

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“FUNKSIYALAR NAZARIYASI” KAFEDRASI

401 – MATEMATIKA GURUHI TALABASI
SULTANOV BEKZODNING
5130100-Matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Mavzu: *Analitik funksiyalar normal oilasi. Pikar teoremasi.*

Ilmiy rahbar:

Alim
IMZONI TAS
KADRLAR BO'LIMI
dots. A. Atamuratov

Urganch-2015

Mavzu: Analitik funksiyalarning normal oilasi. Pikar teoremasi

REJA:

Kirish

I-BOB. BUTUN VA MEROMORF FUNKSIYALAR.

- 1.1. Golomorf funksiyalar va ularning sodda xossalari.
- 1.2. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish.
- 1.3. Butun funksiyalar. Liuvill teoremasi.
- 1.4. Kompleks tekislikda meromorf funksiyalar. Mittag-Leffler teoremasi.

II-BOB. MODULYAR FUNKSIYALAR. PIKARNING KICHIK TEOREMASI.

- 2.1. Konform izomorfizm. Avtomorfizm.
- 2.2. Simmetriya printsiplari
- 2.3. Shvartsning modulyar funksiyasi.
- 2.4. Pikarning kichik teoremasi.

III-BOB. ANALITIK FUNKSIYALARNING NORMAL OILASI. PIKARNING KATTA TEOREMASI.

- 3.1. Montel teoremasi.
- 3.2. Analitik funksiyalarning normal oilasi. Normallik kriteriyasi.
- 3.3. Pikarning katta teoremasi va Julia nurlari.

Xulosa

Adabiyotlar

KIRISH

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning geometrik nazariyasida analitik funksiyalarning qiymatlari taqsimotini o'rganish muhim ahamiyat kasb etadi. O'tgan asrning boshlarida yaratilgan mazkur Nevanlinna nazariyasi mashhur Pikar teoremlari bilan boshlanadi. Ma'lumki Pikar teoremasi kompleks analizdagi fundamental natijalardan biri bo'lib, Dinamik sistemalar va konform akslantirishlar bilan bo'g'liq bo'lgan ko'pgina masalalarda tadbiiq etiladi. Aslida $f(z)$ analitik funksiyalar uchun $f(z) = a$ tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalari to'plamiga funksiyaning a nuqtalari deyiladi. Aniqlanishicha butun funksiyalar uchun ham $f(z) = a$ tenglama yechimga ega bo'lmay qolishi mumkin ekan. Bunday nuqtalar soni qancha bo'lishiga Pikar teoremasi javob beradi va unga ko'ra Butun funksiyalar uchun bitta meromorf funksiyalar uchun esa ikkita bo'lishi mumkin.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi butun va meromorf funksiyalarning qiymatlari haqidagi Pikar teoremasini o'rganishga bag'ishlangan. Shuningdek analitik funksiyalarning normal oilasi tushunchalari va ular bilan bog'liq masalalarga bag'ishlangan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi uch bobdan va o'n bitta bo'limdan tashkil topgan bo'lib, birinchi bobi tayanch tushunchalar, butun va meromorf funksiyalar ularning xossalari o'rganiladi. Ikkinchi bobi Pikarning kichik teoremasi va Shvartsning modulyar funksiyalarini o'rganiladi. Pikar teoremasini isbotlash jarayonida Shvarts tomonidan kiritilgan modulyar funksiyalar xossalariidan foydalaniladi. Modulyar funksiyalar birlik doiradan tashqariga analitik davom etmaydigan analitik funksiyalar bo'lib,

bir qator xossalarga egadir. Mazkur xossalar II-bobning 3-bo'limida yoritiladi. Shuningdek ushbu bobda Riman-Shvartsning simmetriya prinsipi isbot qilinadi.

Uchinchi bobda analitik funksiyalar normal oilasi va Pikarning katta teoremasi o'rganishga bag'ishlanadi. Ushbu bobda analitik funksiyalar uchun kompaktlik prinsipi hisoblanga Montel teoremasi bilan boshlanadi. Mazkur bobning 2-bo'limi analitik funksiyalar to'plamining normalligi tushunchalari va normallik kriteriyalari keltiriladi. Uchinchi bobning 3- bo'limida Pikarning katta teoremasi tahlil qilingan.

I BOB. BUTUN VA MEROMORF FUNKSIYALAR.

1.1. Golomorf funksiyalar va ularning sodda xossalari.

$M \subset C$ to'plam berilgan bo'lsin. M to'plamda z_0 nuqtani olib unga shunday Δz orttirma beraylikki, $z_0 + \Delta z \in M$ bo'lsin. Natijada M da aniqlangan $W = f(z)$ funksiya ham z_0 nuqtada

$$\Delta W = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi.

Ta'rif 1.1.1. Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta W}{\Delta z}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Ta'rif 1.1.2. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in M$ nuqta $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya M to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, M to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Unda,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

bo'lib,

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z$$

bo'ladi. Bu yerda $\Delta z \rightarrow 0$ da $\alpha(z_0, \Delta z)$ ham nolga intiladi:

$$\alpha(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$$

Ta'rif 1.1.3 Agar haqiqiy o'zgaruvchili $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar (x_0, y_0) nuqtada $((x_0, y_0) \in R^2)$ differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida (qisqacha R^2 ma'noda) differensiallanuvchi deyiladi.

Teorema.1.1.1. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun

1) $f(z)$ ning z_0 nuqtada haqiqiy analiz ma'nosida differensiallanuvchi bo'lishi va

2) ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1.1)$$

Koshi-Riman shartlarining bajarilishi zarur va yetarli.

Kompleks analizda hosilaga ega bo'lgan funksiyalar C-differensiallanuvchi funksiyalar deyiladi.

Faraz qilaylik, $W = f(z)$ funksiya biror $D \subset \mathbb{C}$ sohada berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.1.4. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtaning biror $U(z_0, \varepsilon) \subset D$ atrofida C-differentsiyalanuvchi bo'lsa, $f(z)$ nuqtada golomorf (yoki analitik) deb ataladi.

Ta'rif 1.1.5. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya D sohada golomorf deyiladi.

Odatda D sohada golomorf bo'lgan funksiyalar sinfi $\mathcal{G}(D)$ kabi belgilanadi.

Ta’rif 1.1.6 Agar $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z=0$ nuqtada golomorf bo’lsa, $f(z)$ funksiya ∞ nuqtada golomorf deyiladi.

Ta’rif 1.1.7. Agar $\overline{f(z)}$ funksiya $z_0 \in D$ nuqtada golomorf bo’lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada antigolomorf deyiladi.

Aytaylik, R^2 fazodagi $E \subset R^2$ sohada $F=F(x,y)$ funksiya berilgan bo’lib, u shu sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}$$

ega bo’lsin.

Ta’rif 1.1.8. Agar E sohaning har bir nuqtasida

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1.2)$$

tenglik bajarilsa, $F(x,y)$ funksiya E sohada gormonik funksiya deyiladi.

Odatda (1.1.2) Laplas tenglamasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta F = 0$$

Bunda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplas operatori uchun

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

bo’lishini etiborga olsak, unda (1.1.2) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

Teorema.1.1.2. $D \subset C$ sohada golomorf bo'lgan har qanday $f(z)$ funksiyaning haqiqiy hamda mavhum qismlari shu sohada gormonik bo'ladi.

Ta'rif 1.1.9. Agar $\lambda \rightarrow 0$ da $f(z)$ funksiyaning integral yig'indisi γ egri chiziqning bo'linishiga hamda γ_k bo'lakda ξ_k nuqtaning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmagan holda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit $f(z)$ funksiyaning γ egri chiziq bo'yicha integrali deb ataladi va

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

Kabi belgilanadi. Demak,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

integralning mavjudligi. Yuqorida keltirilgan ta'rifdan ko'rinadiki, integral γ egri chiziqqa hamda unda berilgan $f(z)$ funksiya bog'liq bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\gamma = AB$ ($\gamma \in C$) egri chiziq

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. Bunda $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar $[\alpha, \beta]$ segmentda aniqlangan, uzluksiz hamda $x'(t)$, $y'(t)$ hosilalarga ega. $(x'^2(t) + y'^2(t) > 0)$ t parametr α dan β ga qarab o'zgarganda $z = z(t)$ nuqta A dan B ga qarab $\gamma = AB$ ni chiza boradi.

γ egri chiziqda $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. $[\alpha, \beta]$ segmentni $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakka ajratamiz $z = z(t)$ funksiya bu nuqtalarni γ egri chiziq nuqtalariga aylantiradi. t_k ($k = \overline{1, n}$) nuqtalarning γ dagi akslarini

$$A = z_0, z_1, \dots, z_n = B$$

deylik, natijada bu nuqtalar yordamida γ egri chiziq γ_k bo'laklarga ajraladi, har bir γ_k da ixtiyoriy ξ_k ($\xi_k = \zeta_k + i\eta_k$) nuqtani olamiz. Ravshanki,

$$\xi_k = z(\tau_k) \quad (t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k)$$

bo'ladi. Endi ushbu

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

yig'indini qaraymiz. Bu yig'indida

$$f(\xi_k) = u(\zeta_k, \eta_k) + iv(\zeta_k, \eta_k)$$

$$z_k - z_{k-1} = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k$$

bo'lishini e'tiborga olib quyidagini topamiz:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n [u(\zeta_k, \eta_k) + iv(\zeta_k, \eta_k)] \cdot (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n [u(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k] + i \sum_{k=1}^n [v(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k] \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi har bir yig'indi $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiylarning Γ egri chiziqli integrallari uchun integral yig'indilaridir.

Qaralayotgan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya γ egri chiziqda uzluksiz. Binobarin, $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiylar ham γ da uzluksiz. Demak bu funksiylarning γ egri chiziq bo'yicha integrallari mavjud va

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k] = \int_{\gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k] = \int_{\gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

bo'ladi.

(1.1.3) da $\lambda \rightarrow 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

Bunda esa $\lambda \rightarrow 0$ da σ yig'indi chekli limitga ega va

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Natijada quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema.1.1.3. Agar $f(z)$ funksiya γ egri chiziqda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiyaning γ egri chiziq bo'yicha integrali mavjud va

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

bo'ladi.

Teorema.1.1.4. (Koshi) Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada ($D \subset C$) golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning D sohada yotuvchi har qanday silliq, (bo'lakli silliq) G yopiq chiziq bo'yicha integrali nolga teng bo'ladi:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

Isbot. 1-hol. $\Gamma = \partial\Delta$ - uchburchak chegarasi bo'lgan hol. Bu uchburchakni perimetri R ga teng bo'lsin. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni teorema shartlari bajarilsinu, lekin

$$\left| \oint_{\partial\Delta} f(z) dz \right| = M > 0$$

bo'lsin.

Δ -uchburchakni, uning tamonlari o'rtalarini birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmalari yordamida 4 ta

$$\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$$

uchburchaklarga ajratamiz.

Natijada quyidagi munosabatga kelamiz

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta^1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^3} f(z)dz + \int_{\partial\Delta^4} f(z)dz$$

Ravshanki,

$$M = \left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq \left| \int_{\partial\Delta^1} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta^2} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta^3} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta^4} f(z)dz \right|$$

bu tengsizlikning o'ng tamonidagi qo'shiluvchilardan kamida bittasi $\frac{M}{4}$ dan kichik bo'lmaydi, shu uchburchakni Δ_1 deb belgilaymiz, ya'ni

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

Δ_1 - uchburchakning perimetri $\frac{P}{2}$ ga teng.

Endi Δ_1 uchburchakka yuqoridagi usul bilan yana 4 ta $\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}, \Delta_1^{(4)}$

uchburchaklarga ajratamiz. Bu uchburchaklar orasida shunday Δ_2 uchburchakning perimetri $\frac{P}{2^2}$ ga teng. Bu jarayonni cheksiz davom ettira boramiz.

Natijada $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \dots$ uchburchaklar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu uchburchaklar ketma-ketligi uchun:

1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$

2) Δ_n uchburchakning perimetri $\frac{P}{2^n}$ ga teng va $n \rightarrow \infty$ da $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$;

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4^n} \quad (1.1.4)$$

3) har bir Δ_n ($n=1,2,\dots$) uchburchak uchun bo'ladi.

1) va 2) tasdiqlardan barcha $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n, \dots$ uchburchaklarga tegishli bo'lgan

yagona z_0 nuqta ($z_0 \in D$) mavjud bo'lishi kelib chiqadi.

Shartlarga ko'ra $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada holomorf. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon)$ son topiladiki,

$$|z - z_0| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha z lar uchun

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon,$$

ya'ni

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

bo'ladi.

Endi biz bilamizki

$$\int_{\partial \Delta_n} dz = 0, \quad \int_{\partial \Delta_n} z dz = 0$$

va n ning yetarli katta qiymatlarida

$$\Delta_n \subset \{z \in C : |z - z_0| < S\}$$

bo'ladi.

Demak,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta_n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq \\ &\leq \int_{\partial \Delta_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| dz < \varepsilon \int_{\partial \Delta_n} |z - z_0| dz = \varepsilon \frac{p}{2^n} \cdot \frac{p}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{p^2}{4^n} \end{aligned}$$

(1.1.4) dan

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{p^2}{4^n}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak ,

$$M < \varepsilon \cdot p^2.$$

Bu tengsizlik $M > 0$ deb qilingan farazga zid. (chunki ε – ixtiyoriy musbat son). Ziddiyatlik bo'lmashligi uchun $M = 0$ bo'lishi kerak.

Shunday kilib $M = 0$, ya'ni

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

bo'ladi.

2) Γ egri chiziq ko'pburchak konturidan iborat bo'lsin: $G = R$

Ravshanki. Ko'pburchak chekli sondagi uchburchaklarga ajraladi va

$$\int_P f(z)dz$$

integral esa bu uchburchaklar bo'yicha olingan integralar yig'indisiga teng bo'ladi. Uchburchaklari bo'yicha olingan integrallarning har biri 1) holga binoan nolga teng bo'ladi.

Binobarin,

$$\int_P f(z)dz = 0$$

bo'ladi.

3) Γ egri chiziq ixtiyoriy silliq (bo'lakli silliq) yopiq egri chiziq bo'lsin. Integralning 6-xossasiga ko'ra D sohaga tegishli bo'lgan Shunday R ko'pburchak topiladiki,

$\left| \int_P f(z)dz - \int_P f(z)dz \right| < \varepsilon$ bo'ladi, bunda ε – ixtiyoriy musbat son 2) holga

binoan

$$\int_P f(z)dz = 0$$

demak,

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| < \varepsilon$$

bundan esa

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. *Teorema to'liq isbot bo'ldi.*

Natija.1.1.1. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada ($D \subset C$) golomorf bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaning integrali integrallash egri chizig'iga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni boshlang'ich va oxirgi nuqtalari umumiy hamda D sohada yotuvchi γ_1 va γ_2 egri chiziqlar uchun

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

bo'ladi.

