

Urganch Davlat Universiteti Fizika-matematika
fakulteti 401-amaliy matematika va informatika
guruhi talabasi Do'sov Umidbekning
« Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish »
mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga

TAQRIZ

Ma'lumki, teskari masala usulida yechiladigan Korteveg-de Friz tenglamasining diskret varianti Volterra zanjiridir.

Ushbu "Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish" mavzusida yozilgan bitiruv malakaviy ishi Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish mumkinligini ko'rsatishga bag'ishlangan. Buning uchun bitiruv malakaviy ishida, potensiali Volterra zanjirining yechimi bo'lgan diskret Shturm-Liuvill tenglamasining sochilish nazariyasini berilganlarining vaqt bo'yicha o'zgarishi topilgan.

Volterra zanjiri ionlarda plazma tarqalishi hodisasini ifodalovchi tadbiqiy model sifatida yuzaga keladi. Bu chekli ayirmali tenglamani ham sochilish nazariyasining teskari masalasi usulida yechish mumkinligi bir qancha olimlar tomonidan o'rganilgan. 1967-yil Gartner, Grin, Kruskal va Miura Korteveg-de Friz tenglamasini yechish uchun teskari masala usulini ixtiro qilishdi. Ushbu usulni chekli ayirmalardagi tenglamalarda ham qo'llash mumkin. Masalan, ushbu

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad -\infty < n < \infty, \quad c_n(t) > 0 \quad (1)$$

sistemani qaraymiz. Bu sistema, plazmaning nozik tuzulishiga ega spektining Lengmyurov tebranishlarini o'rganishimiz natijasida kelib chiqadi. Shu sababli biz (1) sistemani "Volterra zanjiri" deb ataymiz. (1) tenglamani $\dot{L} = [L, A]$ Laks juftligi ko'rinishida ifodalash mumkin. L va A cheksiz o'lchovli matritsalar bo'lib ularning elementlari ushbu jufti yordamida elementlari bilan yoziladi.

$$L_{nm} = c_n^{1/2} \delta_{n,m+1} + c_n^{1/2} \delta_{n+1,m}, \quad (2)$$

$$A_{nm} = \frac{1}{2} \left[c_n^{1/2} c_{n-1}^{1/2} \delta_{n,m+2} - c_m^{1/2} c_{m-1}^{1/2} \delta_{n+2,m} \right] \quad (3)$$

ifodalar yordamida aniqlangan.

Bu yerda δ_{nm} – Kroneker belgisi: agar $n \neq m$ va $n = m$ da $\delta_{nm} = 1$ bo'lsa, $\delta_{nm} = 0$. Bevosita $LA - AL$ kommutatorni hisoblaganda, ishonamizki, u (1) tenglikka mos holda dL/dt bilan mos keladi.

L operatorning hos funksiyalari orqali ifodalanadigan tenglamaşi ushbu

$$\sqrt{c_n}\psi_{n-1} + \sqrt{c_{n+1}}\psi_{n+1} + v_n\psi_n = \lambda\psi_n \quad -\infty < n < \infty; \quad (4)$$

ko‘rinishga ega. ψ_n ni biz kompleks sonlar deb hisoblaymiz. L operatorning xos funksiyalari $v_n \equiv 0$ holda (4) tenglikni qanoatlantiradi. (4) masala koeffisientlari

$$\prod_{-\infty}^{\infty} c_n^{-1/2} < \infty, \quad \left| \sum_{-\infty}^{\infty} v_n \right| < \infty$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Bu shartlardan birinchisi Toda zanjiri atamalarida chekli n larda, cheksizlikda panjara siljishini anglatadi, ikkinchisi ma’lumki impuls chekligini anglatadi.

Bu chekli ayirmali tenglamani ham sochilish nazariyasining teskari masalasi usulida yechish mumkinligi bir qancha olimlar tomonidan o‘rganilgan.

Mazkur bitiruv malakaviy ishi O‘zbekiston Respublikasi Oliy va O‘rta Maxsus Ta’lim vazirligi tomonidan bitiruv malakaviy ishlariga qo‘yilgan barcha talablarga javob beradi

Taqrizchi:



f.-m.f.n, TATU Urganch filali

direktor muovini Atamuratov A.E.



**Urganch Davlat Universiteti Fizika-matematika
fakulteti 401-amaliy matematika va informatika
guruhi talabasi Do'sov Umidbeknning
« Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish »
mavzusidagi bitiruv malakaviy ishiga**

TAQRIZ

Volterra zanjiri tenglamasi ko'pgina fizik masalalarini yechishda paydo bo'lib, ko'pchilik adabiyotlarda Lengmyur zanjiri deb ham yuritiladi.

Do'sov Umidning "Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish" mavzusida yozgan bitiruv malakaviy ishi Volterra zanjirini teskari masala usulida yechishga bag'ishlangan. Buning uchun diskret spektral masala uchun teskari masala usulini Volterra zanjiriga ko'pchilik Koshi masalasini yechishga qo'llaydi. Bitiruv malakaviy ish referativ xarakterga ega.

