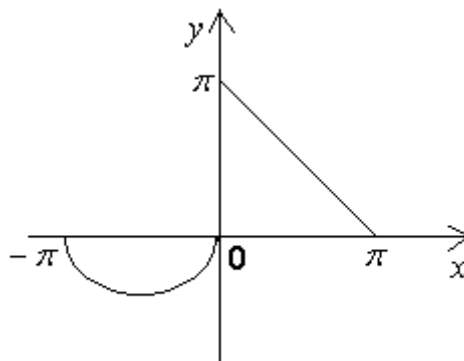
1-misol. $E = [-\pi; \pi]$ to'plamda $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi; 0] \\ \pi - x, & x \in (0; \pi] \end{cases}$

funksiyaning o'lchovli ekanligini ko'rsating.

Bu funksiyaning grafigini yasaymiz (10 –rasm.).

$\forall a \in R$ uchun $E\{f > a\}$ to'plam o'lchovli ekanini ko'rsatamiz.

$$E\{f > a\} = \begin{cases} [-\pi; \pi], & a \in (-\infty; -1) \\ [-\pi, -\pi + \arcsin a) \cup (-\arcsin a, \pi], & a \in [-1, 0) \\ [0, \pi - a), & a \in [0, \pi] \\ \emptyset, & a \in (\pi; +\infty) \end{cases}$$



10-rasm.

Yuqoridagi to'rtta to'plamning har biri o'lchovli bo'lgani uchun $\{f > a\}$ to'plam o'lchovli bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya E da o'lchovli.

2-misol. Ushbu $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \in [0, 1) \\ 2x - 3, & x \in [1, 2] \end{cases}$ funksiya $E = [0, 2]$

to'plamda o'lchovli ekanini ko'rsating.

Buning uchun har qanday $a \in R$ uchun $E\{f > a\}$ to'plamning o'lchovli ekanini ko'rsatamiz.

$$E\{f > a\} = \begin{cases} [0; 2], & a \in (-\infty; -1) \\ [0; 1] \cup \left(\frac{a+3}{2}; 2\right], & a \in [-1; 0) \\ [0; \sqrt{1-a}) \cup \left(\frac{a+3}{2}; 2\right], & a \in (0; 1) \\ \emptyset, & a \in [1; +\infty) \end{cases}$$

Barcha holatlarda $E\{f > a\}$ to'plam elementar to'plam bo'lgani uchun $f(x)$ funksiya E da o'lchovli bo'ladi.

3-misol. E to'plamda $|f(x)|$ funksiya o'lchovli bo'lsa, $f(x)$ funksiya ham o'lchovli bo'ladimi?

$E = [0;1]$ to'plamda o'lchovli bo'lmagan A qism to'plam berilgan bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning quyidagicha tuzamiz:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ -1, & x \in E \setminus A \end{cases}$$

Bu funksiya o'lchovli emas chunki $-1 < a < 1$ uchun $E\{f > a\} = A$ o'lchovli to'plam emas. Lekin $|f|$ funksiya E da o'lchovli. Demak, $|f|$ funksiya o'lchovli ekanidan $f(x)$ funksiya o'lchovli ekanligi kelib chiqmaydi.

8-mashq. Quyidagi funksiyalar o'lchovli bo'ladimi?

$$8.1. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1;0) \\ 1, & x = 0 \\ -1, & x \in (0;1] \end{cases}$$

$$8.2. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2;-1) \\ 2x, & x \in [-1;1) \\ -1, & x \in [1;2] \end{cases}$$

$$8.3. f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1;0) \\ x^2, & x \in [0;1) \\ x-2, & x \in [1;2] \end{cases}$$

$$8.4. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1;0) \\ 3, & x = 0 \\ x-1, & x \in (0;1] \end{cases}$$

$$8.5. f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 1, & x \in [-1;0) \\ 2, & x = 0 \\ -(x-1)^2 + 1, & x \in (0;2] \end{cases}$$

$$8.6. f(x) = \begin{cases} -x-2, & x \in [-2;0) \\ -1, & x = 0 \\ \operatorname{tg} x, & x \in (0; \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$8.7. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0;1) \\ 0, & x = 1 \\ -(x-2)^2, & x \in (1;3] \end{cases}$$

$$8.8. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [-2;2) \\ 0, & x = 2 \\ -|x-3| + 1, & x \in (2;4] \end{cases}$$

$$8.9. f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \in [-1;0) \\ 2, & x = 0 \\ |x-1|-1, & x \in (0;1] \end{cases} \quad 8.10. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \in [0;10] \setminus Q \\ e^{\sin x}, & x \in [0;10] \cap Q \end{cases}$$

$$8.11. f(x) = \begin{cases} x \sin \pi x, & x \in [-1;3] \setminus Q \\ \ln|x|, & x \in [3;5] \setminus Q \\ \cos x, & x \in [-1;5] \cap Q \end{cases} \quad 8.12. f(x) = \begin{cases} e^x \sin x, & x \in K \\ \cos^2 x + x^3, & x \in [0;1] \setminus K \\ x^2 + x + 1, & x \in (1;2] \end{cases}$$

(K - Kantor to'plami)

$$8.13. f(x) = \begin{cases} x^4 + x^3 + 1, & x \in K \cap Q \\ x^2 + e^x, & x \in K \setminus Q \\ \cos x + \sin x, & x \in [0;1] \setminus K \end{cases}$$

(K - Kantor to'plami)

$$8.14. f(x) = \begin{cases} \cos x + \sin 2x, & x \in [0;1] \setminus \left\{ \sin \frac{1}{x} = 0 \right\} \\ x \cdot |x| + \cos 2x, & x \in [0;1] \cap \left\{ \sin \frac{1}{x} = 0 \right\} \\ e^x + \operatorname{tg} x, & x \in (1;2] \end{cases}$$

$$8.16. f(x) = \begin{cases} x^3 + \sin 3x, & x \in [0;1] \setminus Q \\ x^2 + 4x, & x \in [0;1] \cap Q \\ x \cdot \sin x, & x \in (1;2] \end{cases}$$

9-mashq. Quyidagi tasdiqlarni to'g'riligini isbotlang.

9.1. Agar $(f(x))^{2n+1}$, $(n \in N)$ o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya ham o'lchovli bo'ladi.

9.2. Agar $(f(x))^{2n}$, $(n \in \mathbb{N})$ o'lchovli funksiya bo'lsa, umumiy holda qaraganda $f(x)$ funksiya o'lchovli bo'lishi kelib chiqmaydi.

9.3. Agar E to'plamda $f(x)$ funksiya o'lchovli va $\forall x \in E$ uchun $f(x) > 0$ bo'lsa, u holda $\ln f(x)$ funksiya ham o'lchovli bo'ladi.

9.4. Agar $f(x)$ o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda $\max\{f, 0\}$, $\min\{f, 0\}$ funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi.

9.5. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ funksiyalar ham o'lchovli bo'ladi.

9.6. Agar $f(x)$ funksiya har qanday $[\alpha; \beta]$ ($a < \alpha < \beta < b$) kesmada o'lchovli bo'lsa, u holda u $[a; b]$ da ham o'lchovli bo'ladi.

9.7. Agar $f(x)$ o'lchovli bo'lsa, $e^{f(x)}$ funksiya ham o'lchovli bo'ladi.

9.8. Agar $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, u holda u o'lchovli funksiya bo'ladi.

9.10. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmaning har bir nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, u holda $f'(x)$ funksiya ham o'lchovli bo'ladi.

9.11. Agar $f(x)$ funksiya E da o'lchovli bo'lsa, u holda

$$[f(x)]_a^b = \begin{cases} f(x), & a \leq f(x) \leq b \\ a, & f(x) < a \\ b, & f(x) > b \end{cases} \quad \text{funksiya ham o'lchovli bo'ladi.}$$

Bunda $a, b \in \mathbb{R}$ va $a < b$.

9.12. $\phi(t)$ funksiya E to'plamda o'lchovli va $E_1 = \phi(E)$ bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya E_1 da uzluksiz bo'lsa, $f(\phi(t))$ funksiya E da o'lchovli bo'ladi.

9.13. Agar $g(x)$ va $f(x)$ ($f(x) > 0$) funksiyalar E da o'lchovli bo'lsa, u holda $(f(x))^{g(x)}$ funksiya xam E da o'lchovli bo'ladi.

9.14. Agar $f(x)$ funksiya E da o'lchovli bo'lsa, $\phi(t) = \mu[E\{x \in E, f(x) < t\}]$ funksiya ham E da o'lchovli bo'ladi.

9.15. Agar $f(x)$ funksiya E da o'lchovli bo'lsa, $\phi(t) = \mu[E\{x \in E, f(x) > t\}]$ funksiya ham E da o'lchovli bo'ladi.

9.16. Agar $f(x)$ funksiya $[0;1]$ da aniqlangan o'lchovli va deyarli chekli funksiya bo'lsa, u holda $\mu(E\{f \geq h\}) \geq \frac{1}{2}$, $\mu(E\{f \geq H\}) < \frac{1}{2}$, $H > h$ shartlarni qanoatlantiruvchi h, H sonlar mavjudligini isbotlang.

10-mashq.

10.1. $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma – ketligi E da o'lchov bo'yicha $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi. Agar $\forall x \in E$ va $\forall n \in N$ soni uchun $f_n(x) \leq a$ bo'lsa, u holda $f(x) \leq a$ tengsizlik deyarli barcha $x \in E$ uchun bajarilishini isbotlang.

10.2. $[0;1]$ kesmada aniqlangan shunday o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi ko'rsatingki, u o'lchov bo'yicha yaqinlashsin, ammo birorta ham nuqtada oddiy ma'noda yaqinlashmasin.

10.3. Agar $f_n(x) \sim g_n(x)$, $\forall n \in N$, $f_n \xrightarrow{d.y.} f$, $g_n \xrightarrow{d.y.} g$ bo'lsa, u holda $f \sim g$ bo'lishini isbotlang.

10.4. Agar $f_n(x) \sim g_n(x)$, $\forall n \in N$ va $f_n \xrightarrow{o'.b.} f$, $g_n \xrightarrow{o'.b.} g$ bo'lsa, u holda $f \sim g$ bo'lishini isbotlang.

10.5. $[0;1]$ segmentdagi barcha ratsional sonlarni nomerlab chiqamiz, k -nomerdagi ratsional son $r_k = p_k / q_k$ (qisqarmas kasr) bo'lib, $f_k(x) = e^{(p_k - xq_k)^2}$ bo'lsin. U holda $f_k(x) \xrightarrow{o'.b.} 0$ bo'lishini ko'rsating va shunday $\{f_{n_k}(x)\}$ qisman ketma-ketlik ajratingki, $f_{n_k}(x) \xrightarrow{d.y.} 0$ bo'lsin.

10.6. $[0;1]$ segmentda quyidagicha funksiyalar ketma-ketligi tuzamiz:

$$f_i^k(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i-1}{k} \leq x < \frac{i}{k}, \quad i = \overline{1, k}, \quad k \in N \\ 0, & \text{qolgan } x \text{ larda} \end{cases}$$

$$g_n(x) = f_i^k(x), \quad n = \frac{k(k-1)}{2} + i, \quad k \in N, \quad i = \overline{1, k}. \text{ U holda}$$

a) $g_n(x) \xrightarrow{o'.b.} 0$ bo'lishini isbotlang.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0;1]$ uchun o'rinli bo'lishini isbotlang.

10.7. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi bo'lsa, $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$ funksiyalar ham o'lchovli ekanligini isbotlang.

10.8. Agar $\{f_n\}$ E da o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi bo'lsa, $A = \{x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ mavjud}\}$ to'plam o'lchovli bo'lishini isbotlang.

10.9. f_n, g_n, f, g - lar chekli o'lchovli E to'plamda o'lchovli funksiyalar bo'lib, $f_n \xrightarrow{o'.b.} f, g_n \xrightarrow{o'.b.} g$ bo'lsa, u holda $f_n \cdot g_n \xrightarrow{o'.b.} f \cdot g$ bo'lishini isbotlang.

10.10. $[0;1]$ segmentda o'lchovli $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan. $f_n \xrightarrow{d.y.} f$ bo'lishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ soni olganda ham

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} \{|f_i - f| \geq \varepsilon\} \right) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli ekanini isbotlang.

