

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
“FUNKSIYALAR NAZARIYASI” KAFEDRASI

403-GURUH TALABASI

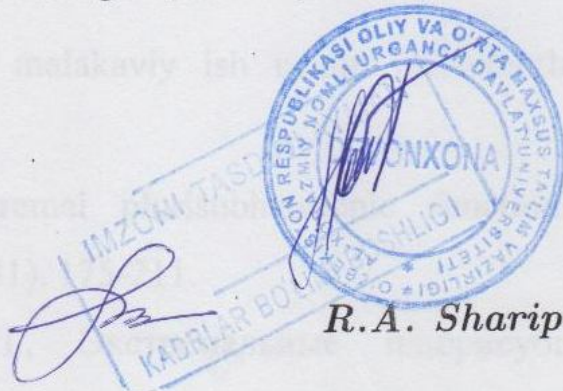
KARIMOVA SEVARANING

5130100-Matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Mavzu: $\mathbb{C}^n$ da m -subgarmonik funksiyalar.

Ilmiy rahbar:



R.A. Sharipov

Urganch 2015 yil

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
“FUNKSIYALAR NAZARIYASI” KAFEDRASI

Mavzu: $\mathbb{C}^n$ da m -subgarmonik funksiyalar.

Bajaruvchi:

Karimova Sevara

Ilmiy rahbar:

R.A. Sharipov

Urganch shahri

2015-yil

MUNDARIJA

Kirish.....	4
I-bob. Dastlabki ma'lumotlar.....	
1.1. Subgarmonik va plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.....	7
1.2. Grin funksiyasi va ularning xossalari	18
II-bob. $\mathbb{C}^n$ da m-subgarmonik funksiyalar sinfi.....	
2.1. $\mathbb{C}^n$ da m -subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.....	22
2.2. m -subgarmonik funksiyalar sinfida Grin funksiyasi va ularning xossalari.....	29
2.3. Grin funksiyaning m -regulyar va m -psevdoqavariq to'plamlardagi xossalari.....	33
Xulosa.....	36
Foydalanilgan adabiyotlar.....	

Kirish

O'zbekiston Respublikasining «Ta'lim to'g'risida»gi Qonuni va «Qadrlar tayyorlash Milliy dasturi» mazmunida barkamol shaxs va malakali mutaxassisni tarbiyalab voyaga yetkazish jarayonining mohiyati to'laqonli ochib berilgandir. Malakali qadrlar tayyorlash jarayonining har bir bosqichi o'zida ta'lim jarayonini samarali tashkil etish, uni yuqori bosqichlarga ko'tarish, shu bilan birga jahon ta'limi darajasiga yetkazish borasida muayyan maqsad va vazifalarni amalga oshirish lozim.

Ushbu maqsadlarning ijobiy natijaga ega bo'lishi, eng avvalo, yosh avlodga ilmiy bilimlar asoslarini puxta o'rgatish, ularda keng dunyoqarash hamda tafakkur ko'lamini hosil qilish, ma'naviy axloqiy sifatlarni shakllantirish borasidagi ta'limiy tarbiyaviy ishlarni samarali tashkil etishga bog'liqdir.

Ana shu vazifalardan kelib chiqqan holda bugungi kunda matematika fanida erishilayotgan yutuqlarni o'rganish uchun uning asosi bo'lgan tushunchalarni mukammal o'zlashtirishimiz kerak.

Mavzuning dolzarbligi. Ko'p argumentli funksiyalar nazariyasining shakllanishi, rivojlanishi o'tgan asr boshlariga to'g'ri kelib, A. Puankare va F.Xartogs nomi bilan bog'langan. Keyinchalik A.Kartan, K.Oka ishlarida nazariya algebraik geometriya va topologiya uslubiyati bilan bog'landi va boyitildi. Ayniqsa, 60 – 70 - yillarda uni matematik fizika, xususiyl hosilali differensial tenglamalar, Banax algebrasi kabi yo'nalishlarga tadbiq qilinishi, bu yerdagi qator muammolarning muvaffaqiyat bilan hal qilinishi ko'p argumentli golomorf funksiyalarga bo'lgan qiziqishni yanada kuchaytirdi.

Keyingi vaqtlarda subgarmonik funksiya plyurisubgarmonik funksiyalar orasida turuvchi m - subgarmonik funksiyasi tushunchasi bizga A.Sadullayev va B.Abdullayev ishlaridan ([3],[4]) yaxshi tanish.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida m -subgarmonik funksiyalar sinfida Grin funksiyasi va uning xossalari o'rganilgan.

Tadqiqot maqsadi: m -subgarmonik funksiyalar sinfida Grin funksiyasini o'rganish

Tadqiqot predmeti: Ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi.

Bitiruv malakaviy ishi mazmuni.

$\mathbb{C}^n$ fazoda yuqoridan chegaralangan (psh) plyurisubgarmonik funksiyalar mavjud emas, konstantadan farqli. Buning uchun plyuripotensiallar nazariyasida Grin funksiyasini aniqlashda quyidagi

$$L = \left\{ u(z) \in psh(\mathbb{C}^n) : u(z) \leq c_u + \ln^+ |z| \right\}$$

sinfidan foydalaniladi. (Y. Sichak[1], V.P.Zaxaryuta[2], A. Sadullaev[3]).

$V^*(z, E)$ Grin funksiyasi L sinf va $(dd^c u)^n$ Monj-Amper operatori yordamida aniqlanadi. $\ln|z|$ funksiya $(dd^c u)^n = \delta_0$ (bunda δ_0 – Dirak merasi, $|\delta_0| = 1$, $\text{supp } \delta_0 = \{0\}$) Monj-Amper tenglamasining fundamental yechimi bo'ladi; bu Grin funksiyalarini o'rganishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Plyurisubgarmonik funksiyalardan farqli o'laroq $m-sh(\mathbb{C}^n)$ funksiyalar sinfida yuqoridan chegaralangan funksiyalar mavjud:

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}, \text{ (bunda } \beta = dd^c |z|^2) \text{ operator uchun gaussianlarda uning}$$

$$k_m(z) = -\frac{1}{|z|^{2(n/m-1)}}, \quad 1 \leq m < n, \quad (dd^c k_m)^m \wedge \beta^{n-m} = \delta_0 \quad (\text{q. [4]})$$

fundamental yechimi m -subgarmonik funksiya iborat bo'ladi va manfiy.

$k_m(z)$ funksiya ham $m-sh$ funksiyalar sinfi yadrosi deyiladi. $m-sh(\mathbb{C}^n)$ funksiyalar sinfida Grin funksiyasi subgarmonik va plyurisubgarmonik funksiyalarda aniqlangan kabi $L_m = \left\{ u(z) \in m-sh(\mathbb{C}^n) : u(z) < 0 \right\}$ sinf yordamida aniqlanadi.

Ta'rif: $E \subset \mathbb{C}^n$ – ixtiyoriy to‘plam va $L_m(E) = \{u \in L_m : u|_E \leq -1\}$ bo‘lsin: $V_m(z, E) = \{u(z) : u \in L_m(E)\}$ deb olamiz. U xolda $V_m^*(z, E)$ regularizatsiyaga E to‘plamning Grinning m – funksiyasi deyiladi.

Ta'rif: $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt $z^0 \in K$ nuqtada m – regular deyiladi, agar $V_m^*(z^0, K) = -1$ bo‘lsa; agar K to‘plamning istalgan nuqtasi m – regularlik nuqtasi bo‘lsa, ya’ni $V_m^*(z, K)|_K \equiv -1$ bo‘lsa m – regular kompakt deyiladi.

Ushbu $V_m^*(z, K) \leq V_1^*(z, K)$ munosabatdan, agar K klassik potentsiallar nazariyasidagi ma’noda, ya’ni subgarmonik funksiyalar sinfiga nisbatan regular bo‘lsa, u xolda u m – regular kompaktni ifodalaydi.

Teorema. Agar $K \subset \mathbb{C}^n$ – m – regular kompakt bo‘lsa, u holda $V_m^*(z, K)$ Grin funksiyasi $\mathbb{C}^n$ da uzluksiz funksiya bo‘ladi, $V_m^*(z, K) \in C(\mathbb{C}^n)$.

$V_m^*(z, K)$ Grin funksiyasi berilgan $K \subset \mathbb{C}^n$ kompaktning m – psevdoqavariq qobig‘ini tadqiq qilishda qulay vosita hisoblanadi. m – psevdoqavariq kompaktlar va sohalar nochiziqli differensial tenglamalar nazariyasi va m – subgarmonik funksiyalar nazariyasida muxim rol o‘ynaydi. m – psevdoqavariq silliq sohalar tushunchasi turli usullar bilan kiritiladi, geometrik jixatdan chegaraviy nuqtalarda urinma kompleks vektorlar yordamida (q.[7],[8],[9]), va m – subgarmonik funksiyalar yordamida kiritiladi (q.[4],[5],[6].)

Ta'rif. $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt uchun

$$\mathcal{K}_m = \{z \in \mathbb{C}^n : u(z) \leq \|u\|_K \quad \forall u \in m-sh(\mathbb{C}^n)\}$$

to‘plam K kompaktning m – psevdoqavariq qobig‘i deyiladi. Agar $\mathcal{K} = K$ bo‘lsa, K kompakt m – psevdoqavariq deyiladi.

Teorema. Istalgan $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt uchun uning $\mathcal{K}$ qobig‘i $\{V_m(z, K) = -1\}$ to‘plam bilan ustma-ust tushadi, $\mathcal{K} = \{V_m(z, K) = -1\}$. Bundan tashqari Grin funksiyasi uchun $V_m^*(z, K) \equiv V_m^*(z, \mathcal{K})$ ayniyat o‘rinli bo‘ladi.

