

Urganch Davlat Universiteti fizika-
matematika fakulteti 301 – amaliy
matematika va informatika guruhi
talabasi Erkinova Shahnozaning
“Hisoblash usullari” fanidan “Chiziqli
algebraik tenglamalar sistemasini
yechish uchun Gradientlar usuli”
mavzusidagi kurs ishiga

Taqriz

Ushbu kurs ishida dastlab mavzuni yoritish uchun zarur bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, funksional gradienti, birlik vektor, funksionalning o'zgarish tezligi, gradient yo'nalishi, funksionalni minimumi, sistemaning xatolik vektori, simmetrik matritsa, matritsaning xos vektori, matritsa determinati kabi tayanch tushunchalar yoritilgan.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechimini topish uchun Gradientlar usuli o'rganilgan. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gradientlar usulida yechishning Paskal dasturlash tilida dasturi tuzilgan va natija olingan.

Talaba Erkinova Shahnozaning “Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun Gradientlar usuli” mavzusidagi kurs ishi Oliy va O'rta maxsus ta'lim Vazirligi tomonidan kurs ishini bajarishga qo'yilgan talablarga to'la javob beradi.

Taqrizchi:



“Amaliy matematika va matematik
fizika” kafedrası o'qituvchisi
Ro'zmetov Murod.

Urganch Davlat universiteti fizika-
matematika fakulteti 301-amaliy
matematika va informatika guruh
talabasi Erkinova Shahnozaning
hisoblash usullari fanidan “Chiziqli
algebraik tenglamalar sistemasini
yechish uchun Gradientlar usuli”
mavzusidagi kurs ishiga

Taqriz

Ushbu ishda dastlab mavzuni yoritish uchun zarur bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini, funksional gradienti, birlir vektor, funksionalning o'zgarish tezligi, gradient yo'nalishi, funksionalni minimumi, sistemaning xatolik vektori, matritsa determinati kabi tayanch tushunchalar yoritilgan.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechimini topish uchun Gradientlar usuli o'rganilgan. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini analitik usuldagi yechimi bilan uning taqribiy yechimi solishtirilgan va xatoligi ko'rastilgan.

Talaba Erkinova Shahnozaning „Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun Gradientlar usuli” mavzusidagi kurs ishi Oliy va o'rta maxsus ta'lim Vazirligi tomonidan kurs ishini bajarishga qo'yilgan talablarga to'la javob beradi.

Taqrizchi:



TATU Urganch filiali „Axborot ta'lim
texnologiyalari” kafedrasini mudiri
Mamedov Quddus

*O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
Al-Xorazmiy nomidagi Urganch Davlat
Universiteti Fizika-matematika fakulteti 301-
amaliy matematika va informatika guruhi
talabasi Erkinova Shahnozaning*



KURS ISHI

**MAVZU: Chiziqli algebraik tenglamalar
sistemasini yechish uchun Gradientlar usuli.**

TOPSHIRDI:
QABUL QILDI:

ERKINOVA SHAHNOZA
SALAYEV SAPABOY

80

URGANCH 2015

Mavzu: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun Gradientlar usuli

Reja:

I. Kirish.	2
II.Asosiy qism:	
1. Funksionalning gradienti tushunchasi.	6
2. Gradientlar metodi	8
3. Gradientlar metodiga doir misollar va dasturi.	15
III. Xulosa.	19
IV. Adabiyotlar.	20

I. Kirish

Men bu “Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun Gradientlar usuli” mavzusida kurs ishimni tayyorlashda M.I.Isroilovning “Hisoblash metodlari” nomli kitobidan va internetning www.arxiv.uz saytidan keng foydalandim.

Mazkur kitob muallifning uzoq yillar davomida O'zbekiston Milliy universitetining matematika, amaliy matematika va mexanika, Samarqand davlat universitetining informatika va informatsion texnologiya fakultetlarida hamda Milliy universitet qoshidagi malaka oshirish fakultetida “Hisoblash metodlari” kursi bo'yicha o'qigan ma'ruzalari asosida yozilgan bo'lib, universitetlarning 5A460100-5A460107 va 5A521901-5A521903 matematika hamda informatika va axborotlashtirish texnologiyasi bo'yicha magistratura mutaxassisliklari uchun “Hisoblash metodlari” kursi dasturining birinchi qismiga mos keladi va bu dasturlarda o'qitilishi mo'ljallangan barcha materiallarni o'z ichiga oladi.