10.11. f_n, f funksiyalar E da o'lchovli funksiyalar bo'lib, deyarli barcha $x \in E$ da $f_n \geq 0$ va $f_n \xrightarrow{o'b.} g$ bo'lsa, u holda deyarli barcha $x \in E$ da $f(x) \geq 0$ bo'lishini isbotlang.

10.12. Agar $f(x)$ funksiya o'lchovli bo'lsa, $|f(x)|$ funksiya ham o'lchovli bo'lishini isbotlang.

10.13. Agar ixtiyoriy $r \in Q$ uchun $E\{f > r\}$ o'lchovli to'plam bo'lsa, f o'lchovli ekanini isbotlang.

10.14. A - Lebeg ma'nosida o'lchovsiz to'plam $f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ -x, & x \notin A \end{cases}$ funksiya o'lchovli bo'ladimi?

10.15. f_n, f o'lchovli funksiyalar bo'lib, $f_n \xrightarrow{o'b.} f$ bo'lsa u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi o'lchov bo'yicha fundamental bo'ladi, ya'ni $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ soni uchun $\exists n_0 \in N$ son mavjudki, $\forall i, j > n_0$ larda $\mu(\{|f_i - f_j| \geq \delta\}) < \varepsilon$, tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5-§. Lebeg integrali

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralangan bo'lib,
 $A = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $B = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ ($A < B$) bo'lsin. $[A,B]$ kesmani
quyidagicha n ta bo'lakka bo'lamiz:

$$A = y_0 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = B$$

Endi quyidagicha yig'indilar tuzamiz:

$$s = \sum_{i=1}^n y_{i-1} \mu(e_i), \quad S = \sum_{i=1}^n y_i \mu(e_i) \quad (1)$$

bunda $e_i = E\{x \in E, y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$ va $\mu - [a,b]$ kesmadagi Lebeg o'lchovi. (1) yig'indilar mos ravishda Lebeg integralining quyi va yuqori yig'indilari deyiladi. $\lambda = \max_i (y_i - y_{i-1})$ bo'lsin. Agar $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s$ va $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S$ limitlar mavjud va teng bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi, bu limit esa $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi integrali deyiladi va $\int_{[a,b]} f(x) d\mu$ kabi belgilanadi.

Endi Lebeg integralining ba'zi xossalari keltiramiz.

1^o. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi.

2^o. Agar ixtiyoriy $x \in [a,b]$ uchun $m \leq f(x) \leq M$ bo'lsa, u holda $m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x) d\mu \leq M(b-a)$ bo'ladi.

3⁰. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\forall c \in [a,b] \text{ uchun } \int_{[a,b]} f d\mu = \int_{[a,c]} f d\mu + \int_{[c,b]} f d\mu \text{ tenglik o'rinli bo'ladi.}$$

4⁰. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi

$$\text{bo'lsa, u holda } \int_{[a,b]} (f \pm g) d\mu = \int_{[a,b]} f d\mu \pm \int_{[a,b]} g d\mu \text{ tenglik o'rinli}$$

bo'ladi.

5⁰. Agar $[a,b]$ integrallanuvchi $f(x), g(x)$ funksiyalar uchun

$$f(x) \leq g(x) \text{ bo'lsa, u holda } \int_{[a,b]} f(x) d\mu \leq \int_{[a,b]} g(x) d\mu \text{ tengsizlik o'rinli}$$

bo'ladi.

6⁰. $[a,b]$ da integrallanuvchi $|f(x)|$ funksiya uchun

$$\left| \int_{[a,b]} f d\mu \right| \leq \int_{[a,b]} |f| d\mu \text{ tengsizlik o'rinli bo'ladi.}$$

7⁰. Agar $|f(x)|$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsa, u holda

$f(x)$ funksiya xam $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'ladi.

Lebeg integralining ta'rifini, chekli va cheksiz o'lchovli to'plamlar bo'yicha ixtiyoriy o'lchovli funksiyaning Lebeg integrali ta'rifini, Lebeg va Riman integralini solishtirishni, Lebeg, Levi, Fatu teoremlarini hamda Lebeg integralining qolgan xossalarini [1], [2] – adabiyotlardan o'rganishni talabalarga tavsiya qilamiz.

1–misol. Quyidagi

$$f(x) = \begin{cases} n^2, & x \in (\frac{1}{3^{n+1}}; \frac{1}{3^n}], n = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & x \in (\frac{1}{3}; 1]. \end{cases}$$

funksiyaning integrallanuvchiligini ko'rsatib, Lebeg integralini hisoblang.

$f(x)$ – sodda funksiya, chunki u $A_n = (\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}]$ o'lchovli to'plamlarda $y_n = n^2$ qiymatlarni qabul qiladi, $\mu(A_n) = \frac{2}{3^{n+1}}$,

$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n \left(\frac{2n^2}{3^{n+1}} \right)$ qator absolyut yaqinlashuvchi, shuning uchun

$f(x)$ Lebeg ma'nosida integrallanuvchi va

$$\int_{[0,1]} f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n \left(\frac{2n^2}{3^{n+1}} \right) \text{ bo'ladi.}$$

2–misol. Quyidagi $f(x)$ funksiyaning Lebeg va Riman ma'nosida integrallanuvchiligini tekshiring. Bu yerda $f(x) = (-1)^n \cdot n$, agar $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \dots$

$f(x)$ – o'lchovli, chunki $A_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \dots$ to'plamlarda $y_n = (-1)^n \cdot n$ qiymatlarni qabul qiladigan sodda funksiya. Bu funksiya Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lishi uchun

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_n (-1)^n \frac{1}{n(n+1)} \quad (2)$$

bo'ladi. (2) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $f(x)$

funksiya Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'ladi.

3-misol. Quyidagi funksiyalarning $[0,1]$ kesmada Lebeg va Riman ma'nosida integrallanuvchiligini tekshiring va agar mavjud bo'lsa,

$\int_{[0,1]} f(x) d\mu$ integralni hisoblang.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \setminus Q \\ x^3, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \setminus Q \\ \frac{1}{x}, & x \in (0,1] \cap Q \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cap K \\ x^3, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap Q \\ x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus K \\ \frac{1}{x}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \setminus Q \end{cases}$$

(K - Kantor to'plami)

a) $f(x)$ Riman ma'nosida integrallanuvchi emas, chunki u chegaralanmagan. $f(x)$ - quyidagi

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ x^3, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \text{ funksiyaga ekvivalent, chunki}$$

$$\mu(\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}) = \mu(Q \cap [0,1]) = 0$$

$g(x)$ —chegaralangan va faqat bitta $x = \frac{1}{2}$ nuqtada uzilishga ega, shuning uchun u Riman ma'nosida integrallanuvchi. Lebeg va Riman integrallarini taqqoslash haqidagi teorema ko'ra $g(x)$ Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi va

$$\int_{[0,1]} g(x) d\mu = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^3 dx = \frac{1}{24} + \frac{15}{64} = \frac{53}{192}$$

$f(x) \sim g(x)$ bo'lganligi uchun $f(x)$ ham Lebeg ma'nosida integrallanuvchi va

$$\int_{[0,1]} f(x) d\mu = \int_{[0,1]} g(x) d\mu = \frac{53}{192}$$

b) $f(x)$ funksiya ushbu $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 0,5, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$ funksiya ga ekvivalent.

Haqiqatan ham

$$\mu(\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}) = \mu\left(\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap K\right) \cup \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap Q\right)\right) = 0$$

$g(x)$ – chegaralangan va faqat bitta uzilish $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ nuqtasiga ega.

Shuning uchun u Riman ma'nosida (Lebeg ma'nosida ham) integrallanuvchi va

$$\int_{[0,1]} g(x) d\mu = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x} = \frac{1}{24} + \ln 2$$

$f \sim g$ bo'lgani uchun $f(x)$ funksiya ham Lebeg ma'nosida integrallanuvchi va $\int_{[0,1]} f(x) d\mu = \int_{[0,1]} g(x) d\mu = \frac{1}{24} + \ln 2$. Lekin Riman ma'nosida integrallanuvchi emas, chunki uning uzilish nuqtalari to'plamining o'lchovi $\frac{1}{2}$ dan kichik emas. Haqiqatan ham, har bir

$a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ uchun shunday $\{a_n\} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cap Q$ va $\{b_n\} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \setminus Q$ ketma-

ketliklar mavjudki $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$. Lekin

$f(a_n) = a_n^3 \rightarrow a^3, f(b_n) = \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{a}, n \rightarrow \infty$ va $a^3 \neq \frac{1}{a}$. Demak, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

oraliq $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtalari to'plamining qismi bo'ladi.

5-misol. Ushbu $\int_R f(x) d\mu$ integralni mavjudligini ko'rsating va

hisoblang.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in Q \\ \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}, & x \in R \setminus Q \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \in [-1; 1] \setminus Q \\ \frac{1}{x}, & x \in ([-1; 1] \cap Q) \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

a) $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}$ funksiyaning qaraymiz, $f \sim g$ chunki

$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = \mu(Q) = 0$. $g(x)$ — uzluksiz funksiya va uning

Riman xosmas integrali absolyut yaqinlashuvchi, $g(x) > 0$, shuning

uchun $g(x)$ Lebeg ma'nosida integrallanuvchi va

$$\begin{aligned} \int_R f(x) d\mu &= \int_R g(x) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(4+x^2)} = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4+x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\arctg x - \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x) \sim g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x| > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & 0 < |x| \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

chunki $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = \mu(Q \setminus \{0, -1, 1\}) = 0$. $g(x)$ juft funksiya, ya'ni $g(x) = g(-x)$ va $g(x) \geq 0$. Shuning uchun $f(x)$ ning R da integrallanuvchi bo'lishi uchun uning $[0, +\infty)$ da integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli bo'ladi va $\int_R f(x) d\mu = 2 \int_{[0, +\infty)} f(x) d\mu, [0, +\infty) = [0, 1) \cup [1, \infty)$ bo'lganligi uchun $g(x)$ ning $[0, +\infty)$ da integrallanuvchi bo'lishi uchun uning $[0, 1)$ va $[1, +\infty)$ to'plamlarda integrallanuvchi bo'lishi yetarli bo'ladi va

$$\int_{[0, +\infty)} g(x) d\mu = \int_{[0, 1)} g(x) d\mu + \int_{[1, +\infty)} g(x) d\mu.$$

Bu to'plamning har birida $g(x)$ funksiya Rimanning xosmas ma'nosida integrallanuvchi, shuning uchun Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi:

$$\begin{aligned} \int_R f(x) d\mu &= \int_R g(x) d\mu = 2 \int_{[0, +\infty)} g(x) d\mu = 2 \int_{[0, 1)} g(x) d\mu + 2 \int_{[1, +\infty)} g(x) d\mu = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + 2 \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 2 \left(2\sqrt{x} \Big|_0^1 - \frac{1}{x} \Big|_1^\infty \right) = 6. \end{aligned}$$

11-mashq. Quyidagi sodda funksiyalar uchun Lebeg integralini

$\left(\int_A f d\mu \right)$ ta'rif bo'yicha hisoblang. Bu yerda K -Kantor to'plami.

$$11.1. \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in [-10; 0) \\ 1, & x \in [0; 2) \\ -2, & x \in [2; 5) \\ 6, & x = 5 \\ 4, & x \in (5; 10], \end{cases} \quad A = [-10; 10]$$

$$11.2. \quad f(x) = \frac{[x]^2 + 1}{2[x] - 1}, \quad A = [-4; 4]$$

$$11.3. \quad f(x) = \begin{cases} 10, & x \in [0; 4] \setminus Q \\ -10, & x \in (4; 10] \setminus Q \\ 20, & x \in [0; 10] \cap Q, \end{cases} \quad A = [0; 10]$$

$$11.4. \quad f(x) = \begin{cases} 6, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \setminus K \\ 4, & x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \setminus K \\ -10, & x \in K, \end{cases} \quad A = [0; 1]$$

$$11.5. \quad f(x) = \begin{cases} 20, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 10, & x = \frac{1}{2} \\ -5, & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \setminus Q \\ 25, & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cap Q \\ 50, & x \in (1; 2], \end{cases} \quad A = [0; 2]$$

$$11.6. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{[x]^2 + 1}, & x \in [0; 2] \\ 4, & x \in (2; 3], \end{cases} \quad A = [0; 3]$$

$$11.7. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-[x]}, & x \in [-2;1] \\ 6, & x \in (1;2] \setminus Q \\ 4, & x \in (1;2] \cap Q, \end{cases} \quad A = [-2;2]$$

$$11.8. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{m}{n+1}, & x \in \frac{m}{n} \in [0;1] \cap Q - \text{qisqarmas kasr} \\ 1, & x \in [0;1] \setminus Q, \end{cases} \quad A = [0;1]$$

$$11.9. \quad f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & x \in \left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}} \right], \quad n \in N \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad A = [0;1]$$

$$11.10. \quad f(x) = \frac{1}{n}[nx], \quad n \in N, \quad A = [0;10]$$

$$11.11. \quad f(x) = \begin{cases} n, & x \in \frac{m}{n} \in [0;1] \cap Q - \text{qisqarmas kasr} \\ 0, & x \in [0;1] \setminus Q, \end{cases} \quad A = [0;1]$$

$$11.12. \quad f(x) = \begin{cases} (-1)^n n, & x \in \left(\frac{1}{3^{n+1}}; \frac{1}{3^n} \right], \quad n = 0,1,2,\dots \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad A = [0;1]$$

$$11.13. \quad f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [0;1] \cap Q \\ 2, & x \in [0;1] \setminus Q, \end{cases} \quad A = [0;1]$$

$$11.14. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{n}, \quad n \in N \\ n, & x = \frac{1}{n}, \quad n \in N, \end{cases} \quad A = [-4;10]$$

$$11.15. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{[x]^2 + 1}{[x] + 1}, & x \in [0;4] \\ \frac{[x]}{[x] + 1}, & x \in (4;10], \end{cases} \quad A = [0;10]$$