I-bob.

Dastlabki ma'lumotlar

1.1. Subgarmonik va plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.

Subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari. Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada aniqlangan lokal integrallanuvchi $u : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$ funksiya berilgan bo'lsin, $u \in L^1_{loc}(D)$.

Agar bu funksiya quyidagi ikki shartni bajarsa:

1) $u(x)$ yuqoridan yarim uzluksiz: $\forall x^o \in D$ uchun $\overline{\lim_{x \rightarrow x^o}} u(x) \leq u(x^o)$ (bundan $u(x)$ funksiyaning D ga tegishli ixtiyoriy kompaktda yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi);

2) har bir $x^o \in D$ nuqta uchun shunday $r(x^o) > 0$ topiladiki, $r \leq r(x^o)$ uchun

$$u(x^o) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma; \quad (1.1)$$

u holda $u(x)$ funksiya D sohada **subgarmonik funksiya** deyiladi.

Subgarmonik funksiyalar sinfi $Sh(D)$ kabi belgilanadi. Kelgusida qulaylik uchun biz trivial $u(x) \equiv -\infty$ funksiyasi ham D da $Sh(D)$ ga tegishli deb qaraymiz.

Endi subgarmonik funksiyalarning xossalarini keltiramiz:

1) subgarmonik funksiyalarning musbat koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_k(x) \in Sh(D), \quad a_k \in R_+ \quad (k = 1, 2, \dots, m) &\Rightarrow \\ \Rightarrow a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x) + \dots + a_m u_m(x) &\in Sh(D); \end{aligned}$$

2) chekli sondagi subgarmonik funksiyalarning maksimumi subgarmonik funksiya bo'ladi:

$$\begin{aligned} u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \in Sh(D) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \max \{ u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) \} &\in Sh(D); \end{aligned}$$

3) monoton kamayuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti subgarmonik funksiya bo‘ladi:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad , \quad u_j(x) \geq u_{j+1}(x) \quad (j = 1, 2, \dots) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \in Sh(D) ;$$

4) tekis yaqinlashuvchi subgarmonik funksiyalar ketma – ketligi subgarmonik funksiya yaqinlashadi:

$$u_j(x) \in Sh(D) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad u_j(x) \rightrightarrows u(x) \Rightarrow u(x) \in Sh(D) ;$$

5) *Maksimumlar printsiipi*. Agar $u(x) \in Sh(D)$ funksiya biror $x^o \in D$ nuqtada o‘zining maksimumiga erishsa, ya’ni

$$u(x^o) = \sup_{x \in D} u(x) \quad (1.2)$$

bo‘lsa, u holda $u(x) \equiv const$ bo‘ladi.

Isbot. Ushbu

$$M = \left\{ x \in D : u(x) = u(x^o) \right\} \quad M \neq \emptyset$$

to‘plamni qaraylik. $u(x)$ funksiyaning yuqoridan yarim uzluksiz bo‘lganligidan va (1.2) shartdan M to‘plamning D da yopiqqligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy $p \in M$ uchun (1.2) formulaga ko‘ra

$$u(x^o) = u(p) \leq \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(p,r)} u(x) d\sigma \leq u(x^o) , \quad r \leq r(p) ,$$

bo‘ladi. Bu munosabatdan $u|_{S(p,r)} \equiv u(x^o)$, ya’ni p ning $B(p, r(p))$ atrofida $u(x) = u(x^o)$ bo‘lishini ko‘ramiz. Bu esa M to‘plamning D da ochiq ekanligini ko‘rsatadi. Demak, $M = D$.

6) Agar $\vartheta(x) \in Sh(D)$, $u(x) \in h(D)$ funksiyalar uchun $G \subset\subset D$ sferada

$$\vartheta|_{\partial G} \leq u|_{\partial G}$$

bo‘lsa, u holda G da $\vartheta(x) \leq u(x)$, $x \in G$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bu xossadan quyidagi muhim hulosaga kelamiz. Faraz qilaylik,

$$\vartheta(x) \in Sh(D) \cap C(D)$$

berilgan bo‘lib, $B(x^o, r) \subset\subset D$ bo‘lsin. Ushbu

$$u(x) = \int_{\partial B} \vartheta(y) P(x, y) d\sigma(y), \quad x \in B(x^o, r),$$

Puasson integralini qaraylik. $u(x) \in h(B)$, $u|_{\partial B} = \vartheta|_{\partial B}$ bo'lib, 6) – xossaga ko'ra $B = B(x^o, r)$ da $\vartheta(x) \leq u(x)$ bo'ladi. Uzlüksiz funksiyalar uchun isbotlangan bu xossa ixtiyoriy $\vartheta \in Sh(D)$ uchun ham o'rinlidir: $\vartheta(x) \leq u(x)$ va deyarli barcha $x \in S$ lar uchun $\vartheta(x) = u(x)$ o'rinlidir;

7) aytaylik, $u(x) \in Sh(D)$ funksiya va $x^o \in D$ nuqta berilgan bo'lsin. Ushbu

$$m(x^o, r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^o, r)} u(x) d\sigma$$

va

$$n(x^o, r) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B(x^o, r)} u(x) dV,$$

bunda $V_n r^n$ miqdor $B(x^o, r)$ ning hajmi, integrallarni (o'rta qiymatlarni) qaraylik.

1.1–teorema. Faraz qilaylik, $u(x) \in Sh(D)$ va $u(x) \not\equiv -\infty$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $x^o \in D$ uchun

$$u(x^o) \leq n_u(x^o, r) \leq m_u(x^o, r), \quad n_u(x^o, r) > -\infty, \quad 0 < r < \rho(x^o, \partial D),$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, agar r monoton kamayib nolga intilsa, unda $n_u(x^o, r)$ va $m_u(x^o, r)$ o'rta qiymatlar monoton kamayib, $u(x^o)$ ga intiladi.

1.1– teoremadan ushbu muhim natijaga ega bo'lamiz: $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada subgarmonik $u(x) \not\equiv -\infty$ funksiya D da lokal integrallanuvchidir, ya'ni ixtiyoriy $B \subset\subset D$ uchun $\int_B u(x) dV$ integral mavjuddir;

8) subgarmonik funksiya D sohaning har bir nuqtasida uzilishga ega bo'lishi mumkin. Ayni paytda, quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

1.2–teorema. Agar $u(x) \in Sh(D)$ bo'lsa, u holda shunday monoton to'plamlar

$$D_j \subset D_{j+1} \subset D, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D$$

ketma – ketligi va shunday monoton kamayuvchi funksiyalar

$$u_j(x) \in Sh(D_j) \cap C^\infty(D_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

ketma – ketligi mavjudki,

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) \quad (x \in D)$$

bo‘ladi.

Ushbu

$$K(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{agar } |x| \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } |x| > 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sinfga tegishli bo‘lib, uning salmog‘i $\text{supp} K(x) = B(0,1)$ dir. Endi $K(x)$ ning ifodasidagi o‘zgarmas c ni shunday tanlab olamizki,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dV = 1$$

bo‘lsin. $u(x) \not\equiv -\infty$ deb, bu yadro yordamida ushbu

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{|y-x| \leq \delta} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV, \quad \delta > 0, \quad (1.3)$$

integralni qaraylik. $u_\delta(x)$ funksiyasi

$$D_\delta = \{x \in D : \rho(x, \partial D) < \delta\}$$

ochiq to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $x \in D_\delta$ da

$$u_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y) K\left(\frac{y-x}{\delta}\right) dV = \int_{\mathbb{R}^n} u(x + \delta y) K(y) dV$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikdagi birinchi integral $C^\infty(D_\delta)$ sinfga, ikkinchi integral esa $Sh(D_\delta)$ sinfga tegishli bo‘ladi. Binobarin,

$$u_\delta(x) \in Sh(D_\delta) \cap C^\infty(D_\delta).$$

$u(x)$ ning subgarmonik funksiya ekanligidan, u_δ ning $\delta \downarrow 0$ da, monoton kamayuvchi bo‘lishligi va

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(x) dV = 1$$

tenglikdan, $u_\delta(x)$ ning $u(x)$ ga intilishini topamiz.

9) Subgarmonik funksiyalar umumiy holda C^2 sinfga tegishli bo'lmashligidan, Δu - Laplas operatorini faqat umumlashgan funksiya sifatida qarash mumkin bo'ladi:

$$\Delta u(\varphi) = \int u \Delta \phi, \quad \varphi \in F(D).$$

1.3-teorema. Har qanday subgarmonik funksiya $u(x) \in Sh(D)$, $u \not\equiv -\infty$, uchun umumlashgan ma'noda $\Delta u \geq 0$ bo'ladi, ya'ni ixtiyoriy $\varphi \in F(D)$, $\varphi \geq 0$ uchun $\int u \Delta \varphi \geq 0$ munosabat o'rinlidir.

Jumladan, $u(x)$ funksiya C^2 sinfga tegishli bo'lib, u subgarmonik bo'lsa, $u \in Sh(D) \cap C^2(D)$, u holda $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \geq 0$ dir.