Kitobni yozishda chet el olimlari tomonidan yaratilgan, shu jumladan N.S.Baxvalov, I.S.Beryozin va N.P.Jidkov, V.I.Krilov, B.B.Bobkov va P.N.Monastirniy, G.I.Marchuk, I.P.Miskovskix, G.A.Mixaylov, A.A.Samarskiy, A.N.Tixonov, D.K.Faddev va V.N.Faddeva, J.X.Uilkinson darsliklari va monografiyalaridan foydalanilgan.

O'zbek tilida bungacha hisoblash metodlaridan darslik hamda misol va masalalarga doir qo'llanmalar bo'lmaganligini hisobga olib, asosiy g'oyalar yanada tushunarli bo'lishi uchun kitobda bayon etilgan barcha metodlarga, sodda bo'lsada, misollar keltirilgan.

Bu kurs ishimni yoritishdan oldin chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini haqida quyidagi boshlang'ich tushunchalarni keltirib o'tmoqchiman. Nazariy va tadbiqiy matematikaning ko'pgina masalalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga olib keladi. Masalan, funksiyaning $n+1$ ta nuqtada berilgan qiymatlari yordamida n -tartibli ko'phad bilan interpolatsiyalash yoki funksiyaning o'rta kvadratlar metodi yordamida yaqinlashtirish masalalari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilishning asosiy manbai uzluksiz funksional tenglamalarni chekli-ayirmali tenglamalar bilan yaqinlashtirishdir. Masalan, Laplas differensial operatori uchun Dirixle masalasini tartibi yuqori bo'lgan oddiy chekli-ayirmali tenglamalar sistemasi bilan almashtirish mumkin. EHMLar yaratilishi bilan bunday masalalar yana ham ko'payib bormoqda.

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish masalasi bilan matritsalarining teskarisini topish va determinantlarni hisoblash masalalari uzviy ravishda bog'langandir. Bu masalalar nazariy jihatdan osongina yechiladi. Lekin matritsalarining tartibi ortgan sari bu masalalarni amalda yechish juda katta hisoblashlarni talab qiladi. Hozirgi vaqtda bu masalalarni yechish uchun juda ko'p metodlar yaratilgan va ularni takomillashtirish ustida jadal ishlar olib borilmoqda.

Chiziqli algebraik tenglamalarni yechish asosan ikki - aniq va iteratsion metodlarga bo'linadi.

Aniq metod deganda shunday metod tushuniladiki, uning yordamida chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning aniq yechimini topish mumkin. Hammaga ma'lum bo'lgan Kramer qoidasi aniq metodga misol bo'la oladi. Lekin Kramer qoidasi odatda, amalda ishlatilmaydi, chunki bu metod bilan n -tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun $n^2 * n!$ tartibdagi arifmetik amallarni bajarish kerak. Bu nihoyatda katta son bo'lib, bu qoida bilan hatto $n = 30$ tartibli sistemasini yechish uchun ham hozirda mavjud bo'lgan EHMLar ham ojizlik qiladi.

Biz hisoblash uchun tejamli bo'lgan bir nechta aniq metodlarni ko'rib chiqamiz. Bularning ko'pchiligi noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish g'oyasiga asoslangan.

Iteratsion metodlar shu bilan xarakterlanadiki, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi ketma-ket yaqinlashishlarning limitidek topiladi.

Iteratsion metodlarni qo'llayotganda faqat ularning yaqinlashishlarigina emas, balki yaqinlashishlarning tezligi ham katta ahamiyatga egadir.

Bu ma'noda har bir iteratsion metod universal bo'lavermaydi.

Bu metodlar ayrim sistemalar uchun juda tez yaqinlashib, boshqa sistemalar uchun sekin yaqinlashishi yoki umuman yaqinlashmasligi ham mumkin. Shuning uchun ham iteratsion metodlarni qo'llayotganda sistemani avval tayyorlab olish kerak. Buning ma'nosi shundan iboratki, berilgan sistemani unga teng kuchli bo'lgan shunday sistemaga almashtirish kerakki, hosil bo'lgan sistema uchun tanlangan metod tez yaqinlashsin.