12-mashq. Quyidagi funksiyalar uchun $\int_A f d\mu$ mavjud bo'lsa, uni

hisoblang.

$$12.1. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1;1] \cap Q \\ x, & x \in [-1;1] \setminus Q, \end{cases} \quad A = [-1;1]$$

$$12.2. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in K \\ x^2, & x \in [0;1] \setminus K, \end{cases} \quad A = [0;1]$$

$$12.3. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0;\pi) \\ \frac{2\pi}{x^2}, & x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \setminus Q \\ \frac{2}{\sqrt{x}}, & x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \cap Q, \end{cases} \quad A = \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$12.4. \quad f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \setminus K \\ \cos \pi x, & x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \setminus K \\ x^2, & x \in K, \end{cases} \quad A = [0;1]$$

$$12.5. \quad f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in [0;10] \cap Q \\ \cos \pi x, & x \in (0;10) \setminus Q \\ 1, & x \in (10;20], \end{cases} \quad A = [0;20]$$

$$12.6. \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \cap K \\ \operatorname{tg} x, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \setminus K \\ x^4, & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \cap Q \\ \frac{1}{x^2}, & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \setminus Q, \end{cases} \quad A = [0;1]$$

$$12.7. f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & x \in [0; 2] \cap Q \\ \frac{1}{x^2 + 1}, & x \in [0; 2] \setminus Q, \end{cases} \quad A = [0; 2]$$

$$12.8. f(x) = \begin{cases} 0, & x \in K \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, & x \in [0; 1] \setminus K, \end{cases} \quad A = [0; 1]$$

$$12.9. f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \in K \\ \frac{1}{1+x}, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \setminus K \\ x^3, & x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \setminus K, \end{cases} \quad A = [0; 1]$$

$$12.10. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in [1; +\infty) \setminus Q \\ 1, & x \in [1; +\infty) \cap Q, \end{cases} \quad A = [1; +\infty)$$

$$12.11. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x}, & x \in [e; +\infty) \setminus Q \\ x^2 + 1, & x \in [e; +\infty) \cap Q, \end{cases} \quad A = [e; +\infty)$$

$$12.12. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2k^2}, & x \in [k; k+1), k \in N \\ \frac{2[x]}{[x]^2 + 1}, & x \in [-2; 1), \end{cases} \quad A = [-2; +\infty)$$

$$12.13. f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in K \\ x^2 + x, & x \in [0; 1] \setminus K \\ \frac{1}{x^2}, & x > 1, \end{cases} \quad A = [0; +\infty)$$

$$12.14. f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{[x]^4 + 1}, & x < 1 \\ \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2}, & x \geq 1, \end{cases} \quad A = (-\infty; +\infty)$$

$$12.15. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-[x]}, & x \in [0; +\infty) \setminus Q \\ e^{[x]}, & x \in [0; +\infty) \cap Q, \end{cases} \quad A = [0; +\infty)$$

6-§. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar.

Muhim va ko'pgina tadbirlarga ega bo'lgan funksiyalar orasida o'zgarishi chegaralangan funksiyalar sinfi katta ahamiyatga ega.

1-ta'rif. $[a, b]$ segmentda aniqlangan $\phi(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar $[a, b]$ segmentni $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ nuqtalar bilan n qismga bo'lganimizda $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ nuqtalarni tanlab olishga bog'liq bo'lmagan va ushbu

$$\sum_{i=1}^n |\phi(a_i) - \phi(a_{i-1})| < K \quad (1)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan o'zgarmas K son mavjud bo'lsa, u holda $\phi(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda o'zgarishi chegaralangan deyiladi.

(1) tengsizlikning chap tomonidagi yig'indining aniq yuqori chegarasini ($[a, b]$ segmentni qismlarga turlicha bo'lishlar to'plamiga nisbatan) $V_a^b(\phi)$ bilan belgilaymiz. Bu son $\phi(x)$ funksiyaning $[a, b]$ segmentdagi to'la o'zgarishi deyiladi.

Misol. $[a, b]$ segmentda monoton o'suvchi $\varphi(x)$ funksiya chegaralangan o'zgarishga ega, chunki uning uchun (1) ko'rinishdagi har qanday yig'indi $\varphi(b) - \varphi(a)$ ga teng.

Xossalari.

1⁰. $[a, b]$ segmentda o'zgarishi chegaralangan funksiya chegaralangan bo'ladi.

2⁰. $[a, b]$ segmentda o'zgarishi chegaralangan $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi ham o'zgarishi chegaralangan bo'ladi.

3⁰. Agar $a < c < b$ bo'lsa, u holda $V_a^b(\varphi) = V_a^c(\varphi) + V_c^b(\varphi)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

4⁰. $[a, b]$ segmentda o'zgarishi chegaralangan har qanday $\varphi(x)$ funksiya ikkita monoton o'suvchi funksiyalarning ayirmasi ko'rinishida yozish mumkin.

5⁰. O'zgarishi chegaralangan har qanday funksiya deyarli har bir nuqtada chekli xosilaga ega.

Endi sakrash funksiyasini kiritamiz. Faraz qilaylik $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ nuqtalar $[a, b]$ segmentdan olingan soni chekli yoki sanoqli nuqtalar bo'lsin. Har bir x_k , $k = 1, 2, \dots$ nuqtaga ikkita q_k va h_k sonlarni mos qo'yamiz va ular uchun ushbu

$$\sum_k (|q_k| + |h_k|) < +\infty$$

munosabatlarning bajarilishini talab etamiz. Bundan tashkari, $x_k = a$ bo'lganda $q_k = 0$ va $x_k = b$ bo'lganda esa $h_k = 0$ bo'lsin.

Quyidagi tenglik bilan aniqlangan

$$H(x) = \sum_{x_k \leq x} q_k + \sum_{x_k < x} h_k$$

funksiyaga sakrash funksiyasi deyiladi.

Bu funksiya uchun

$$V_a^b(H) = \sum_k (|q_k| + |h_k|)$$

ekanini bevosita tekshirib ko'rish mumkin.

Endi e'tiboringizga asosiy teoremlardan birini havola qilamiz.

Teorema. $[a, b]$ segmentda aniqlangan har qanday o'zgarishi chegaralangan funksiya yagona usulda $\phi(x)$ uzluksiz va $H(x)$ sakrash funksiyalarining yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi.

Endi absolyut uzluksiz funksiyalar sinfini kiritamiz. Bu funksiyalar sinfi o'zgarishi chegaralangan funksiyalar sinfidan kengroq bo'lib, jamlanuvchi funksiyalarning aniqmas integrali bilan yaqin bog'langan.

2-ta'rif. $[a, b]$ segmentda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, soni chekli va har ikkisi o'zaro kesishmaydigan har qanday

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n] \quad (1)$$

segmentlar uchun

$$\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset [a, b], \quad \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

shartlar bajarilganda

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda absolyut uzluksiz deyiladi.

Absolyut uzluksiz funksiya misol sifatida Lipshits shartini, ya'ni

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyani olishimiz mumkin. Haqiqatan, agar (1) segmentlar sistemasi uchun (2) shartlar bajarilsa, u holda

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq M \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < M \delta$$

bo'lib, δ sonini $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ deb tanlasak,

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi absolyut uzluksiz funksiyalarni bir nechta xossalari keltiramiz.

1⁰. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar absolyut uzluksiz bo'lsa, u holda ularning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi ham absolyut uzluksiz funksiyalar bo'ladi. Bundan tashqari, agar berilgan segmentda $g(x)$ nolga teng bo'lmasa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ ham o'sha segmentda absolyut uzluksiz bo'ladi.

2⁰. $[a, b]$ segmentdagi absolyut uzluksiz funksiyaning bu segmentda o'zgarishi chegaralangan bo'ladi.

3⁰. Har qanday $F(x)$ absolyut uzluksiz funksiyani ikkita o'suvchi absolyut uzluksiz funksiyalar ayirmasi shaklida ifodalash mumkin.

13-mashq. Quyidagi funksiyalarning to'la o'zgarishini hisoblang.

$$13.1. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 1 \\ 5, & x > 1 \end{cases} \quad 13.2. f(x) = \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$13.3. f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \end{cases} \quad 13.4. f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$13.5. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases} \quad 13.6. f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0) \\ 2-x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$13.7. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0) \\ 1-x, & x \in [0, 1] \end{cases} \quad 13.8. f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & [-4 : 0] \\ x^2 - 6x, & (0 : 4] \end{cases}$$

$$13.9. f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \in [0; 1) \\ (x+1)^3, & x \in [1; 2] \end{cases} \quad 13.10. f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in [-1, 0) \\ x \sin x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$13.11. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \\ x^3, & x \in [0, 1] \end{cases} \quad 13.12. f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0) \\ -x, & x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$13.13. f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-2, 0) \\ 3x+2, & x \in [0, 2] \end{cases} \quad 13.14. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \\ x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$13.15. f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-1, 1) \\ -x^2, & x \in [1, 4] \end{cases}$$

14-mashq. Quyidagi funksiyalarni ikkita monoton funksiyaning ayirmasi ko‘rinishida ifodalang.

$$14.1. f(x) = \cos^2 x, \quad x \in [0, \pi] \quad 14.2. f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$14.3. f(x) = \sin(x) + x, \quad x \in [-\pi, \pi] \quad 14.4. f(x) = x^2 - 1, \quad x \in [-2, 2]$$

$$14.5. f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases} \quad 14.6. f(x) = \begin{cases} 1-x, & -4 < x < 1 \\ (1-x)(2-x), & 1 \leq x \leq 2 \\ -(2-x), & 2 < x < 4 \end{cases}$$

$$14.7. f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \in R \setminus [a,b] \end{cases} \quad 14.8. f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x \leq 0 \\ \ln(1+x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$14.9. f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad 14.10. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1) \\ 5, & x \in [1,2] \\ 1+x, & x \in (2,3] \end{cases}$$

$$14.11. f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in [-10,0) \\ 1-x^2, & x \in [0,10] \end{cases} \quad 14.12. f(x) = \begin{cases} 1-x^3, & x \in [0,1) \\ x^2+1, & x \in [1,2] \end{cases}$$

$$14.13. f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & x \in [-1,0) \\ x^4 + 2, & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$14.14. f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & x \in [-2,-1] \\ x, & x \in (-1,0) \\ x^4 + 1, & x \in [0,1) \\ e^x, & x \in [1,2] \end{cases} \quad 14.15. f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x^2}}, & x \in (-1,1) \\ 0, & x \in R \setminus (-1,1) \end{cases}$$

15-mashq. Quyidagi funksiyalarni absolyut uzluksizlikka tekshiring.

$$15.1. f(x) = e^x - x^2, \quad x \in [-1,0] \quad 15.2. f(x) = 2^x + \cos x, \quad x \in [0,\pi]$$

$$15.3. f(x) = x^3 + \ln(x^2 + 1), \quad x \in [-2,2] \quad 15.4. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1,0) \\ 0, & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$15.5. f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1,0), \alpha > 0 \\ 0, & x \in [0,1] \end{cases}$$

$$15.6. f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1, & x \in [-3,0) \\ x^2 + 1, & x \in [0,3] \end{cases} \quad 15.7. f(x) = \operatorname{tg} x + x, \quad x \in [-1,1]$$

$$15.8. f(x) = x + x^2, \quad x \in [-3, 3] \quad 15.9. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-5, 1) \\ x^2 - x + 1, & x \in [1, 3] \end{cases}$$