Yuqorida keltirilgan teoremaning aksi ham o'rinli: agar umumlashgan funksiya u uchun

$$\Delta u(\varphi) = \int u \Delta \varphi \geq 0, \quad \varphi \in F(D), \quad \varphi \geq 0,$$

munosabat bajarilsa, u holda u subgarmonik funksiya bo'ladi;

10) *F.Riss teoremasi.* Har qanday $u(x) \in Sh(D)$, $u \not\equiv -\infty$, funksiya olinganda ham D sohada shunday musbat o'lchov μ mavjudki, ixtiyoriy $D^0 \subset\subset D$ soha uchun

$$u(x) = \int_{D^0} K(x-y) d\mu_y + \Phi_{D^0}(x) \quad (1.4)$$

bo'ladi, bunda $\Phi_{D^0}(x) \in h(D^0)$ va

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{agar } n=2 \text{ bo'lsa,} \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{agar } n>2 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

Eslatib o'tamiz, $K(x)$ funksiyasi Laplas tenglamasining fundamental yechimidir: $\Delta K(x) = \delta(x)$ bo'lib, bu yerda $\delta(x)$ - Dirakning umumlashgan

funksiyasi, $\delta \circ \varphi(x) = \varphi(0)$, $\varphi \in F(\mathbb{R}^n)$. δ ga massasi $x = 0$ da bo'lgan birlik o'lchov (zaryad) mos keladi.

F. Riss teoremasini isbotlashda Δu ning musbat funktsionalligidan foydalaniladi. Ma'lumki, har bir musbat funktsional biror μ o'lchovni aniqlaydi: $\Delta u \circ \varphi = \int \varphi d\mu$, $\varphi \in F(D)$. $\mu /_{D^0}$ chekli o'lchov bo'lib,

$$\vartheta(x) = \int_{D^0} K(x-y) d\mu$$

integral mavjuddir. Ayni paytda, $\Delta K(x-y) = \delta(x-y)$ ligidan, $\Delta \vartheta = \mu$, ya'ni

$$\int \vartheta \Delta \varphi dV = \int \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in F(D^0),$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bundan ushbu

$$\Phi_{D^0}(x) = u(x) - \vartheta(x)$$

ayirma uchun $\Delta u_{D^0} = 0$ bo'lishi, ya'ni u_{D^0} ning D^0 sohada garmonik funksiya ekanligi kelib chiqadi.

11) Agar $u(x) \in Sh(D)$ bo'lsa, u holda $e^{u(x)} \in Sh(D)$ dir.

8-xossaga ko'ra, $u(x)$ funksiyasini Sh va C^∞ funksiyalar bilan yaqinlashtirish mumkin. Shundan kelib chiqib, qaralayotgan xossani $u(x) \in Sh(D) \cap C^\infty(D)$ funksiyalar uchun isbotlash yetarlidir. Bu holda

$$De^{u(x)} = e^{u(x)} \left[\Delta u + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right] \geq 0 \text{ ekanligini ko'rish qiyin emas.}$$

Xuddi shunday quyidagi xossa ham o'rinalidir.

12). Agar $u(x) \in Sh(D)$, $u|_D < 0$ bo'lsa, u holda $-\ln[-u(x)] \in Sh(D)$ dir.

13) *Xartogs lemmasi*. Faraz qilaylik, $D \in \mathbb{R}^n$ sohada yuqoridan lokal tekis chegaralangan

$$u_j(x), \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

subgarmonik funksiyalar ketma - ketligi berilgan bo'lib, har bir tayinlangan $x \in D$ nuqtada

$$\overline{\lim_{j \rightarrow \infty}} u_j(x) \leq A$$

bo'lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ va $K \subset\subset D$ kompakt uchun shunday $j_o \in N$ topiladiki, $\forall j \geq j_o, \quad x \in K$ da

$$u_j(x) \leq A + \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ushbu $K \subset\subset G \subset\subset D$ munosabatda bo'lgan G sohada $\{u_j(x)\}$ ketma - ketlikni yuqoridan lokal tekis chegaralanganligidan, shunday $C = const$ mavjudki, $u_j(x) \leq C \quad (x \in G)$ tengsizlik bajariladi. u_j larning o'rniga $u_j - C$ ketma - ketlikni qarab, biz G da $u_j(x) \leq 0$ deb qarashimiz mumkin.

Agar $0 < r < \frac{1}{3}\rho(K, \partial G)$ soni olinsa, unda ixtiyoriy $x^o \in K$ da

$B(x^o, r) \subset G$ bo'lib, Fatu teoremasiga ko'ra

$$\overline{\lim_{j \rightarrow \infty}} \int_{B(x^o, r)} u_j(x) dV \leq \int_{B(x^o, r)} \overline{\lim_{j \rightarrow \infty}} u_j(x) dV \leq A V_n r^n$$

bo'ladi. Bundan $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday j_o topilib, $j \geq j_o$ bo'lganda, ushbu

$$\int_{B(x^o, r)} u_j(x) dV \leq \left(A + \frac{\varepsilon}{2} \right) V_n r^n$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.

Plyurisubgarmonik funksiya tushunchasini keltirish uchun yuqoridan yarim uzluksiz funksiya tushunchasini kiritishimiz kerak. $\varphi : D \rightarrow (-\infty; \infty)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ soxada yuqoridan yarim uzluksiz deyiladi, agar $\forall z^0 \in D$ uchun

$$\overline{\lim_{z \rightarrow z^0}} \varphi(z) \leq \varphi(z^0)$$

tengsizlik bajarilsa. Boshqacha qilib aytadigan bo'lsak, $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta(z^0, \varepsilon) > 0$ soni topilib,

$$|z - z^0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \varphi(z) - \varphi(z^0) < \varepsilon, & \varphi(z^0) \neq -\infty \\ \varphi(z) < -\frac{1}{\varepsilon}, & \varphi(z^0) = -\infty \end{cases}$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

1.1-ta'rif. $\varphi : D \rightarrow (-\infty; \infty)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ soxada plyurisubgarmonik deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $\varphi(z)$ funksiya D da yuqoridan yarim uzluksiz;

2) Ixtiyoriy $z^0 \in D$ va ixtiyoriy $z = l(\xi) = z^0 + w \cdot \xi$, $w \in \mathbb{C}^n$, $\xi \in \mathbb{C}$

kompleks to'g'ri chiziqda φ subgarmonik, ya'ni $\varphi(l(\xi))$ funksiya $\{\xi \in \mathbb{C}, l(\xi) \in D\}$ ochiq to'plamda subgarmonik.

Plyurisubgarmonik funksiya misol qilib golomorf funksiya modulining logarifmini misol qilib keltirishimiz mumkin, ya'ni agar $f \in \theta(D)$ bo'lsa, u xolda $u(z) = \ln|f(z)|$ funksiya D da plyurisubgarmonik bo'ladi. Bizga ma'lumki,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} \geq 0$$

bo'lishi kerak. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ ($n > 1$) bo'lsa, murakkab funksiya differentsiallashtirish qoidasiga ko'ra xar qanday $z = z^0 + w\xi$ uchun

$$\frac{\partial^2 u(z^0 + w \cdot \xi)}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \cdot \bar{w}_j$$

bo'ladi.

Demak, $u \in \mathbb{C}^2(D)$ funksiya D da plyurisubgarmonik bo'lishi uchun xar qanday $z \in D$ da

$$H_z(u, w) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \cdot \bar{w}_j \geq 0, \quad \forall w \in \mathbb{C}^n.$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Endi plyurisubgarmonik funksiylarning ba'zi xossalari keltiramiz.

1^o. Agar $u(z)$ funksiya D soxada plyurisubgarmonik va biror $z_0 \in D$ nuqtada lokal eng katta qiymatiga erishsa, u xolda u o'zgarmasdir.

◁ Faraz qilaylik $u(z)$ funksiyamiz $z_0 \in D$ nuqtada lokal eng katta qiymatiga erishadi. U holda $\varphi(\xi) = u(z_0 + w\xi)$ funksiya $\xi = 0$ nuqtaning biror atrofida subgarmonik va $\xi = 0$ da lokal eng katta qiymatiga erishadi. Subgarmonik funksiyaning maksimum printsipligiga asosan $\varphi = c(w)$ o'zgarmasdir. $c(w) = u(z_0 + w \cdot 0) = \varphi(0)$, ya'ni o'zgarmas son $w \in \mathbb{C}^n$ ga bog'liq emas. w ixtiyoriy bo'lgani uchun $u(z)$ funksiya D soxada o'zgarmasdir. ▷

2⁰. Agar $\{u_\alpha\}$, $\alpha \in A$ – plyurisubgarmonik funksiyalar ketma-ketligi bo'lib, $u(z) = \sup_{\alpha \in A} u_\alpha(z)$ funksiya yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa, u holda u plyurisubgarmonikdir.

Ixtiyoriy $z_0 \in D$ nuqtada u funksiya plyurisubgarmonik ekanligini ko'rsatamiz. z_0 nuqtadan $\forall z = z_0 + w\xi$, $w \in \mathbb{C}^n$ – kompleks to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. u_α funksiya z_0 nuqtada plyurisubgarmonik bo'lgani uchun $u_\alpha(z_0 + w \cdot \xi) = \varphi_\alpha(\xi)$ funksiya $\xi = 0$ nuqtaning $\{\xi \in \mathbb{C} : z_0 + w \cdot \xi \in D\}$ atrofida subgarmonik. Subgarmonik funksiyaning xossasiga ko'ra $\varphi(\xi) = \sup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(\xi)$ funksiya $\{\xi \in \mathbb{C} : z_0 + w \cdot \xi \in D\}$ soxada subgarmonik. Demak, $u(z)$ funksiya D soxada plyurisubgarmonik.

Quyidagi xossalar xam subgarmonik funksiyaning xossasidan kelib chikadi.