Hozirgi zamon EHMLari yordamida aniq, metodlar bilan tartibi 103 dan katta bo'lmagan, iteratsion metodlar bilan esa tartibi 106 dan ortmaydigan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish mumkin. Avval aniq metodlarning umumiy g'oyasini ko'rib chiqaylik.

Bu metodlar asosan uch sinfga bo'linadi:

- 1) noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish metodlari;
- 2) matritsalarini ajratishga asoslangan metodlar;
- 3) biror metrikada ortogonal bo'lgan yordamchi vektorlar sistemasini tuzishga asoslangan metodlar.

Sistemadagi tenglamalardan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish metodi qadimiy metodlardandir.

Bu metodni ikki yo'l bilan amalga oshirish mumkin:

- a) tenglamalarning kerakli kombinatsiyalarini tuzish;
- b) almashtirishning har bir qadamida sistema matritsasining biror elementini yoki bir ustundagi diagonal elementi ostidagi barcha elementlarini nolga aylantirish maqsadida bu matritsani maxsus ravishda, tanlab olingan matritsaga ko'paytirishdan iboratdir. Har ikkala holda ham diqqat-e'tibor shunga yo'naltiriladiki, almashtirishlar natijasida berilgan sistema unga teng kuchli bo'lgan sistemaga o'tishi va so'ngi sistema sodda ko'rinishga ega bo'lishi kerak.

Matritsalarini ajratishga asoslangan metodlar g'oyaviy jihatdan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish metodlariga juda yaqin turadi. Bu yerda sistemaning matritsasi asosan uchburchak, diagonal yoki akslantirish matritsalarining ko'paytmalariga ajratiladi.

Uchinchi sinfga kiradigan metodlar hozirgi vaqtda keng tarqalgan metodlardir. Bu metodlarda izlanayotgan yechim maxsus ravishda qurilgan yordamchi vektorlar sistemasidagi oxirgi vektordan iborat. Bu gruppadagi metodlarning eng birinchisi ortogonallashtirish metodidir.

Yuqorida aytilgan barcha metodlarning umumiy mohiyatini quyidagi sxemada bayon qilish mumkin.

Faraz qilaylik, quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

Bu tenglikning ikkala tomonini chapdan, ketma-ket shunday

$$L_1, L_2, \dots, L_n$$

matritsalariga ko'paytiramizki, natijada hosil bo'lgan yangi

$$L_k L_{k-1} \dots L_1 A\bar{x} = L_k L_{k-1} \dots L_1 \bar{b}$$

sistema avvalgisiga ekvivalent bo'lib, soddaroq yechilsin. Buning uchun

$$B = L_k L_{k-1} \dots L_1 A$$

matritsaning uchburchak, diagonal yoki ortogonal bo'lishi kifoyadir. Shu bilan birga L_k matritsalar maxsusmas bo'lsa, teskari matritsa A^{-1} va determinant $\det A$ ni topish uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$A^{-1} = B^{-1} L_k L_{k-1} \dots L_1$$

$$\det A = \frac{\det B}{\prod_{i=1}^n \det L_i}$$

II. Asosiy qism.

II.1. Funksionalning gradienti tushunchasi.

Bu metod haqiqiy simmetrik musbat aniqlangan matritsali, chiziqli algebraik tenglamalar

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (1)$$

sistemasini yechish uchun mo'ljallangan.

Gradientlar metodini bayon qilishdan avval funksional gradienta tushunchasiga qisqacha to'xtalib o'tamiz.

Faraz qilaylik, $f(\bar{x})$ n o'lchovli

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

vektorning biror funksionali bo'lib,

$$\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

uzunligi birga teng bo'lgan vektor bo'lsin.