Volterra zanjirini plazma fizikasida qo'llaniladi. Ma'lumki ikki tomonlama cheksiz va yarim o'qda Volterra zanjiri uchun Koshi masalasini sochilish nazariyasining teskari masalasi usulida tadqiq qilish mumkin.

Yana bir integrallanuvchi differensial-ayirmali sistemaga misol sifatida bir-biriga yaqin zarralari eksponensial ta'sir qiladigan bir o'lchamli dinamikasini ifodalavchi ushbu

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = e^{x_{n+1}-x_n} - e^{x_n-x_{n-1}}$$

sistemasini keltirishimiz mumkin.

Bu tenglamaning aniq yechimi - solitoni aniqlaydigan tipdagi panjaralar

ilk bora 1970-yilda o'rganila boshlangan va ushbu sistemaga Toda zanjiri deyildi.

Mazkur bitiruv malakaviy ishi O'zbekiston Respublikasi Oliy va O'rta Maxsus Ta'lim vazirligi tomonidan bitiruv malakaviy ishlariga qo'yilgan barcha talablarga javob beradi

Muvofiqqiyatli himoyadan keyin ushbu malakaviy ishni ijobiy baxolash mumkin deb hisoblaymiz.

Ilmiy rahbar:

f.-m.f.d., Urazboyev G.O'.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
Do'sov Umidbek Normetovichning
5130200-Amaliy matematika va informatika
ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Mavzu: Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish

Ilmiy rahbar:



f.-m.f.d. Urazboyev G. O'

Urganch 2015 yil

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti
Amaliy matematika va matematik fizika kafedrası

Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish

Bajaruvchi:



Do'sov U

Ilmiy rahbar:



f.-m.f.d. Urazbayev G. O'

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulteti

Amaliy matematika va matematik fizika kafedrası

BITIRUV MALAKAVIY ISHNI BAJARISH BO‘YICHA

TOPSHIRIQLAR REJASI:

1. Talaba **Do‘sov Umidbek Normetovich** Universitet rektorining № 216-T & 1-sonli buyrug‘i bilan bitiruv malakaviy ish bajarish uchun “**Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish**” mavzusi tasdiqlangan.
2. Kafedra majlisining qaroriga binoan f.-m.f.n Urazboyev G. O‘ bitiruv malakaviy ishini bajarishga rahbar qilib tayinlangan.
3. **Bitiruv malakaviy ishining tarkibiy tuzilmasi:** Bitiruv malakaviy ishiga kirish, asosiy qism, xulosa va adabiyotlar bo‘limlaridan iborat.
4. **Bitiruv malakaviy ishi uchun ma’lumotlar** mavzu bo‘yicha ma’lumotlar beruvchi adabiyotlar, mavzuga oid maqolalar va internet saytlaridan olinadi.
5. **Bitiruv malakaviy ishga ilova qilinmaydi.**

Urganch davlat Universiteti "Fizika-matematika" fakulteti
 "Amaliy matematika va matematik fizika" kafedrası
 "Amaliy matematika va informanika" bakalavr ta'lim yo'nalishi



Tasdiqlayman
 Fakultet dekani
 dots. Abdullayev B.I.
 _____ 2015 y.

BITIRUV MALAKAVIY ISHI BO'YICHA TOPSHIRIQ

Talaba **Do'sov Umidbek Normetovich**

1. Ishning mavzusi: "Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish"
 mavzusi 19.12.2014 yil universitet rektorining № 216-T & 1- sonli buyrug'i bilan
 tasdiqlangan.

2. Ishni topshirish muddati: "18" iyun 2015 y.

3. Mavzu bo'yicha dastlabki ma'lumotlar beruvchi adabiyotlar ro'yxati

1. Теория солитонов: Метод обратной задачи. /Захаров В. Е., Манакон
 С. В., Новиков

С. П., П и т а е в с к и й Л. П. Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука.
 Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

2. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.— Phys. Rev.
 Lett., 1967, v. 19, p. 1095.

3. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.— УМН, 1976,
 т. 31, вып. 1, с. 55.

4. Miura R. M. (editor) Lecture Notes in Mathem.— Springer,
 1976, v. 515.

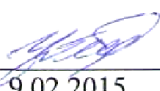
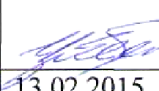
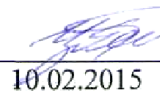
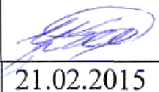
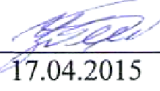
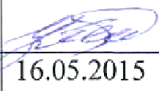
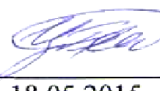
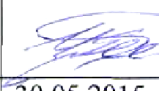
5. Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения.—
 Харьков: Гостехиздат Украины, 1939.