3⁰. $u(z)$ funksiya D soxada yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsin. $u(z)$ funksiya D soxada plyurisubgarmonik bo'lishi uchun ixtiyoriy $z \in D$ va xar qanday $w \in \mathbb{C}^n$ vektor olganda xam shunday $r_0 = r_0(r, w)$ son topilib, $\forall r < r_0$ larda

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + w \cdot re^{it}) dt$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Bu xossa plyurisubgarmonik kriteriyasi deb yuritiladi.

4⁰. $u(z)$ funksiya $z_0 \in \mathbb{C}^n$ nuqtaning biror atrofida plyurisubgarmonik bo'lsin. U holda yetarlicha kichik $r > 0$ larda

$$u(z_0) \leq \frac{1}{\sigma(r)} \int_{\{|z-z_0|=r\}} u(z) d\sigma$$

tengsizlik o'rinlidir. Bunda $\sigma(r)$ sfera yuzi, $d\sigma$ yuza elementi.

5⁰. $u(z)$ funksiyamiz $z_0 \in \mathbb{C}^n$ nuqtaning atrofida plyurisubgarmonik va $S(r) = \int_{\{|z-z_0|=r\}} u(z) d\sigma$ bo'lsin. U xolda $S(r)$ o'suvchi funksiyadir.

6⁰. $u(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ soxada plyurisubgarmonik bo'lsin. U xolda shunday ochiq $G_k \left(k = 1, 2, \dots, \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = D \right)$ to'plamlar va monoton kamayuvchi $u_k \in P(G_k) \cap C^\infty(G_k)$ funksiyalar mavjudki, ixtiyoriy $z \in D$ larda

$$u_k(z) \rightarrow u(z)$$

bo'ladi.

7⁰. $u(z)$ funksiya $D \setminus A$ ($A \in D$ – analitik to'plam) to'plamda plyurisubgarmonik va chegaralangan bo'lsa, u xolda u butun D ga plyurisubgarmonik davom qiladi.

Psevdoqavariq sohalar. Psevdoqavariq sohalar plyurisubgarmonik funksiyalar bilan bevosita bogliqdir.

1.2-ta'rif: $D \subset \mathbb{C}^n$ soha psevdoqavariq soha deyiladi, agar u sohada plyurisubgarmonik $u(z)$ funksiya topilib, $z \rightarrow \partial D$ da $u(z) \rightarrow +\infty$ bo'lsa.

$\mathbb{C}$ dagi har qanday soha psevdoqavariq bo'ladi. Xaqiqatan, agar sohamiz $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\xi\}$ dan iborat bo'lsa, $u(z) = \frac{1}{|z - \xi|}$, $\xi \neq \infty$ ($u(z) = |z|$, $\xi = \infty$) funksiya $z \rightarrow \partial D$ da $u(z) \rightarrow +\infty$ shartni qanoatlantiradi.

Umuman olganda $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ bo'lsa,

$$u(z) = |z| + \sup_{\xi \in \partial D} \frac{1}{|z - \xi|}$$

bo'ladi.

$n > 1$ bo'lganda yuqoridagi fikr o'rinli bo'lmaydi.

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : r < |z| < R\}$$

soha $n > 1$ da psevdoqavariq bo'lmaydi.

Endi psevdoqavariq sohalarning ba'zi xossalarini keltiramiz.

1⁰. $D \subset \mathbb{C}^n$ - soha psevdoqavariq soha bo'lishi uchun u xar bir chegaraviy nuqtada psevdoqavariq bo'lishi zarur va yetarli.

2⁰. $D \subset \mathbb{C}^n$ soxa psevdoqavariq soha bo'lishi uchun $-\ln \delta(z, \partial D)$ funksiya D da plyurisubgarmonik bo'lishi zarur va yetarli.

Endi psevdoqavariq sohaga berilgan ta'rifga ekvivalent bo'lgan ta'rifni keltiramiz. $u(z)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ - sohaning aniqlovchi funksiyasi deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $u(z)$ funksiya ∂D chegaraning biror Ω atrofida $\mathbb{C}^2$ sinfga tegishli va $D \cap \Omega = \{z \in \Omega : u(z) < 0\}$.

2) $\nabla_z u \neq 0$, barcha $z \in \partial D$ lar uchun.

1.3-ta'rif: Chegarasi $\mathbb{C}^2$ sinfga tegishli bo'lgan $D \subset \mathbb{C}^n$ soha psevdoqavariq soha deyiladi, agar u

$$H_z(u, w) \geq 0, \quad \forall z \in \partial D, \quad w \in T_z^c(\partial D)$$

shartni qanoatlatiruvchi $u(z)$ aniqlovchi funksiyaga ega bo'lsa.

1.4-ta'rif: Chegarasi $\mathbb{C}^2$ sinfga tegishli bo'lgan chegaralangan $D \subset \mathbb{C}^n$ soha qat'iy psevdoqavariq soxa deyiladi, agar u

$$H_z(u, w) > 0, \quad \forall z \in \partial D, \quad w \in T_z^c(\partial D)$$

shartni qanoatlantiruvchi $u(z)$ aniqlovchi funksiyaga ega bo'lsa.

Psevdoqavariq va qat'iy psevdoqavariq sohalar orasidagi farqlardan biri qat'iy psevdoqavariq sohaning chegaralanganligidir. Yana bir farqi qat'iy psevdoqavariq sohani $\{z \in D : u(z) < 0\}$ ko'rinishdagi to'plamlar bilan qoplash mumkin. Umumiy xolda esa psevdoqavariq sohalarni bunday to'plamlar bilan qoplash mumkin emas. Qat'iy psevdoqavariq sohaga misol qilib, $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ sohani keltirishimiz mumkin.

$D = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ soha psevdoqavariq, ammo qat'iy psevdoqavariq emas.

1.2. Grin funksiyasi va ularning xossalari

Grin funksiyasi. $\mathbb{C}^n$ fazoda $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt berilgan bo'lib, $L = \{u(z) \in Psh(\mathbb{C}^n) : u(z) \leq C_u + \ln(1 + \|z\|)\}$, C_u - konstanta bo'lsin. U holda $V(z, K) = \sup\{u(z) : u(z) \in L, u|_K \leq 0\}$ funksiyaga va uning regulyarlangan funksiyasi $V^*(z, K) = \overline{\lim_{w \rightarrow z} V(w, K)}$ ga K kompaktning *ekstremal funksiyalari* yoki *Grin funksiyalari* deyiladi.

Grin funksiyalari quyidagi xossalarga ega:

a) $V^*(z, K) \in Psh(\mathbb{C}^n)$ mavjud bo'lishligi uchun K ning plyuripolyar bo'lmasligi zarur va yetarlidir. K plyuripolyar bo'lsa, $V^*(z, K) \equiv +\infty$ bo'ladi. Aks holda, $V^*(z, K) \in L$ bo'lib, $\{z \in \mathbb{C}^n : V(z, K) < V^*(z, K)\}$ to'plam plyuripolyardir;

b) *Bernshteyn–Uolsh tengsizligi.* Agar $P_m(z)$ m -darajali polinom bo'lsa, u holda

$$\frac{1}{m} \ln |P_m(z)| \leq \frac{1}{m} \ln \|P_m\|_K + V(z, K), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (1.5)$$

tengsizlik o'rinlidir ($V(z, K)$ ning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi);

v) **1.4-teorema.** Ixtiyoriy $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt uchun

$$V(z, K) = \sup \left\{ \frac{1}{\deg P} \ln |P| : \|P\|_K = 1 \right\} \quad (1.6)$$

tenglik o'rinlidir. Bunda $\deg P$ – polinomning darajasi;

g) agar K kompakt o'suvchi $K_j \subset K_{j+1}$ kompaktlarni yig'indisi shaklida ifodalangan bo'lsa, $K = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, u holda $j \rightarrow \infty$ da $V^*(z, K_j) \uparrow V^*(z, K)$ bo'ladi.

Plyuriregulyar nuqtalar. Ravshanki, $\omega(z, E, D)$ funksiyasi uchun

$$\omega(z, E, D)|_E \equiv -1$$

bo'ladi. Ayni paytda, funksiyaning regulyarlanishi bilan hosil bo'lgan $\omega^*(z, E, D)$ funksiya E to'plamning ba'zi nuqtalarida -1 ga teng bo'lmasdan qolishi mumkin.

Ushbu

$$\omega^*(z, E, D) \equiv -1$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $z^0 \in E$ nuqta E to'plamning *plyuriregulyar nuqtasi* (D sohaga nisbatan) deyiladi.

Ochiq $U \subset D$ to'plamning har bir nuqtasi plyuriregulyar nuqta bo'ladi. Agar $K \subset D$ kompaktning barcha nuqtalari plyuriregulyar bo'lsa, K ga *plyuriregulyar kompakt* deyiladi.

1.5-teorema. Plyuriregulyar kompakt $K \subset D$ uchun $\mathcal{P}$ -o'lchov uzluksiz bo'ladi:

$$\omega(z, K, D) = \omega^*(z, K, D) \in C(D)$$

Ma'lumki, $D = \{ \rho < 0 \}$ to'plamdagi ρ funksiya $\overline{D}$ yopiq sohaning biror $G \supset \overline{D}$ atrofida aniqlangan va plyurisubgarmonik funksiyadir. $M > 0$ sonini shunday tanlab olamizki, $M\rho|_K \leq -1$ bo'lsin. U holda $M\rho \in \mathcal{U}(K, D)$ bo'lib, D sohada

$$\omega^*(z, K, D) \geq M\rho(z)$$

bo'ladi.

Ushbu

$$K(x) = \begin{cases} \omega^*(z, K, D), & \text{agar } z \in D \text{ bo'lsa,} \\ M\rho(z), & \text{agar } z \in G \setminus D \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya, plyurisubgarmonik funksiyalarning ta'rifiga ko'ra plyurisubgarmonik bo'ladi.