Funksiyaning o'sish yoki kamayish tezligini uning hosilasi xarakterlaganidek, f funksionalning $\bar{x}$ "argumenti" $\bar{y}$ yo'nalishi bo'yicha o'zgarganda, uning o'zgarish tezligini funksionalning hosilasi aniqlaydi.

f funksionalning $\bar{x}$ nuqtada $\bar{y}$ yo'nalishi bo'yicha hosilasi deb ushbu

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + \alpha \bar{y}) - f(\bar{x})}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} f(\bar{x} + \alpha \bar{y})|_{\alpha=0}$$

ifodaga aytiladi. Bu ta'rifdan

$$f(\bar{x} + \alpha \bar{y}) = f(x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2, \dots, x_n + \alpha y_n)$$

bo'lganligi uchun quyidagicha tenglik o'rinli bo'ladi.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} &= \frac{d}{d\alpha} f(x_1 + \alpha y_1, x_2 + \alpha y_2, \dots, x_n + \alpha y_n)|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} y_n = (\bar{z}, \bar{y}) \end{aligned} \quad (2)$$

bu yerda $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)'$, $z_i = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$

o`rinli bo`lib,

$\bar{z}$ vektor $f(\bar{x})$ funksionalning gradienti deyiladi.

(2) tenglikda $\|y\|=1$ bo`lganligi uchun

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = \|\bar{z}\| \cos(\bar{z}, \bar{y})$$

kelib chiqadi, bundan esa

$$-\|\bar{z}\| \leq \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} \leq \|\bar{z}\|$$

Shu bilan birga agar $\bar{y}$ ning yo`nalishi gradient yo`nalishi bilan ustma-ust tushsa,

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = \|\bar{z}\|$$

va $\bar{y}$ ning yo`nalishi gradient yo`nalishiga qarama-qarshi bo`lsa,

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} = -\|\bar{z}\|$$

bo`ladi. Shunday qilib, gradient yo`nalishi bo`ylab  $f(\bar{x})$  funksional katta tezlik bilan o`sar ekan va gradient yo`nalishiga teskari bo`lgan yo`nalish bo`yicha u katta tezlik bilan kamayar ekan.

Endi gradientlar metodiga o`tamiz.

II.2. Gradientlar metodi.

Gradientlar metodida (1) sistemani yechish uchun

$$f(\bar{x}) = (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(\bar{b}, \bar{x}) \quad (3)$$

funksional qaraladi. Bu funksional $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga nisbatan ikkinchi tartibli ko'phaddir. $\bar{x}^*$ orqali (1) sistemaning yechimini, ya'ni

$$\bar{x}^* = A^{-1}\bar{b}$$

ni belgilaymiz.

A matritsa simmetrik va musbat aniqlangan bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) - f(\bar{x}^*) &= (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(\bar{b}, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) + 2(\bar{b}, \bar{x}^*) = \\ &= (A\bar{x}, \bar{x}) - 2(A\bar{x}^*, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) + 2(A\bar{x}^*, \bar{x}^*) = (A\bar{x}, \bar{x}) - \\ &- (A\bar{x}^*, \bar{x}) - (A\bar{x}^*, \bar{x}) + (A\bar{x}^*, \bar{x}^*) = (A(\bar{x} - \bar{x}^*), \bar{x} - \bar{x}^*) \geq 0 \end{aligned}$$

Shu bilan birga so'ngi ifodada $\bar{x} = \bar{x}^*$ bo'lgandagina, tenglik ishorasi o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, (1) sistemani yechish masalasi (3) funksionalni minimumga aylantiradigan $\bar{x}^*$ vektorni topishga keltiriladi. Bunday vektorni topish uchun quyidagicha ish ko'ramiz.

Faraz qilaylik, $\bar{x}^{(0)}$ ixtiyoriy dastlabki yaqinlashish vektori bo'lsin.

(3) funksionalning gradientini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial \bar{y}} &= \frac{d}{d\alpha} f(\bar{x} + \alpha \bar{y}) \Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} (A(\bar{x} + \alpha \bar{y}) - 2\bar{b}, \bar{x} + \alpha \bar{y}) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{d}{d\alpha} [\alpha^2 (A\bar{y}, \bar{y}) - 2\alpha (\bar{b} - A\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x})] \Big|_{\alpha=0} = \\ &= -2(\bar{b} - A\bar{x}, \bar{y}) = 2(A\bar{x} - \bar{b}, \bar{y}) \end{aligned}$$

Buni (2) bilan solishtirib, $f(\bar{x})$ ning gradienti $2^*(A\bar{x} - \bar{b})$ ga teng ekanligini ko'ramiz.