Koshi teoremasini umumlashtirish. Aytaylik, D ($D \subset C$) chegarlangan bir bog'lamli soha bo'lib, uning chegarasi ∂D silliq (bo'lakli silliq) yopiq egri chiziqdan iborat bo'lsin.

Teorema.1.1.5. Agar $f(z) \in \sigma(D) \cap C(\partial D)$ bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

bo'ladi.

Bu erda ∂D ni yo'nalishi musbat yo'nalish. $D \subset C$ soha berilgan bo'lsin. D soha chegarasi ∂D ni orientirlangan yo'nalish deb, shunday yo'nalishga aytiladiki, bu yo'nalish bo'yicha chegarada harakat qilganda soha har doir chap tomonda qoladi.

Teorema.1.1.6. (Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasi)

Agar $f(z)$ funksiya ko'p bog'lamli D sohada golomorf va $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

bo'ladi.

Bu yerda integral chegarani orientirlangan yo'nalishi bo'yicha olinadi.

Golomorf funksiyalarning xossalari

Koshining integral formulasi. Kompleks sonlar tekisligi C da D sohani qaraylik. Uning chegarasi ∂D silliq (bo'lakli silliq) chiziqdan iborat. Bu yopiq egri chiziq musbat yo'nalishda olingan bo'lsin. Aytaylik, $\bar{D}$ da $f(z)$ funksiya aniqlangan bo'lsin,

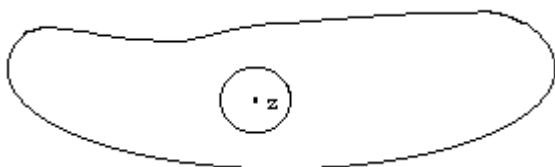
Teorema.1.1.7. Agar $f(z) \in V(D) \cap C(\bar{D})$ bo'lsa, u holda $\forall z \in D$ nuqta uchun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

O'ng tomonda $f(z)$ funksiyamizni faqat chegaradagi qiymatlar ishtirok qilyapti. Demak, golomorf funksiya o'zini chegaradagi qiymatlari bilan to'la aniqlanadi.

Isbot.



Yetarlicha kichik ρ son uchun $U_\rho = \{z : |z' - z| < \rho\}$ doirani qaraymiz ($U_\rho \subseteq D$), u holda $D_\rho = D \setminus \overline{U_\rho}$ sohada $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ funksiya 2 ta golomorf funksiyaning nisbati sifatida (maxraji nolga teng emas) golomorfdir (xattoki $\bar{D}_\rho$ da ham).

Ko'p bog'lamli soha uchun Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_{\partial D_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

yoki bundan

$$\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

endi $\rho \rightarrow 0$ da o'ng tomon $2\pi i f(z)$ ga intilsa bas. Shuni ko'rsatamiz. $f(z)$ funksiya z nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra, $\exists \delta > 0$ ni $|\xi - z| = \rho < \delta$ bo'lganda $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi :

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) - \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= f(z) \int_{\partial U_\rho} \frac{d\xi}{\xi - z} - \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \int_{\partial U_\rho} \frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z} d\xi \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

bundan

$$\begin{aligned} \left| 2\pi i f(z) - \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| &= \left| \int_{\partial U_\rho} \frac{f(z) - f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \int_{\partial U_\rho} \frac{|f(z) - f(\xi)|}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\rho} \int_{\partial U_\rho} |d\xi| = \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\rho \rightarrow 0$ da (1.1.5) ning chap tomoni nolga intilishi kelib chiqdi. Oldingi tenglamani chap tomoni ρ ga bog'liq emasligini hisobga olsak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

ni hosil qilamiz. Shartga ko'ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f}{\xi - z} d\xi$$

Bu formulaga Koshining integral formulasi deyiladi.

Endi Koshining integral formulasini xususiy holda, chegarasi aylanadan iborat soha uchun keltiramiz. Kompleks tekislik C da ushbu $D = \{z \in C : |z - z_0| < r, r > 0\}$ doirani qaraylik ($z_0 \in C$). Ravshanki

bu doiraning chegarsi $\partial D = \{z \in C : |z - z_0| = r, r > 0\}$ aylana bo'ladi.

Golomorf funksiyaning istalgan tartibli hosilaga ega bo'lishi.

Teorema.1.1.8. Agar $f(z) \in v(D)$ ($D \subset C_z$) bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya D da istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lib,

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

bo'ladi.

Bu erda $\gamma - D$ sohada yotuvchi (bo'lakli silliq) yopiq chiziq bo'lib, z esa γ chiziq bilan chegaralangan sohaga tegishli nuqta.

Isbot. Koshining integral formulasiga ko'ra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

bo'ladi. z nuqtaga Δz orttirma berib, $f(z)$ funksiya orttirmasini topamiz:

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z - \Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z - \Delta z} - \frac{1}{\xi - z} \right) d\xi &= \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} \end{aligned}$$

Unda

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} d\xi \text{ bo'ladi. keyingi tenglikni}$$

quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} d\xi - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Delta z f(\xi) d\xi}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)^2} \end{aligned}$$

(1.1.6)

Endi $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)^2} d\xi$ integralni bohalaymiz. Ravshanki,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)^2} d\xi \right| < \frac{|\Delta z|}{2\pi} M \int_{\gamma} \frac{|d\xi|}{|\xi - z - \Delta z| |\xi - z|^2} \quad \text{bunda}$$

Agar z nuqtadan γ chiziqqacha bo'lgan masofani $2d$ ($d > 0$) desak, unda $|\xi - z| > d$, $|\xi - z - \Delta z| > d$ bo'lib (agarda $|\Delta z|$ yetarlicha kichik bo'lsa.)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Delta z f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)^2} d\xi \right| < \frac{|\Delta z| M l}{2\pi d^3}$$

bo'ladi bu yerda $l - \gamma$ chiziq uzunligi.

Oxirgi tenglikka asosan $\Delta z \rightarrow 0$ da (1.1.6) da limitga o'tib bo'lishini topamiz.

Endi agar $f'(z)$ funksiyani olib uning uchun yuqoridagi muloxazalarni takrorlasin

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi$$

tenglik hosil bo'ladi.

Xuddi shu yo'l bilan 3 chi 4 chi va xakozo tartibdagi hosilalarni mavjudligi ko'rsatiladi. $f(z)$ funksiyaning n -tartibli hosilasi uchun formula o'rinli bo'lishi matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

Natija.1.1.2. Agar $f(z) \in \mathcal{G}(D)$ ($D \subset \mathbb{C}_z$) bo'lsa, $f'(z) \in \mathcal{G}(D)$ bo'ladi.

Natija.1.1.3. Agar $f(z)$ funksiya D sohada boshlangich funksiya ega bo'lsa, u holda $f(z)$ D sohada golomorf bo'ladi.

1.2. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish.

Teorema.1.2.1. Agar $f(z) \in \mathcal{G}(D)$ ($D \subset \mathbb{C}_z$) bo'lsa, u holda $a \in D$ nuqtada (a nuqta atrofida)

$$\bigcup_{\rho}(a) = \{z \in \mathbb{C}_z : |z - a| < \rho, \rho > 0\} \subset D$$

Teylor qatoriga yoyiladi:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (z - a)^n$$

Isbot. $\bigcup_{\rho}(a)$ ning chegarasini γ deylik.

$\gamma = \{z \in \mathbb{C}_z : |z - a| = \rho, \rho > 0\}$ bo'ladi. Avvalo

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a) \left(1 - \frac{z - a}{\xi - a} \right)}$$

deb yozib, so'ng

$$\frac{1}{1 - \frac{z - a}{\xi - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right)^n$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\xi - a} \right)^n$$

bu geometrik qator bo'lib uning mahraji

$$\frac{z - a}{\xi - a}$$

ga teng.

Ravshanki, $\xi \in \gamma$ uchun quyidagi tengsizlik

$$\left| \frac{z - a}{\xi - a} \right| = \frac{|z - a|}{\rho} = q < 1$$

o'rinli. Demak, (4) qator yaqinlashuvchi (6) tenglikning har ikki tomonini

$$\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$$

ga ko'paytirib, so'ng γ chiziq bo'yicha integrallab, ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n d\xi$$

tenglikka kelamiz. Yuqoridagi munosabatlardan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n d\xi \quad (1.2.1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Integral ostidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n$$

qatorning hadlari uchun

$$\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n \right| < \frac{1}{\rho} M q^n \quad (n=1,2,\dots) \quad \left(M = \max_{\gamma} |f(\xi)| \right)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ravshanki, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{\rho} q^n \quad (q < 1)$ qator yaqinlashuvchi.

Unda Veyershtass alomatiga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} (z - a)^n$$

funksional qator γ tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Binobarin bu qatorni hadlab integrallash mumkin. Unda (1.2.1) tenglik ushbu

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi \right] (z - a)^n \quad (1.2.2)$$

ko'rinishga keladi. Yuqorida keltirilgan ma'lum teoremaga ko'ra

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (1.2.3)$$

bo'lishini topamiz. Natijada (1.2.2) va (1.2.3) tengliklardan

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(z)$ funksiyani Teylor qatoriga yoyilganini bildiradi.

Teorema.1.2.2. (Koshi tengsizligi) Agar $f(z)$ funksiya yopiq doirada golomorf bo'lib bu doiraning chegarasi $\gamma = \partial \cup_{\rho}(a)$ aylanadi $|f(z)| \leq M$ ($M - \text{const}$) bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiya Teylor qatorining C_n koeffitsientlari uchun

$$|C_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2.4)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

1.3. Butun funksiyalar. Liuvill teoremasi.

Ta'rif 1.3.1. Kompleks tekislikda golomorf bo'lgan funksiyalarga butun funksiya deyiladi.

Biz ushbu bo'limda butun funksiyalarni ba'zi muhim xossalarini ko'rib chiqamiz. Bular orasida nisbatan ko'p qo'llaniladigani Liuvill teoremasi hisoblanadi.

Teorema.1.3.1. (Liuvill) Agar $f(z)$ butun funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda bu funksiya o'zgarmas bo'ladi.

Isbot. Golomorf funksiyaning xossasiga ko`ra  $f(z)$  funksiya  $|z-a|<\rho$  doirada  $z-a$  ning darajalari bo`yicha Teylor qatoriga yoyiladi.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

bunda

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

Koshi tengsizligiga binoan $|f(z)| \leq M$ bo`lgani uchun va  $f(z) \in \mathcal{H}(C)$  ekanidan bu tengsizlikda  $\rho$  ni istaganicha katta qilib olish mumkin. Shuning uchun  $n=1,2,3,\dots$  bo`lganda $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{M}{\rho^n} = 0$ ($n=1,2,3,\dots$)

bo`ladi. Ayni paytda Koshi tengsizligining chap tomoni  $\rho$  ga bog`liq emas. Binobarin $n=1,2,3,\dots$ bo`lganda  $C_n = 0$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) bo`ladi. Demak, $\mathbb{C}$ da $f(z) = c_0$ ($c_0 = \text{const}$).

Butun funksiyalar tipi va tartibi. Ushbu

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (1.3.1)$$

darajali qator bilan aniqlangan golomorf funksiyaning qaraylik. Dastavval qatorning yaqinlashish radiusi uchun Koshi-Adamar formulasini olaylik

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Darajali qator yaqinlashish sohasida golomorf bo`lgan funksiyaning aniqlaydi. Boshqa tomondan ushbu formula koordinata boshidan  $f(z)$  funksiyaning eng yaqin maxsus nuqtasigacha masofani aniqlaydi. Bundan xulosa sifatida butun kompleks tekislikda golomorf bo`lgan funksiya uchun

$$R = \infty: \overline{\lim}^k \sqrt[k]{|a_k|} = 0$$

bo'lishini kelib chiqadi va ushbu kriteriya funksiyani butun funksiya bo'lishi uchun lokal shart bo'lishini ko'ramiz. Ma'lumki, Liuvvil teoremasiga ko'ra o'zgarmas bo'lmagan xar qanday butun funksiya chegaralanmagan bo'ladi. Bu yerdan funksiyanin cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida o'zini tutishini o'rganish masalasi kelib chiqadi:

Aytaylik,

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

Ma'lumki,

$$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k}, \quad r > 0, \quad k \geq 0$$

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya uchun

$$M(r) < Ar^q \quad r > r_0 \quad (1.3.2)$$

shart bajarilsin.

U holda,

$$|a_k| < Ar^q, \quad r < r_0$$

bo'ladi. $k > q$ da $r \rightarrow \infty$ da $a_k = 0$. Demak,

$$f(z) = \sum_{k \leq 0} a_k z^k$$

Shunday qilib, agar (1.3.2) shart bajarilsa, u holda $f(z)$ ko'phad xususan, $q = 0$ da $f(z) \equiv a_0$ bo'lib, Liuvill teoremasi kelib chiqadi. Demak, $f(z)$ ko'phad bo'lmasa, $M(r)$ $r \rightarrow \infty$ da r ga nisbatan tez o'sadi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r} = \infty$$

Ta'rif 1.3.2. $f(z)$ butun funksiya chekli tartibli deyiladi, agar shunday $\mu > 0$ son topilib, barcha $r > R$ uchun

$$M(r) < \exp(r^\mu) \quad (1.3.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa. (1.3.3) shartni qanoatlantiradigan sonlar quyi chegarasi ρ ga $f(z)$ funksiya tartibi deyiladi.

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \quad (1.3.4)$$

Agar (3) shart hech qanday chekli μ da bajarilmasa, u holda $\rho = \infty$.

Ta'rif 1.3.3. $f(z)$ funksiya uchun

$$M(r) < \exp(ar^\rho) \quad (1.3.5)$$

o'rinli bo'lsa, $f(z)$ chekli tipli deyiladi. (1.3.5) tengsizlikni qanoatlantiradigan a sonlar ichida quyi chegarasi σ ga $f(z)$ funksiyaning tipi deyiladi.

$$\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}$$

Teorema.1.3.2. $f(z)$ funksiyaning tartibi

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln \left| \frac{1}{a_n} \right|}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar $\rho = f(z)$ funksiyaning tartibi bo'lsa, u holda

$$(\sigma e \rho)_{\rho}^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

formula o'rinli.

Bu erda, $\sigma = f(z)$ funksiya tipi.

1.4. Kompleks tekislikda meramorf funksiyalar.

Mittag-Lefler teoremasi

Ma'lumki, $z = \infty$ cheksiz uzoqlashgan nuqtani o'z ichiga olmaydigan tekislik chekli tekislik deyiladi. Boshqacha

aytganda, markazi nol nuqtada joylashgan har qanday chekli R katta radiusli doiraning ichki nuqtalari to'plamidir. Bunday tekislikning aksini sferaga tushirilganda shimoliy qutb hisobga kirmay qoladi, ya'ni to'plamga kirmaydi. Agarda $z = \infty$ nuqta ham tekislikka kiritilsa, u kengaytirilgan tekislik deyilib, uning aksi sferaning barcha nuqtalaridan iborat bo'ladi.