15.10. Kantor zinapoya funksiyasini absolyut uzlukizlikka tekshiring.

$$15.11. f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt, & x \in (0, 2] \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad 15.12. f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \int_0^x e^{-t^2} dt, & x \in (0, 10] \end{cases}$$

$$15.13. f(x) = \begin{cases} \int_0^{2x} t^\alpha \sin \frac{1}{t} dt, & x \in (0, 4], (\alpha > 0) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$15.14. f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{t^\alpha}{e^t} dt, & x \in [-1, 0), \alpha > 0 \\ x^\beta \sin \frac{1}{x}, & x \in [0, 1], \beta > 0 \end{cases}$$

$$15.15. f(x) = \begin{cases} \int_0^x (\ln(|t| + 1))^2 dt, & x \in [-1, 0) \\ \int_0^x e^{-t^2} dt, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

16-mashq. Quyidagi o'zgarishi chegaralangan funksiyalarni absolyut uzluksiz va sakrash funksiyalari yig'indisi ko'rinishida ifodalang.

$$16.1. f(x) = x^3 - x + 1, \quad x \in [-3, 3] \quad 16.2. f(x) = \cos x + x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$16.3. f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 1) \\ x^2 + 2, & x \in [1, 2) \\ 1, & x \in [2, 3] \end{cases} \quad 16.4. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [-\pi, 0) \\ 0, & x \in [0, 1] \\ x^2, & x \in [1, \pi] \end{cases}$$

$$16.5. f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [-10, -1) \\ \operatorname{tg} x, & x \in [-1, 1] \\ 3, & x \in (1, 10] \end{cases} \quad 16.6. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+2}, & x \in [-1, 0) \\ x + \frac{1}{x+1}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{x+1}, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

$$16.7. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+2)(x+3)}, & x \in [-1, 0) \\ 1, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{x+1}, & x \in (1, 2] \end{cases} \quad 16.8. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \varepsilon < |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$$16.9. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \varepsilon < |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \leq \varepsilon, \varepsilon \geq 0 \end{cases} \quad 16.10. f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-5, 0) \\ 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$16.11. f(x) = \begin{cases} \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt, & x \in [-2, 0) \\ 0, & x \in [0, 1] \\ x^2, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$16.12. f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{t}{t^2 + 1} dt, & x \in [-1, 1] \\ x, & x \in (1, 2] \\ 5, & x \in (2, 5] \end{cases}$$

$$16.13. f(x) = \begin{cases} \int_0^x \cos t dt, & x \in [-1, 0] \\ x^2 + 1, & x \in (0, 1] \\ 2, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$16.14. f(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{-t^2} dt, & x \in [0, 1] \\ \int_0^x t^\alpha e^{-t} dt, & x \in (1, 2], \alpha > 0 \end{cases}$$

$$16.15. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \in [-3, 0) \\ x^4 + x^2 - 2, & x \in [0, 4] \end{cases}$$

7-§. Lebeg-Stiltes integrali

Biz bu bo'limda Lebeg integraliga nisbatan kengroq bo'lgan Lebeg-Stiltes integrali bilan tanishib chiqamiz. Lebeg-Stiltes integralini o'rganish uchun Lebeg-Stiltes o'lchovini bilish lozim. Shuning uchun Lebeg-Stiltes integrali ta'rifini keltiramiz.

Faraz qilaylik, $[a, b]$ segmentda aniqlangan monoton $F(x)$ funksiya orqali keltirib chiqarilgan $\mu, d\mu = dF$ Lebeg-Stiltes o'lchovi berilgan bo'lsin. Bu o'lchov uchun Lebeg integrali tushunchasini kiritib, odatdagidek, jamlanuvchi funksiyalar sinfini aniqlashimiz mumkin ([1] adabiyotga qarang).

Ta'rif. $[a, b]$ segmentda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning μ o'lchov bo'yicha Lebeg integrali Lebeg-Stiltes integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\int_a^b f(x) dF(x).$$

Agar $F(x)$ absolyut uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

1-misol. $F(x) = h(x) = \sum_{x_i < x} h_i$, $x \in [a, b]$, bu yerda $h(x)$ - pog'onali

funksiya bo'lib, $x_1, x_2, x_3, \dots$ lar $h(x)$ ning uzilish nuqtalari, $h_1, h_2, h_3, \dots$ lar

esa shu nuqtalarga mos funksiyaning sakrashlari. $\int_a^b f(x) d\mu$ ni

xisoblang.

$F(x)$ funksiya yaratgan μ_F o'lchovning tashuvchisi $x_1, x_2, x_3, \dots$ nuqtalar va xar bir x_i nuqtaning o'lchovi $\mu_F(\{x_i\}) = h_i$, $i = 1, 2, \dots$ bo'ladi. Agar shu μ_F o'lchovga mos kelgan Lebeg-Stiltes integralini olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x) d\mu_F = \int_a^b f(x) dh(x) = \sum_i f(x_i) h_i$$

2-misol. $\int_a^b f(x) dF(x)$ ni xisoblang, bu yerda $F(x) = x^3$

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \left| \begin{array}{l} f(x) = x^2 - x \\ F(x) = x^3 \\ a = 0, b = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 (x^2 - x) dx^3 =$$

$$= 3 \int_0^1 (x^4 - x^3) dx = 3 \left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = -\frac{3}{20}.$$

17-mashq. Quyidagi Lebeg – Stiltes integralini hisoblang.

$$17.1. \int_0^1 e^k x^k dF, \quad F(x) = x^3, k > 0.$$

$$17.2. \int_{-1}^1 \cos^2 x dF, \quad F(x) = e^{2x} - x^2.$$

$$17.3. \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dF, \quad F(x) = x^5 + \ln(x^2 + 1).$$

$$17.4. \int_2^3 (x^2 - 2x + 1) dF, \quad F(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1, & x \in [-2, 0) \\ x^2 + 1, & x \in [0, 3] \end{cases}.$$

$$17.5. \int_{-2}^2 (x^3 - 2x) dF, \quad F(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2, 1) \\ x^2 - 2x + 2, & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

$$17.6. \int_{-1}^1 e^x dF, \quad F(x) = \begin{cases} -2, & x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \\ -1, & x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \\ 1, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}.$$

$$17.7. \int_{-4}^6 (x^5 + x^3 + 1) \cos x dF, \quad F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x \in [-4, -3) \\ -\frac{1}{2^2}, & x \in [-3, -2) \\ -\frac{1}{2^3}, & x \in [-2, -1) \\ -\frac{1}{2^4}, & x \in [-1, 0) \\ -\frac{1}{2^5}, & x \in [0, 6] \end{cases}.$$

17.8.

$$\int_{-6}^3 f(x) dF(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in [-6, -2) \\ x, & x \in [-2, -1) \\ x^3, & x \in [-1, 0) \\ 1, & x \in [0, 3] \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} e^{5x}, & -6 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$17.9. \int_{-10}^{10} f(x) dF(x), \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-10, -4) \\ e^x, & x \in [-4, -2) \\ x^3, & x \in [-2, -1) \\ 1 - x, & x \in [-1, 10] \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-10, -6) \\ 0, & x \in [-6, -2] \\ -1, & x \in (-2, 10] \end{cases}.$$

$$17.10. \int_0^1 x \cos x d\phi(x), \quad \text{bu yerda } \phi(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in [-\infty, 0) \\ x^2 + 2x + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}.$$

$$17.11. \int_0^1 x^n d\phi(x), \quad \text{bu yerda } \phi(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in [-\infty, 0) \\ x^2 + 2x + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}.$$

$$17.12. \int_0^1 e^x d\phi(x), \quad \text{bu yerda } \phi(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in [-\infty, 0) \\ x^2 + 2x + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}.$$

$$17.13. \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} d\phi(x), \quad \text{bu yerda } \phi(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in [-\infty, 0) \\ x^2 + 2x + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}.$$

$$17.14. \int_0^1 a^x d\phi(x), \quad \text{bu yerda } \phi(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in [-\infty, 0) \\ x^2 + 2x + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}.$$

$$17.15. \int_0^1 e^x x^2 d\phi(x), \quad \text{bu yerda } \phi(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in [-\infty, 0) \\ x^2 + 2x + 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}.$$

8-§. Topologik fazolar.

Ta'rif. X to'plamning qism to'plamlaridan tashkil topgan τ sistema X to'plamda topologiya aniqlaydi deyiladi, agar

a) τ sistema bo'sh to'plam va X to'plamni o'zida saqlasa;

b) τ sistemaga tegishli chekli sondagi to'plamlar kesishmasi ham τ sistemaga tegishli bo'lsa.

τ sistemaning to'plamlari (X, τ) topologik fazoning ochiq to'plamlari deyiladi. X topologik fazodagi $x \in X$ nuqta uchun bu nuqtani o'zida saqlovchi ochiq to'plamga x nuqtaning atrofi deyiladi.

Agar X topologik fazoning ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ nuqtalari uchun bu nuqtalarning kesishmaydigan atroflari mavjud bo'lsa, u holda X topologik fazoga Xausdorf fazosi deyiladi.

X topologik fazoning qismi bo'lgan M to'plam uchun $x \in X$ nuqta limit nuqta deyiladi, agar bu nuqtaning ixtiyoriy atrofi kamida bitta $y \in M$ nuqtani o'zida saqlasa.

Ta’rif. X topologik fazoning qismi bo‘lgan M to‘plam barcha limit nuqtalarini o‘zida saqlasa, u holda M to‘plamga yopiq to‘plam deyiladi.

Ta’rif. f akslantirish X topologik fazoni Y topologik fazoga akslantiruvchi biror akslantirish bo‘lsin. f akslantirish $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $f(x_0)$ nuqtaning istalgan U atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday V atrofi topilib, $f(V) \subset U$ munosabat o‘rinli bo‘lsa.

Ta’rif. $G_\alpha, \alpha \in A$ to‘plamlar sistemasi va X to‘plam uchun $X \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, G_α sistema X to‘plamni qoplaydi deyiladi.

X topologik fazoni qism to‘plami M uchun bu to‘plamni X fazoning ochiq to‘plamlaridan iborat istalgan qoplamasidan hamisha chekli qoplama ajratib olish mumkin bo‘lsa, M to‘plam X fazoni kompakt qism to‘plami deyiladi.

Ta’rif. Agar X topologik fazoda berilgan M to‘plamni kesishmaydigan 2 ta bo‘sh bo‘lmagan to‘plamlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lmasa, u holda M to‘plamga bog‘lamli to‘plam deyiladi.

18-mashq.

18.1. X to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy topologiyalar kesishmasi X da aniqlangan topologiya bo‘lishini isbotlang.

- 18.2. X to'plamda aniqlangan topologiyalar birlashmasi X da topologiya bo'lolmasligini ko'rsating. (Agar X to'plam kamida ikkita nuqtadan iborat bo'lsa)
- 18.3. R – haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, unda odatdagi topologiya aniqlangan bo'lsin. Bu topologiya tartibli topologiya bilan ustma – ust tushishini isbotlang.
(Tartibli topologiya ochiq to'plamlar sistemasi sifatida $\{x : x < a\}$ va $\{x : a < x\}$ ko'rinishdagi to'plamlardan iborat topologiya)
- 18.4. A to'plam X topologik fazoda zich bo'lgan to'plam bo'lsin, u holda istalgan U ochiq to'plam uchun $U \subset \overline{A \cap U}$ munosabat o'rinli bo'lishini ko'rsating.
- 18.5. (X, τ) topologik fazo uchun istalgan $x \in X$ elementga mos ravishda bu nuqtani atroflari oilasini u_x orqali belgilaymiz, u holda quyidagi tasdiqlarni isbotlang.
- 1) Agar $U \in u_x$ bo'lsa, u holda $x \in U$;
 - 2) Agar $U, V \in u_x$ bo'lsa, u holda $U \cap V \in u_x$;
 - 3) Agar $U \in u_x$ va $U \subset V$ bo'lsa, u holda $V \in u_x$;
 - 4) Agar $U \in u_x$ bo'lsa, shunday $V \in u_x$ element topilib, $V \subset U$ va istalgan $y \in V$ uchun $V \in u_y$ (V – o'zining istalgan nuqtasi uchun atrof bo'ladi).
- 18.6. 5 – misolda aniqlangan u funksiya istalgan $x \in X$ elementga biror u_x oilani mos qo'ysin va 1), 2), 3) shartlarni qanoatlantirsin, u holda $U \in u_x \quad x \in X$ atroflar oilasi τ X da aniqlangan biror topologiya bo'lishini ko'rsating.