Keyingi tekshirishlarda faqat gradientning yo'nalishigina kerak bo'lganligi uchun gradient o'rniga musbat ko'paytuvchi 2 ni tashlab, $A\bar{x} - \bar{b}$ vektorni qaraymiz. $\bar{x}^{(0)}$ nuqtada yo'nalishi gradient yo'nalishiga teskari bo'lgan vektorni

$\bar{r}^{(0)}$ orqali belgilaymiz:

$$\bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)} \quad (4)$$

Bu vektor (1) sistemaning xatolik vektori deyiladi. $\bar{r}^{(0)}$ vektorning yo`nalishida  $f(\bar{x})$  funksionalning  $\bar{x}^{(0)}$  nuqtadagi kamayish tezligi eng katta bo`ladi.

$\bar{x}^{(0)}$ nuqtadan boshlab $\bar{r}^{(0)}$ yo`nalish bo`yicha

$f(\bar{x}^{(0)} + \alpha \bar{r}^{(0)})$ minimal qiymatiga erishgunga qadar harakatni davom ettiramiz.

Bu nuqtani

$$\frac{d}{d\alpha} f(\bar{x}^{(0)} + \alpha \bar{r}^{(0)}) \equiv 2\alpha(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) - 2(\bar{b} - A\bar{x}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = 0$$

tenglamadan topamiz:

$$\alpha_o = \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} \quad (5)$$

A matritsa musbat aniqlangan bo`lganligi sababli barcha  $\bar{r}^{(0)} \neq 0$  uchun  $(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) > 0$ . Agar  $\bar{r}^{(0)} = 0$  bo`lsa, u holda (4) dan ko`ramizki,  $\bar{x}^{(0)}$  (1) sistemaning yechimini beradi va shu bilan jarayon to`xtaydi.

Agar $\bar{r}^{(0)} \neq 0$ bo`lsa, u holda navbatdagi yaqinlashish sifatida

$$\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \alpha \bar{r}^{(0)} \quad (6)$$

vektorni olamiz.

So`ngra

$\bar{r}_1 = \bar{b} - A\bar{x}^{(1)}$ ni hisoblaymiz. Keyingi yaqinlashish vektori bo`lgan $\bar{x}^{(1)}$ ni $f(\bar{x}^{(1)} + \alpha \bar{r}^{(1)})$ funksionalning minimumga erishish shartidan aniqlaymiz:

$$\alpha_1 = \frac{(\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})}{(A\bar{r}^{(1)}, \bar{r}^{(1)})}, \quad \bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(1)} + \alpha_1 \bar{r}^{(1)}$$

Bu jarayonni davom ettirib, quyidagilarga ega bo`lamiz:

$$\bar{r}^{(k)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(k)} \quad (7)$$

$$\alpha_k = \frac{(\bar{r}^{(k)}, \bar{r}^{(k)})}{(A\bar{r}^{(k)}, \bar{r}^{(k)})} , \quad (8)$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \alpha_k \bar{r}^{(k)} .$$

Bu metodning yaqinlashishi haqida quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. Agar A musbat aniqlangan simmetrik matritsa bo'lsa, u holda gradient metodi bilan qurilgan $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}$ ketma- ket yaqinlashishlar

$A\bar{x} = \bar{b}$ sistemaning yechimi $\bar{x}^*$ ga geometrik progressiya tezligida yaqinlashadi.

Aniqrog'i agar A matritsaning λ_i xos sonlari $0 < m < \lambda_i < M$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda $\{\bar{x}^{(k)}\}$ ketma-ketlikning $\bar{x}^*$ yechimga yaqinlashish tezligi uchinchi normada quyidagicha baholanadi:

$$\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_3^2 \leq \frac{1}{m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^{2k} (f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)) .$$

I s b o t. A matritsaning xos sonlarini quyidagicha

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$$

belgilaymiz, bularga mos keladigan ortonormalashtirilgan xos vektorlarni

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$$

orqali belgilaymiz. U holda ixtiyoriy

$$\bar{x} = c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + \dots + c_n \bar{u}_n$$

vektor uchun

$$(A\bar{x}, \bar{x}) = c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots + c_n^2 \lambda_n$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bundan esa

$$\lambda_n (\bar{x}, \bar{x}) = \lambda_n (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) \leq (A\bar{x}, \bar{x}) \leq \lambda_1 (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) = \lambda_1 (\bar{x}, \bar{x})$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak, A matritsa musbat aniqlangan

bo'lganligi uchun shunday o'zgarma $m < 0$ va $M > 0$ sonlar topiladiki,

$$m(\bar{x}, \bar{x}) \leq (A\bar{x}, \bar{x}) \leq M(\bar{x}, \bar{x})$$

tengsizliklar bajariladi.