Ta'rif 1.4.1. *Chekli tekislikda qutblardan boshqa maxsus nuqtalarga ega bo'lmagan analitik funktsiyani meromorf (yoki kasr) funktsiya deyiladi.*

Shu narsaga e'tiborni jalb qilib o'tamizki, har qanday chegaralangan sohada meromorf funktsiya faqat chekli sondagi qutblarga ega bo'ladi.

Haqiqatan, agar bunday sohada funktsiyaning cheksiz ko'p qutblari mavjud bo'lganda edi, ularning biror a nuqtaga intiluvchi ketma-ketligi ham mavjud bo'lar edi. Bu a nuqta meromorf funktsiya uchun, qutbdan farqli bo'lgan, yakkalanmagan maxsus nuqta bo'ladi, chunki qutbning ta'rifiga ko'ra u ajralgan maxsus nuqta bo'lishi kerak. Meromorf funktsiyaning ta'rifiga asosan bunday bo'lishi mumkin emas. Har bir ratsional funktsiya meromorf funktsiyaga misol bo'la oladi. Haqiqatan,

$$\frac{p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n}{q_0 z^m + q_1 z^{m-1} + \dots + q_m}$$

ratsional funktsiyaning barcha kengaytirilgan tekislikdagi maxsus nuqtalari qutblardan iborat ($n > m$ bo'lsa, cheksiz uzoqlashgan nuqtaga $n - m$ -tartibli qutb, $n \leq m$ bo'lsa, cheksiz uzoqlashgan nuqta-qutulib bo'ladigan maxsus nuqta bo'ladi, bu nuqtada funktsiyani kerakli ravishda aniqlab olib, nuqtani to'g'ri nuqta hisoblashimiz mumkin).

Teorema.1.4.1. Agar golomorf $f(z)$ funksiya butun kengaytirilgan tekislikda qutblardan boshqa maxsus nuqtalarga ega bo'lmasa, u holda $f(z)$ ratsional funksiyaadir.

Isbot. Berilgan $f(z)$ funksiya uchun cheksiz uzoqlashgan nuqta teoremaning shartiga ko'ra faqat qutb bo'lishi mumkin, u holda cheksiz uzoqlashgan nuqtaning biror $|z| > |R|$ atrofida $f(z)$ analitik funksiyaadir. $|z| \leq |R|$ doirada meromorf funksiya ta'rifidan chiqarilgan xulosaga asosan chekli sondagina qutblar mavjud bo'lishi mumkin; bu qutblarni $z_1, z_2, \dots, z_n$ orqali belgilaymiz; bo'larning tartibi mos ravishda $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ bo'lsin. Har bir qutbning atrofida $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyamiz. z_j atrofidagi yoyilma quyidagicha bo'ladi:

$$f(z) = \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{\beta_j}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j} + c_0^{(j)} + c_1^{(j)}(z-z_j) + \dots$$

Bu yoyilmaning bosh qismini $g(z)$ orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$g(z) = \frac{c_{-\beta_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{\beta_j}} + \dots + \frac{c_{-1}^{(j)}}{z-z_j}.$$

Ravshanki, $g_j(z)$ — ratsional funksiyaadir.

Endi $f(z)$ funksiyaning $z = \infty$ nuqta atrofidagi Loran yoyilmasining bosh qismini $g(z)$ orqali belgilaymiz:

$$g(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_p z^p$$

(agar $f(z)$ uchun $z = \infty$ to'g'ri nuqta bo'lsa, $g(z)$ funksiya tekshirilmaydi, chunki bu holda bosh qism bo'lmaydi). Ushbu

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{j=1}^n g_j(z)$$

funksiyani tekshiramiz. Bu funksiya barcha chekli $z \neq z_j (j=1, n)$ nuqtalarda chekli sondagi analitik funksiyalarning yig'indisi bo'lgani uchun analitikdir. Bu funksiyaning tuzilishidan ravshanki, har bir z_j va $z = \infty$ nuqta $\varphi(z)$ uchun qutulib bo'ladigan maxsus nuqta bo'ladi, chunki uning Loran yoyilmasidan bosh qism chiqarib tashlanyapti.

$\varphi(z)$ funksiyani z_j va $z = \infty$ nuqtalarda kerakli ravishda aniqlab olib, kengaytirilgan tekislikda analitik funksiya deb qarashimiz mumkin. Liuvill teoremasiga asosan:

$$\phi(z) = \text{const}.$$

Bunga asosan;

$$f(z) = \text{const} + g(z) - \sum_{j=1}^n g_j(z).$$

Demak, $f(z)$ -ratsional funksiya ekan. Shu bilan birga bu teorema har qanday ratsional funksiyani oddiy kasrlarga yoyish mumkinligini ham ko'rsatadi;

Endi meromorf $f(z)$ funksiya qutblarining to'plami cheksiz bo'lgan holni ko'ramiz. Har qanday chegaralangan sohada meromorf funksiya qutblarining soni chekli ekanligini e'tiborga olib, $f(z)$ meromorf funksiyaning barcha qutblarini ma'lum tartibda nomerlab chiqishimiz mumkin. Masalan, $f(z)$ ning qutblarini z_j lar orqali belgilasak, bo'larni modullari kamaymaydigan tartibda nomerlashimiz mumkin:

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_j| \leq \dots$$

$f(z)$ funksiyaning z_j qutbi atrofidagi Loran yoyilmasining bosh qismini, xuddi yuqoridagidek, $g_j(z)$ bilan belgilaymiz.

Tekshirilayotgan holda ham meromorf funksiya yoyilmasini hosil qilish uchun avvalgiday, ya'ni qutblar soni chekli bo'lgan holdagidek, $f(z)$ funksiya barcha $g_j(z)$ bosh qismlar yig'indisini ayirib, natijada, ayirmada butun funksiya hosil qilishga urinib ko'rish mumkin. Lekin bu holda bosh qismlar

to'plami cheksiz bo'lgani uchun $\sum_{j=1}^{\infty} g_j(z)$ qatorning

yaqinlashishi to'g'risida, umuman, hech narsa aytib bo'lmaydi.

Lekin hamma vaqt shunday $h_j(z)$ ko'phadlarni tanlab olish mumkinki, natijada

$$\sum_{j=1}^{\infty} [g_j(z) - h_j(z)]$$

qator ixtiyoriy $|z| < R$ (agar bu doiradan unga tushgan qutblarni chiqarib tashlansa) doirada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Teorema 1.4.2.(Mittag-Leffler) Meromorf $f(z)$ funksiya uchun $z = z_j$ $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_j| \leq \dots$ nuqtalar qutblardan iborat bo'lib, bo'larga mos bosh qismlar $g_j(z)$ bo'lsin va

$$h_j^{(p)}(z) = g_j(0) + g_j'(0)z + \dots + \frac{g_j^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

ifodalar $g_j(z)$ larning z ning darajalari bo'yicha Teylor yoyilmalarining qismi bo'lsin. Bu holda, butun sonlarning shunday $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ ketma-ketligi va shunday butun funksiya

$h(z)$ mavjud bo'ladiki, bo'lar uchun barcha $z \neq z_j$ nuqtalarda ushbu

$$f(z) = h(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[g_j(z) - h_j^{(p_j)}(z) \right] \quad (1.4.1)$$

yoyilma o'rinli bo'ladi. (1.4.1) qator $f(z)$ funktsiya qutblarini o'z ichiga olmagan ixtiyoriy chekli $|z| \leq R$ doirada absolyut va tekis yaqanlashuvchi bo'ladi.

II-BOB. MODULYAR FUNKSIYALAR. KICHIK PIKAR TEOREMASI.

2.1. Konform izomorfizm. Avtomorfizm.

D_1 sohani D_2 ga akslantiruvchi konform akslantirish konform izomorfizm deyiladi, bunday akslantirishni qanoatlantiruvchi sohalar izomorf deyiladi. Sohani o'z-o'ziga akslantiruvchi izomorfizm avtomorfizm deyiladi.

Konform izomorfizmlar golomorf izomorfizm yoki avtomorfizmlar deyiladi. D ixtiyoriy soha bo'lsin. $\varphi : D \rightarrow D$ avtomorfizmlar to'plami bu sohada avtomorfizmlar gruppasini tashkil qiladi va $\Lambda(D)$ bilan belgilanadi. Gruppaviy amal sifatida $\varphi_2 \circ \varphi_1$ (ya'ni $\varphi_2(\varphi_1(z))$) avtomorfizm qabul qilinadi, birlik element bo'lib, $e : z \rightarrow z$ ayniy akslantirish, φ elementga teskari akslantirish bo'lib, $w = \varphi(z)$ ga teskari $z = \varphi^{-1}(w)$ akslantirish xizmat qiladi.

Teorema.2.1.1. Agar $f_0 : D_1 \rightarrow D_2$ biror tayinlangan izomorfizm bo'lsa, D_1 ni D_2 ga akslantiruvchi barcha izomorfizmlar gruppasi

$$f = \varphi \circ f_0 \quad (2.1.1)$$

formula bilan beriladi, bu yerda φ - D_2 sohaning ixtiyoriy avtomorfizmi.

Isbot. φ - avtomorfizm qanday bo'lmasin, $\varphi \circ f_0$ D_1 ni D_2 ga konform akslantirish bo'ladi. Boshqa tomondan $f : D_1 \rightarrow D_2$ - ixtiyoriy izomorfizm bo'lsin, u holda $\varphi = f \circ f_0^{-1}$ D_2 ni o'z-o'ziga

o`tkazuvchi konform akslantirish, ya'ni  $D_2$  dagi avtomorfizm bo`ladi, bundan (2.1.1) kelib chiqadi.

Izoh. D sohani D^* ga o`tkazuvchi istalgan  $f$  konform akslantirish bu sohada  $F: \Lambda(D) \rightarrow \Lambda(D^*)$  avtomorfizmlar gruppasini izomorfizmini o`rnatadi. Bu

$$F: \varphi \rightarrow f \circ \varphi \circ f^{-1} \quad (2.1.2)$$

formula bilan beriladi. O`z navbatida istalgan  $\varphi \in \Lambda(D)$  uchun  $\varphi^* \rightarrow f \circ \varphi \circ f^{-1}$  akslantirish  $D^*$  ning avtomorfizmini ifodalaydi, ya'ni  $\varphi^* \in \Lambda(D^*)$  bo`ladi. Boshqa tomondan istalgan $\varphi^* \in \Lambda(D^*)$ akslantirish uchun $f^{-1} \circ \varphi^* \circ f = \varphi \in \Lambda(D)$, ya'ni F akslantirish $\Lambda(D)$ ni $\Lambda(D^*)$ ga o`zaro bir qiymatli akslantiradi. Bundan tashqari

$$\varphi_1^* \circ \varphi_2^* = (f \circ \varphi_1 \circ f^{-1}) \circ (f \circ \varphi_2 \circ f^{-1}) = f \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ f^{-1},$$

ya'ni

$$F: \varphi_1 \circ \varphi_2 \rightarrow \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$$

gruppaviy amalni saqlaydi va shunday qilib, qaralayotgan gruppaning izomorfizmini ifodalaydi.

Teorema.2.1.2. *Kanonik sohada har qanday avtomorfizm uning kasr-chiziqli avtomorfizmini ifodolaydi.*

Isbot. φ - $\bar{\mathbb{C}}$ dagi ixtiyoriy avtomorfizm bo`lsin.

∞ nuqtaga $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ yagona nuqta mavjud, shuning uchun $\varphi(z)$ funksiya $\bar{\mathbb{C}}$ da qutb nuqtadan tashqari barcha joyda golomorf, $n \geq 2$ tartibli qutb atrofida funksiya bir yaproqli emas, binobarin,

$\varphi(z)$ funksiya z_0 nuqtada 1-tartibli qutbga ega. Funksiyaning qutb nuqta atrofidagi Loran qatori yoyilmasida bosh qism faqat chekli sondagi noldan farqli hadlarga ega bo'lishi va Lyuvill teoremasiga ko'ra $z_0 \neq \infty$ da $\varphi(z)$, $\varphi(z) = \frac{A}{z - z_0} + B$ yoki $z_0 = \infty$ da $\varphi(z) = Az + B$ ko'rinishga ega, shunday qilib, φ kasr chiziqli funksiyaning ifodalaydi. C ochiq tekislik bo'lgan hol shunga o'xshash qaraladi. φ -ixtiyoriy U birlik doira avtomorfizmi bo'lsin. $\varphi(0) = w_0$ bilan belgilaymiz va U doiraning w_0 nuqtasini 0 nuqtaga o'tkazuvchi

$$\lambda: w \rightarrow \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w}$$

kasr chiziqli avtomorfizmni quramiz. $f = \lambda \circ \varphi$ ham U ning avtomorfizmini ifodalaydi, shu bilan birga $f(0) = 0$. Barcha $z \in U$ uchun $|f(z)| < 1$ ligidan $f(z)$ funksiyaga Shvars lemmasini qo'llab, barcha $z \in U$ uchun $|f(z)| \leq |z|$ ni olamiz. Lekin $z = f^{-1}(w)$ teskari akslantirish ham bu lemma shartlarini qanoatlantiradi. Binobarin $\forall w \in U$ uchun $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ bu yerdan $w = f(z)$ deb olib $\forall z \in U$ uchun $|z| \leq |f(z)|$ ni topamiz. Demak, $\forall z \in U$ uchun $|f(z)| = |z|$ va Shvars lemmasiga ko'ra $f(z) = e^{i\alpha} z$. Lekin bu holda

$$\varphi = \lambda^{-1} \circ f = \lambda^{-1}(e^{i\alpha} z)$$

kasr chiziqli akslantirishni ifodalaydi. Kanonik elementlarning barcha avtomorfizmlarini keltiramiz.

1. $\bar{C}$ yopiq tekislik:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0 \quad (2.1.3)$$

2. C ochiq tekislik:

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1, \quad \alpha \in R. \quad (2.1.4)$$

Doira avtomorfizm to'g'risida batafsil to'xtalamiz. (5) formuladan ko'rinadiki, u uchta haqiqiy parametrغا bog'liq. Bu parametrlarni tanlab,

$$\lambda(a) = b, \quad \arg \lambda'(a) = \alpha \quad (2.1.5)$$

normallovchi shartlarni qanoatlantiruvchi faqat bitta avtomorfizm topish mumkinligini ko'rsatamiz, bu yerda $a, b \in U$ ixtiyoriy berilgan nuqtalar va $\alpha \in R$ ixtiyoriy son. O'z navbatida,

$$\mu: z \rightarrow e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad \text{va} \quad z \rightarrow \nu: z \rightarrow \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}$$

avtomorfizmlarni quramiz. U holda $\nu(w) = \mu(z)$ tenglikdan aniqlanuvchi $\lambda = \nu^{-1} \circ \mu$ avtomorfizm

$$\frac{w - b}{1 - \bar{b}w} = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \quad (2.1.6)$$

ni qanoatlantiradi. $\lambda_1 \in \Omega(U)$ - shu shartni qanoatlantiruvchi yana biror bir avtomorfizm bo'lsin. U holda $f = \nu \circ \lambda_1 \circ \mu^{-1}$ avtomorfizm $f(0) = 0$, $\arg f'(0) = 0$ ni qanoatlantiradi, Shvars lemmasiga ko'ra $f(w) = w$, ya'ni $f = e$ - ayniy akslantirish bo'ladi. Shunday qilib, $\nu \circ \lambda_1 \circ \mu^{-1} = e$, bu yerdan $\lambda_1 = \nu^{-1} \circ \mu = \lambda$.