- 18.7. Topologik fazo T_1 – fazo deyiladi, agar uning yagona nuqtaga ega ixtiyoriy qism to‘plami yopiq to‘plam bo‘lsa.
- Istalgan X to‘plam uchun shunday τ eng kichik topologiya mavjud bo‘lib (X, τ) T_1 – fazo bo‘lishini ko‘rsating.
- 18.8. Agar X to‘plam cheksiz to‘plam bo‘lib, τ eng kichik topologiya bo‘lsin. u holda (X, τ) T_1 – fazo bo‘lishini ko‘rsating.
- 18.9. (X, τ) T_1 – fazo bo‘lsin, u holda bu fazoni istalgan qismini limit nuqtalari to‘plami yopiq to‘plam bo‘lishini ko‘rsating.
- 18.10. X – bog‘lamli topologik fazo bo‘lib, Y uni bog‘lamli qismi bo‘lsin. Agar $X \setminus Y = A \cup B$ bo‘lib, A va B lar ajratilgan to‘plamlar bo‘lsa, u holda $A \cup B$ to‘plamni bog‘lamli ekanini ko‘rsating.
- 18.11. X va Y topologik fazolar berilgan bo‘lsin. $f : X \rightarrow Y$ akslantirish $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $f(x_0)$ nuqtani ixtiyoriy U atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday V atrofi topilib, $f(V) \subset U$ munosabat bajarilsa.
- $f : X \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz bo‘lishi uchun Y dan olingan ixtiyoriy ochiq to‘plamning asli X fazoning ochiq to‘plamidan iborat bo‘lishi zarur va yetarli ekanini isbotlang.
- 18.12. Topologik fazoni kompakt qism to‘plami yopiq to‘plam bo‘lishini ko‘rsating.
- 18.13. Kompakt to‘plamning uzluksiz akslantirishdagi obrazi kompakt to‘plam bo‘lishini ko‘rsating.
- 18.14. X topologik fazoning kompakt qismi bo‘lgan M to‘plamni yopiq qism to‘plami M_1 yana kompakt to‘plam bo‘ladimi?

18.15. 3 ta elementdan tashkil topgan X fazoda topologiya quring.

18.16. Bog‘lamli to‘plamning yopilmasi bog‘lamli to‘plam bo‘lishini ko‘rsating.

9-§. Chiziqli fazolar.

Bu mavzuga doir misollarni yechish uchun talaba chiziqli fazo ta’rifi, qism fazo, bazis, faktor fazo tushunchalari bilan tanish bo‘lishi kerak.

1-misol. Barcha nolga yaqinlashuvchi ketma – ketliklardan iborat.

$$C_0 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$$

to‘plamni qaraylik.

Bu to‘plamda qo‘shish va skalyar songa ko‘paytirish amallarini quyidagicha aniqlaymiz:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n, \dots)$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots), \quad \alpha \in R.$$

Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \cdot 0 = 0$$

munosabatlardan $x + y \in C_0$ va $\alpha x \in C_0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi yuqorida aniqlangan yig‘indi va songa ko‘paytirish amallari uchun chiziqli fazo aksiomalari o‘rinli ekanligini tekshiramiz. Ketma – ketlik hadlari sonlardan iborat ekanligini nazarda tutgan holda, quyidagilarga ega bo‘lamiz.

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;

3. Barcha hadlar nollardan iborat ketma - ketlik «nol» element, ya'ni θ rolini bajaradi, haqiqatan ham C_0 dagi ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ element uchun $x + \theta = (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0, \dots) = x$

4. C_0 ning har qanday $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ elementi uchun qarama-qarshi element $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n, \dots)$ dan iborat.

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha \beta)x$

6. $1 \cdot x = x$

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Ta'rif. L chiziqli fazoda $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar berilgan bo'lsin. Agar kamida biri noldan farqli bo'lgan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sonlar topilib, ushbu $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$ munosabat bajarilsa, $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlar chiziqli bog'liq deyiladi. Aks holda, ya'ni $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$ tenglikdan $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ekanligi kelib chiqsa, $x_1, \dots, x_n$ elementlar chiziqli bog'lanmagan (yoki erkli) deyiladi. Masalan, amallar odatdagidek aniqlangan $R^2 = \{x = (x_1, x_2) : x_1, x_2 \in R\}$ fazodan olingan $x_1 = (1, 2)$ va $y_2 = (2, 3)$ vektorlar chiziqli bog'lanmagan, chunki

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \theta \quad \text{tenglik} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \text{tenglamalar sistemasiga teng}$$

kuchli, bu esa faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ yechimga ega.

2-misol. Amallar odatdagidek aniqlangan $C[0; \pi]$ fazoda

a) $x(t) = \sin t \cos t, y(t) = \sin 2t;$

b) $x(t) = t, y(t) = \sin t, z(t) = \cos t$

funksiyalar chiziqli erklimi?

Echish. a) Ushbu $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ ayniyatga ko'ra, $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$ bo'lgani $\alpha_1 x(t) - \alpha_2 y(t) = \theta$ bo'ladi, ya'ni berilgan funksiyalar chiziqli bog'liq.

b) $\alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) + \alpha_3 z(t) = \theta$ munosabat bajarilsin, ya'ni barcha $t \in [0, \pi]$ uchun $\alpha_1 t + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 \cos t = 0$ tenglik o'rinli bo'lsin. Xususan $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$ deb olsak, mos ravishda $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 \frac{\pi}{2} + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \pi - \alpha_3 = 0$ tengliklarni hosil qilamiz. Bu yerdan esa $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, berilgan funksiyalar chiziqli bog'lanmagan ekan.

3-misol. Ushbu $x^{(k)} = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+(n-1)}, \dots \right)$ $k = 1, 2, 3$ vektorlar C_0 da erklimi?

Echish. $\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \alpha_3 x^{(3)} = \theta$ bo'lsin. U holda $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sonlar ushbu cheksiz tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 1/2 + \alpha_3 \cdot 1/3 = 0 \\ \alpha_1 \cdot 1/2 + \alpha_2 \cdot 1/3 + \alpha_3 \cdot 1/4 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Bu sistemaning dastlabki uchta tenglamasini qaraymiz:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 1/2 + \alpha_3 \cdot 1/3 = 0 \\ 1/2 \cdot \alpha_1 + 1/3 \alpha_2 + 1/4 \alpha_3 = 0 \\ 1/3 \alpha_1 + 1/4 \alpha_2 + 1/5 \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Hosil bo'lgan uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasining asosiy determinanti noldan farqli (tekshiring). Shu sababli, sistema faqat nol

yechimga ega $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Demak, berilgan vektorlar chiziqli bog'lanmagan ekan.

Ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n – ta chiziqli erkli element topilib, har qanday $n+1$ ta element chiziqli bog'langan bo'lsa, L fazo n o'lchamli deyiladi. n o'lchamli chiziqli fazodagi har qanday n ta elementdan iborat chiziqli erkli sistema bazis deyiladi. Agar L chiziqli fazoda elementlarning soni ixtiyoriy bo'lgan chiziqli erkli sistema mavjud bo'lsa, L cheksiz o'lchamli deyiladi.

Masalan: $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_n \in \mathbb{R}\}$ – chiziqli fazo n –o'lchamli, chunki $l_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $l_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $l_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorlar chiziqli erkli va har qanday $n+1$ ta elementdan iborat vektorlar sistemasining chiziqli bog'liq ekanligini bevosita tekshirish mumkin. C_0 fazo esa cheksiz o'lchamli bo'ladi. Haqiqatan, bu fazoda

$$l_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$$

$$l_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$$

.....

$$l_n = (0, 0, \dots, 1, \dots)$$

elementlar chiziqli erkli sistemani tashkil qiladi. Buning uchun bu sistemaning ixtiyoriy chekli qismi $l_{n_1}, l_{n_2}, \dots, l_{n_k}$ larning chiziqli erkli ekanligini ko'rsatish mumkin. Bundan tashkari $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \dots, \alpha_{n_k}$ o'zgarmaslar uchun

$$x = \alpha_{n_1} l_{n_1} + \dots + \alpha_{n_k} l_{n_k}$$

elementning koordinatalari mos ravishda $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \dots, \alpha_{n_k}$ ga teng bo'ladi.

Ta'rif. L chiziqli fazo va L_0 uning qism to'plami bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x, y \in L_0$ va ixtiyoriy λ son uchun $x + y \in L_0$ ba $\lambda x \in L_0$ bo'lsa, L_0 fazo L ning chiziqli qism fazosi deyiladi.

4- misol. L haqiqiy sonlardan tuzilgan barcha n -chi tartibli kvadrat matritsalar to'plami bo'lsin. U holda L matritsalarini ko'shish va songa ko'paytirishga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. Ushbu $L_0 = \{A = (a_{ij}) \in L : trA = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = 0\}$ to'plamning qism fazo ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in L_0$ bo'lsa, $tr(A + B) = trA + trB = 0$ va $tr(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot trA = \lambda \cdot 0 = 0$ bo'ladi, ya'ni L_0 qism fazo tashkil etadi.

Agar $L' = \{A \in L : trA = 1\}$ bo'lsa, L' qism fazo bo'lmaydi, chunki $A \in L'$ va $\lambda = -1$ uchun $tr(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot trA = -1$ bo'lganligi sababli $\lambda A \in L'$ munosabat bajarilmaydi.

Ta'rif. L va E chiziqli fazolar, hamda $\varphi : L \rightarrow E$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar 1) φ - chiziqli akslantirish, ya'ni barcha $x, y \in L$ va λ sonlar uchun $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$; 2) φ -biektiv ya'ni $\varphi(L) = E$ va $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$ bo'lsa, L esa E fazolar izomorf, φ esa ular orasidagi izomorfizm deyiladi.

5-misol. Har qanday ikkita n o'lchamli haqiqiy chiziqli fazolar izomorf bo'ladi. Haqiqatan, L va E n - o'lchamli fazolar, $l_1, l_2, \dots, l_n$ va $l'_1, l'_2, \dots, l'_n$ - mos ravishda L va E dagi bazislar bo'lsin.

Ushbu

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i l_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i l'_i$$

formula izomorfizmni aniqlaydi, chunki $x = \sum_{i=1}^n a_i l_i$, $y = \sum_{i=1}^n b_i l_i$, $\lambda \in R$

bo'lsa $x + y = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) l_i$, $\lambda x = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) l_i$ bo'ladi. Shu sababli

$$\varphi(x + y) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) l'_i = \sum_{i=1}^n a_i l'_i + \sum_{i=1}^n b_i l'_i = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\varphi(\lambda x) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) l'_i = \lambda \sum_{i=1}^n (a_i) l'_i = \lambda \cdot \varphi(x) ,$$

ya'ni φ chiziqli akslantirish bo'ladi. Teskari akslantirishni esa

$$\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i l'_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i l_i$$

formula aniqlaydi, shuning uchun φ biektivdir.

L chiziqli fazo, L_0 uning qism fazosi bo'lsin. Agar $x, y \in L$ elementlar uchun $x - y \in L_0$ bo'lsa, x va y ni L_0 ga nisbatan ekvivalent deyiladi va $x \sim y$ ko'rinishda yoziladi. $\{x\}$ - orqali x elementga L_0 bo'yicha ekvivalent bo'lgan elementlar oilasini belgilaymiz. Kiritilgan ekvivalentlik munosabati L fazoni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi va biz bu sinflarni qo'shni sinflar deb ataymiz. Barcha qo'shni sinflar to'plamini L/L_0 orqali belgilab unda qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha kiritamiz: $\{x\}$ va $\{y\}$ sinflardan bittadan x_0 va y_0 element tanlab olib, $\{x\}$ va $\{y\}$ sinflarning yig'indisi deb $x_0 + y_0$ ni o'z ichiga olgan sinfni ataymiz: $\{x\}$ sinfnig α songa ko'paytmasi deb, αx_0 ni saqlaydigan sinfga aytamiz. Bu amallarning tanlangan elementlarga bog'liq emasligi va chiziqli fazo aksiomalarining o'rinli ekanligini bevosita tekshirish mumkin (talabaga havola qilamiz).