Ushbu $f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^{(0)})$ ayirmani qaraylik.

(3) va (6) - (8) formulalarga ko'ra murakkab bo'lmagan hisoblashlardan keyin quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^{(0)}) = \alpha_0^2 (\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)}) - 2\alpha(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = -\frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})^2}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} \quad (9)$$

A - simmetrik matritsa,

$$A\bar{x}^* = \bar{b} \quad \text{va} \quad \bar{r}^{(0)} = A(\bar{x}^* - \bar{x}^{(0)})$$

bo'lganligi uchun

$$f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*) = ((\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*), A(\bar{x}^{(0)} - \bar{x}^*)) = (A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})$$

Demak, (9) ga ko'ra

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \frac{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})(A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})^2}.$$

Endi $\bar{r}^{(0)}$ ni A matritsaning xos vektorlari bo'yicha yoyamiz:

$$\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{u}_i.$$

U vaqtda

$$A\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i \bar{u}_i, \quad A^{-1}\bar{r}^{(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i \bar{u}_i$$

va

$$(A\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2, \quad (A^{-1}\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i^2.$$

Demak,

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} a_i^2}{(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}.$$

Quyidagicha

$$d_i = \frac{a_i^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \quad (d_i \geq 0, \sum_{i=1}^n d_i = 1),$$

belgilashni kiritib,

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} = \sum_{i=1}^n d_i \lambda_i \sum_{j=1}^n d_j \lambda_j^{-1} \quad (10)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Quyidagini isbotlaylik: agar $0 < m < \lambda_i < M \quad (i = \overline{1, n})$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy haqiqiy

$$d_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad \sum_{i=1}^n d_i = 1$$

sonlar uchun

$$\sum_{i=1}^n d_i \lambda_i \sum_{j=1}^n d_j \lambda_j^{-1} \leq \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \right]^2 \quad (11)$$

tengsizlik o'rinlidir.

Buni isbotlash uchun λ_i o'rniga $\xi_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{mM}}$ sonlarni olamiz,

u vaqtda

$$\sqrt{\frac{m}{M}} \leq \xi_i \leq \sqrt{\frac{M}{m}} \quad \text{bo'lib,}$$

$$\sum_{i=1}^n d_i \lambda_i \sum_{j=1}^n d_j \lambda_j^{-1} = \sum_{i=1}^n d_i \xi_i \sum_{j=1}^n d_j \xi_j^{-1}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Oxirgi ifodaga ikki son o'rta geometrigi uning o'rta arifmetigidan ortmasligi haqidagi teoremani qo'llaymiz:

$$\sum_{i=1}^n d_i \xi_i \sum_{j=1}^n d_j \xi_j^{-1} \leq \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i=1}^n d_i (\xi_i - \xi_i^{-1}) \right\}^2 \quad (12)$$

Ushbu

$$\varphi(\xi) = \xi + \frac{1}{\xi}$$

funksiya $\xi > 0$ bo'lganda $(0,1)$ oraliqda kamayib, $(1, \infty)$

oraliqda o'sadi va o'zining eng kichik qiymatini $\xi = 1$ nuqtada qabul qiladi;

$\left[\sqrt{\frac{m}{M}}, \sqrt{\frac{M}{m}} \right]$ oraliqda esa $\xi = \sqrt{\frac{m}{M}}$ va $\xi = \sqrt{\frac{M}{m}}$ nuqtalarda o'zining eng katta qiymatini qabul qilib, bu qiymat

$$\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (13)$$

ga tengdir.

(12) ifodada har bir $\xi_i + \xi_i^{-1}$ ni uning eng katta qiymati (13) bilan almashtiramiz, u holda

$$\sum_{i=1}^n d_i \lambda_i \sum_{j=1}^n d_j \lambda_j^{-1} \leq \frac{1}{4} \left\{ \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right) \sum_{i=1}^n d_i \right\}^2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^2$$

shu bilan (11) isbotlandi. (11) ni (10) ga qo'llab

$$\frac{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)}{f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^{(1)})} \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^2 = \frac{1}{q}$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $0 < q < 1$.