6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.
 М.: Наука, 1974.

www.math-net.ru

4. Ishning maqsadi Volterra zanjirini Sohilish nazariyasiteskari masala
 usulida yechishni o'rganish.

5. Maslahatchilar: f.-m.f.d. Urazbayev G. O'

Bo'limlar	Maslahatchi F.I.SH.	Imzo, sana	
		Topshiriq berdi	Topshiriq qabul qildi
Kirish	Urazbayev G. O'.	05.01.2015 	12.01.2015 
Sochilish nazariyasining to'g'ri va teskari masalasi.	Urazbayev G. O'.	9.02.2015 	13.02.2015 
Sochilish nazariyasining berilganlari evolyutsiyasi	Urazbayev G. O'.	10.02.2015 	21.02.2015 
Volterra zanjirining solitonsimon yechimlari	Urazbayev G. O'.	17.04.2015 	16.05.2015 
Volterra zanjirining Gamiltonian tuzulishi.	Urazbayev G. O'.	18.05.2015 	30.05.2015 
Xulosa va adabiyotlar	Urazbayev G. O'.		

6. Ishga taqriz yozuvchining F.I.SH., ilmiy darajasi, unvoni: Atamuratov A.E.
f.-m.f.n. TATU Urganch filiali direktori muovini



7. Ilmiy rahbar: f.-m.f.d. Urazbayev G. O'.

BMI bajaruvchi talaba: Do'sov U. N.

Kafedra mudiri: Mamedov Q.A.

M U N D A R I J A

Kirish	7
1-§. Sochilish nazariyasining to‘g‘ri va teskari masalasi	12
2-§. Sochilish nazariyasining berilganlari evolyutsiyasi.....	19
3-§. Volterra zanjirining solitonsimon yechimlari	21
4-§. Volterra zanjirining gamiltonian tuzilishi	24
Xulosa	27
Foydalanilgan adabiyotlar	28
Ilova	30

Kirish

Ma'lumki, teskari masala usulida yechiladigan Korteveg-de Friz tenglamasining diskret varianti Volterra zanjiridir.

Bu chekli ayirmali tenglamani ham sochilish nazariyasining teskari masalasi usulida yechish mumkinligi bir qancha olimlar tomonidan o'rganilgan.

Mavzuning dolzarbligi: Volterra zanjiri tenglamasi ko'pgina fizik masalalarini yechishda paydo bo'lib, Volterra zanjirini plazma fizikasida qo'llaniladi.

Masalaning qo'yilishi: Volterra zanjiri uchun Koshi masalasini sochilish nazariyasida teskari masala usulida yechish.

Ishni maqsadi va vazifasi: Ushbu "Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish" mavzusida yozilgan bitiruv malakaviy ishi Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish mumkinligini ko'satishga bag'ishlangan. Buning uchun bitiruv malakaviy ishida, potentsiali Volterra zanjirining yechimi bo'lgan diskret Shturm-Liuvill tenglamasining sochilish nazariyasini berilganlarining vaqt bo'yicha o'zgarishi topilgan.

Muammoni ishlab chiqilish darajasi: 1967-yil Gartner, Grin, Kruskal va Miura Korteveg-de Friz tenglamasini yechish uchun teskari masala usulini ixtiro qilishdi. Ushbu usulni chekli ayirmalardagi tenglamalarda ham qo'llash mumkin. Masalan, ushbu

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad -\infty < n < \infty, \quad c_n(t) > 0 \quad (1)$$

sistemani qaraymiz. Bu sistema, plazmaning nozik tuzulishiga ega spektning Lengmyurov tebranishlarini o'rganishimiz natijasida kelib chiqadi. Shu sababli biz (1) sistemani "Volterra zanjiri" deb ataymiz. (1) tenglamani $\dot{L} = [L, A]$ Laks

juftligi ko‘rinishida ifodalash mumkin. L va A cheksiz o‘lchovli matritsalar bo‘lib ularning elementlari ushbu jufti yordamida elementlari bilan yoziladi.

$$L_{nm} = c_n^{1/2} \delta_{n,m+1} + c_n^{1/2} \delta_{n+1,m}, \quad (2)$$

$$A_{nm} = \frac{1}{2} \left[c_n^{1/2} c_{n-1}^{1/2} \delta_{n,m+2} - c_m^{1/2} c_{m-1}^{1/2} \delta_{n+2,m} \right] \quad (3)$$

ifodalar yordamida aniqlangan.

Bu yerda δ_{nm} – Kroneker belgisi: agar $n \neq m$ bo‘lsa, $\delta_{nm} = 0$ va $n = m$ da

$\delta_{nm} = 1$ bo‘ladi. Bevosita $LA - AL$ kommutatorni hisoblaganda, ishonamizki, u (1) tenglikka mos holda dL/dt bilan mos keladi.

Yana bir integrallanuvchi differensial-ayirmali sistemaga misol sifatida bir-biriga yaqin zarralari eksponensial ta’sir qiladigan bir o‘lchamli dinamikasini ifodalavchi ushbu

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = e^{x_{n+1} - x_n} - e^{x_n - x_{n-1}} \quad (4)$$

sistemasini keltirishimiz mumkin.