Hosil bo'lgan $L \setminus L_0$ chiziqli fazo L ning L_0 qism fazo bo'yicha faktor fazosi deyiladi.

6-misol. $L = R^3$, $L_0 = \{x \in R : x = (x_1, 0, 0)\}$ bo'lsin. Agar

$a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ elementlar olsak, bu elementlar bir oilaga tegishli bo'lishi uchun $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir. Demak, a vektor L/L_0 fazoning qaysi sinfiga tegishli bo'lishi

a_2 va a_3 ga bog'liq. Ya'ni $\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning hamma nuqtalari

bir sinfga tegishlidir, va aksincha, har bir sinf R^3 fazoda biror $\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$

to'g'ri chiziqni aniqlaydi. Shuning uchun L/L_0 fazoning elementlari Ox o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar deb qarash mumkin.

7-misol. $L = C[0,1]$ va $L_0 = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}$ bo'lsin. U holda L/L_0 fazo

R ga izomorfdir. Haqiqatan ham, agar $x \sim y$, ya'ni $x - y \in L_0$ bo'lsa, $x(0) = y(0)$ bo'ladi va aksincha, $x(0) = y(0)$ bo'lsa, $x \sim y$ bo'ladi.

Demak, qo'shni sinflari nol nuqtada bir hil qiymat qabul qiluvchi funksiyalardan iborat ekan: $\{x\} = \{y \in C[0,1] : y(0) = x(0)\}$. $\{x\}$ sinfdan

$x(t) \equiv x_0$ o'zgarmas funksiyani olib, $\varphi : L/L_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\{x\}) = x_0$

akslantirishni aniqlaymiz. Bu akslantirishning izomorfizm ekanligini tekshirishni talabaga havola qilamiz.

19-mashq.

L to'plam berilgan.

a) L to'plamga qarashli bo'lgan va qarashli bo'lmagan elementlariga misol keltiring;

b) L to'plamning ko'rsatilgan amallarga nisbatan chiziqli fazo ekanligini ko'rsating.

v) L dagi chiziqli bog'lanmagan va chiziqli bog'langan sistemalarga misol keltirib, L ning o'lchamini topish.

g) L ning qism fazo bo'ladigan va qism fazo bo'lmaydigan qism to'plamlariga misol keltiring.

N	L	L -ning elementlari	Amallar
19.1	C^n	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$	$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$
19.2	ℓ_2	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \sum_{i=1}^{\infty} x_i ^2 < \infty,$	$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$
19.3	ℓ_p	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$ $\sum_{k=1}^{\infty} x_k ^p < \infty, p > 1$	$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$
19.4	G	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mavjud, ya'ni yaqinlashuvchi ketma-ketliklar	$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$
19.5	m	Chegaralangan ketma-ketliklar,	$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$
19.6	P_n	Darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar: $x = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$	$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$
19.7	$C[a, b]$	$[a, b]$ dagi uzluksiz funksiyalar	$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$

19.8	$V[a,b]$	$[a,b]$ dagi o'zgarishi chegaralangan funksiyalar	$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$ $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$
19.9	$A[a,b]$	$[a,b]$ dagi absolyut uzluksiz funksiyalar	$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$ $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$
19.10	$C^n[a,b]$	n marta uzluksiz hosilaga ega funksiyalar	$x+y = x(t) + y(t)$ $\lambda x = \lambda x(t)$
19.11	$M[a,b]$	$[a,b]$ da aniqlangan chegaralangan funksiyalar	$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$ $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$
19.12	$L_p[a,b]$	modulining p chi darajasi integrallanuvchi funksiyalar $p > 1$	$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$ $(\lambda x)(t) = \lambda x(t)$

20-mashq.

20.1. Quyidagi elementlar ko'rsatilgan fazoda chiziqli bog'langanmi?

$$x = (1,0,1), \quad y = (1,2,3), \quad z = (0,1,2); \quad R^3.$$

20.2. Quyidagi elementlar ko'rsatilgan fazoda chiziqli bog'langanmi?

$$x = (1,2), \quad y = (2,3), \quad z = (1,4); \quad R^2.$$

20.3. Quyidagi elementlar ko'rsatilgan fazoda chiziqli bog'langanmi?

$$x = (i, -1), \quad y = (-1, -i); \quad C^2.$$

20.4. Quyidagi elementlar ko'rsatilgan fazoda chiziqli bog'langanmi?

$$x(t) = t, \quad y(t) = e^t, \quad C[0,1].$$

20.5. Quyidagi elementlar ko'rsatilgan fazoda chiziqli bog'langanmi?

$$x(t) = \sin^2 t, \quad y(t) = \cos^2 t, \quad z(t) = \cos 2t; \quad C[0, \pi].$$

20.6. Quyidagi elementlar ko'rsatilgan fazoda chiziqli bog'langanmi?

$$x = (1, 2, 3, 0, 0, 0, \dots), \quad y = (2, 3, 4, 0, 0, \dots); \quad \ell_2.$$

20.7. Quyidagi elementlar ko'rsatilgan fazoda chiziqli bog'langanmi?

$$x = (1, 2, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad y = (1, 0, 4, 0, 0, \dots); \quad C_0.$$

$$20.8. \quad x(t) = t^2, \quad y(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0, 1] \\ 2, & t = 1 \end{cases} \text{ funksiyalar } M[0, 1] \text{ da chiziqli}$$

bog'langanmi?

20.9. $x(t_0) \neq y(t_0), \quad t_0 \in [0, 1]$ va $x(t) = y(t), \quad t \in [0, 1] \setminus \{t_0\}$ shartlarni qanoatlantiruvchi kamida ikkita nuqtada noldan farqli x va y funksiyalarni $M[0, 1]$ da chiziqli bog'lanmaganligini ko'rsating.

20.10. $M[0, 1]$ dan olingan aynan nolga teng bo'lmagan ixtiyoriy uzluksiz va uzilishga ega bo'lgan funksiyalar chiziqli bog'langanmi?

20.11. $C[-1, 1]$ dagi quyidagi funksiyalar to'plami qism fazo bo'ladimi?

a) monoton funksiyalar; b) toq funksiyalar; v) darajasi n ga teng ko'phadlar; g) $x(1) = a$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar;

d) Lipschits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar,

(ya'ni $\exists M_f = \text{const}, \quad \forall x, y \in [-1, 1], \quad |f(x) - f(y)| \leq M_f |x - y|$.) chiziqli fazo tashkil qiladimi?

20.12. ℓ_2 , c_0 ning, c_0 esa c ning, c esa m ning qism fazosi ekanligini ko'rsating.

20.13. n o'lchamli kompleks chiziqli fazoni haqiqiy fazo sifatida qarasak, uning $2n$ o'lchamli ekanligini ko'rsating.

20.14. L, E – chiziqli fazolar, $\varphi: L \rightarrow E$ chiziqli akslantirish bo'lsin.

$$a) \text{Ker}\varphi = \{x \in L : \phi(x) = \theta\} \quad \text{va} \quad \text{Im}\varphi = \{y \in E : \exists x \in L, y = \varphi(x)\}$$

to'plamlarning mos ravishda L va E da qism fazo ekanligini ko'rsating. b) $L / \text{Ker}\varphi$ va $\text{Im}\varphi$ fazolarning izomorfligini ko'rsating.

20.15. a) $L = C_0^n[a, b]$ bo'lsin. $L_0 = \{x \in C^n[a, b] : x(t) = 0\}$ to'plamni qism fazo ekanligini ko'rsating.

b) $L^n[a, b] = C^n[a, b] / L_0$ $L_p[a, b] = C_p[a, b] / L_0$ faktor fazoni aniqlang.

10-§. Metrik fazolar.

Ta'rif: Agar biror X to'plamning o'zini - o'ziga to'g'ri ko'paytmasi $X \times X$ ni $R_+ = [0, \infty)$ to'plamga aks ettiruvchi $\rho(x, y)$ funksiya berilgan bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa,

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ tenglik faqat va faqat $x = y$ bo'lganda o'rinli,
- 2) $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (simmetriklik aksiomasi),
- 3) $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (uchburchak tengsizligi aksiomasi)

u holda $\rho(x, y)$ funksiya X to'plamda aniqlangan metrika deyiladi.

Agar X to'plamda $\rho(x, y)$ metrika aniqlangan bo'lsa (X, ρ) juftlikka metrik fazo deyiladi.

Misollar: 1) ixtiyoriy to'plam elementlari uchun

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

deb olsak, metrik fazoga ega bo'lamiz.

2) Haqiqiy sonlar to'plami $\rho(x, y) = |x - y|$ masofa bilan R^1 metrik fazo tashkil qiladi.

3) n ta haqiqiy sonning tartiblangan gruppalar to'plami.

Ixtiyoriy

$$\{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \{y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

elementlar uchun

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}$$

masofa bilan aniqlangan n – o'lchovi fazo Evklid fazosi deyiladi va R^n kabi belgilanadi.

R^n uchun 1) va 2) shartlar bajariladi. 3) shartni bajarilishini ko'rsatamiz.

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n), \quad z = (z_1, \dots, z_n)$$

bo'lsin.

U holda uchburchak tengsizligiga ko'ra

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2} \quad (1)$$

$y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$ deb olib $z_k - x_k = a_k + b_k$ ni olamiz, so'ngra (1) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}, \quad (2)$$

Bu tengsizlik

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k b_k) \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (3)$$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi, haqiqatan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n b_k a_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

va bu (2) tenglikni beradi. (1) isbotlandi.

4) $x = (x_1, \dots, x_n)$ - n ta haqiqiy sonning tartiblangan gruppalar to'plami.

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k| \quad (4)$$

masofa bilan R_0^n metrik fazo tashkil qiladi.

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k| \quad (5)$$

masofa bilan R_1^n metrik fazo tashkil qiladi.

5) $[a, b]$ segmentda aniqlangan barcha uzluksiz haqiqiy funksiyalar fazosi $C[a, b]$

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)| \quad (6)$$

metrika bilan metrik fazo tashkil qiladi.

6) Haqiqiy sonlardan tuzilgan

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha mumkin bo'lgan ketma-ketliklar fazosi

l_2 da metrika

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} \quad (7)$$

kiritiladi. $(x_k - y_k)^2 \leq 2(x_k^2 + y_k^2)$ munosabatdan $\rho(x, y)$ barcha $x, y \in l_2$ uchun (7) yig'indi ma'noga ega bo'ladi. Ya'ni $\sum x_k^2 < \infty, \sum y_k^2 < \infty$ bo'lsa,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$$

qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Uchinchi shartni bajarilishini tekshiramiz.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2} \quad (8)$$

(3) misoldagi kabi belilashlar kiritsak) har bir tayin $n \in N$ da

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}$$

o'rinli ekanini ko'rsatgan edik. $n \rightarrow \infty$ da limitga o'tib (8) ni hosil qilamiz. Bu yerda har bir qator yuqorida aytilganiga ko'ra yaqinlashuvchi bo'ladi.

7) $[a, b]$ segmentda aniqlangan barcha uzluksiz haqiqiy funksiyalar fazosida

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2} \quad (9)$$

metrikani kiritamiz. Bunda metrik fazo $C_2[a, b]$ kabi belgilanadi.

Bu fazoda ham metrika shartlarini tekshiramiz 1) va 2) oson ko'rsatiladi, uchinchi shartni bajarilishini ko'rsatamiz.

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)dt \cdot \int_a^b y^2(t)dt$$

Koshi- Bunyakovkiy tengsizligidagidan kelib chiqadi.

Bu tengsizlik esa quyidagi

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt \right)^2 = \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [x(s)y(t) - x(t)y(s)]^2 dt ds$$

ayniyatdan kelib chiqadi.

8) $X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid x_n \in R, |x_n| < M\}$ to'plamda

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k| \quad (10)$$

metrika kiritamiz. X metrik fazo bo'ladi.

9) n ta haqiqiy sonning tartiblangan gruppalar to'plami R_p^n da

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^p \right)^{1/p} \quad (11)$$

metrika kiritamiz. R_p^n metrik fazo tashkil qiladi. Bu yerda $p \geq 1$ - ixtiyoriy tayinlangan son.

1) va 2) shartlar bajarilishi ko'rsatish oson, 3) ni tekshiramiz.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

R_p^n dan olingan 3 ta nuqta bo'lsin.