Bundan

$$f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*) = c$$

deb belgilab olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f(\bar{x}^{(1)}) - f(\bar{x}^*) \leq (1-q)[f(\bar{x}^{(0)}) - f(\bar{x}^*)] = (1-q)c$$

Shunday qilib, ixtiyoriy k uchun

$$f(\bar{x}^{(k)}) - f(\bar{x}^*) \leq (1-q)^k c$$

ni hosil qilamiz. Endi, $\bar{x}^{(k)}$ ning $\bar{x}^*$ ga intilish tezligini uchinchi normada baholaylik,

$$(A\bar{x}, \bar{x}) \geq m(\bar{x}, \bar{x})$$

bo'lganligi uchun

$$\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_3^2 = (\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*, \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*) \leq \frac{1}{m} (A\bar{x}^{(k)} - \bar{b}, \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*)$$

o'rinli.

Ravshanki,

$$(A\bar{x}^{(k)} - \bar{b}, \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*) = f(\bar{x}^{(k)}) - f(\bar{x}^*).$$

Oxirgi ikki ifodadan

$$\left\| \bar{x}^{(k)} - \bar{x}^* \right\|_3^2 \leq \frac{1}{m} [f(\bar{x}^{(k)}) - f(\bar{x}^*)] \leq \frac{c}{m} (1-q)^k = \frac{c}{m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2$$

o`rinli.

Shu bilan teorema isbot bo`ldi.

II.3. Gradientlar metodiga doir misollar va dasturi .

Misol. Ushbu sistemani

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 23 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 17 \end{cases}$$

Gradientlar metodi bilan yechaylik.

Yechish. Iteratsion metodda xato o'z-o'zidan tuzatiladigan bo'lganligi uchun, dastlabki qadamdagi hisoblashlarni katta aniqlikda olib borish shart emas. Dastlabki yaqinlashish sifatida $\bar{x}^{(0)} = (1,1,1,1)'$ vektorni olamiz. U holda

$$\bar{r}^{(0)} = \bar{b} - A\bar{x}^{(0)} = (9,10,12,8)' , \quad A\bar{r}^{(0)} = (12,22,115,57)' ,$$

$$\alpha_0 = \frac{(\bar{r}^{(0)}, \bar{r}^{(0)})}{(\bar{r}^{(0)}, A\bar{r}^{(0)})} = \frac{207}{1776} = 0,117$$

$$\bar{x}^{(1)} = (0,767; 1,117; 2,282; 2,049)'$$

Navbatdagi qadamlarni (5) - (7) formulalar yordamida davom ettiramiz:

$$\bar{x}^{(2)} = (0,008; 0,767; 2,006; 2,575)',$$

$$\bar{x}^{(3)} = (0,105; 0,974; 2,124; 2,794)',$$

$$\bar{x}^{(4)} = (0,023; 0,980; 1,986; 2,898)',$$

$$\bar{x}^{(5)} = (0,028; 1,005; 2,027; 2,955)',$$

$$\bar{x}^{(6)} = (0,007; 0,994; 2,002; 2,970)',$$

$$\bar{x}^{(7)} = (0,00786; 1,00133; 2,00838; 2,98671)',$$

$$\bar{x}^{(8)} = (0,002131; 0,998390; 2,000618; 2,990963)'$$

Aniq yechim $\bar{x}^* = (0, 1, 2, 3)'$ bilan taqribiy yechim orasidagi farq quyidagicha ekan:

$$\|\bar{x}^{(8)} - \bar{x}^*\|_3 = \sqrt{(\bar{x}^{(8)} - \bar{x}^*, \bar{x}^{(8)} - \bar{x}^*)} =$$