Teorema.2.1.1. Agar D_1 va D_2 sohalar birlik doiraga izomorf bo'lsalar, D_1 ni D_2 ga konform akslantirishlar to'plami uchta haqiqiy parametrغا bog'liq. Xususan,

$$f(z_0) = w_0, \arg f'(z_0) = 0 \quad (2.1.7)$$

normallangan shartlarni qanoatlantiruvchi faqat va faqat bitta $f: D_1 \rightarrow D_2$ akslantirish mavjud, bunda $z_0 \in D_1$ va $w_0 \in D_2$ ixtiyoriy berilgan nuqta va $\theta \in \mathbb{R}$ - ixtiyoriy son.

Isbot. $f_1: D_1 \rightarrow U$ va $f_2: D_2 \rightarrow U$ berilgan sohalarni birlik doiraga akslantiruvchi konform akslantirish bo'lsin. U holda

$$f_0 = f_2^{-1} \circ f_1$$

D_1 ni D_2 konform akslantirishlarga 1- teorema ko'ra bunday akslantirishlar to'plami $f = \varphi \circ f_0$ formula bilan beriladi, bu yerda φ - D_2 sohaning ixtiyoriy avtomorfizmi, shu bilan birga $\Lambda(D_2)$ uchta haqiqiy parametrغا bog'liq.

$$f_1(z_0) = a, \arg f_1'(z_0) = \theta_1 \text{ va } f_2(w_0) = b, \arg f_2'(w_0) = \theta_2$$

bo'lsin. (7)-formula bo'yicha

$$\lambda(a) = b, \arg \lambda'(a) = \alpha = \theta + \theta_2 - \theta_1$$

normallangan shartli λ birlik doira avtomorfizmini quramiz. U holda $f = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_1$ D_1 ni D_2 ga akslantiruvchi akslantirish izomorfizm bo'ladi va (2.1.7) shartni qanoatlantiradi. O'z navbatida, $f(z_0) = f_2^{-1} \circ \lambda(a) = f_2^{-1}(b) = w_0$

$$\arg f'(z_0) = -\arg f_2'(w_0) + \arg \lambda'(a) + \arg f_1'(z_0) = -\theta_2 + \alpha + \theta_1 = \theta.$$

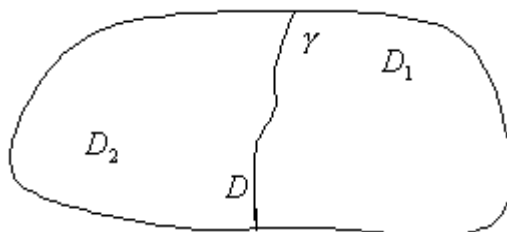
Normalangan izomorfizmning mavjudligi isbotlandi. Xuddi shunday shartli $g: D_1 \rightarrow D_2$ izomorfizm mavjud bo'lsin. U holda $\varphi(w_0) = w_0$, $\arg \varphi'(w_0) = 0$ shartli, $\varphi = f \circ g^{-1}$ D_1 da avtomorfizm bo'ladi, U da $\lambda = f_2 \circ \varphi \circ f_2^{-1}$, $\lambda(b) = b$, $\arg \lambda'(b) = 0$ normalangan shartli avtomorfizm bo'ladi. Yuqoroda isbotlangani kabi $\lambda = e$, binobarin $\varphi = f_2^{-1} \circ \lambda \circ f_2 = e$ shunday qilib,

$$f \circ g^{-1} = e \text{ va } f = g.$$

2.2. Simmetriya printsipi

Golomorf funktsiyalarning aniqlanish sohalarini mumkin qadar kengaytirish va bu kengaytirilgan sohalarda funktsiyalarni analitik davom ettirishning turlicha usullari mavjud. Sohalarning simmetrikligidan ham foydalanib funktsiyalarni analitik davom ettirish mumkin. Bu usul analitik davom ettirish masalasini hal etishni birmuncha engillashtiradi.

Faraz qilaylik, kompleks tekislikdagi chegaralangan D soha γ egri chiziq yordamida D_1 va D_2 sohalarga ajralgan bo'lsin:



1-rasm

Lemma.2.2.1. Agar $f(z)$ funktsiya D_1 va D_2 sohalarning har birida golomorf bo'lib $\overline{D_1}$ va $\overline{D_2}$ da uzluksiz bo'lsa, u holda $f(z)$ funktsiya D sohada golomorf bo'ladi.

Quyidagi

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (2.2.1)$$

Koshi tipidagi integralni qaraylik. Ravshanki, $F(z)$ funktsiya D sohada golomorf bo'lib,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

bo'ladi. Demak,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (2.2.2)$$

Agar $\forall z \in D$ uchun $F(z) = f(z)$ bo'lsa, unda lemma isbotlanadi, Aytaylik, $z \in D_1$ bo'lsin. U holda Koshining integral formulasiga ko'ra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \quad \text{va} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$$

bo'lib, $\forall z \in D_1$ uchun $F(z) = f(z)$ bo'ladi.

SHunga o'xshash, $\forall z \in D_2$ bo'lganda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 \quad \text{va} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z)$$

bo'lib, $F(z) = f(z)$ bo'ladi.

Natijada, $f(z)$ funktsiyaning D sohada uzluksizligini e'tiborga olsak, $\forall z \in D$ uchun $F(z) = f(z)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $f(z)$ funktsiya D sohada golomorf

Faraz qilaylik, D_1 va D_2 sohalar umumiy nuqtaga ega bo'lmay, ular uchun γ egri chiziq umumiy chegara bo'lsin (1-rasm). U holda isbotlangan lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija.2.2.1. Aytaylik, $f_1(z)$ va $f_2(z)$ funktsiyalar mos ravishda D_1 va D_2 da golomorf bo'lib, $\overline{D_1}$ va $\overline{D_2}$ da esa uzuluksiz bo'lsin.

Agar $z \in \gamma$ da $f_1(z) = f_2(z)$ bo'lsa, u holda

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \gamma \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

funktsiya $f_1(z)$ funktsiyaning D_1 sohadan $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ sohaga analitik davomi bo'ladi.

Bunday holda, $f_2(z)$ funktsiya γ egri chiziq orqali $f_1(z)$ funktsiyaning D_1 sohadan D_2 sohaga analitik davomi deyiladi.

Faraz qilaylik, D ($D \subset \mathbb{C}$) soha chegarasining biror qismi haqiqiy o'qdagi γ intervaldan iborat bo'lsin. D^* esa D sohaning haqiqiy o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan sohasini ifodalasin (1-rasm).

Teorema.2.2.1 (Riman-SHvarts) Aytaylik, $f(z)$ funktsiya D sohada golomorf bo'lib, $\bar{D}$ da uzluksiz bo'lsin. Agar $f(z)$ funktsiya γ intervalda haqiqiy qiymatlarni qabul qilsa, unda uni $D \cup \gamma \cup D^*$ sohaga analitik davom ettirish mumkin.

Analitik davom ushbu

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \cup \gamma \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^* \end{cases} \quad (2.2.3)$$

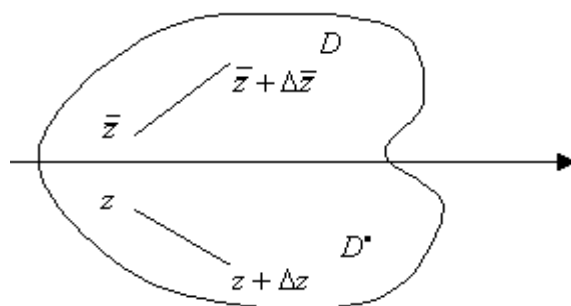
funktsiya yordamida bajariladi.

Isbot. D sohada golomorf bo'lgan $f(z)$ funktsiyaga ko'ra tuzilgan ushbu

$$f_1(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad (z \in D^*) \quad (2.2.4)$$

funktsiya D^* sohaning har bir z nuqtasida $f_1'(z)$ hosilaga ega bo'ladi. SHuni ko'rsatamiz:

Ma'lumki, $z \in D^*$ va $z + \Delta z \in D^*$ bo'lganda $\bar{z} \in D, \bar{z} + \overline{\Delta z} \in D$ bo'ladi. (Δz ni etarlicha kichik qilib olish mumkin) (2-rasm).



2-rasm

Ravshanki,

$$\frac{f_1(z + \Delta z) - f_1(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f(\bar{z} + \Delta \bar{z})} - \overline{f(\bar{z})}}{\Delta z} = \left[\frac{\overline{f(\bar{z} + \Delta \bar{z}) - f(\bar{z})}}{\Delta \bar{z}} \right]$$

Bu tenglikda $\Delta z \rightarrow 0$ da limitga o'tib, $f_1'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$ bo'lishini topamiz.

Demak, $f_1(z)$ funktsiya D^* sohada golomorf bo'ladi. (2.2.3) tenglik bilan aniqlangan $F(z)$ funktsiya $D \cup \gamma \cup D^*$ sohada uzluksiz bo'ladi. $x \in \gamma$ uchun $\lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x)$ bo'lib, $\lim_{z \rightarrow x} f_1(z) = \lim_{z \rightarrow x} \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x)}$ bo'ladi.

Agar $f(x) = \overline{f(x)}$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$f_1(z) \Big|_{z \in \gamma} = f(z) \Big|_{z \in \gamma}$$

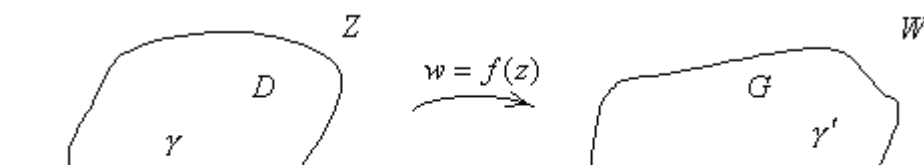
ekanligini topamiz.

Demak, $F(z)$ funktsiya $D \cup \gamma \cup D^*$ sohada golomorf bo'lib yuqorida keltirilgan lemmaga binoan, u $f(z)$ funktsiyaning analitik davomi bo'ladi .

Xulosa. YUqoridagi teoremaning shartlari bajarilganda , (2.2.4) tenglik bilan aniqlangan $f_1(z)$ funk-tsiya $f(z)$ funktsiyaning D sohadan D^* sohaga γ orqali analitik davomi bo'ladi.

Aytaylik, D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan $f(z)$ funktsiya isbot etilgan teoremaning shartlarini qanoatlantirishi bilan birga quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

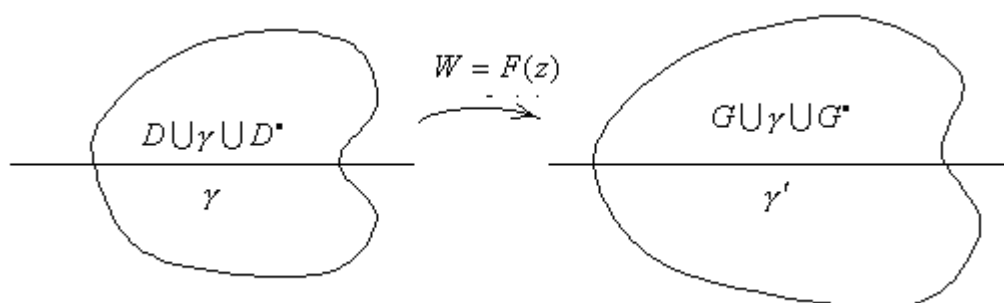
- 1) $w = f(z)$ funktsiya D sohani yuqori yarim tekislik $\text{Im } w > 0$ dagi G sohaga konform akslantirsin.
- 2) $w = f(z)$ funktsiya haqiqiy o'qdagi γ intervalni $\text{Im } w = 0$ haqiqiy o'qdagi G soha chegarasining bir qismi bo'lgan γ' intervalga akslantirsin. (3-rasm).



3-rasm

U holda isbotlangan teoremdan ushbu natija kelib chiqadi.

Natija.2.2.2. (2.2.3) ifoda bilan aniqlangan $w = F(z)$ funktsiya $\mathbb{C}_z$ tekislikdagi $D_0 = D \cup \gamma \cup D^*$ sohani $\mathbb{C}_w$ tekislikdagi $G_0 = G \cup \gamma' \cup G^*$ sohaga konform akslantiradi. Bunda G^* soha G sohaning $\text{Im } w = 0$ haqiqiy o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan sohasini ifodalydi (4-rasm).



4-rasm

Odatda keyingi natija simmetriya printsipi deyiladi.

Izoh. Yuqorida isbotlangan Riman-SHvarts teoremasi va 2-natija γ va γ' lar aylana yoylaridan iborat bo'lgan holda ham o'rinli bo'ladi, ya'ni quyidagi tasdiq to'g'ri:

Faraz qilaylik, $f_1(z)$ funktsiya D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan hamda shu sohada konform bo'lsin. Bunda D sohaning chegarasi ∂D ning bir qismi γ ($\gamma \subset \partial D$) aylana yoyi yoki to'g'ri chiziq kesmasidan iborat.