Haqiqatan ham, birinchidan, $w(z)$ funksiyasi G sohada yuqoridan yarim uzluksiz: D da u $\omega^*(z, K, D)$ ga teng, $G \setminus \overline{D}$ da esa u $M\rho(z)$ uzluksiz funksiyaga teng bo'lib, chegaraviy $z^0 \in \partial D$ nuqtalarda $\lim_{z \rightarrow z^0} w(z) = 0$ dir. Endi ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olib, ushbu

$$K(x) = \begin{cases} \max\{\omega^*(z, K, D) - \varepsilon, M\rho(z)\}, & \text{agar } z \in D \text{ bo'lsa,} \\ M\rho(z), & \text{agar } z \in G \setminus D \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyasini qaraylik. Bu funksiya D da ikkita *Psh* funksiyalarning maksimumi sifatida *Psh* dir. $\forall \varepsilon > 0$ uchun ∂D ning biror atrofida

$w_\varepsilon(z) = M \rho(z)$ bo'lib, bundan uning $G \setminus D$ da ham Psh ekanligi va natijada $w_\varepsilon(z) \in Psh(G)$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan va $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon(z) = w(z)$ ligidan $w(z) \in Psh(G)$ ekanligi ravshan.

Plyurisubgarmonik funksiyalarning xossasiga ko'ra $\bar{D}$ ning biror atrofi $\bar{D} \subset D' \subset\subset G$ da plyurisubgarmonik bo'lgan shunday $u_j(z) \in Psh(D') \cap C^\infty(D')$ monoton ketma – ketlik topiladiki, $j \rightarrow \infty$ da $u_j(z) \downarrow w(z)$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) bo'ladi. Endi $\varepsilon > 0$ sonini tayinlab, ushbu

$$U_1 = \left\{ z \in D : w(z) < -1 + \varepsilon \right\},$$

$$U_2 = \left\{ z \in D' : w(z) < \varepsilon \right\}$$

ochiq to'plamlarni qaraymiz. Ravshanki, $\bar{D} \subset U_2$ va K ning plyuriregulyarligidan $K \subset U_1$ dir. Bundan tashqari,

$$U_1 \text{ da: } \overline{\lim_{j \rightarrow \infty}} u_j(z) = w(z) \leq -1 + \varepsilon,$$

$$U_2 \text{ da: } \overline{\lim_{j \rightarrow \infty}} u_j(z) = w(z) \leq \varepsilon$$

bo'ladi. Bundan $u_j(z)$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) ketma – ketlikka ikki marta Xartogs lemmasini qo'llasak, shunday j_0 nomer topiladiki, $j \geq j_0$ larda $u_j(z) \leq -1 + 2\varepsilon$, $z \in K \subset U_1$ va $u_j(z) \leq 2\varepsilon$, $z \in \bar{D} \subset U_2$, bo'ladi. Demak, $j \geq j_0$ larda $u_j(z) - 2\varepsilon \in \mathcal{U}(K, D)$ va $u_j(z) - 2\varepsilon \leq \omega^*(z, K, D)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $j \geq j_0$ da $u_j(z) - 2\varepsilon \leq \omega^*(z, K, D) \leq u_j(z)$, $z \in D$, tengsizlikning o'rinli bo'lishini topamiz. Bu esa $\omega^*(z, K, D)$ ning uzluksizligini bildiradi.

Agar polinomial qavariq kompakt $K \subset D$ plyuriregulyar bo'lsa, u holda ixtiyoriy $z^0 \in K$ uchun $V^*(z^0, K) = 0$ dir. Va, aksincha, $V^*(z^0, K) = 0$ bo'lishidan $\omega^*(z^0, K, D) = -1$ bo'lishligi kelib chiqadi. Ko'pincha, $V^*(z, K)$ ning bu xossasini plyuriregulyarlik ta'rifi sifatida ham qabul qilishadi: agar $z^0 \in K$ nuqta uchun $V(z^0, K) = 0$ bo'lsa, z^0 ga K kompaktning *plyuriregulyar* nuqtasi deyiladi.

1.6-teorema. Agar $K \subset \mathbb{C}^n$ - plyuriregulyar bo'lsa, u holda $V(z, K) = V^*(z, K) \in Psh(\mathbb{C}^n) \cap C(\mathbb{C}^n)$ dir.

II-bob.

$\mathbb{C}^n$ da m -subgarmonik funksiyalar sinfi

2.1. $\mathbb{C}^n$ da m -subgarmonik funksiyalar va ularning xossalari.

Gessianlar. Ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $u \in C^2(D)$ funksiya uchun uning ikkinchi tartibli differensial

$$dd^c u = \frac{i}{2} \sum_{j,k} u_{j\bar{k}} dz_j \wedge \overline{dz_k} \quad (2.1)$$

(tayinlangan z^0 nuqtada) Ermit kvadratik formasi bo'ladi.

Unitar almashtirishlardan keyin u quydagi diagonal formaga keltiriladi:

$$dd^c u = \frac{i}{2} \left[\lambda_1 dz_1 \wedge \overline{dz_1} + \dots + \lambda_n dz_n \wedge \overline{dz_n} \right]$$

Bu yerda $\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u)$ $u_{i,k}$ -ermit matritsani xos qiymatlari, ya'ni $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

dd^c operator Monj-Amper operatori deyiladi. Bu yerda

$$\begin{aligned} d &= \partial + \bar{\partial} & d^c &= \frac{1}{4i} (\partial - \bar{\partial}) \\ du &= \partial u + \bar{\partial} u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_k} dz_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} \overline{dz_k} \\ d^c u &= \frac{1}{4i} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_k} dz_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} \overline{dz_k} \right). \end{aligned}$$

$(dd^c u)^n = 0$ tenglamaga Monj-Amper tenglamasi deyiladi.

$$\begin{aligned} (dd^c u)^n &= dd^c u \wedge dd^c u \wedge \dots \wedge dd^c u \\ dd^c u &= \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} u = \frac{i}{2} \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

Ko'rish qiyin emaski,

$$(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} = m! (n-m)! H_m(u) \beta^n \quad (2.2)$$

Bu yerda $H_m(u) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_m}$ - ga $\lambda(u) \in \mathbb{R}^n$ vektorning gessiani deyiladi.

Shunday qilib, 2 marta silliq u funksiya uchun $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ $1 \leq m \leq n$ operator $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ vektorning gessiani bilan bog'liq ekan.

Musbat gessianlar. Berilgan $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ uchun

$$H_m(\lambda) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_m} \quad (2.3)$$

Endi biz $H_m(\lambda) \geq 0$ bo'ladigan $\lambda \in \mathbb{R}^n$ vektorlar bilan qiziqamiz va shunday vektorlarni birlashtiramiz, ya'ni $S_m = \{\lambda \in \mathbb{R}^n, H_m(\lambda) \geq 0\}$, $m > 1$ da bu to'plam qavariq konusni hosil qilmaydi, ya'ni $\lambda', \lambda'' \in S_m$ ekanligidan $\lambda' + \lambda'' \in S_m$ ekanligi kelib chiqmaydi. Shuning uchun bu to'plamni toraytiramiz, ya'ni $\lambda \in S_m$ vektorlar uchun shunday $\Gamma_m \subset S_m$ to'plamni olamizki, $\{\lambda + tI = (\lambda_1 + t, \dots, \lambda_n + t), t \in \mathbb{R}_+\} \subset S_m$ bo'ladi. Unda Γ_m ning ko'rinishi $\Gamma_m = \{H_1(\lambda) \geq 0, \dots, H_m(\lambda) \geq 0\}$ bo'ladi. Undan tashqari Γ_m to'plam $(1, 1, \dots, 1)$ vektorni o'z ichiga oluvchi S_m to'plamni $S_m^0 = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : H_m(\lambda) > 0\}$ ochiq yadrosining bog'lamli komponentasini yopig'i bilan ustma-ust tushadi.

Γ_m quyidagi xossalarga ega:

- 1) $\Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \dots \subset \Gamma_1$ $\Gamma_n = \{\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\} = \mathbb{R}_+^n$
- 2) Γ_m qavariq konusdan iborat, ya'ni agar $\lambda, \mu \in \Gamma_m$ bo'lsa, u holda $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ uchun $a\lambda + b\mu \in \Gamma_m$ o'rinli.
- 3) $\{H_m^{1/m}(\lambda), \lambda \in \Gamma_m\}$ o'suvchi va botiq konusdan iborat, ya'ni

$$H_m^{1/m}(\mu) \leq H_m^{1/m}(\lambda) + \sum_j (\mu_j - \lambda_j) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_m^{1/m}(\lambda) \quad \forall \lambda, \mu \in \Gamma_m$$

2.1-ta'rif. Ikki marta silliq $u \in C^2(D)$ funksiya (bu yerda $D \subset \mathbb{C}^n$) $z^0 \in D$ nuqtada m -sh, ($1 \leq m \leq n$) deyiladi, agar $(u_{j\bar{k}})|_{z=z^0}$ matrissani $\lambda(u) = (\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u))$ xos qiymatlari Γ_m ga tegishli bo'lsa yoki $\wedge dd^c u \in \Gamma_m$ bo'lsa.