$$\sqrt{(0,002131)^2 + (0,001910)^2 + (0,000618)^2 + (0,009032)^2} < 0,0095.$$

Paskal dasturlash tilida dasturi:

```
Program gradientlar_usuli;
label 1,2,3;
var i,j:integer;
    b,e,x1,x0,Ar,r:array[1..4] of real;
    a:array[1..4,1..4] of real;
    k,c:real;
begin
a[1,1]:=5; a[1,2]:=2; a[1,3]:=1; a[1,4]:=1;
a[2,1]:=2; a[2,2]:=6; a[2,3]:=1; a[2,4]:=1;
a[3,1]:=1; a[3,2]:=1; a[3,3]:=8; a[3,4]:=2;
a[4,1]:=1; a[4,2]:=1; a[4,3]:=2; a[4,4]:=4;

b[1]:=7; b[2]:=11; b[3]:=23; b[4]:=17;
  for i:=1 to 4 do
    x0[i]:=1;
1: for i:=1 to 4 do
  begin
    c:=0;
    for j:=1 to 4 do
      c:=c+a[i,j]*x0[j];
      r[i]:=b[i]-c;
    end;
    for i:=1 to 4 do
  begin
    c:=0;
    for j:=1 to 4 do
```

```

    c:=c+a[i,j]*r[j];
    Ar[i]:=c;
end;
k:=(r[1]*r[1]+r[2]*r[2]+r[3]*r[3]+r[4]*r[4])/(r[1]*Ar[1]+r[2]*Ar[2]+r[3]*Ar[3]+r[
4]*Ar[4]);
for i:=1 to 4 do
    x1[i]:=x0[i]+k*r[i];
for i:=1 to 4 do
    E[i]:=abs(x1[i]-x0[i]);
    if (e[1]<0.0000001) and (e[2]<0.0000001) and (e[3]<0.0000001) and
(e[4]<0.0000001) then
        begin
            writeln('sistemani yechimi');
            for i:=1 to 4 do
                writeln('x[' ,i,']= ',x1[i]:5:5);
            goto 3;
        end
    else
        goto 2;
2: for i:=1 to 4 do
    x0[i]:=x1[i];
    for i:=1 to 4 do
        writeln(x0[i]:5:8);
    writeln;
    goto 1;
3: end.

```

Natija:

sistemani yechimi

$$x[1]=0.00000$$

$$x[2]=1.00000$$

$$x[3]=2.00000$$

$$x[4]=3.00000$$

III. Xulosa:

Men ushbu kurs ishida “Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun Gradientlar usuli” mavzusini o`rgandim. Berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimini Gradientlar metodi yordamida hisoblashni o`rgandim. Bu Gradientlar metodi haqiqiy simmetrik musbat aniqlangan matritsali, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun mo`ljallangan ekan. Bu metodni o`rganish mobaynida funksional gradienti, birlik vektor, funksionalning o`zgarish tezligi, gradient yo`nalishi, funksionalni minimumi, sistemaning xatolik vektori, simmetrik matritsa, matritsaning xos vektori, matritsa determinati tushunchalarni ham o`rganib chiqdim. Gradientlar metodi orqali berilgan tenglamalar sistemasining aniq yechimini hamda taqribiy yechimini topish mumkin. Bu orqali esa aniq yechim va taqribiy yechim orasidagi farqni hisoblab, berilgan tenglamalar sistemasini qay darajada to`g`ri yechganimizni guvohi bo`lishimiz mumkin.

Men Gradientlar metodi orqali berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining aniq yechimini hamda taqribiy yechimini topishni amaliyotga tadbiq qildim. Gradientlar metodi orqali berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimini topishni Paskal dasturlash tilida dasturini tuzdim va natija oldim.

Gradientlar metodi eng tez tushish metodi ham deyiladi. Bu metodning asosiy g`oyasi funksionalni minimallashtirishdan iborat ekan.

IV. Adabiyotlar:

1. M. I. Isroilov. Hisoblash metodlari, I . Toshkent – “O`zbekiston” – 2003.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М., Наука, 1970.
3. Копченкова И.В., Марон И.А. Вычислительная математика В примерах и задачах. М., Наука, 1972.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные Методы, том I. М., Наука, 1976.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы, М., Наука 1973.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы, М., Наука 1978.
7. Qobulov V.K. Funksional analiz va hisoblash matematikasi, “O`qituvchi”, Toshkent, 1976.
8. Милн В.Э. Численный анализ, Москва , 1951.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики, Москва , 1977.
10. Самарский А.А. Введение в численные методы, Москва , 1987.
11. Трикоми Ф. Интегральные уравнения, Москва , 1960.
12. Харди Г. Расходящиеся ряды, Москва , 1951.
13. Хемминг Р.В. Численные методы, М, Наука 1972.
14. www.arxiv.uz
15. www.referat.uz