Bu $f_1(z)$ akslantirish D sohani G sohaga, γ chiziqni G chiziqqa (G - aylana yoyi yoki to'g'ri chiziq kesmasi) akslantirsin:

$$G = f_1(D),$$

$$\Gamma = f_1(\gamma).$$

D sohaning γ yoyga nisbatan simmetrik bo'lgan sohasi D^* , G sohaning Γ yoyga nisbatan simmetrik bo'lgan sohasi esa G^* bo'lsin. $f_2(z)$ funktsiyani D^* sohada shunday aniqlaymizki, uning qiymatlari $f_1(z)$ funktsiyaning G dagi qiymatlariga G yoyga nisbatan simmetrik bo'lgan qiymatlarni qabul qilsin. (Agar γ va Γ lar haqiqiy o'qdagi kesmalar bo'lsa, u holda $f_2(z)$ funktsiya ushbu $f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$ tenglik yordamida aniqlanadi). U holda $f_2(z)$ funktsiya D^* ni G^* ga, ushbu

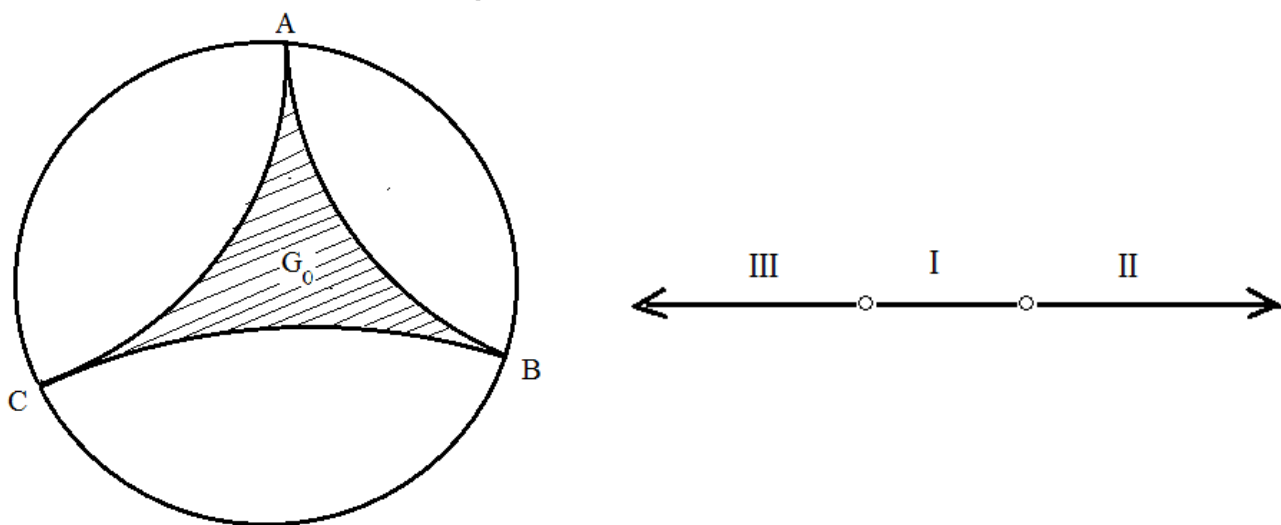
$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{agar } z \in D \text{ bo'lsa,} \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{agar } z \in \gamma \text{ bo'lsa,} \\ f_2(z), & \text{agar } z \in D^* \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funktsiya esa $D \cup \gamma \cup D^*$ sohani $G \cup \Gamma \cup G^*$ sohaga konform akslantiradi (4-rasm).

Bu tasdiqni isbotlash uchun avval γ va Γ aylana yoylarini kasr-chiziqli akslantirish yordamida haqiqiy o'qdagi intervallarga akslantirib olish va keyin kasr-chiziqli akslantirish uchun simmetriyaning saqlanish xossasi hamda yuqorida keltirilgan Riman-SHvarts teoremasidan foydalanish etarli.

2.3. Shvartsning modulyar funksiyasi.

Birlik aylana ustida uchta A, B, C nuqtalarni tanlab olamiz ularni ketma-ket ravishda birlik aylanaga ortogonal bo'lgan aylanalar yoylari bilan tutashtirib chiqamiz(1-rasm). Bu yoylar burchaklari nol gradusni tashkil etuvchi G_0 aylanaviy uchburchakli sohani chegaralab turadi. G_0 sohani yuqori yarim tekislikka shunday konform akslantiramizki, bunda A, B va C nuqtalar mos ravishda $0, 1$ va ∞ nuqtalarga o'tsin va $\widehat{AB}, \widehat{BC}$ va $\widehat{CA}$ yoylar haqiqiy o'qning $[0, 1], [1, +\infty]$ va $[-\infty, 0]$ oraliqlariga akslansin. Ularni mos ravishda I, II, III orqali belgilaymiz.

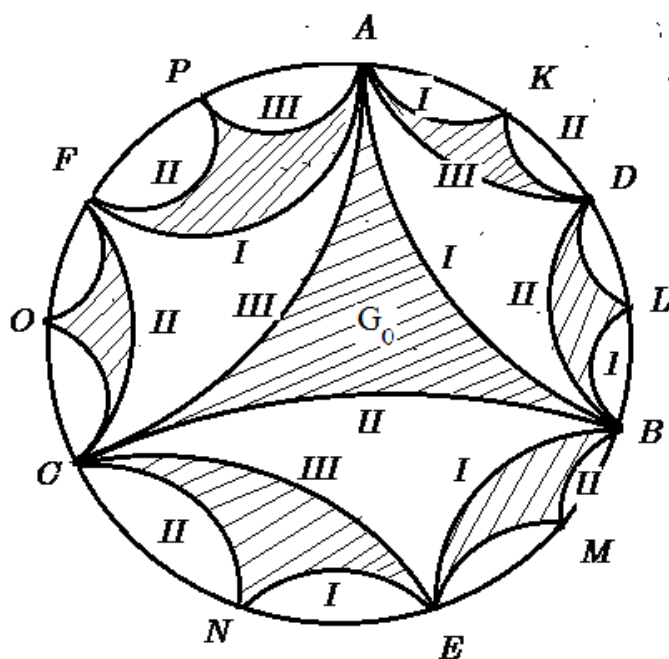


1-rasm

$w = \psi(z)$ funksiya bu akslantirishni amalgam oshiruvchi akslantirish bo'lsin. Bu funksiya G_0 sohaga nisbatan Riman-Shvartsning simmetriya prinsipini qo'llaymiz. Bunga asosan $w = \psi(z)$ funksiya $\widehat{AB}, \widehat{BC}$ va $\widehat{CA}$ yoylarning har biri orqali mos ravishda burchaklari nol bo'lgan ABD, BCE va ACF

uchburchakli sohalarga analitik davom etib bu uchburchaklardagi qiymatlari pastki yarim tekislikka tushadi(2-rasm). Endi yana o'sha davom ettirilgan funksiya va har bir ABD , BCE va ACF uchburchakli sohalarga nisbatan alohida simmetriya prinsipini qo'llaymiz va $w = \psi(z)$ funksiyaning AD , DB , BE , EC , CF , AF tomonlar orqali ADK , DBL , BEM , ECN , CFO , FAP uchburchakli sohalarga analitik davom ettiramiz(2-rasm). Bularning har birida funksiya yuqori yarim tekislikni to'ldiruvchi qiymatlar to'plamiga ega bo'ladi. Ushbu jarayonni cheksiz davom qildiradigan bo'lsak, berilgan funksiya butun birlik doira ichkarisida aniqlangan funksiya gacha analitik davom etadi.

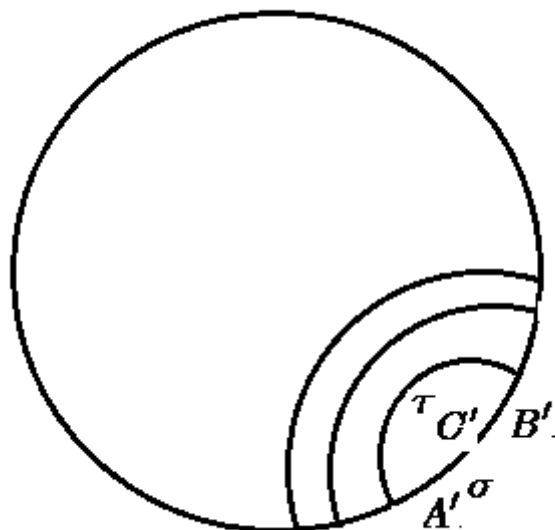
Aslida berilgan funksiya yuqoridagi jarayonni chekli marta qo'llash natijasida berilgan funksiya tomonlari birlik aylanaga orthogonal aylana yoylaridan tashkil topgan ko'pburchakkacha analitik davom etadi. Masalan avvalo ABC uchburchak, keyin $ADBECF$ oltiburchak keyin o'n ikkiburchak va hokazo(2-rasm).



2-rasm

Birlik doiraning istalgan bir nuqtasi biror chekli sondagi amalga oshirilgan analitik davomdan keyin hisil qilingan ko'pburchak ichiga tushishini ko'rsatish uchun ko'p burchak yoylari tiralayotgan birlik aylanamiz yoylari uzunligi ko'pburchak tomonlari cheksiz ortib borgani sayin nolga intilib borishini ko'rsatishimiz yetarli bo'ladi. Bu esa o'z navbatida birlik aylananing istalgan nuqtasi ko'pburchak uchlaridan iborat nuqtalar to'lamini uchun limit nuqta bo'lishidan kelib chiqadi. Faraz qilaylik aksincha bo'lsin, ya'ni birlik aylananing ko'pburchaklarni qo'shni uchlarini tutashtiruvchi ichma-ich joylashgan shunday $\{\sigma_n\}$ yoylar ketma-ketligi topilib, bu ketma-ketlik birorta ham ko'pburchak uchlarini o'zida saqlamaydigan σ yoyga yaqinlashadi.

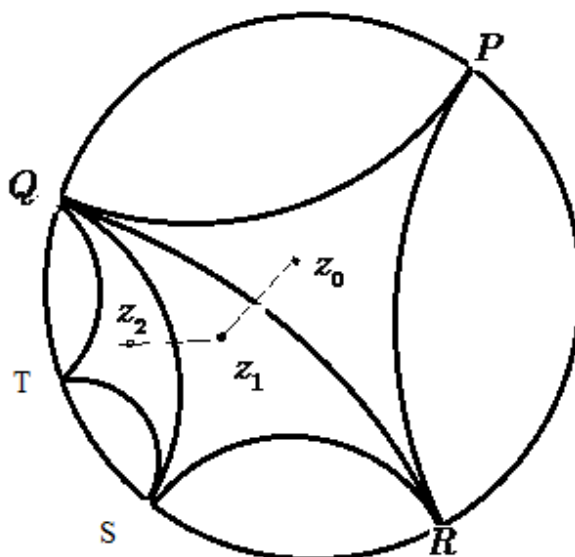
Bu σ yoy ohirlarini birlik aylanaga ortogonal aylana yoyi τ bilan birlashtiramiz. τ ga nisbatan simmetrik almashtirishni qo'llab, σ da A, B, C nuqtalarga simmetrik A', B', C' nuqtalarni topamiz (3-rasm). Endi bu nuqtalarni σ_n yoyga nisbatan A'_n, B'_n, C'_n simmetrik nuqtalarini topamiz. Yetarlicha katta n larda A'_n, B'_n, C'_n obrazlar A', B', C' obrazlarga yaqinlashib boradi natijada ulardan birortasi σ yoy ichiga tushib qoladi. Bu ziddiyat $\psi(z)$ funksiyani haqiqatan ham birlik doirgacha davom qilishini isbotlaydi. Bu funksiya bir qiymatlidir.



3-rasm

Yuqorida qurilgan $\psi(z)$ analitik funksiya birlik doirada aniqlangan va $0, 1$ va ∞ nuqtalardan boshqa barcha qiymatlarni cheksiz martadan qabul qiluvchi funksiya bo'ldi. Bundan tashqari yuqori yarim tekislikdagi qiymatlar 2-rasmda shtrixlangan sohalarda, quyi tekislikdagi qiymatlar esa shtrixlanmagan sohalarda qabul qilinadi. $(0, 1)$, $(1, \infty)$ va $(-\infty, 0)$ oraliqlaragi haqiqiy qiymatlar esa uchburchaklarning I, II, III kabi belgilangan tomonlarida erishiladi. (3-rasm).

Simmetriya prinsipiga asosan ABC uchburchakning simmetrik akslantirishlar ketma-ketligi natijasida hosil bolgan biror PQR uchburchak z_0 nuqtasining QR ga nisbatan obrazi bo'lgan z_1 nuqtadagi funksiyaning $\psi(z_1)$ qiymati $\psi(z_0)$ qiymatning qo'shmasidan iborat bo'ladi (4-rasm): $\overline{\psi(z_0)} = \psi(z_1)$. Boshqa bir masalan QS ga nisbatan simmetrik obrazi z_2 nuqtaga olib keladi va $\psi(z_2) = \overline{\psi(z_1)} = \psi(z_0)$ tenglik o'rinli bo'ladi.



4-rasm

Demak ikki marotaba akslantirish natijasida funksiya qiymatlari oldingi holatga qaytadi. Lekin birlik doirani ortogonal aylanaga nisbatan simetrik akslantirishdan iborat bo'lgan har qanday inversiyasi, kasr chiziqli akslantirishning qo'shmasi orqali ifodalanadi. Shuning uchun ikki karrali akslantirish ya'ni ikkita akslantirish ko'paytmasi birlik doirani o'zini o'ziga akslantiruvchi

biror $z_2 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d}$ kasr-chiziqli funksiya bilan aniqlanadi. Natijada

$\psi\left(\frac{az_0 + b}{cz_0 + d}\right) = \psi(z_0)$ munosabat bajariladi. Ketma-ket keluvchi turli

obrazlarga turli kasr-chiziqli funksiyalar mos keladi. Shuning uchun birlik doirani o'z-o'ziga akslantiruvchi cheksiz ko'p kasr-chiziqli akslantirishlar mavjud bo'lishi kerak

$$\left\{ L_n[z] = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \right\}$$

va har bir natural n va istalgan $z, |z| < 1$ uchun

$\psi\left(\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}\right) = \psi(z)$ tenglik bajarilishi kerak. Bu nuqtai nazardan

yuqorida qurilgan $\psi(z)$ Shvartsning modulyar funksiyasi avtomorf funksiyalarning hususiy holini ifoda etadi. Avtomorf funksiyalar birlik doiraning biror avtomorfizmlar gruppasiga nisbatan invariant bo'lgan analitik funksiyalar hisoblanadi. Masalan oddiygina faqat parallel ko'chirishga nisbatan invariant funksiyalar davriylik hususiyatini aks ettiradi.

$w = \psi(z)$ funksiya birlik doirani yuqori va quyi yarim tekisliklarning cheksiz sondagi nushalaridan iborat Riman sirtiga akslaniradi. Bunda har bir yuqori(quyi) yarim tekislik pastki (yuqorigi) uchta yarim tekisliklar bilan haqiqiy o'qning I, II, III oraliqlari bo'yicha tutashgan bo'ladi. Bu sirt ustida berilgan funksiya teskarisi bir qiymatli analitik funksiya bo'lib moduli bo'yicha chegaralangan bo'ladi. Biz bu teskari funksiyaning kompleks o'zgaruvchili funksiya sifatida qarab $\omega(w)$ orqali belgilasak u holda $0, 1, \infty$ nuqtalardan o'tmaydigan istalgan egri chiziq bo'yicha analitik davom etuvchi ko'p qiymatli analitik funksiya bo'ladi. Bu ko'p qiymatli orasida ABC va ADB uchburchak ichiga tushuvchi qiymatlarini $\omega(w)$ ni bosh qiymatlari deymiz.