Boshqacha aytganda $u \in C^2(D)$ funksiya $m - sh$, ($1 \leq m \leq n$)

$\wedge$
deyiladi, agar $dd^c u \in \Gamma_m$ bo'lsa yoki unga quyidagi tengsizlik teng kuchli:

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

(2.4) ga quyidagi tengsizlik ham ekvivalent:

$$\left[dd^c \left(u + t_1 dd^c |z_1|^2 + \dots + t_n dd^c |z_n|^2 \right) \right]^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0 \quad \forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

Bundan tashqari quyidagi tasdiq ham o'rinli:

$$\begin{aligned} dd^c u \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{k-1} \wedge \beta^{n-m} &\geq 0 \\ \wedge \\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \Gamma_m, 1 \leq k \leq m \end{aligned} \quad (2.5)$$

Bu tasdiq ikki xil harakterga ega: agar u ikki marta silliq bo'lib,

$\wedge$
 $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \Gamma_m$ uchun (2.5) shartni qanoatlantirsa, u holda u $m - sh$ bo'ladi. u funksiyani $m - sh$ ligini tekshirish uchun (2.5) da faqat $\alpha_j = dd^c u_j$, $u_j \in C^2(D)$, $j = 1, 2, \dots, m-1$ differensial formani chegaralangan bo'lishi yoki $m - sh$ ko'phad bo'lishi yetarli.

Bu esa bizga L_{loc}^1 funksiyalar sinfiga $m - sh$ funksiyalarni aniqlashga yordam beradi.

2.2-ta'rif. $u \in L_{loc}^1(D)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $m - sh$ deyiladi, agar u yuqoridan yarim uzluksiz va ixtiyoriy silliq $v_1, \dots, v_{m-1}$ $m - sh$ funksiyalar uchun $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$ oqim

$$\begin{aligned} &\left[dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \right](\omega) = \\ &\int u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \wedge dd^c \omega, \quad \omega \in F^{0,0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

musbat aniqlangan bo'lsa.

Biz bilamizki, $(p, p) -$ finit differensial formalar fazosidagi chiziqli, uzluksiz T funksional (kompleks qiymatli)

$$F^{p,p} = F^{p,p}(D) = \{ \omega \in F^{p,p}(D) \cap C^\infty(D) : \text{supp } \omega \subset\subset D \}$$

$(n-p, n-p) = (q, q)$ bidarajali oqim deyilar edi.

m - sh funksiyalarning xossalari:

- 1) $u \in C^2(D)$ funksiya $m - sh$, ($1 \leq m \leq n$) bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki $dd^c u \in \Gamma \wedge \forall z^0 \in D$ bo'lsa.
- 2) agar $u \in m - sh(D)$ bo'lsa, u holda $u_j(z) = u * K_j(z - w)$ standart approksimatsiya (o'rama) ham $m - sh$ bo'ladi, ($j \rightarrow \infty$ da $u_j \downarrow u$ bo'ladi)
- 3) agar $u, v \in m - sh$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a, b \geq 0$ uchun $au + bv \in m - sh(D)$. $au + bv \in m - sh(D) \Rightarrow \lambda(u), \lambda(v) \in \Gamma_m$ $a, b \geq 0$ ekanligidan $a\lambda(u) + b\lambda(v) \in \Gamma_m \Rightarrow au + bv \in m - sh(D)$ bo'lishi kelib chiqadi.
- 4) $psh = n - sh \subset \dots \subset 1 - sh = sh$
- 5) agar $\gamma(t)$ — $t \in \mathbb{R}_+$ parametrning o'suvchi botiq funksiyasi va $u \in m - sh$ bo'lsa, u holda $\gamma \circ u \in m - sh$ bo'ladi.
- 6) tekis yaqinlashuvchi yoki kamayuvchi $m - sh$ funksiyalarning limiti yana $m - sh$ bo'ladi.
- 7) chekli sondagi $m - sh$ funksiyalarning maksimumi $m - sh$ funksiya iborat bo'ladi; ixtiyoriy lokal tekis chegaralangan $\{u_\theta\} \subset m - sh$ m-subgarmonik funksiyalar oilasining supremumi $u(z) = \left\{ \sup_\theta u_\theta(z) \right\}$ regularizatsiyasi $u^*(z)$ ham $m - sh$ bo'ladi. $m - sh \subset sh$ ekanligidan $\{u(z) < u^*(z)\}$ — to'plam $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ da polyar to'plam bo'ladi. Qisqacha aytganda uning Lebeg o'lchovi nolga teng. Ixtiyoriy lokal tekis chegaralangan $\{u_j\} \subset m - sh$ funksiyalar ketma-ketligining limiti $u(z) = \overline{\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(z)}$ regularizatsiyasi $u^*(z)$ ham $m - sh$ va $\{u(z) < u^*(z)\}$ — polyar to'plam bo'ladi.
- 8) agar $u \in m - sh$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $P \subset \mathbb{C}^n$ kompleks gipertekislik uchun $u|_P \in sh_{m-1}$ bo'ladi.

Haqiqatdan, gessianing 4-xossasidan foydalanib, $\lambda, \mu \in \Gamma_m$ vector uchun

$$\sum_j \mu_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_m(\lambda) \geq m H_m^{1/m}(\mu) H_m^{1-1/m}(\lambda)$$

$\mu = (0, \dots, 0, 1)$ deb oladigan bo'lsak, $\frac{\partial}{\partial \lambda_n} H_m(\lambda) = H_{m-1}(' \lambda) \geq 0$. Bu shuni anglatadiki, agar $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in \Gamma_m$ bo'lsa, u holda $' \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \Gamma_{m-1}$ bo'ladi. Endi $u \in m - sh(D)$ va $P \subset \mathbb{C}^n$ gipertekislik bo'lsin. Umumiylikka zid ish qilmagan holda biz $u \in C^2(D)$, $P = \{z_n = 0\}$ deb faraz qilamiz va $u|_P = u('z, 0) \in sh_m$ ekanini isbotlaymiz. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) - U = (u_{jk}^-)$, $j, k = 1, 2, \dots, n$ matrisani xos qiymatlari bo'lsin. $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}) -$ esa $'U = (u_{jk}^-)$, $j, k = 1, 2, \dots, n-1$ matrisani xos qiymatlari bo'lsin. Unitar almashtirishlardan keyin (tayinlangan $('z^0, 0) \in D$ nuqtada) U quyidagi ko'rinishga keladi:

$$U = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 & u_{1n}^- \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & u_{n-1n}^- \\ u_{n1}^- & u_{n2}^- & \dots & u_{nn-1}^- & u_{nn}^- \end{pmatrix}$$

$u(z) \in m - sh$ ekan, u holda (ixtiyoriy tayinlangan $t \in \mathbb{R}_+$ parametr uchun) $u_t(z) = u(z) + t|z_n|^2 \in m - sh$ bo'ladi.

Natijada $\lambda(t) = \lambda(u_t) \in \Gamma_m$ vektor yuqorida isbotlanganiga ko'ra $' \lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t)) \in \Gamma_{m-1}$. Boshqa tomondan $\lambda(t)$ quyidagi

$$\begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & 0 & \dots & 0 & u_{1n}^- \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - \mu_{n-1} & u_{n-1n}^- \\ u_{n1}^- & u_{n2}^- & \dots & u_{nn-1}^- & \lambda - t - u_{nn}^- \end{vmatrix} = 0$$

Tenglamaning ildizi. Yana almashtirishlar bajarsak,

$$\begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & 0 & \dots & 0 & \frac{u_{1n}^-}{t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - \mu_{n-1} & \frac{u_{n-1n}^-}{t} \\ u_{n1}^- & u_{n2}^- & \dots & u_{nn-1}^- & \frac{\lambda - u_{nn}^-}{t} - 1 \end{vmatrix} = 0$$
 $t \rightarrow \infty$ da $\lambda_j(t) \rightarrow \mu_j$, $\lambda(t) \in \Gamma_{m-1}$ ekan, u holda Γ_{m-1} ning yopiqligidan $\mu \in \Gamma_{m-1}$ ya'ni $u|_P = u(z, 0) \in m - sh$ ekanligi kelib chiqadi. 8-xossa isbotlandi.

Quyidagi integral formula $m - sh$ funksiyalar uchun

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-m}, k = 1, 2, \dots, m$$

operatorni baholashda muhim ahamiyat kasb etadi:

Agar $u(z) - B = \{|z| < 1\}$ sharda ikki marta silliq $m - sh$ funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $r < 1$ uchun

$$\int_0^r dt \int_{|z|^2 \leq t} (dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \leq (M - m) \int_{|z|^2 \leq r} (dd^c u)^{k-1} \wedge \beta^{n-k+1} \quad (2.7)$$

Bu yerda $1 \leq k \leq m$, $M = \sup_B u(z)$, $m = \inf_B u(z)$

Bu integral formulani ixtiyoriy $1 \leq k \leq n$ uchun k marta tadbqiqilsak,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \int_{|z|^2 \leq t_k} (dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \leq \\ (M - m)^k \int_B \beta^n = C \cdot (M - m)^k \end{aligned} \quad (2.8)$$

ko'rinishda bo'ladi. bu yerda $C = Vol(B)$

Tayinlangan $0 < r < 1$ uchun (2.8) ning chap qismini quyidan baholashimiz mumkin:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \int_{|z|^2 \leq t_k} (dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq \\
& \geq \int_r^1 dt_1 \int_r^{t_1} dt_2 \dots \int_r^{t_{k-1}} dt_k \int_{|z|^2 \leq r} (dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} = \\
& = \frac{|r|^k}{k!} \int_{|z|^2 \leq r} (dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k}
\end{aligned}$$

Natijada, ixtiyoriy $r < 0$ uchun

$$\int_{|z|^2 \leq r} (dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \leq \frac{C(M-m)^k k!}{|r|^k}, \quad 1 \leq k \leq m \quad (2.9)$$

(2.8) baholash bizga tekis chegaralangan $m - sh$ funksiyalar sinfida lokal tekis chegaralangan $(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-m}$ oqimni beradi.