(4) tenglamaning aniq yechimi - solitoni aniqlaydigan tipdagi panjaralar

ilk bora 1970-yilda o‘rganila boshlangan va (4) sistemaga Toda zanjiri deyildi. (4) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\dot{c}_n = c_n(v_n - v_{n-1}), \quad \dot{v}_n = c_{n+1} - c_n, \quad (5)$$

ko‘rinishda yoziladi,

bu yerda $v_n = \dot{x}_n$, $c_n = e^{x_n - x_{n-1}}$ $c_n > 0$.

(5) sistema quyidagi $L - A$ juftliklar yordamida integrallanadi:

$$L_{nm} = c_n^{1/2} \delta_{n,m+1} + c_n^{1/2} \delta_{n+1,m} + v_n \delta_{nm} \quad (6)$$

$$A_{nm} = \frac{1}{2} \left[c_n^{1/2} \delta_{n,m+1} - c_m^{1/2} \delta_{n+1,m} \right] \quad (7)$$

Ishning ilmiy yangiligi: BMI referativ xarakterga ega.

Tatqiqot predmeti va obekti: Volterra zanjiri, teskari masala usuli, BMI matematik fizika va funksional analiz usullaridan foydalanildi.

Ishning ilmiy ahamiyati: spektral analizning usullari nohiziqli chekli ayirmalardagi tenglamani yechishda qo'llaniladi.

Ishning amaliy ahamiyati: ikki tomonlama cheksiz va yarim o'qda Volterra zanjiri uchun Koshi masalasini sochilish nazariyasining teskari masalasi usulida tadqiq qilish mumkin.

Ishning tuzilishi: Bitiruv malakaviy ishi Kirish qismi, Asosiy qism, Xulosa, Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va Ilovalardan iborat bo'lib, jami 30 betdan iborat. Asosiy qism 4 ta paragrafdan iborat bo'lib, 1-paragrafda Sochilish nazariyasining to'g'ri va teskari masalasi qo'yilishi, 2-paragrafda Sochilish nazariyasining berilganlari evolyutsiyasi, 3-paragrafda Volterra zanjirining solitonsimon yechimlarini topish, 4-paragrafda Volterra zanjirining Gamiltonian tuzulishi va xulosa, foydalanilgan adabiyotlardan iborat.

Shuni aytish kerakki, (6) operator (2) operatoridan faqat diagonal matrisaga farq qiladi.

(1) tenglama o'zida KdF tenglamasining chekli ayirmalar ko'rinishidagi analogini va buni ko'rish uchun, (1) tenglamasini qanoatlantiruvchi $c(x, t)$, $-\infty < x < \infty$ funksiyani qaraymiz:

$$\dot{c}_n(x) = c(x)[c(x + \delta) - c(x - \delta)].$$

$0 < \delta \ll 1$ deb olib, $c(x)$ ni esa x bo'yicha differensiallanuvchi yetarli son deb faraz qilamiz va

$$c(x) = 1 - \delta^2 v(x)$$

ni qo'yamiz, bu yerda $v(x)$

$$\dot{v} = v(x + \delta) - v(x - \delta) - \delta^2 v(x)[v(x + \delta) - v(x - \delta)]$$

tenglamani qanoatlantiradi. Oxirgi tenglikni o'ng tomonini δ^3 aniqlik bilan δ bo'yicha qatorga yoyamiz:

$$\dot{v} = 2\delta v_x + \frac{1}{3}\delta^3 v_{xxx} - 2\delta^2 v(x)v_x + O(\delta^5)$$

$2\delta v_x$ had $t' = t$, $x' = x - 2\delta t$ Galiley almashtirishi yordamida yo'qotiladi. Natijada tenglama quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\frac{\partial v}{\partial t'} = \frac{1}{3}\delta^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x'^3} - 2\delta^3 \frac{\partial v}{\partial x'} + O(\delta^5)$$

Nihoyat, $-\frac{\delta^3}{3}t' = \tau$ deb belgilab olib,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 6v \frac{\partial v}{\partial x} + O(\delta^2)$$

ifodani hosil qilamiz. Endi δ ni nolga intiltirib, KdF tenglamasiga ega bo'lamiz.

$L - A$ juftliklar yordamida ham huddi shunday ko'rsatishimiz mumkin. Buning uchun Laksning ekvivalent ifodasini ushbu

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{nm} \psi_m = \lambda \psi_n, \quad \frac{d\psi_n}{dt} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{nm} \psi_m = 0, \quad -\infty < n < \infty \quad (8)$$

tenglamasida qaraymiz, bu yerda L va A operatorlar (2),(3) formulalar orqali aniqlangan. (8) ifodani ushbu

$$\begin{aligned} (1 - \delta^2 v(x))^{1/2} \psi(x - \delta) + (1 - \delta^2 v(x + \delta)) \psi(x - \delta) - 2\psi(x) \\ = (\lambda - 2)\psi(x) \end{aligned}$$

ko'rinishda yozib olib va bu munosabatni δ bo'yicha yoyib ushbu

$$\delta^2 (\psi_{xx} - v(x)) = (\lambda - 2)\psi(x) + O(\delta^3)$$

tenglikni hosil qilamiz. $\lambda - 2 = -\delta^2 k^2$ belgilashni kiritamiz. Bunda

$$\psi_{xx} - v(x)\psi = -k^2\psi + O(\delta).$$

(8) tenglamaning ikkinchi tengligiga yuqorida foydalanilgan proseduradan foydalanib $x \rightarrow x'$, $t \rightarrow t' \rightarrow \tau$ almashish yordamida quyidagi tenglikni topamiz.

$$\psi_\tau + A\psi = O(\delta),$$

Bu yerda A operator bilan aniqlik mos keladi. Shu ma'noki, (2), (3) uzluksiz holdagi limit ma'nosida $L - A$ - juftliklar KdF tenglamasiga mos juftliklarni ifodalaydi, (2) operator esa Shturm-Liuvill uzluksiz holdagi limit ma'nosida operatorining chekli ayirmalardagi analogini ifodadi.