2.4. Pikarning kichik teoremasi.

Teorema.2.4.1. (Pikar). *O'zgarmasdan farqli har qanday butun funksiya kompleks tekislikdagi bitta nuqtadan boshqa barcha chekli nuqtalarni qiymat sifatida qabul qiladi.*

Isboti. Faraz qilaylik $f(z)$ butun funksiya ikkita turli $a, b \in \mathbb{C}$ nuqtalarni qiymat sifatida qabul qilmasin. U holda ushbu funksiya

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

Ham butun funksiya bo'lib 0 va 1 qiymatlarni qabul qilmaydi. $z_0 \in \mathbb{C}$ ixtiyoriy nuqta uchun $w_0 = g(z_0)$ nuqta atrofida golomorf bo'lgan μ modulyar funksiyaning olib, μ^{-1} teskari funksiyasining biror bir qiymatli tarmog'ini qaraymiz. Agar biz $\varphi = \mu^{-1}(g(z))$ funksiyaning qarasak, $g(z)$ funksiya μ^{-1} funksiya uchun maxsus nuqtalar hisoblangan 0, 1 va ∞ qiymatlarni qabul qilmagani uchun φ funksiya istalgan $\gamma \subset \mathbb{C}$ egri chiziqli bo'ylab analitik davom qiladi. $\mathbb{C}$ bir bog'lamli ekanidan monodromiya haqidagi teorema asosan, φ funksiya $\mathbb{C}$ da golomorf bir qiymatli funksiya bo'ladi, ya'ni butun funksiya bo'ladi. Lekin μ^{-1} ni barcha qiymatlari birlik doira ichida bo'ladi va natijada φ chegaralangan funksiya bo'ladi. Liuvill teoremasidan bu funksiya o'zgarmas funksiya bo'lishi kelib chiqadi. U holda $g(z)$ va demak $f(z)$ funksiya ham o'zgarmasdir. Bu holat teorema shartiga zid bo'lgani uchun farazimiz noto'g'ri ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Yuqoridagi Pikar teoremasini meromorf funksiyalar uchun quyidagicha umumlashtirish mumkin:

Teorema.2.4.2. (Pikar). Butun kompleks tekislik $\mathbb{C}$ da o'zgarmasdan farqli har qanday meromorf funksiya $\bar{\mathbb{C}}$ kompleks tekislikdagi ikkita nuqtadan boshqa barcha nuqtalarni qiymat sifatida qabul qiladi.

Isboti. Faraz qilaylik $f(z)$ meromorf funksiya uchta turli $a, b, c \in \mathbb{C}$ nuqtalarni qiymat sifatida qabul qilmasin. Bu nuqtalarni barchasini

chekli deb faraz qilishimiz mumkin. Aks holda birortasi ∞ bo'lsa u holda $f(z)$ butun funksiya bo'lib, yuqorida isbot qilinganidek bu funksiya o'zgarmas bo'lgan bo'lar edi. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$

Bu funksiya utun funksiya bo'lib $\frac{1}{a - c}$ va $\frac{1}{b - c}$ qiymatlarni qabul qilmaydi. Yuqorida isbo qilingan 1-teoremadan $g(z)$ va demak $f(z)$ funksiya ham o'zgarmasdir. Bu holat teorema shartiga zid bo'lgani uchun farazimiz noto'g'ri ekan. Teorema isbot bo'ldi.

III-BOB. ANALITIK FUNKSIYALAR NORMAL OILASI. KATTA PIKAR TEOREMASI.

3.1. Montel teoremasi.

Kompaktlik printsipli

$D \subset \mathbb{C}$ sohada aniqlangan funtsiyalardan iborat $\{f(z)\}$ funktsiyalar sistemasi berilgan bo'lib, K to'plam D sohada joylashgan chegaralangan yopiq (kompakt) to'plam bo'lsin: $K \subseteq D$

Ta'rif 3.1.1. Agar $\forall K \subseteq D$ uchun shunday o'zgarmas son $M = M(K)$ topilsaki, $\{f(z)\}$ sistemaning har bir $f(z)$ funktsiyasi uchun ixtiyoriy $z \in K$ da

$$|f(z)| \leq M$$

tengsizlik bajarilsa, unda $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis chegaralangan deyiladi.

Teorema.3.1.1. Agar D sohada golomorof funtsiyalardan iborat $\{f(z)\}$ sistema D da tekis chegaralangan bo'lsa, u holda funktsiya hosilalaridan iborat $\{f'(z)\}$ sistema ham D sohada tekis chegaralangan bo'ladi.

Isbot. D sohada kompakt joylashgan ixtiyoriy

$$U = \{z - z_0| < r\} \quad (U \subseteq D)$$

doirani olib, radiusi $r', r' > r$ bo'lgan va ayni paytda D sohada kompakt joylashgan ushbu

$$V = \{z - z_0| < r'\} \quad (V \subseteq D)$$

doirani qaraymiz.

Aytaylik, $f(z)$ funktsiya $\{f(z)\}$ sistemaning ixtiyoriy funktsiyasi bo'lsin. $\forall z \in V$ da funktsiyaning hosilasi $f'(z)$ Koshi formulasiga ko'ra

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \quad (3.1.1)$$

bo'ladi.

Ravshanki, $z \in U$ bo'lsa, unda $\forall t \in \partial V$ uchun $|t-z| \geq r' - r$ tengsizlik bajariladi.

Endi $\{f(z)\}$ sistemaning tekis chegaranganligini e'tiborga olib $\forall z \in U$ uchun (3.1.1) munosabatdan topamiz:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt \right| \leq \frac{r'}{(r'-r)^2} M(V) = M_1(U).$$

Bu esa $\{f'(z)\}$ sistemaning U doiralarda tekis chegaralarlanganligini bildiradi.

Ma'lumki, D sohadagi kompakt K to'plamni ($K \subseteq D$) shu sohada kompakt joylashgan doiralar sistemasi $\{U\}$ bilan qoplash mumkin. Geyne-Borel teoremasiga binoan bu $\{U\}$ sistemadan K to'plamni qoplovchi chekli sondagi $U_1, U_2, U_3, \dots, U_k$ doiralarni ajratish mumkin.

Agar

$$M_1(K) = \max_i M_1(U_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

deyilsa, unda $\forall z \in K$ va

$$\forall f(z) \in \{f(z)\} \quad \text{uchun} \quad |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

$|f'(z)| \leq M_1(K)$ bo'ladi.

Ta'rif 3.1.2. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son va $\forall K (K \subset D)$ to'plam uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ topilsaki, $|z' - z''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $z', z'' \in K$ va $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun

tengsizlik bajarilsa , u holda $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis darajada uzluksiz deyiladi .

Teorema.3.1.2. Agar D sohada golomorf $\{f(z)\}$ sistema D da tekis chegaralangan bo'lsa ,u holda $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis darajali uzluksiz bo'ladi .

Isbot. Aytaylik, ixtiyoriy kompakt $K \subseteq D$ bo'lsin. Teoremaning shartiga binoan, $\forall z \in K$, $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun $|f(z)| < M(K)$ bo'ladi.

Endi K va ∂D to'plamlar orasidagi masofa ρ bo'lsin ;

$$\inf |t - z| = \rho , \quad (\forall z \in K, \forall t \in \partial D) .$$

SHuningdek, markazi $z \in K$ nuqtalarda bo'lgan $\left\{ |\xi - z| < \frac{\rho}{2} \right\}$

doiralarning birlashmasini quyidagicha belgilaymiz:

$$K^{(\rho)} = \bigcup_{z \in K} \left\{ |\xi - z| < \frac{\rho}{2} \right\}$$

Ravshanki, bu to'plam D sohada kompakt joylashgan bo'ladi: $K^{(\rho)} \subseteq D$. Unda 1-teoremaga muvofiq shunday o'zgaras M topiladiki, $\forall z \in K^{(\rho)}$ va $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun $|f'(z)| \leq M$ bo'ladi.

Endi $|z' - z''| < \frac{\rho}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi va K to'plamga tegishli ixtiyoriy z' va z'' nuqtalarni olamiz. Bu nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi $[z', z'']$ $K^{(\rho)}$ to'plamga tegishli bo'lib, $\forall z \in [z', z'']$ hamda $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun $|f'(z)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. SHuni e'tiborga olib topamiz:

$$|f(z') - f(z'')| = \left| \int_{[z', z'']} f'(z) dz \right| \leq \int_{[z', z'']} |f'(z)| |dz| \leq M \cdot |z' - z''|$$

Demak, $\forall \varepsilon > 0$ ga ko'ra $\delta = \min\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\varepsilon}{M}\right)$ deyilsa, unda $|z' - z''| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $z', z'' \in K$ va ixtiyoriy $f(z) \in \{f(z)\}$ uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\{f(z)\}$ sistemaning D sohada tekis darajada uzluksiz bo'lishini bildiradi.

Ta'rif 3.1.3. Agar $\{f(z)\}$ sistemadagi har bir $f_n(z)$ funktsiyalar ketma-ketligidan D sohadagi kompakt K to'plamda tekis yaqinlashuvchi qismaniy $f_{n_k}(z)$ ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, u holda $\{f(z)\}$ sistema D sohada kompakt sistema deyiladi.

Teorema.3.1.3. (Montel) Agar D sohada golomorf bo'lgan $\{f(z)\}$ funktsiyalar sistemasi D sohada tekis chegaralangan bo'lsa, unda u D da kompakt sistema bo'ladi.

Isbot. E to'plam D ga qism bo'lib ($E \subset D$), u hamma erda zich to'plam bo'lsin, ya'ni $\bar{E} \supset D$.

Aytaylik, $f_n(z) \in \{f(z)\}$ ketma-ketlik $\forall z \in E$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda bu $f_n(z)$ ketma-ketlik D sohadagi ixtiyoriy kompakt K to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. SHuni isbotlaymiz.

$\varepsilon > 0$ son va K ($K \subset D$) to'plamni tayinlaymiz. SHartga ko'ra $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis chegaralangan. Binobarin, u 2-teoremaga ko'ra D sohada tekis darajada uzluksiz bo'ladi.

D sohani tomonlari koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvi $\{(d_i)\}$ kvadratlarga ajratamiz. $\{f(z)\}$ sistema D sohada tekis darajada uzluksiz bo'lgani uchun D sohaning bu bo'laklanishini shunday kichik qilib olish mumkinki, K to'plamga tegishli bo'lgan har qanday z', z'' nuqtalar ($z', z'' \in K$) bitta (d_i) kvadratga tegishli bo'lganda, $\forall f(z) \in \{f(z)\}$ uchun

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.1.2)$$

bo'ladi.

Ayni paytda bunday kvadratlarning chekli $(d_1), (d_2), \dots, (d_p)$ sonlagisi K to'plamni qoplaydi.

E to'plam D ning hamma erida zich. Binobarin, har bir (d_i) ($i=1,2,\dots,p$) kvadratda $z_i \in E$ bo'lgan nuqta topiladi. $f_n(z)$ ketma-ketlik E to'plamda yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli, $\frac{\varepsilon}{3}$ ga ko'ra shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0, \forall m > n_0$ va $z_i (i=1,2,\dots,p)$ da

$$|f_m(z_i) - f_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.1.3)$$

tengsizlik bajariladi.

Aytaylik, z nuqta K to'plamga tegishli bo'lgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Bu nuqta albatta yuqorida aytilgan kvadratlarning biri (d_i) ga tegishli bo'ladi. Ayni paytda shu (d_i) kvadratga tegishli bo'lgan $z_i \in E$ nuqta mavjud bo'ladi. Shularni hamda (3.1.2) va (3.1.3) munosabatlarni e'tiborga olib, $n > n_0, m > n_0$ bo'lganda

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_n(z_i)| + |f_m(z_i) - f_n(z_i)| + \\ &+ |f_n(z_i) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

bo'lishni topamiz. Bu esa $f_n(z)$ ketma-ketlikning K to'plamda tekis yaqinlashishini bildiradi.

Endi ixtiyoriy $f_n(z) \subset \{f(z)\}$ ketma-ketlikdan D sohaga tegishli va uning hamma erida zich bo'lgan E to'plam ($E \subset D$) nuqtalarida yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkinligini ko'rsatamiz.

E to'plam sifatida D sohaning x va y koordinatalari ratsional sonlar bo'lgan $z = x + iy$ nuqtalari to'plamini olamiz.

$$E = \{z = x + iy \in D : x \in Q, y \in Q\}$$

Ravshanki, bu E to'plam sanoqli va D ning hamma erida zich bo'ladi. Demak,

$$E = (z_1, z_2, z_3, \dots)$$

$f_n(z_1)$ ketma-ketlik chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi. Binobarin, undan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Uni

$$f_{k1} = f_{n_k}, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

deylik. $f_{n1}(z_2)$ ketma-ketlik chegaralangan. Undan ham yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Uni

$$f_{k2} = f_{n_{k1}}, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

deylik.

Bunda $f_{n2}(z)$ funktsional ketma-ketlik hech bo'lmaganda z_1 va z_2 nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'ladi.

$f_{n2}(z_3)$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lib, undan yaqinlashuvchi

$$f_{k3} = f_{n_{k2}}, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikni ajratish mumkin bo'ladi. Bunda $f_{n3}(z)$ funktsional ketma-ketlik hech bo'lmaganda z_1 , z_2 va z_3 nuqtalarda yaqinlashuvchi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ushbu

$$f_{11}(z), f_{21}(z), f_{31}(z), \dots, f_{n1}(z), \dots$$

$$f_{12}(z), f_{22}(z), f_{32}(z), \dots, f_{n2}(z), \dots$$

.....

$$f_{1n}(z), f_{2n}(z), f_{3n}(z), \dots, f_{nn}(z), \dots$$

.....

funksional ketma-ketliklar hosil bo'ladi. Uning diagonallarida turganlaridan tuzilgan

$$f_{11}(z), f_{22}(z), f_{33}(z), \dots, f_{nn}(z), \dots$$

funksional ketma-ketlik ixtiyoriy $z_i \in E$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

SHunday qilib $f_n(z) \in \{f(z)\}$ ketma-ketlikdan $K \subseteq D$ da tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratilishi ko'rsatildi. Demak, $\{f(z)\}$ sistema D sohada kompakt bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Odatda bu teorema kompaktlik printsipli deyiladi. Endi kelgusida kerak bo'ladigan ba'zi tushunchalarni keltiramiz, tasdiqlarni esa bayon etamiz.

Aytaylik D sohada $\{f(z)\}$ funktsiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Ta'rif 3.1.4. Agar har bir $f(z) \in \{f(z)\}$ ga biror qonunga ko'ra bitta kompleks son $I(f)$ mos qo'yilgan, ya'ni $I: \{f(z)\} \rightarrow \mathbb{C}$ bo'lsa, u holda $\{f(z)\}$ da funktsional berilgan deyiladi.

Agar ixtiyoriy $K \subseteq D$ da $f_0(z) \in \{f(z)\}$ ga tekis yaqinlashadigan $\forall f_n(z) \in \{f(z)\}$ olinganda ham,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = I(f_0)$$

bo'lsa, u holda I funktsional $\{f(z)\}$ da uzluksiz deyiladi.