$y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$ deb olamiz,

$\rho_p(x, z) \leq \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z)$ tengsizlik

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k - b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \quad (12)$$

ko‘rinishni oladi. Bu Minkovskiy tengsizligi deyiladi.

$p=1$ da Minkovskiy tengsizligi oddiy isbotlanadi (yig‘indining moduli modullar yig‘indisidan oshmaydi), shuning uchun $p>1$ deb xisoblaymiz.

(12) tengsizlikning isboti $p>1$ da Gyolder tengsizligi deb aytiluvchi quyidagi tengsizlikka asoslangan:

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}, \quad (13)$$

bu yerda $p>1, q>1$ va $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ya’ni

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad (14)$$

(13) tengsizlik bir jinsli. Agar u

$$a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n)$$

2 ta vektor uchun bajarilsa, λa va μb vektorlar uchun ham bajarilishini ko‘rsatadi, bu yerda λ, μ – ixtiyoriy sonlar. Shuning uchun (13) ni

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^p = \sum_{k=1}^n |b_k|^q = 1 \quad (15)$$

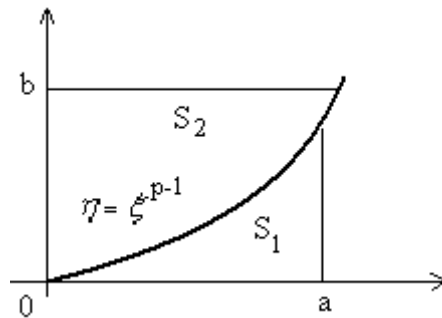
bo‘lgan xol uchun isbotlash yetarli.

(15) shart bajarilsin. U holda (13) tengsizlik

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq 1 \quad (16)$$

ko‘rinishga keladi.

(ξ, η) tekislikda $\eta = \xi^{p-1}, (\xi > 0)$ funksiyani qaraymiz (yoki $\xi = \eta^{q-1}$ chiziqlarni qaraymiz)



Chizmadan ko‘rinadiki, ixtiyoriy a va b musbat sonlari uchun

$$S_1 + S_2 \geq ab$$

tengsizlik bajariladi.

S_1 va S_2 ni hisoblaymiz.

$$S_1 = \int_a^b \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p}$$

$$S_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}$$

Shunday qilib, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ sonli tengsizlik o‘rinli.

Bu yerda a ni $|a_k|$ bilan, b ni $|b_k|$ bilan almashtirib va k bo‘yicha 1 dan n gacha yig‘ib, (14) va (15) ni etiborga olib

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq 1$$

ni hosil qilamiz. (16) tengsizlik isbotlandi.

Misol. $x_n = t^n$ ketma-ketlik $C[0,1]$ va $C_1[0,1]$ fazolarda aynan nol funksiyaga yaqinlashuvchimi?

Echish. $C[0,1]$ va $C_1[0,1]$ da metrika mos ravishda

$$p(x, y) = \max_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \quad \text{va} \quad p_1(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt \quad \text{formulalar bilan}$$

aniqlanadi. Shuning uchun $x(t) \equiv 0$ funksiya uchun ushbu

$$p(x_n, x) = \max_{0 \leq t \leq 1} |t^n| = 1 \rightarrow 0 \quad \text{va}$$

$$p(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

munosabatlardan $x_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, \dots$ funksiyalar ketma-ketligining nol funksiyaga $C[0,1]$ da yaqinlashmasligi, $C_1[0,1]$ da esa yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

21-mashq.

Quyidagi akslantirishlar metrikani aniqlaydimi?

№	Fazoni ng belgila nishi	Fazoning elementlari	Metrika uchun formula
21.1.	R^n	$x = (x_1, x_2, \dots, x_k), \quad x_k \in R$	$p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n x_k - y_k $

21.2.	C^n	$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \quad z_n \in C$	$p(z, w) = \left(\sum_{k=1}^n z_k - w_k ^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
21.3.	m	Chegaralangan ketma-ketliklar to‘plami	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n + \inf_n x_n - y_n $
21.4.	C_0	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n $
21.5.	C	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mavjud va chekli	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n $
21.6.	l_1	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k $	$p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - y_k $
21.7.	l_p	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n ^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$	$p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} x_n - y_n ^p}$
21.8.	$C[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi	$p(x, y) = \max_{t \in [a, b]} x(t) - y(t) + \inf_{t \in [a, b]} x(t) - y(t) $
21.9.	$C_1[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi	$p(x, y) = \int_a^b x(t) - y(t) dt$
21.10.	$C_2[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi	$p(x, y) = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt} + \sup_{t \in [a, b]} x(t) - y(t) $
21.11.	$V[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan o‘zgarishi	$p(x) = x(a) + \int_a^b x $

		chegaralangan funksiyalar sinfi	
21.12.	$L_p[a,b]$	$[a,b]$ da aniqlangan va modulining p -darajasi bilan integrallanuvchi funksiyalar sinfi. $p > 1$	$p(x,y) = \left(\int_a^b x(t) - y(t) ^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$
21.13.	$L_n[a,b]$	$[a,b]$ da aniqlangan va n - tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan funksiyalar sinfi	$p(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} x(t) - y(t) +$ $+ \sum_{k=1}^n \max_{a \leq t \leq b} x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) $
21.14.	$C[a,b]$	$[a,b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi.	$p(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} x(t) - y(t) $
21.15.	$C[a,b]$	$[a,b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar fazosi.	$p_m(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} (x(t) - y(t))e^{-mt} $

22-mashq.

P_n —darajasi n dan oshmaydigan, haqiqiy koeffitsientli ko'phadlar fazosi. $C[a,b]$ — $[a,b]$ dagi uzluksiz funksiyalar fazosi, $C^{(k)}[a,b]$ — $[a,b]$ da aniqlangan k marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosi bo'lsin. Quyidagi akslantirishlar metrikani aniqlaydimi?

22.1. $p(x,y): R \times R \rightarrow R$, $p(x,y) = (x - y)^2$,

22.2. $p: R \times R \rightarrow R$, $p(x,y) = |x - y| + (x - y)^2$

$$22.3. \quad p: C^{(1)}[a,b] \rightarrow R, \quad p(x,y) = \int_a^b |(x(t) - y(t))| dt + \int_a^b |(x'(t) - y'(t))| dt$$

$$22.4. \quad a) \quad p: R^2 \times R^2 \rightarrow R \quad p(x,y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$

$$b) \quad p: C^{(1)}[a,b] \rightarrow R, \quad P(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x'(t) - y'(t)|$$

22.5.

$$p: C^{(1)}[a,b] \times C^{(1)}[a,b] \rightarrow R, \quad p(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t) - y'(t)|$$

22.6.

$$p: C^{(1)}[a,b] \times C^{(1)}[a,b] \rightarrow R, \quad p(x,y) = \max \left\{ \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|, \max_{a \leq t \leq b} |x'(t) - y'(t)| \right\}$$

22.7.

$$p: R_n \times R_n \rightarrow R, \quad p(x,y) = \max_k \{ |a_k - b_k| \}, \quad x = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, y = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$$

$$22.8. \quad p: M[a,b] \rightarrow R, \quad p(x,y) = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|, \quad M[a,b] - [a,b] \text{ da}$$

aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalar fazosi.

$$22.9. \quad p: C^{(1)}[a,b] \times C^{(1)}[a,b] \rightarrow R, \quad p(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x'(t) - y'(t)|$$

$$22.10. \quad a) \quad p: R \rightarrow R, \quad p(x,y) = (x - y)^4$$

$$b) \quad p: C^{(2)}[a,b] \rightarrow R, \quad p(x) = |x(0)| + |x'(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x''(t)|$$

$$22.11. \quad a) \quad p: R \rightarrow R, \quad P(x,y) = \sqrt{|x - y|}$$

$$b) \quad p: C^{(2)}[a,b] \rightarrow R, \quad p(x) = |x(a)| + |x(b)| + \max_{a \leq t \leq b} |x''(t)|$$

22.12. Birlik doira $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ da aniqlangan $\overline{D} = \{z \in C : |z| \leq 1\}$ da uzluksiz funksiyalar fazosida $p(x,y) = \max_{|t|=1} |x(t) - y(t)|$ formula metrikani

aniqlashini qo'rsating.

22.13. $[a, b]$ kesmada Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar fazosi $Lip[a, b]$ da ushbu formula

$$\rho(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| + \sup_{(t, s) \in [a, b] \times [a, b]} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|}$$

metrikani aniqlashini ko'rsating.

22.14. E chiziqli fazoda 1) $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$, $x, y, z \in E$

2) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$, λ — ixtiyoriy son,

$x, y \in E$

shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya berilgan bo'lsin. $\rho(x, y)$ funksiya E to'plamda metrika aniqlashini ko'rsating.

23-mashq.

Quyidagi funksiyalar ketma-ketligi $x(t) \equiv 0$ funksiyaga ko'rsatilgan fazolarda yaqinlashuvchimi?

23.1. $x_n(t) = \frac{nt}{1 + n^2 + t^2}$, $C[0, 1]$, $C_1[0, 1]$.

23.2. $x_n(t) = \frac{t}{1 + n^2 t^2}$, $C[0, 1]$, $C_1[0, 1]$.

23.3. $x_n(t) = te^{-nt}$, $C[0, 10]$, $C_1[0, 10]$.

23.4. $x_n(t) = \sqrt{t^2 + \frac{1}{n}} - t$, $C[0, 1]$, $C_1[0, 1]$.

23.5. $x_n(t) = t^n - t^{n+2}$, $C[0, 1]$, $C_2[0, 1]$.

23.6. $x_n(t) = t^n - t^{2n}$, $C[0, 1]$, $C_2[0, 1]$.

23.7. $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$, $C[0, 1]$, $C_2[0, 1]$.

23.8. $x_n(t) = n^{-\frac{1}{8}} \sqrt{2nt} \cdot e^{-\frac{1}{2}nt^2}$, $C[0, 1]$, $C_2[0, 1]$.

$$23.9. x_n(t) = 2nt \cdot e^{-nt^2} \quad C[0,1], \quad C_1[0,1].$$

$$23.10. x_n(t) = \frac{\sin t}{n}, \quad C[-\pi, \pi], \quad C_1[-\pi, \pi].$$

$$23.11. x_n(t) = -\frac{t^2 + 1}{1 + n + t}, \quad C[0,1], \quad C_1[0,1].$$

$$23.12. x_n(t) = -\frac{t \ln(1 + n^2 t^2)}{2n^2}, \quad C[0,1], \quad C_1[0,1].$$

23.13. $C[a,b]$ fazoda darajasi k dan oshmaydigan ko'phadlar to'plami yopiq bo'ladimi?

23.14. $C[a,b]$ fazoda darajasi k ga teng ko'phadlar to'plami yopiq bo'ladimi?

23.15. $C[a,b]$ fazoda ushbu $\{x \in C[a,b] : x(t) \in (0,1), \forall t \in [a,b]\}$ to'plam ochiqmi?

11-§. To'la metrik fazolar.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik (X, ρ) metrik fazoda fundamental ketma-ketlik deyiladi, agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε natural son topilsaki, barcha $n' > N_\varepsilon$, $n'' > N_\varepsilon$ lar uchun $\rho(x_{n'}, x_{n'') < \varepsilon$ bo'lsa. Uchburchak tengsizligidan har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo'lishi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $x_n \rightarrow x$ bo'lsa, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon, n > N_\varepsilon$

$$\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

u holda barcha $n' > N_\varepsilon$, $n'' > N_\varepsilon$ uchun

$$\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \rho(x_{n'}, x) + \rho(x_{n''}, x) < \varepsilon$$

o'rinli.

Ta’rif. Agar (X, ρ) metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda bu fazo to‘la deyiladi.

1. Yakkalangan nuqtalar to‘plami to‘la metrik fazo bo‘ladi. Bunda faqat statsionar ketma-ketliklar, ya’ni biror nomerdan boshlab faqat bitta nuqta takrorlanuvchi ketma-ketlik fundamental bo‘ladi. Bunday ketma-ketliklar albatta yaqinlashuvchi.
2. R^1 - to‘la metrik fazo bo‘ladi. Chunki Koshi teoremasiga ko‘ra har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi.
3. R^n fazoning to‘laligi R^1 ning to‘laligidan kelib chiqadi. O‘z navbatida $\{x^{(p)}\} - R^n$ dan olingan fundamental ketma-ketlik bo‘lsin, ya’ni $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ mavjudki,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2, \quad \forall p, q > N$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerda $x^{(p)} = \{x_1^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}\}$. U holda har bir

$k = 1, 2, \dots, n$ va $x_k^{(p)}$ uchun $|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| < \varepsilon$ tengsizlik barcha $p, q > N$ uchun bajariladi, ya’ni $\{x_k^{(p)}\}$ - fundamental ketma – ketlik.