Natijada aytish mumkinki (4) sistema ushbu tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2$$

tekari masala usulida integrallanuvchi [3] nochiqliq tor tenglamasining uzluksiz holdagi limitining chegarasini aniqlaydi.

1-§. Sochilish nazariyasining to'g'ri va teskari masalasi.

(6) ifodadagi L operatorning hos funksiyalari orqali ifodalanadigan tenglamasi ushbu

$$\sqrt{c_n}\psi_{n-1} + \sqrt{c_{n+1}}\psi_{n+1} + v_n\psi_n = \lambda\psi_n \quad -\infty < n < \infty; \quad (9)$$

ko'rinishga ega. ψ_n ni biz kompleks sonlar deb hisoblaymiz. L operatorning hos funksiyalari $v_n \equiv 0$ holda (9) tenglikni qanoatlantiradi. (9) masala koeffitsientlari

$$\prod_{-\infty}^{\infty} c_n^{-1/2} < \infty, \quad \left| \sum_{-\infty}^{\infty} v_n \right| < \infty \quad (10)$$

shartlarni qanoatlantiradi. Bu shartlardan birinchisi Toda zanjiri atamalarida chekli n larda, cheksizlikda panjara siljishini anglatadi, ikkinchisi ma'lumki impuls chekligini anglatadi (Keltirilgan ifodalari, (5) sistemaning harakat integralini aniqlaydi.).

(9) masala $-2 \leq \lambda \leq 2$ oraliqni to'ldiruvchi uzluksiz spektrga ega, undan tashqari, u umuman aytganda diskret spektrga ham ega. Diskret spektrning hos qiymatlari moduli 2 dan katta va ularga mos ψ_n hos funksiyalari kvadratik jamlanad. Uzluksiz spektrning $\psi_n(\lambda)$ hos funksiyalari barcha n larda chegaralangan. Agar λ uzluksiz spektrga tegishli bo'lsa, unda ψ_n asimptotika $n \rightarrow \pm\infty$ ga intilganda

$$\psi_n = c_1 z^n + c_2 z^{-n} + o(1), \quad |z| = 1, \quad \lambda = z + z^{-1}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

(9) masalaning

$$\psi_n(z) = z^n + o(1) \quad n \rightarrow \infty$$

$$\varphi_n(z) = z^{-n} + o(1) \quad n \rightarrow -\infty$$

asimptotikaga ega $\varphi_n(z)$ va $\psi_n(z)$ maxsus yechimlarini kiritamiz. $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ funksiyalar ixtiyoriy n larda z kompleks tekislikda birlik aylananing ichida analitikdir. (9) tenglamaning

$$\tilde{\psi}(z) = z^n + o(1) \quad n \rightarrow \infty$$

$$\tilde{\varphi}(z) = z^{-n} + o(1) \quad n \rightarrow -\infty$$

asimptotikaga ega ikkinchi yechimlar juftligi $\tilde{\psi}_n$ va $\tilde{\varphi}_n$ kompleks tekislikdagi birlik aylananing tashqarisida analitik bo‘ladi. Birlik aylanada ushbu

$$\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}(z), \quad \tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}(z), \quad |z| = 1$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi.

Bu tengliklarni kompleks tekislikka davom ettirib quyidagi

$$\psi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{\psi}_n(z) = \overline{\psi_n}\left(\frac{1}{z}\right), \quad \varphi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{\varphi}_n(z) = \overline{\varphi_n}\left(\frac{1}{z}\right) \quad (11)$$

tengliklarni hosil qilamiz. $z(\lambda = z + iz^{-1})$ tekislikda (9) masalaning uzluksiz spektri birlik aylanani ifodalaydi. $|z| = 1$ holda $\psi_n(z)$ va $\tilde{\psi}_n(z)$ yechimlar chiziqli erkli bo‘ladilar. Ya’ni, (9) tenglamaning chiziqli erkli yechimlar soni ikkidan oshmasligini hisobga olsak, (9) yechimlar $\psi_n(z)$ va $\tilde{\psi}_n(z)$ larning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifdalanadi:

$$\varphi_n(z) = \alpha(z)\overline{\tilde{\psi}_n(z)} + \beta(z)\psi_n, \quad |z| = 1 \quad (12)$$