Misol. D sohada holomorf bo'lgan barcha funktsiyalardan iborat $\{f(z)\}$ sistemani va ixtiyoriy $a \in D$ nuqtani olaylik. Ma'lumki, $f(z) \in \{f(z)\}$ funktsiyaning a nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyilmasining n -koeffitsienti

$$c_n(f) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

bo'ladi. Bu $\{f(z)\}$ da aniqlangan funktsional bo'ladi. Bu $I = s_n(f)$ funktsional $\{f(z)\}$ da uzluksiz bo'ladi.

Ta'rif 3.1.5. Agar har bir $K \subseteq D$ to'plamda tekis yaqinlashuvchi $f_n(z) \in \{f(z)\}$ ketma-ketlikning limiti $\{f(z)\}$ sistemaga tegishli bo'lsa unda $\{f(z)\}$ sistema o'zida kompakt sistema deyiladi.

Teorema.3.1.4. O'zida kompakt sistema $\{f(z)\}$ da berilgan har qanday uzluksiz funktsional I chegaralangan va o'zining aniq yuqori

chegarasiga erishadi, ya'ni shunday $f_0 \in \{f(z)\}$ funktsiya topiladiki, ixtiyoriy $f(z) \in \{f(z)\}$ da

$$|I(f_0)| \geq |I(f)|$$

bo'ladi.

3.2. Analitik funksiyalarning normal oilasi. Normallik kriteriyasi.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning geometrik nazariyasida konform akaslantirishlar bilan bog'liq natijalarning ko'pchilligi umumiylik nuqtai nazaridan analitik funksiyalarning quyۇqlanishi prinsipiga tayanadi. Biroq bu natijalar o'z navbatida analitik funksiyalarni yaqinlashish masalalarini o'rganishni rivojlantirishni taqazo etadi. Buni ko'rsatish uchun Montel tomonidan ilgari surilgan analitik funksiyalarning normal oilasi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif 3.2.1. $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ funksiyalarning cheksiz oilasi B sohada normal deyiladi, agar funksiya har bir ketma-ketlikdan B ichida biror regulyar funksiyaga yoki ∞ ga tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikni ajratish mumkin bo'lsa. $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ oila $z_0 \in B$ nuqtada normal deyiladi, agar u shu nuqtaning qandaydir atrofida normal bo'lsa.

Agar $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ oila B sohada normal bo'lsa, u holda u har bir $z_0 \in B$ nuqtada normal bo'ladi. Ushbu faktning aksinchasi ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz:

Teorema.3.2.1. Agar $\mathfrak{M} = \{f(z)\}$ funksiyalar oilasi har bir $z_0 \in B$ nuqtada normal bo'lsa, u holda u B sohada ham normal bo'ladi.

Haqiqatan ham, $B \infty$ ni o'z ichiga olmaydi deb hisoblashimiz mumkin. B sohadan ratsional koordinatali barcha nuqtalar to'plamini olamiz va r_k , $k=1,2,\dots$, ketma-ketlikka joylashtiramiz. ρ_k orqali markazi r_k nuqtada bo'lgan doiralar orasida $\mathfrak{M}$ oila normal bo'ladigan eng kattasini radiusini belgilaymiz. ρ_{n_k} sonlar ketma-ketligi nolga faqat va faqat r_{n_k} markazlar B ning chegarasida quyuvlashsagina intiladi. $f_n(z)$, $n=1,2,3,\dots$ – $\mathfrak{M}$ oilaning ixtiyoriy funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. $|z - r_1| < \rho_1$ aylanada $\mathfrak{M}$ normalligidan, $f_n(z)$ dan $|z - r_1| < \frac{\rho_1}{2}$ da biror funksiyaga yoki ∞ ga yaqinlashuvchi $f_{n,1}(z)$ ketma-ketlikni ajratish mumkin. $f_{n,1}(z)$ dan $|z - r_2| < \frac{\rho_2}{2}$ da biror funksiyaga yoki cheksizga tekis yaqinlashuvchi $f_{n,2}(z)$ ketma-ketlikni ajratish mumkin va hakoza. Ushbu jarayonda hosil qilingan $f_{n,n}(z)$, $n=1,2,3,\dots$ diagonal ketma-ketlik B sohada biror funksiyaga yoki ∞ ga yaqinlashadi va bu yaqinlashish istalgan $|z - r_k| < \frac{\rho_k}{2}$, $k=1,2,\dots$ doirada tekis bo'ladi. U B ning ichida ham tekis yaqinlashadi. Aslida agar $E \subset\subset B$ yopiq to'plam bo'lsa, u yuqoridagi aylanalar bilan qoplab olinadi. Geyne-Borel teoremasiga bu aylanalarning cheklitasi bilan ham E to'plamni qoplash mumkin. Biroq $f_{n,n}(z)$ keta-ketlik tanlangan aylanalarning har birida tekis yaqinlashadi va bundan u E to'plamda ham tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.

Agar B sohada normal $\mathfrak{M}$ funksiyalar oilasi biror $z_0 \in B$ nuqtada chegaralangan bo'lsa, u holda u B ning ichida ham tekis chegaralangan bo'ladi.

Teorema.3.2.2. (Normallik kriteriyasi) *Biror G sohada analitik bo'lgan funksiyalar oilasi $\{f(z)\}$ normal oila bo'lishi uchun bu sohada berilgan funksiyalardan hech biri qabul qilmaydigan 2 ta chekli a va b qiyatlar mavjud bo'lishi yetarlidir.*

Isboti. Teoremani isbotlash uchun G sohadagi ixtiyoriy doirada berilgan funksiyalar oilasini normalligini ko'rsatish yetarli. Bu esa G ni avval boshdan doira deb hisoblashimiz mumkinligini anglatadi. Oilaning har bir $f(z)$ funksiyasini $\varphi(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$ bilan almashtiramiz. U holda G doirada birga ham, nolga ham teng bo'lmaydigan $\{\varphi(z)\}$ funksiyalar oilasini hosil qilamiz. Agar biz $\{\varphi(z)\}$ oilani normalligini isbotlasak, bundan $\{f(z)\}$ oila normalligi kelib chiqadi. Ixtiyoriy $\{\varphi_n(z)\}$ funksiyalar ketma-ketligini qaraymiz va bu funksiyalarning biror $z_0 \in G$ nuqtadagi qiymatlaridan iborat sonli ketma-ketligini olamiz. Bunda quyidagi ikki holat bo'lishi mumkin:

- a) $\{\varphi_n(z)\}$ 0, 1 va ∞ dan farqli limit nuqtaga ega;
- b) bunday limit nuqta mavjud emas. Birinchi holatda zarur bo'lsa qisman ketma-ketlikga o'tib quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z_0) = \alpha \neq 0, 1, \infty.$$

α nuqtani shunday bir kichik atrofini tanlab olamizki, u 0, 1 va ∞ nuqtalarni o'zida saqlamasin va bu atrofda $\omega(w)$ funksiyani bir qiymatli tarmog'ini ajratib olamiz, bunda $\omega(\alpha) = \beta$ bosh qiymat bo'lsin. Yetarlicha katta n larda $\{\varphi_n(z_0)\}$ nuqtalar tanlangan atrofga tegishli bo'lganidan, z_0 nuqtaning atrofida $\omega\varphi_n(z)$ analitik funksiya elementlarini hosil qilamiz. Bunda ω qiymatlari tanlangan tarmoqda yotadi. Bu elementlarning har biri G doiraga analitik davom qiladi, chunki $\varphi_n(z)$ - funksiyalar bu doirada analitik bo'lib,

ularning barcha qiymatlari o'sha sohada bo'ladi. $\omega(w)$ esa maxsus nuqtalarga ega emas. Analitik davom qildirish natijasida hosil qilingan $\omega\varphi_n(z)$ funksiyalar G doiraga analitik va bir qiymatli bo'lib, $\lim_{x \rightarrow \infty} \omega\varphi_n(z_0) = \beta$ shartni qanoatlantiradi. Bu funksiyalarning barcha qiymatlari birlik doiraga tegishli. Shuning uchun $\{\omega\varphi_n(z)\}$ ketma-ketlik kompakt oila tashkil etadi ya'ni shunday $\{\omega\varphi_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketlik topilib, G ichida tekis yaqinlashadi.

$\Omega(z) = \lim_{x \rightarrow \infty} \omega\varphi_{n_k}(z)$ bo'lsin, bu funksiya $\Omega(z_0) = \beta$ shartni qanoatlantiradi va $|\beta| < 1$ bo'lgani uchun $\Omega(z)$ modul bo'yicha 1 ga teng o'zgarmas funksiya bo'la olmaydi.

Chunki G sohada $|\omega\varphi_{n_k}(z)| < 1$ tengsizlik bajarilib, $|\Omega(z)| \leq 1$ munosabat kelib chiqadi va modul maksimum prinsipiga ko'ra $|\Omega(z)| < 1, z \in G$ bo'ladi. G sohaga tegishli yopiq K doirani qaraymiz. $t = \Omega(z)$ funksiya bu to'plamni birlik doirada yotgan biror yopiq D sohaga akslantiradi. Natijada $\omega = \chi(t)$ funksiya D da tekis uzliksiz bo'lib $\{\chi\omega\varphi_{n_k}(z)\}$ ketma-ketlik K to'plamda $\chi\Omega(z)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Shunday qilib birinchi holatda $\{\varphi_n(z)\}$ ketma-ketlikning G soha ichida tekis yaqinlashuvchi $\{\varphi_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketligi mavjud bo'lishi kelib chiqdi.

Endi ikkinchi holat ya'ni $\{\varphi_n(z_0)\}$ ketma-ketlik 0, 1 va ∞ dan farqli limit nuqtalarga ega bo'lmagan holni ko'rib chiqamiz. Avvalo 1 nuqta bu ketma-ketlik uchun limit nuqta bo'lsin. Umumiylikni buzmaganda $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z_0) = 1$ olishimiz mumkin. Quyidagi funksiyalarni qaraymiz

$$\psi_n(z) = \frac{Ln\varphi_n(z) + 2\pi i}{4\pi i},$$

Bunda $\operatorname{Ln}\varphi_n(z)$ funksiyani z_0 nuqtadagi qiymati sifatida bosh qiymatni olamiz va bunga asosan $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Ln}\varphi_n(z_0) = 0$ bo'ladi. $\operatorname{Ln}\varphi_n(z)$ funksiyalarni G doiraga analitik davom qildirib natijada bu doirada analitik va bir qiymatli bo'lgan $\psi_n(z)$ funksiyalarni hosil qilamiz. Bu funksiyalar $0, 1, \infty$ ni qabul qilamaydi chunki $\operatorname{Ln}\varphi_n(z) \neq -2\pi i, 2\pi i, \infty$. z_0 nuqtada esa $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(z_0) = \frac{1}{2} \neq 0, 1, \infty$ munosabat bajariladi. Shuning uchun $\{\psi_n(z)\}$ ketma-ketlikka yuqoridagi birinchi holatdagi mulohazalarni qo'llash mumkin. Ya'ni shunday $\psi_{n_k}(z)$ qisman ketma-ketlik mavjud bo'lib G sohaning ichida biror $\psi(z)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. $\psi_{n_k}(z)$ funksiyalarning hech biri G sohada $\frac{1}{2}$ qiymatni qabul qilmagani sababli ularning limiti ham bu qiymatni qabul qilmaydi aks holda u o'zgarmas bo'lib qo'ladi (bu Gurvits teoremasidan kelib chiqadi). Bunda G sohada $\operatorname{Ln}\varphi_{n_k}(z)$ funksiyalarning ajratilgan bir qiymatli tarmoqlari 0 ga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Bu esa $\{\varphi_{n_k}(z)\}$ 1 ga tekis yaqinlashishini taqozo qiladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = 1$ o'rniga $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = 0$ yoki $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \infty$ tengliklarni

olsak u holda $\{1 - \varphi_n(z)\}$ yoki $\{1 - \frac{1}{\varphi_n(z)}\}$ funksiyalar ketma-ketligi

qarab chiqamiz. Ularning har bir funksiyasi G sohada analitik va $0, 1, \infty$ qiymatlarni qabul qilmaydi. Bundan tashqari ularning z_0 nuqtadagi qiymatlari 1 ga yaqinlashadi. Ularga yuqorida qarab chiqilgan hususiy hollarni qo'llab $\varphi_n(z)$ ketma-ketlik G sohaning ichida 0 ga yoki ∞ ga tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikka ega bo'lishini ko'ramiz. Teorema isbotlandi.

3.3. Pikarning katta teoremasi va Julia nurlari.

Teorema.3.3.1. (Pikar) $f(z)$ analitik funksiya o'zining z_0 muhim maxsus nuqtasining istalgan atrofida ko'pi bilan bitta qiymatdan tashqari barcha chekli qiymatlarni qabul qiladi.

Isboti: Umumiylikni buzmagani holda, $z_0 = 0$ deb olishimiz mumkin. (Bu xolda $\xi = z - z_0$ yoki $\xi = \frac{1}{z}$ deb almashtirish bajarib boshqa nuqtalarga ham o'tish mumkin). Teskarisini faraz qilamiz, $f(z)$ $z_0 = 0$ nuqtaning biror $|z| < R$ atrofida ikkita chekli a va b qiymatlarni qabul qilmasin. Markazi z_0 nuqtada bo'lgan doiraviy halqalarni quramiz:

$$\Gamma_0(\frac{R}{2} < |z| < R), \Gamma_1(\frac{R}{2^2} < |z| < \frac{R}{2}), \dots, \Gamma_n(\frac{R}{2^{n+1}} < |z| < \frac{R}{2^n}) \dots$$

va $f_1(z) = f(\frac{z}{2}), \dots, f_n(z) = f(\frac{z}{2^n}), \dots$ funksiyalar ketma ketligini olamiz.

$f(z)$ funksiya Γ_n xalqada qanday qiymatlar qabul qilsa $f_n(z)$ funksiya Γ_0 xalqada shunday qiymatlarni qabul qilsin. Bundan esa $\{f_n(z)\}$ ketma-ketlik Γ_0 xalqada bir qiymatli bo'lib, a va b qiymatlarni qabul qilamaydigan analitik funksiyalar ketma-ketligi ekanligini kelib chiqadi, ya'ni, natijada $\{f_n(z)\}$ normal oiladan iborat bo'ladi. $\{f_n(z)\}$ - Γ_0 ni ichida tekis yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratib olamiz. Dasavval $F(z)$ limit funksiya uchun $F(z) \neq \infty$ bo'lsin. Unda $|F(z)|$ funksiya $|z| = \rho, \frac{R}{2} < \rho < R$ aylanada chegaralangan bo'ladi va natijada $\{f_{n_k}(z)\}$ bu aylanada tekis chegaralanganligi kelib chiqadi. Bu esa $f(z)$ funksiyaning

$|f(z)| < M$, $|z| = \frac{\rho}{2^{n_k}}$, $(k=1,2,\dots)$ tengsizlikni qanoatlantirishi kelib chiqadi. Natijada modulning maksimum prinsipiga ko'ra $|f(z)| < M$, $0 < |z| \leq \rho$ bo'ladi. $z=0$ nuqta $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi ekanidan bunday holat bo'lishi mumkin emas.