$x_k = \lim_{p \rightarrow \infty} x_k^{(p)}$ va $x = (x_1, \dots, x_n)$ deb olamiz, U holda $\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(p)} = x$.

R_0^1 va R_1^n fazolarning to‘laligi huddi shunga o‘xshash isbotlanadi.

4. $C[a, b]$ ning to‘laligini ko‘rsatamiz. $\{x_n(t)\} - C[a, b]$ dagi fundamental ketma – ketlik bo‘lsin. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ uchun $\exists N_\varepsilon$ mavjudki, $\forall n > N_\varepsilon, m > N_\varepsilon, \forall t \in [a, b]$ da $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ bo‘ladi. Bu esa $\{x_n(t)\}$ ni tekis yaqinlashuvchi ekanini ko‘rsatadi. Uning limiti $x(t)$ esa uzluksiz

funksiya bo'lishi ma'lum. Yuqoridagi tengsizlikda $n \rightarrow \infty$ da limitga utib, barcha $t \in [a, b]$, $n > N$ lar uchun $|x(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. Bu $\{x_n(t)\}$ ni $x(t)$ ga $C[a, b]$ dagi metrika bo'yicha yaqinlashuvchi ekanligini bildiradi.

5. l_2 fazo, $\{x^{(n)}\} - l_2$ da fundamental ketma - ketlik bo'lsin. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n, m > N$ da

$$p^2(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bundan har qanday k da $\{x_k^{(n)}\}$ sonlar ketma - ketligi fundamental ekanligi kelib chiqadi. $x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)}$ $x = (x_1, \dots, x_k, \dots)$ deb belgilaymiz.

Quyidagilarni ko'rsatamiz.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, ya'ni $x \in l_2$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x^{(n)}, x) = 0$

(1) dan ixtiyoriy tayinlangan $M \in \mathbb{N}$ da

$$\sum_{k=1}^M (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Bu yig'indi faqat chekli sondagi qo'shiluvchilardan iborat, n ni tayinlab $m \rightarrow \infty$ da limitga o'tamiz.

$$\sum_{k=1}^M (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leq \varepsilon$$

Bu ixtiyoriy M da o‘rinli. $M \rightarrow \infty$ da limitga o‘tib

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leq \varepsilon \quad (2)$$

ni olamiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2 \quad \text{va} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2$$

larning yaqinlashuvchiligidan $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ ning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

ε ning ixtiyoriyligidan va (2) tengsizlikdan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2} = 0$$

Demak, l_2 fazo to‘la ekan.

6. $C_2[a, b]$ to‘la emasligini ko‘rsatamiz.

$[-1, 1]$ da

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t \leq -\frac{1}{n} \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ketma-ketlikni qaraymiz. U $C_2^n[-1, 1]$ da fundamental, chunki

$$\int_{-1}^1 (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2 dt \leq \frac{2}{\min(n, m)}$$

U hech bir $C_2^n[-1,1]$ dan olingan funksiyaga yaqinlashmaydi. Haqiqatan ham $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$ - uzilishga ega funksiya.

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \begin{cases} -1, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

Minkovskiyning integral tengsizligiga ko'ra $\forall f \in C_2[-1,1]$ uchun

$$\left(\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^1 (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

$f(t)$ funksiyaning uzluksizligidan chap tomon noldan farqli va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 dt = 0$$

Shuning uchun

$$\int_{-1}^1 (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt \quad n \rightarrow \infty \text{ da nolga intilishi mumkin emas, ya'ni}$$

$C_2[-1,1]$ to'la fazo emas.

Ichma – ich joylashgan sharlar prinsipi.

Teorema. (X, ρ) metrik fazo to'la bo'lishi uchun radiuslari ketma-ketligi nolga intiluvchi ichma-ich joylashgan yopiq sharlar ketma-ketligi bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema (Ber). R to'la metrik fazoni hech qaerda zich bo'lmagan sanoqli sondagi to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi.

24-mashq.

Quyidagi fazolar to'la metrik fazo bo'ladimi?

№	Fazoni ng belgila nishi	Fazoning elementlari	Metrika uchun formula
24.1.	C^n	$z = (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad z_n \in \mathbb{C}.$	$p(z, w) = \left(\sum_{k=1}^n z_k - w_k ^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
24.2.	m	Chegaralangan ketma-ketliklar fazosi.	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n $
24.3.	C_0	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n $
24.4.	C	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mavjud.	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n $
24.5.	l_1	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k < +\infty$	$p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - y_k $
24.6.	l_p	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n ^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad p \geq 1$	$p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} x_n - y_n ^p}$
24.7.	$C_1[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar.	$p_1(x, y) = \int_a^b x(t) - y(t) dt$
24.8.	$L_p[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan va modulining p -darajasi bilan integrallanuvchi	$p(x, y) = \left(\int_a^b x(t) - y(t) ^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$

		funksiyalar sinfi. $p > 1$	
24.9.	$C^n[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan va n -tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan funksiyalar	$p(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} x(t) - y(t) + \sum_{k=1}^n \max_{a \leq t \leq b} x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) $
24.10 .	$C[a, b]$	$[a, b]$ da aniqlangan uzluksiz funksiyalar sinfi	$p_m(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} (x(t) - y(t))e^{-mt} $

12-§. Qisqartirib akslantirish prinsipi.

Aytaylik, R – metrik fazo bo'lsin.

Ta'rif: $A: R \rightarrow R$ akslantirish qisqartirib akslantirish deyiladi, agar shunday $0 < \alpha < 1$ soni topilib, ixtiyoriy $x, y \in R$ uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$$

tengsizlik bajarilsa.

Har qanday qisqartirib akslantirish uzluksiz akslantirishdir. Haqiqatan, ham

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y) = 0,$$

$$\rho(Ax_n, Ay) \leq \alpha \cdot \rho(x_n, y)$$

bo'lganligi sababli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Ax_n, Ay) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$x \in R$ nuqta $A: R \rightarrow R$ akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi, agar $Ax = x$ tenglik bajarilsa.

Teorema (Qisqartirib akslantirish prinsipi). To‘la metrik fazodagi har qanday qisqartirib akslantirish yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega.

Isbot. Aytaylik, $x_0 \in R$ bo‘lsin.

$x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1, \dots, x_{n+1} = Ax_n, \dots$ bo‘lsin. Endi $\{x_n\}$ - ketma - ketlikni fundamental ekanini ko‘rsatamiz. $\forall m, n \in N, m \geq n$ sonlarini olamiz. $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_m) &= \rho(A^n(x_0), A^m(x_0)) \leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \\ &\leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})) \leq \\ &\leq \alpha^n (\rho(x_0, x_1) + \alpha \rho(x_0, x_1) + \alpha^2 \rho(x_0, x_1) + \dots + \\ &+ \alpha^{m-n-1} \rho(x_0, x_1)) = \alpha^n \rho(x_0, x_1) \left(\frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \right) \leq \\ &\leq \alpha^n \frac{\rho(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \varepsilon \end{aligned}$$

$$n(\ln \alpha) < \ln \frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(x_0, x_1)} \Rightarrow n > \frac{\ln \frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(x_0, x_1)}}{\ln \alpha}$$

$$n_0 = \left\lceil \frac{\ln \frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(x_0, x_1)}}{\ln \alpha} \right\rceil + 1$$

Demak, $\{x_n\}$ - ketma - ketlik fundamental. To‘la metrik fazoda har qanday fundamental ketma - ketlik limitga ega bo‘lganligi uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in R$$

bo‘ladi. Ax - akslantirish uzluksiz akslantirish ekanini e‘tiborga olsak,

$$Ax = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_{n+1} = x$$

qo'zg'almas nuqta mavjudligini ko'ramiz. Endi yagonaligini isbotlaymiz.

Faraz kilaylik, $Ax = x, Ay = y$ bo'lsin u holda

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$$

Bundan

$$\begin{aligned} \rho(x, y) - \alpha \cdot \rho(x, y) &\leq 0 \Rightarrow 0 \leq \rho(x, y)(1 - \alpha) \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho(x, y) &= 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Misol. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya'ni shunday $0 < k < 1$ soni mavjud bo'lib, $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ uchun

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

tengsizlik bajarilsin. U holda $f(x)$ – qisqartirib akslantirish bo'ladi.

25-mashq.

Quyidagi ko'rsatilgan akslantirishlar qisqartirib akslantirish bo'ladimi?

№	Fazoni ng belgilan ishi	Metrika uchun formula	Akslantirish
25.1.	C^n	$p(z, w) = \left(\sum_{k=1}^n z_k - w_k ^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	$z = (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad z_n \in C$ $Az = \left(\frac{1}{2}z_1, \frac{1}{3}z_2, \dots, \frac{1}{n+1}z_n \right)$

25.2.	m	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n $	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ $Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \dots, \frac{1}{2^n}x_n, \dots \right)$
25.3.	C_0	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n $	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ $Ax = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)x_1, \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{8}\right)x_2, \dots, \operatorname{tg}\left(1 - \frac{3\pi}{4n}\right)x_n, \dots \right)$
25.4.	C	$p(x, y) = \sup_n x_n - y_n $	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ $Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{2}{3}x_2, \dots, \frac{n}{n+1}x_n, \dots \right)$
25.5.	l_1	$p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - y_k $	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ $Ax = \left(0 \cdot x_1, \sin \frac{1}{2}x_2, 0 \cdot x_3, \dots, 0 \cdot x_{2n-1}, \sin \frac{2n-1}{2n}x_{2n}, \dots \right)$
25.6.	l_p	$p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} x_n - y_n ^p}$	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ $Ax = \left(\frac{1}{2}x_1, 0 \cdot x_2, \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3}x_3, \dots, \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}}x_{2n-1}, 0 \cdot x_{2n}, \dots \right)$
25.7.	$C_1[a, b]$	$p_1(x, y) = \int_a^b x(t) - y(t) dt$	$Ax = \lambda(t) \cdot x(t), \quad \ \lambda\ < 1$
25.8.	$L_p[a, b]$	$p(x, y) = \left(\int_a^b x(t) - y(t) ^p dt \right)^{1/p}$	$Ax = (x(t))^2$
25.9.	$C^n[a, b]$	$p(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} x(t) - y(t) +$ $+ \sum_{k=1}^n \max_{a \leq t \leq b} x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) $	$Ax = 2x(t) - x^2(t)$
25.10.	$C[a, b]$	$p_m(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} (x(t) - y(t)) $	$Ax = x(t) \cdot \cos t$

Adabiyotlar.

1. П.С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. «Наука», М. 1977.
2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», М. 1976.
3. П. Холмош. Теория меры. ИЛ, М. 1953.
4. Т.А. Саримсақов. Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси. «Ўзбекистон», Т.1993.
5. Ю.С. Очан Сборник задач по математическому анализу. «ПРОСВЕЩЕНИЕ», М. 1979.
6. А.А. Кирилов, А.Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. «Наука», М. 1979.
7. В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. Задачи и упражнения по функциональному анализу. «Наука», М.1984.
8. Н.Р. Ражабов, П.И. Очиллов, Х.Н. Носирова Ф. Шарипов, О.Й. Жўраев. Функционал анализ ва интеграл тенгламалар курси бўйича лаборатория ишларига доир методик кўрсатмалар. 1, 2- қисм. Самарқанд –1989.

Mundarija

	Soʻz boshi.....	3
1-§.	Toʻplamlar ustida amallar va akslantirishlar.....	4
2-§.	Toʻplamlarning ekvivalentligi. Kantor-Bernshteyn teoremasi.	13
3-§.	Oʻlchovli toʻplamlar.....	18
4-§.	Oʻlchovli funksiyalar.....	27
5-§.	Lebeg integrali.....	37
6-§.	Oʻzgarishi chegaralangan funksiyalar.....	48
7-§.	Lebeg-Stiltes integrali.....	56
8-§.	Topologik fazolar.....	60
9-§.	Chiziqli fazolar.....	64
10-§.	Metrik fazolar.....	74
11-§.	Toʻla metrik fazolar.....	86
12-§.	Qisqartirib akslantirish prinsipi.....	92
	Adabiyotlar.....	96