(9) tenglamaning bir xildagi ixtiyoriy ikkita $\psi^{(1,2)}$ yechimi

$$W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \sqrt{c_n} (\psi_n^{(1)} \psi_{n-1}^{(2)} - \psi_{n-1}^{(1)} \psi_n^{(2)}) \quad (13)$$

n ga bog'liq emas. Bizning nazariyamizda W formasi vroskian rolini o'ynaydi. Agar $W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = 0$ bo'lsa, u holda $\psi^{(1)}$ va $\psi^{(2)}$ yechimlari chiziqli bog'liq bo'ladi. Yuqoridagilarni hisobga olsak W bevosita Vronskian ta'rifiga mos keladi.

$$W(\varphi, \psi) = \alpha(z) W(\bar{\psi}, \psi) = \alpha(z)(z^{-1} - z)$$

$W(\varphi(z), \psi(z))$ Vronskian hisoblab:

$$\alpha(z) = -\frac{W(\varphi(z), \psi(z))}{z - z^{-1}} \quad (14a)$$

ni topamiz. Bu formuladan ko'rinadiki, $\alpha(z)$ $|z| < 1$ da analitik. Anologik tarzda $W(\varphi, \bar{\varphi})$ ni hisoblab, ushbu

$$|\alpha(z)|^2 - |\beta(z)|^2 = 1, \quad |z| = 1 \quad (14b)$$

tenglikni topamiz.

$\alpha(z_n) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi z_n $0 < |z_n| < 1$, $n = 1, 2, \dots, N$ haqiqiy o'qning nuqtalari L operatorning diskret spektri hos qiymatlariga birqiyimatli mos keladi: $\lambda_n = z_n + z_n^{-1}$ $Im z_n = 0$. Bu nuqtalarda

$$\varphi_n(z_k) = b_k \psi_n, \quad Im b_k = 0 \quad (15)$$

ya'ni $\varphi_n(z_k)$ hos funksiyalar. Ushbu

$$s = (r(z), z_n, b_n, n = 1, 2, \dots, N),$$

bu yerda $r(z) = \beta(z)\alpha^{-1}(z)$, $|z| = 1$ analogiya bo'yicha Shredinger operatori nazariyasidagi kabi sochilish nazariyasining berilganlari deymiz. (2) ifodadagi L operator (6) ifodaning xususiy holi hisoblanadi. (9) tenglamada $v_n = 0$, deb faraz qilib, quyidagi

$$\varphi_n(-z) = (-1)^n \varphi_n(z)$$

$$\psi_n(-z) = (-1)^n \psi_n(z)$$

tengliklarga barcha n larda ega bo‘lamiz. Huddi (2) ifodadagi L operator dagidek:

$$\alpha(-z) = \alpha(z), \quad \beta(-z) = \beta(z), \quad |z| = 1$$

Shuning uchun sohilish nazariyasining terminalogiyasida (2) operatorning, $r(-z) = r(z)$, $|z| = 1$. z_n nuqtalar $z = 0$ nuqtalarga nisbatan simmetrik to‘plam hosil qilinadi; simmetrik nuqtalarni b_k normallovchi ko‘paytuvchilar o‘zaro mos keladi.

$$b_n(t) = b_n(0)e^{(z_n^2 - z_n^{-2})t} \quad (16)$$

Sohilish nazariyasining berilganlari teskari masalasiga kirishda, ushbu

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= z^{-n} \prod_{k=n+1}^{\infty} k_n^{-1/2} \theta_n(z) \\ \tilde{\psi}_n(z) &= z^{-n} \prod_{k=n+1}^{\infty} k_n^{-1/2} \tilde{\chi}_n(z) \\ \psi_n(z) &= z^{-n} \prod_{k=n+1}^{\infty} k_n^{-1/2} \chi_n(z) \end{aligned} \quad (17)$$

belgilashlarni kiritamiz.

(11) tengliklardan quyidagi tengliklarga egamiz:

$$\tilde{\chi}_n(z) = \chi_n(z^{-1}) \quad (18)$$

$\theta_n(z)$ va $\tilde{\chi}_n(z)$ mos ravishda birlik aylananing ichida va tashqarisida analitik funksiyalar ushbu

$$z\theta_{n-1} + zc_{n+1}\theta_{n+1} + v_n\theta_n = (z + z^{-1})\theta_n \quad (19)$$

$$z\tilde{\chi}_{n-1} + zc_{n+1}\tilde{\chi}_{n+1} + v_n\tilde{\chi}_n = (z + z^{-1})\tilde{\chi}_n \quad (19')$$

tenglamani qanoatlantiradi. $z \rightarrow 0$ intilganda (19) tenglamadan ushbu

$$c_n = \frac{\theta_{n-1}(0)}{\theta_n(0)} \quad (20)$$

ifoda va yechim $\tilde{\chi}_n(z) |z| \rightarrow 0$ intilganda ushbu

$$\tilde{\chi}_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}^{(k)}_n}{z^k}$$

asimptotik yoyilmaga ega bo'lish, hosil bo'gan yoyilmani (19) tenglamaga qo'yib,

$$v_n = \tilde{\chi}_n^{(1)} - \tilde{\chi}_{n-1}^{(1)} \quad (21)$$

ni topamiz.