2.2. m -subgarmonik funksiyalar sinfida Grin funksiyasi va ularning xossalari

$\mathbb{C}^n$ fazoda yuqoridan chegaralangan (psh) plyurisubgarmonik funksiyalar mavjud emas, konstantadan farqli. Buning uchun plyuripotensiallar nazariyasida Grin funksiyasini aniqlashda quyidagi

$$L = \left\{ u(z) \in psh(\mathbb{C}^n) : u(z) \leq c_u + \ln^+ |z| \right\}$$

sinfidan foydalaniladi. (Y. Sichak[1], V.P.Zaxaryuta[2], A. Sadullaev[3]).

$V^*(z, E)$ Grin funksiyasi L sinf va $(dd^c u)^n$ Monj-Amper operatori yordamida aniqlanadi. $\ln|z|$ funksiya $(dd^c u)^n = \delta_0$ (bunda δ_0 – Dirak merasi, $|\delta_0| = 1$, $\text{supp } \delta_0 = \{0\}$) Monj-Amper tenglamasining fundamental yechimi bo‘ladi; bu Grin funksiyalarini o‘rganishda muxim ahamiyat kasb etadi.

Plyurisubgarmonik funksiyalardan farqli o‘laroq $m-sh(\mathbb{C}^n)$ funksiyalar sinfida yuqoridan chegaralangan funksiyalar mavjud: $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$, (bunda $\beta = dd^c |z|^2$) operator uchun gaussianlarda uning $k_m(z) = -\frac{1}{|z|^{2(n/m-1)}}$, $1 \leq m < n$, $(dd^c k_m)^m \wedge \beta^{n-m} = \delta_0$ (q. [4])

fundamental yechimi m -subgarmonik funksiyadan iborat bo‘ladi va manfiy.

$k_m(z)$ funksiya ham $m-sh$ funksiyalar sinfini yadrosi deyiladi. $m-sh(\mathbb{C}^n)$ funksiyalar sinfida Grin funksiyasi subgarmonik va plyurisubgarmonik funksiyalarda aniqlangan kabi $L_m = \{u(z) \in m-sh(\mathbb{C}^n) : u(z) < 0\}$ sinf yordamida aniqlanadi.

$E \subset \mathbb{C}^n$ – ixtiyoriy to‘plam va $L_m(E) = \{u \in L_m : u|_E \leq -1\}$ bo‘lsin: $V_m(z, E) = \{u(z) : u \in L_m(E)\}$ deb olamiz. U xolda $V_m^*(z, E)$ regulyarizatsiyaga E to‘plamning Grinning m -funksiyasi deyiladi.

L_m sinf va $E \subset \mathbb{C}^n$ to‘plamning Grin funksiya quyidagi xossalarni qanoatlantiradi.

a) $V_m^*(z, E) \in L_m$;

Bizga ma'lumki (q.[3],[4]), Agar shunday $u \in m - sh(\mathbb{C}^n)$ va $u \not\equiv -\infty$ funksiya mavjud bo'lsaki, $u|_E \equiv -\infty$; tenglik bajarilsa, $E \subset \mathbb{C}^n$ to'plam $m - polyar$ to'plam deyiladi. Agar shunday $u \in L_m$ va $u \not\equiv -\infty$ funksiya mavjud bo'lsaki, $u|_E \equiv -\infty$; tenglik bajarilsa, u $L_m - polyar$ to'plam deyiladi.

b) $m - polyar$ to'plam $L_m - polyar$ bo'ladi.

O'z navbatida, $E \subset \mathbb{C}^n$ to'plam $m - polyar$ to'plam bo'lsin, ya'ni shunday $u \in m - sh(\mathbb{C}^n)$ funksiya mavjudki, $u \not\equiv -\infty$, lekin $u|_E \equiv -\infty$.

$\|u\|_{B_R} = \max_{B_R} u(z) = M_R$, deb olamiz, bunda $B_R = \{|z| \leq R\}$ - shar.

Umumiylikka xilof qilmagan xolda $E \subset B_1$ va $M_1 = 0$ deb faraz qilishimiz mumkin. So'ngra $1 \leq m < n$ deb xisoblab $k_m(z) = -\frac{1}{|z|^{2(n/m-1)}}$ yadrodan

foydalanamiz ($m = n$ da talab qilingan tasdiq plyuripotensiallar nazariyasida isbotlangan). $A > 0$ o'zgarmasni shunday tanlaymizki, $K_A(z) = Ak_m(z)$ ko'paytma $\|K_A\|_{B_1} \leq -1$ shartni qanoatlantirsin. $\|K_A\|_{B_j} = \delta_j$ deb olamiz. U holda $z \in \partial B_j$ da $K_A(z) \equiv \delta_j$ teng bo'ladi va shuning uchun

$$v_j(z) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{u(z) - M_j}{j \cdot M_j} - \delta_j, K_A(z) \right\} & \text{agar } z \in B_j \\ K_A(z) & \text{agar } z \notin B_j \end{cases} \quad (2.10)$$

Funksiya istalgan $j \in \mathbb{N}$ uchun L_m sinfga tegishli bo'lishini oson tekshirish mumkin.

Quyidagi yig'indini qaraymiz.

$$v(z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{2^k}(z). \quad (2.11)$$

Tekshirish mumkinki: 1) $v(z) \in L_m$; 2) $\{v(z) = -\infty\} = \{u(z) = -\infty\}$; xususan, $v|_E \equiv -\infty$. 3) v funksiya $-\infty$ ga aynan teng emas, bu yerdan E to'plamning $L_m - polyar$ ligi kelib chiqadi.

v) $V_m^*(z, E)$ funksiya yoki xech qayerda $\neq 0$, $V_m^*(z, E) < 0$, yoki $V_m^*(z, E) \equiv 0$. Oxirgi tenglik faqat va faqat E to'plam m -polyar bo'lgandagina bajariladi.

O'z navbatida, agar bitta nuqtada $V_m^*(z, E) = 0$ bo'lsa, maksimum prinsipiga ko'ra aynan nolga teng bo'ladi. Agar $V_m^*(z, E) \equiv 0$ bo'lsa, u holda shunday $z^0 \in \mathbb{C}^n$ mavjudki $V_m(z^0, E) = 0$ o'rinli bo'ladi, chunki $V_m(z, E) < V_m^*(z, E)$ to'plam m -polyar to'plamni ifodalaydi. Binobarin xar bir $j \in \mathbb{N}$ uchun $u_j \in L_m(E) : u_j(z^0) \geq -\frac{1}{2^j}$ funksiya mavjud. U xolda $u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ yig'indi $u \in L_m$, $u(z^0) \geq -1$, $u|_E \equiv 0$ xossani qanoatlantiradi. Biz E -to'plamni $L_m \subset m-sh(\mathbb{C}^n)$ sinfdan olingan biror funksiyaning singulyar to'plami ekanini isbotladik, ya'ni E to'plam L_m -polyar to'plamdir. Teskarisi agar E to'plam m -polyar to'plamni ifodalasa, u holda a) xossaga ko'ra u L_m -polyar bo'ladi: $E \subset \{u(z) = -\infty\}$, $u \in L_m$. U xolda $u_j = \frac{u(z)}{j} \in L_m(E)$, va demak, barcha $u(z) \neq -\infty$ uchun $V_m(z, E) = 0$ bo'ladi. Bu yerdan $V_m^*(z, E) \equiv 0$ kelib chiqadi.

g) $V_m^*(z, E)$ funksiya $\overline{E}$ dan tashqarida maksimal funksiyaning ifodalaydi, ya'ni $\mathbb{C}^n \setminus \overline{E}$ da $(dd^c V_m^*)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ (bu $m-sh$ funksiylarning umumiy nazariyasidan kelib chiqadi).

d) (*uch sfera haqidagi teorema*). $u \in L_m$ va $\|u\|_{S_R} = \max_{S_R} u(z) = M_R < 0$ bo'lsin, bu yerda $S_R = \{|z| = R\}$ -sfera. U holda istalgan $0 < r < \rho < R < \infty$ radiuslar uchun

$$\frac{N_R - N_\rho}{N_R - N_r} \leq \frac{M_R - M_\rho}{M_R - M_r} \quad (2.12)$$

tengsizlik o'rinli, bunda

$$M_R = \|u\|_{S_R}, \quad N_R = \|K_m\|_{S_R}, \quad K_m(z) = -\frac{1}{|z|^{2(n/m-1)}}.$$

Xaqiqatan, ushbu funktsiyani qaraymiz

$$v(z) = \frac{u(z) - M_R}{B} + N_R,$$

bu yerda $B = (M_R - M_r) / (N_R - N_r)$ o'zgarmasni shunday tanlaymizki ushbu $\|v\|_{B_r} \leq N_r$ tengsizlik bajarilsin. Bunday tanlovda $B_R \setminus B_r$

chegarada berilgan $u(z)$ funktsiya $k_m(z) = -\frac{1}{|z|^{2(n/m-1)}}$ funktsiya bilan

mojorontlanadi va bundan $v(z) \leq k_m(z) \quad \forall z \in B_R \setminus B_r$ kelib chiqadi. Bu yerdan (2.12) munosabat ham kelib chiqadi.

(2.12) tengsizlik odatda $u \in L_m$ funktsiyani tekis baxolash uchun ishlatiladi, uning o'ng qismini $M_R = 0$ deb olish hisobidan kattalashtirib, quyidagi

$$\frac{N_R - N_\rho}{N_R - N_r} \leq \frac{M_\rho}{M_r},$$

tengsizlikni hosil qilamiz, bu tengsizlik $r = 1, R \rightarrow \infty$ bo'lganda

$M_\rho \leq (-M_1)N_\rho$ tengsizlikni beradi, ya'ni $u(z) \leq (-\|u\|_{B_1}) \cdot k_m(z)$ o'rinli.