Agar $F(z) \equiv \infty$ bo'lsa, u holda $\varphi_{n_k}(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z) - a}$ analitik

funksiyalar ketma-ketligi Γ_0 ni ichida nolga tekis yaqinlashadi.

Bu esa $\varphi(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z) - a}$ funksiyaning $0 < |z| \leq \rho$ sohada chegaralanganligini bildiradi. Demak, $z=0$ nuqta $\varphi(z)$ uchun maxsus nuqta emas va o'z navbatida $f(z)$ uchun ham muhim maxsus nuqta bo'lmaydi va bu teorema shartiga zid. Demak, farazimiz noto'g'ri va shu bilan teorema isbotlandi.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi kuchaytirilgan variantdagi Pikarning kichik teoremasi natija sifatida kelib chiqadi. *$f(z)$ transendent butun funksiya bitta nuqtadan boshqa har bir chekli A qiymatni cheksiz ko'p nuqtalarda qabul qiladi.*

Haqiqatan ham, agar ikkita chekli a va b qiymatlarni chekli sondagi nuqtalarda qabul qilsa, u holda cheksiz uzoqlashgan nuqtani atrofi mavjud bo'lib, funksiya ularning birortasini ham qabul qilmaydi. Bu esa yuqorida isbotlangan teoremaga zid. ($f(z)$ uchun $z = \infty$ muxim maxsus nuqta)

Yuqoridagi natija quyidagicha umumlashadi:

Chekli tekislikda $f(z)$ transendent meromorf funksiya ikkita nuqtadan boshqa har bir chekli A qiymatni cheksiz ko'p nuqtalarda qabul qiladi.

Pikar teoremasini analiz qilib, umumiy xulosa qilishimiz mumkin.

$f_n(z) = f(\frac{z}{2^n})$ bir birining ichida yotuvchi quyidagi xalqalarni qaraymiz.

$$\Gamma'_0(\frac{R}{2^4} < |z| < R), \Gamma'_1(\frac{R}{2^5} < |z| < \frac{R}{2}), \dots, \Gamma'_n(\frac{R}{2^{n+4}} < |z| < \frac{R}{2^n}) \dots$$

$\{f_n(z)\}$ funksiyalar oilasini Γ'_0 xalqada normal bo'lmashligini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilamiz. Unda bu ketma-ketlikning shunday qisman ketma-ketligi topiladiki, Γ'_0 da tekis yaqinlashadi,

shuningdek, $\Gamma(\frac{R}{2^3} \leq |z| \leq \frac{R}{2})$ yopiq xalqada tekis yaqinlashadi. $F(z)$

limit funksiya ixtiyoriy qisman ketma-ketlikda aynan ∞ ga teng bo'lishi kerak. Teskarisi o'rinli bo'lishini faraz qilsak, Pikarning katta teoremasida yuritilgan fikrga ko'ra biror $0 < |z| \leq \rho$ da $f(z)$ moduli bo'yicha chegaralangan bo'ladi va bunday bo'lishi mumkin emas. Ammo, Γ da ixtiyoriy tekis yaqinlashuvchi $\{f_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketlik aynan cheksizga intilishidan, $\{f_n(z)\}$ ketma-ketlikning o'zi ham Γ da cheksizga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Aksincha bo'lgan holda shunday $N > 0$ soni topilib, Γ ga tegishli z_k nuqtalar ketma-ketligi va shunday $\{n_k\}$ o'suvchi natural sonlar ketma-ketligi mavjud bo'ladiki, $|f_{n_k}(z_k)| \leq N$ bo'ladi. Lekin bu holat $\{f_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketlik Γ da ∞ ga tekis yaqinlashuvchi boshqa $\{f'_{n_k}(z)\}$ qisman ketma-ketlikni o'z ichiga olishiga zid bo'ladi. Shunday ekan, $\{f_n(z)\}$ ketma-ketlik Γ'_0 da normal oila bo'ladi. Bundan $\{f_n(z)\}$ Γ da ∞ ga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. Demak, yetarlicha katta N soni uchun Γ xalqaning nuqtalarida yetarlicha katta n lar uchun $|f_n(z)| > N$ tengsizlik bajariladi, ya'ni boshqacha qilib aytganda,

$n \geq \nu(N)$ va $z \in \Gamma$ uchun $\left|f(\frac{z}{2^n})\right| > N$ bo'ladi.

z nuqta $\Gamma(\frac{R}{2^3} \leq |z| \leq \frac{R}{2})$ xalqadan olinganda, $\frac{z}{2^n}$ nuqta esa

$\gamma_n(\frac{R}{2^{n+3}} < |z| < \frac{R}{2^{n+1}})$ xalqaga tegishli bo'ladi. $\gamma_n(n = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \dots)$

xalqalar bir-birining ustiga tushib kirishib boradi va $0 < |z| < \frac{R}{2^{\nu+1}}$

sohani to'ldiradi. Natijada bu sohaning barcha nuqtalarida $|f(z)| > N$ tengsizlik bajariladi. Boshqacha qilib aytganda $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$

bo'ladi va bu esa $z = 0$ muhim maxsus nuqta ekaniga zid bo'ladi.

Biz $\{f_n(z)\}$ funksiyalar oilasini Γ'_0 xalqada normal bo'lmasligini isbotladik. Bundan kelib chiqadiki, bu xalqada kamida bitta shunday ξ nuqta mavjudki, bu nuqtaning har qandaning har qanday atrofida $\{f_n(z)\}$ oila normal bo'lmaydi. Haqiqatan, agar Γ'_0 xalqaning har bir nuqtasining biror atrofida $\{f_n(z)\}$ oila normal bo'ladigan bo'lsa, u holda bu oila Γ'_0 da normal bo'lar edi.

$|z - \xi| < \varepsilon$ - ξ nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofi bo'lsin. $\{f_n(z)\}$ funksiyalar oilasi bu atrofida normal bo'lmasligidan, bu funksiyalar oilasining barcha funksiyalari bu atrofda ko'pi bilan bitta qiymatdan tashqari barcha chekli qiymatlarni qabul qiladi. Aniqroq qilib aytganda ixtiyoriy A chekli son uchun (ko'pi bilan birgina A_0 qiymatdan tashqari) shunday $\{f_{n_k}(z)\}$ funksiyalar yetarlicha katta n_k nomerli funksiyalar topilib, biror z_k nuqtada A qiymatni qabul qiladi. $\{f_{n_k}(z)\} = f(\frac{z}{2^{n_k}})$ ekanligini inobatga olib va $\frac{z_k}{2^{n_k}}$ ni ξ_k orqali belgilasak, $f(\xi_k) = A$ tenglikni hosil qilamiz. Ravshanki, $\{\xi_k\}$ ketma-ketlik $z = 0$ nuqtaga yaqinlashadi va $z = 0$ nuqtadan chiquvchi va $|z - \xi| < \varepsilon$ aylana bilan urinuvchi burchak ichida joylashadi. ξ nuqta tayinlangan, ε yetarlicha kichik ekanidan biz quyidagi tasdiqqa kelamiz :

Teorema.3.3.2. z_0 maxsus nuqtasi bo'lgan $f(z)$ analitik funksiya uchun bu nuqtadan chiquvchi kamida bitta shunday nur topilib, bu nurga nisbatan simmetrik bo'lgan istalgan burchakda $f(z)$ funksiya ko'pi bilan bitta nuqtadan tashqari barcha chekli qiymatlarni z_0 ga yaqinlashuvchi cheksiz nuqtalar ketma-ketligida qabul qiladi.

Ravshanki, bu teorema Pikarning katta teoremasini aniqlashtirilgan varianti hisoblanadi. Aynan Pikar teoremasi, $f(z)$ ni A nuqtalari maxsus nuqtani atrofida qanday joylashganligi haqida ma'lumot bermaydi. Mazkur teoremada esa ixtiyoriy A uchun funksiyaning A nuqtalari biror nurni atrofidagi guruhlangan holda bo'lishini ta'kidlaydi (Bunday nurlar bir nechta yoki cheksiz bo'lishi mumkin). Teoremada aytib o'tilgan nur (yoki nurlar) Julia nurlari deyiladi. $z_0 = \infty$ bo'lgan holda biz $\xi = \frac{1}{z}$ almashtirish bajaramiz. Hususan, butun funksiyalar uchun quyidagi tasdiqqa ega bo'lamiz.

Teorema.3.3.3. $f(z)$ - transendent butun funksiya bo'lsin. U holda tekislikda koordinata boshidan farqli shunday nuqtalar topilib, bu nuqtlarning istalgan atrofida $f(2^n z)$ funksiyalar oilasi normal bo'lmaydi. Koordinatalar boshidan chiquvchi va shunday nuqtalar orqali o'tuvchi nur uchun bu nurga nisbatan simmetrik bo'lgan ixtiyoriy kichik burchagi ixtiyoriy A chekli qiymat uchun $f(z)$ funksiyaning A nuqtalarining cheksiz to'plamini o'z ichiga oladi.

Bunda e^z funksiyaning misol tariqasida keltirishimiz mumkin. U ikkita Julia nuriga ega. Mavhum o'qni musbat va manfiy yo'nalishlari bo'yicha. Haqiqatan, agar $A \neq 0$ bo'lsa, u holda $e^z = A$ tenglamaning ildizi

$$z_k = \ln A = \ln |A| + i \arg A + 2k\pi i$$

ko'rinishda bo'ladi. Aniqlik uchun k musbat son bo'lsin deb faraz qilamiz. z_k vektor va mavhum o'qni musbat yo'nalishi ortasidagi burchakning tangensi $\frac{\ln |A|}{\arg A + 2k\pi}$ ga teng ekanidan u $k \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Bundan kelib chiqadiki, biror nomerdan boshlab z_k nuqtalar mavhum o'qning musbat qismiga nisbatan simmetrik bo'lgan ixtiyoriy tayinlangan burchakka tegishli bo'ldi. Huddi shunday natijani k manfiy son bo'lganda mavhum o'qning manfiy yo'nalishiga nisbatan olish mumkin. Shuni ta'kidlab o'tish joizki, ixtiyoriy atrofida $\{e^{2^n z}\}$ funksiyalar oilasi normal bo'lmaydigan nuqtalar mavhum o'qning barcha nuqtalari bo'ladi. Haqiqatan, bu nuqtalarning har biri uchun $|e^{2^n z}| = 1$ bo'lib o'ng yoki chap tekisliklarida joylashgan ixtiyoriy nuqtalarda $\{e^{2^n z}\}$ ketma-ketlik mos ravishda ∞ yoki 0 qiymatlarga intiladi. Bundan kelib chiqadiki, mavhum o'qning nuqtalari uchun $\{e^{2^{n_k} z}\}$ ketma-ketlik tekis yaqinlashadigan atrof mavjud emas ekan.

Xulosa

Pikarning kichik teoremasiga asosan kompleks tekislikda har qanday butun funksiya faqat bitta nuqtani meromorf funksiyalar esa ikkita nuqtani istisno tariqasida qabul qilmasligi mumkin ekan. Masalan: $f(z) = e^z$ funksiya 0 qiymatni qabil qilmaydi va $f(z) = \operatorname{tg} z$ meromorf funksiya esa $\pm i$ qiymatlarni qabul qilmaydi. Shuning uchun yuqorida isbot qilingan Pikar teoremlarini bundanda kuchaytirish imkoni yo'q. Bunday istisno qilingan nuqtalarda Pikar nuqtalari deyiladi.

Mazkur natija Pikarning katta teoremasida quyidagicha umumlashtiriladi: $f(z)$ analitik funksiya o'zining z_0 muhim maxsus nuqtasining istalgan atrofida ko'pi bilan bitta qiymatdan tashqari barcha chekli qiymatlarni qabul qiladi.

Ushbu teoremaning isbotlanishi jarayonada analitik funksiyalarning yana bir muhim hususiyatiga ega bo'lishini ko'rish mumkin. Ya'ni $f(z)$ analitik funksiya o'zining z_0 muhim maxsus nuqtasining istalgan atrofida biror a qiymatni qabul qilsa bu $f(z) = a$ tenglama yechimlari z_0 nuqtadan chiquvchi biror nur (yoki nurlar) atrofida tebranar ekan. Bu esa $E_a = \{f(z) = a\}$ to'plam geometriyasini o'rganishda muhim natija hisoblanadi.

Adabiyotlar

1. М.А. Евграфов Аналитические функции, Москва «Наука» 1991 г.
2. Б.В.Шабат Введение в комплексный анализ. Ч 1. функции одного комплексного переменного, Москва «Наука» 1976г.
3. А.И. Маркушевич, Теория аналитических функций, том 2
4. И.И.Привалов Введение в теорию функций комплексного переменного, М. «Наука» 1964 г.
5. Г.М.Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М. «Наука» 1966 г.
6. G.Xudayberganov, A.Varisov, H.Mansurov, «Kompleks analiz » Toshkent "Universitet" 1998y.
7. G.Xudayberganov «Kompleks analiz » ma'ruzalar matni, 2-qism, Qarshi, «Nasaf» nashiriyoti, 2004.

Internet manbalari:

1. <http://analysis.math.uni-kiel.de/bergweiler/bilder/bilder1.html>
2. <http://www.brainjam.ca/wp/>
3. <http://homepages.math.uic.edu/~culler/chaos/>
4. <http://www.sciencedirect.com/science/article>
5. <http://ru.wikipedia.org>
6. <http://springerlink.com/>
7. <http://lex.uz/>.
8. [http://www.eknigu.com/lib/mathematics/;](http://www.eknigu.com/lib/mathematics/)
9. http://www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC
10. <http://www.rsl.ru/> - Российская государственная библиотека;
11. <http://www.msu.ru/> - Московский государственный университет;
12. <http://www.nlr.ru/> - Российская национальная библиотека;

MUNDARIJA

Kirish	2
I-BOB. BUTUN VA MEROMORF FUNKSIYALAR.	
1.1. Golomorf funksiyalar va ularning sodda xossalari.	3
1.2. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish.	18
1.3. Butun funksiyalar. Liuvill teoremasi.	20
1.4. Kompleks tekislikda meromorf funksiyalar. Mittag-Leffler teoremasi.	23
II-BOB. MODULYAR FUNKSIYALAR. KICHIK PIKAR TEOREMASI.	
2.1. Konform izomorfizm. Avtomorfizm.	28
2.2. Simmetriya printsipi	34
2.3. Shvartsning modulyar funksiyasi.	40
2.4. Kichik Pikar teoremasi.	45
III-BOB. ANALITIK FUNKSIYALARNING NORMAL OILASI. KATTA PIKAR TEOREMASI.	
3.1. Montel teoremasi.	48
3.2. Analitik funksiyalarning normal oilasi. Normallik kriteriyasi.	54
3.3. Katta Pikar teoremasi va Julia nurlari.	60
Xulosa	66
Adabiyotlar	67