(12) munosabatni (17) berilganlarga o'xshash quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{\theta_n(z)}{\alpha(z)} = \tilde{\chi}_n(z) + z^{2n} r(z) \chi_n(z), \quad |z| = 1 \quad (22)$$

Oldinlari muvofiq mulohazani takrorlab, ushbu:

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \theta_n(z) \alpha^{-1}(z) & |z| < 1, \\ \tilde{\chi}_n(z) & |z| > 1. \end{cases}$$

bo'lakli-analitik funksiyani kiritamiz.

Bu funksiya $\alpha(z)$ nolga aylanadigan $z_1, z_2, \dots, z_N$ birlik aylana nuqtalarda oddiy qutblarga ega. $\Phi_n(z)$ funksiyaning z_k nuqtadagi chegirmasi (15), (17), (18) tengliklardan

$$\frac{z_k^{2n} b_k}{\alpha'(z_k)} \tilde{\chi}_n(z_k^{-1})$$

ifodaga teng bo'ladi. (22) tenglikdan $\Phi_n(z)$ funksiyaning birlik aylanadagi sakrashi quyidagiga teng:

$$z^{2n} r(z) \chi_n(z)$$

Demak, $|z| \rightarrow \infty$ da funksiya $\Phi_n(z) \rightarrow 1$ bo'ladi.

Bu xarakteristikalarda $\Phi_n(z)$ funksiyani bir qiymatli aniqlaydi:

$$\Phi_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{z_k^{2n} b_k \tilde{\chi}_n(z_k^{-1})}{\alpha'(z_k)(z - z_k)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z'^{2n} r(z') \chi_n(z') dz'}{z' - z} \quad (23)$$

(23) tenglikda birlik aylana bo'yicha integrallash musbat yo'nalishda olinadi. (soat miliga qarama-qarshi). (23) formula yordamida funksiyaga mos yopiq tenglamalar sistimasini yozishimiz mumkin. $\tilde{\chi}_n(z)$ $|z| = 1$ va $\tilde{\chi}_n(z_k^{-1})$ funksiyalarni $\Gamma_n^{(k)}$ orqali belgilaymiz.

Birlik aylanaga z nuqtani tashqaridan intiltirib (23) tenglikdan ushbu

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{z_k^{2n} \Gamma_n^{(k)} b_k}{\alpha'(z_k)(z - z_k)} + \\ + \frac{1}{2} z^{2n} r(z) \chi_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z'^{2n} r(z') \chi_n(z') dz'}{z' - z} \end{aligned} \quad (24)$$

ifodaga ega bo'lamiz, (24) ifodada $z = z_k^{-1}$ $\Gamma_n^{(k)}$ ga mos bog'liq N ta tenglamani hosil qilamiz:

$$\Gamma_n^{(k)} = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{z_m^{2n} b_m \Gamma_n^{(m)}}{\alpha'(z_m)(z_k^{-1} - z_m)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n} r(z) \chi_n(z) dz}{z - z_k^{-1}} \quad (25)$$

c_n, v_n kattaliklar (24), (25) sistemaning yechimlari orqali (20), (21) formulalar dan foydalanilib yechim ushbu

$$\frac{\theta_n(0)}{\alpha(0)} = 1 - \sum_{m=1}^N z_m^{2n-1} \alpha'^{-1}(z_m) b_m \Gamma_n^{(m)} - \frac{1}{2\pi i} \int z^{2n-1} r(z) \chi_n(z) dz \quad (27)$$

$$\tilde{\chi}_n^{(1)} = \sum_{m=1}^N z_m^{2n} \alpha'^{-1}(z_m) b_m \Gamma_n^{(m)} + \frac{1}{2\pi i} \int z^{2n} r(z) \chi_n(z) dz$$

ifodani qo'ygan holda aniqlanadi.

Tekshirish qiyinmaski, yuqorida berilgan (2) ifodadagi L operatorning sochilish nazariyasining berilganlariga qo'yilgan cheklovlardan, $\tilde{\chi}_n^{(1)}$ funksiya avtomatik nolga aylanadigan bo'lsa, $v_n = 0$ bo'lishini kafolatlaydi.

Shredinger operatori holidagi kabi (24), (25) teskari masala tenglamalari oson yechiladi. Bu holatda c_n, v_n koeffisient $r(z)$ diskret spektrning xarakteristikalaridan aniqlanadi. $|z| = 1$ aylanada $\beta(z) = 0$ bo'lgan holda

$$|\alpha(z)|^2 = 1$$

bo'ladi bu (14b) tenglikdan kelib chiqadi. Bu holatda $\alpha(z)$ o'zining nollari $z_i, i = 1, 2, \dots, N$, va $\alpha(0) > 0$ shart bilan bir qiymatli aniqlanadi. Oxirgi shart $\beta(z) = 0$ holga bog'liq bo'lmaydi va umumiy hisoblanadi. U (14a) va (17) formulalardan bevosita kelib chiqadi,

$$\alpha(0) = \prod_{-\infty}^{\infty} c_n^{-1/2} > 0$$

$\beta = 0$ holda

$$\alpha(z) = \text{sign}(\Pi z_i) \Pi \frac{z - z_i}{zz_i - 1}$$

Normalanuvchi b_i ko'paytuvchilar ushbu

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(z_i) = -z_i \alpha'(z_i) b_i \quad (27)$$

formuladan kelib chiquvchi shartlarni qanoatlantirishi shart, qolgan hollarda b_i larni erkin tanlashimiz mumkin.