2.3. Grin funksiyaning m -regulyar va m -psevdoqavariq

to'plamlardagi xossalari.

$K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt $z^0 \in K$ nuqtada m -regulyar deyiladi, agar $V_m^*(z^0, K) = -1$ bo'lsa; agar K to'plamning istalgan nuqtasi m -regulyarlik nuqtasi bo'lsa, ya'ni $V_m^*(z, K)|_K \equiv -1$ bo'lsa m -regulyar kompakt deyiladi.

Ushbu $V_m^*(z, K) \leq V_1^*(z, K)$ munosabatdan, agar K klassik potentsiallar nazariyasidagi ma'noda, ya'ni subgarmonik funksiyalar sinfiga nisbatan regulyar bo'lsa, u holda u m -regulyar kompaktni ifodalaydi.

Quyidagi teorema o'rinli.

2.1-teorema. Agar $K \subset \mathbb{C}^n$ - m -regulyar kompakt bo'lsa, u holda $V_m^*(z, K)$ Grin funksiyasi $\mathbb{C}^n$ da uzluksiz funksiya bo'ladi, $V_m^*(z, K) \in C(\mathbb{C}^n)$.

Isbot. Approksimatsiya haqidagi teoremaga ko'ra (q.[3]) shunday $u_k(z) \in L_m \cap C^\infty(\mathbb{C}^n)$ funksiyalar ketma-ketligi mavjudki $u_k(z) \downarrow V_m^*(z, K)$ bo'ladi. Xartogs lemmasiga ko'ra esa har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $k_0 > 0$ son topilib, $u_{k_0}|_K < \varepsilon$ o'rinli bo'ladi. Bu yerdan ko'rinadiki $u_{k_0} - \varepsilon \in L_m(K)$. Shunday qilib, $u_{k_0} - \varepsilon \leq V_m^*(z, K) \leq u_{k_0}$ tengsizlikka ega bo'lamiz, binobarin $u_k(z)$ ketma-ketlik $V_m^*(z, K)$ ga $\mathbb{C}^n$ da tekis yaqinlashadi. $u_k(z) \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ ekanligidan, $V_m^*(z, K) \in C(\mathbb{C}^n)$ kelib chiqadi. *Teorema isbot bo'ldi.*

$V_m^*(z, K)$ Grin funksiyasi berilgan $K \subset \mathbb{C}^n$ kompaktning m -psevdoqavariq qobig'ini tadqiq qilishda qulay vosita xisoblanadi. m -psevdoqavariq kompaktlar va sohalar nochiziqli differensial tenglamalar nazariyasi va m -subgarmonik funksiyalar nazariyasida muhim rol o'ynaydi. m -psevdoqavariq silliq sohalar tushunchasi turli usullar bilan kiritiladi, geometrik jixatdan chegaraviy nuqtalarda urinma kompleks vektorlar yordamida (q. [7],[8]), va m -subgarmonik funksiyalar yordamida kiritiladi (q.[4],[5],[6].)

2.3-ta'rif. $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt uchun

$$\mathcal{K}_m = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : u(z) \leq \|u\|_K \quad \forall u \in m - sh(\mathbb{C}^n) \right\}$$

to'plam K kompaktning $m - pseudoqavariq$ qobig'i deyiladi. Agar $\mathcal{K} = K$ bo'lsa, K kompakt $m - pseudoqavariq$ deyiladi.

Tushunarliki, $\mathcal{K}_m$ to'plam $\mathbb{C}^n$ da kompaktni ifodalaydi va $\mathcal{K}_n \supset \mathcal{K}_{n-1} \supset \dots \supset \mathcal{K}_1 \supset K$, shu bilan birga $\mathcal{K}_n$ to'plam K ning polinomial qavariq qobig'i bilan ustma-ust tushadi, $\mathcal{K}_1$ esa $\mathbb{C}^n \setminus K$ ochiq to'plamning chegaralanmagan bog'lamli komponentalarining to'ldiruvchisi bilan ustma-ust tushadi.

2.2-teorema. Istalgan $K \subset \mathbb{C}^n$ kompakt uchun uning $\mathcal{K}$ qobig'i $\{V_m(z, K) = -1\}$ to'plam bilan ustma-ust tushadi, $\mathcal{K} = \{V_m(z, K) = -1\}$. Bundan tashqari Grin funksiyasi uchun $V_m^*(z, K) \equiv V_m^*(z, \mathcal{K})$ ayniyat o'rinli bo'ladi.

Isbot. Agar $V_m(z^0, K) > -1$ bo'lsa, u xolda $V_m(z, K)$ funksiyaning ta'rifidan, $u \in L_m : u|_K \leq -1, u(z^0) > -1$ funksiyani mavjudligi kelib chiqadi. Bu yerdan, $z^0 \notin \mathcal{K}$ va

$$\mathcal{K} \subset \{V_m(z, K) = -1\}. \quad (2.13)$$

Aksincha, biror $u \in m - sh(\mathbb{C}^n)$ funksiya uchun $u(z^0) > \|u\|_K$, $z^0 \in \mathbb{C}^n$ bo'lsin. Yetarlicha katta $R > 0$ radiusli B_R shar olamizki, $B_R \supset K \cup \{z^0\}$ bo'lsin. $k_m(x)$ yadroga va $u(x)$ funksiyaga maksimum prinsipini qo'llab, $\|k_m\|_K < \|k_m\|_R = \|k_m\|_{B_R} < 0$ va $\|u\|_K < \|u\|_R = \|u\|_{B_R} < 0$ tengsizliklarni olamiz.

$$v(z) = \left(1 - \frac{\|k_m\|_R}{\|k_m\|_K}\right) \cdot \frac{u(z) - \|u\|_R}{\|u\|_R - \|u\|_K} - \frac{\|k_m\|_R}{\|k_m\|_K} \in m - sh(\mathbb{C}^n)$$

funksiya $v|_K \leq -1$, $v|_{B_R} \leq -\frac{\|k_m\|_R}{\|k_m\|_K}$ shartlarni qanoatlantiradi. Binobarin

$$w(z) = \max \left\{ v(z), \frac{k_m(z)}{-\|k_m\|_K} \right\} \in L_m, \text{ shu bilan birga } w(z) \leq -1, \quad \forall z \in K.$$

Lekin,

$$w(z^0) \geq v(z^0) = \left(1 - \frac{\|k_m\|_R}{\|k_m\|_K}\right) \cdot \frac{u(z^0) - \|u\|_R}{\|u\|_R - \|u\|_K} - \frac{\|k_m\|_R}{\|k_m\|_K} > -1,$$

tengsizlik $V_m(z^0, K) > -1$ ekanini ko'rsatadi, ya'ni

$$\mathcal{K} \supset \{V_m(z, K) = -1\}. \quad (2.14)$$

(2.14) munosabat (2.13) bilan birgalikda $\mathcal{K} = \{V_m(z, K) = -1\}$ ni beradi.

Bu isbotlangan tenglikdan $V_m(z, K) = V_m(z, \mathcal{K})$ tenglik kelib chiqadi va bu tenglikning ikkala tomonidan regulyarizatsiya olgandan keyin $V_m^*(z, K) = V_m^*(z, \mathcal{K})$ tenglikni hosil qilamiz. *Teorema isbotlandi.*

Xulosa.

Keyingi vaqtlarda subgarmonik funksiya plyurisubgarmonik funksiyalar orasida turuvchi m - subgarmonik funksiyasi tushunchasi bizga A.Sadullayev va B.Abdullayev ishlaridan yaxshi tanish.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida m -subgarmonik funksiyalar sinfida Grin funksiyasi va uning xossalari o'rganilishga bag'ishlangan. Bitiruv malakaviy ishi kirish, 2 ta bob, asosiy foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat tarzda tayyorlanib, subgarmonik va plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning xossalari, Grin funksiyasi va ularning xossalari hamda m -subgarmonik funksiyalar sinfida Grin funksiyasi va uning m -regulyar va m -psevdoqavariq to'plamlardagi xossalari batafsil o'rganildi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. **Siciak J.**, Extremal plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^n$. Ann. Polonica math., V39, (1981), 175-211.
2. **Захарюта В.П.**, Экстремальные плюрисубгармонические функции, ортогональные полиномы и теорема Бернштейна-Уольша для аналитических функций многих комплексных переменных. Ann.Pol.Math., V.33, (1976), 137-148.
3. **Садуллаев А.**, Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium. Germany, 2012.
4. **Садуллаев А., Абдуллаев Б.**, Теория потенциалов в классе m – субгармонических функций. Труды математического института им. В.А.Стеклова. 2012. т.279.с.166-192.
5. **Абдуллаев Б.И.**, О задаче Дирихле для m – sh функций. Доклады АНРУз., -Ташкент, 2013, №4, 8-10.
6. **Абдуллаев Б.И., Шарипов Р.А.**, m - субгармонические функции во всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Функции Грина// Узбекский математический журнал, - Тошкент, 2013, №3, 3-8.
7. **Kolodziej S.**, The complex Monge-Ampere equation, Acta Math., 1998, V.180, 69-117.
8. **Li S.Y.**, On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian, Asian J.Math., 2004, V.8, 87-106.
9. **Trudinger N.S.**, On the Dirichlet problem for Hessian equation. Acta Math., V.175, (1995), 151-164.