2-§. Sochilish nazariyasining berilganlari evolyutsiyasi

Berilgan sochilish nazariyasining vaqt bo'yicha evolyutsiyasi (5) analitik sistema yordamida, ushbu

$$\frac{\partial \varphi_n(z)}{\partial t} + (A\varphi)_n = \frac{1}{2}(z - z^{-1})\varphi_n(z),$$

tenglamadan aniqlanadi. Bu tenglamaning o'ng qism shunday tanlanganki, $n \rightarrow -\infty$ intilganda $\varphi_n(z)$ funsiyaning asimptotikasi vaqtga bog'liq bo'lmasin. A operator (7) matrisa yordamida berilgan. Bu tenglamaga (12), (15) ifodalarni qo'yib, quyidagi

$$r(z, t) = r(z, 0)e^{(z-z^{-1})t}$$

$$b_n(t) = b_n(0)e^{(z-z^{-1})t} \quad (27)$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, (z_n) hos qimatlarining vaqtga bog'liq emasligi aniq ravshan.

Shunday qilib biz quyidagi teoremani ko'rsatdik:

Teorema: Agar (1) tenglamaning $c_n(t) > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ yechimlari (9) tenglamaning koeffitsientlari bo'lsa,

$$L(t)\psi_n = \sqrt{c_n}\psi_{n-1} + \sqrt{c_n}\psi_{n+1} + v_n\psi_n$$

operatorning sohilish nazariyasining quyidagicha o'zgaradi:

$$r(z, t) = r(z, 0)e^{(z_n - z_n^{-1})t}, \quad |z| = 1$$

$$r_n(t) = r_n(0)$$

$$b_n(t) = b_n(0)e^{(z_n - z_n^{-1})t}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Bu yerda $v_n = c_{n+1} + c_n$, $n \in \mathbb{Z}$

Ushbu teoremani (1) tenglama uchun qo'yilgan Koshi masalasini yechish uchun qo'llash mumkin.

Huddi shunday qilib, agar (2) operatorning koeffisientlari (1) tenglamani qanoatlantirsa, sohilish nazariyasining berilganlarini vaqtga bog'liqligini topish mumkin:

$$r(z, t) = r(z, 0)e^{(z_n^2 - z_n^{-2})t}$$

$$b_n(t) = b_n(0)e^{(z_n^2 - z_n^{-2})t} \quad (28)$$

3-§.Volterra zanjirining solitonsimon yechimlari.

$\alpha(z)$ funsiyaning birlik aylanada $z = z_1 = x$ nuqtada yagona noli bo'lgan oddiy holni ko'rib chiqamiz. Bu holda (25) algebraik tenglamalar sistemasi $\Gamma_n^{(1)} = \Gamma_n$ yagona tenglamadan iborat bo'ladi:

$$\Gamma_n = 1 - cx^{2n}\Gamma_n$$

Bu yerda c ni (28) ifodadan quyidagi ko'rinishda:

$$c = -\frac{b}{\alpha'(x)(x^{-1} - x)}$$

musbat qilib belgilangan. (27) formulalar yordamida $\theta_n(0), \chi_n^{(1)}$ larni hisoblab,

$$\frac{\theta_n(0)}{\alpha(0)} = 1 + (x^{-2} - 1) \frac{cx^{2n}}{1 + cx^{2n}}$$

$$\chi_n^{(1)} = -(x^{-1} - 1) \frac{cx^{2n}}{1 + cx^{2n}}$$

ifodalarni topamiz. Ushbu

$$n_0 = \left(\ln \frac{1}{x^2} \right)^{-1} \ln c$$

tushunchani kiritamiz.

(16) formuladan n_0 vaqt o'zgaruvchi bo'yicha chiziqli funksiyaligi ravshan:

$$n_0(t) = n_0 - \left(\ln \frac{1}{x^2} \right)^{-1} (x^{-1} - x)t.$$

(20) dan foydalanib, $x_n(t)$ panjaraning siljishini topamiz:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= -\ln \theta_n(0) + \text{const} = \\ &= -\ln \left[1 + (x^{-2} - 1) \frac{x^{2(n-n_0(t))}}{1 + x^{2(n-n(t))}} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Shunday qilib, (29) yechim doimiy tezlikda harakatlanuvchi panjara deformatsiyani ifodalaydi va shu bilan birga deformatsiya shakli vaqt bo'yicha o'zgarmaydi. Bunday yechimlarni biz soliton deb ataymiz. Soliton tezligi $\alpha(z)$ ning nollarining joylashgan o'rniga bog'liq bo'ladi va

$$v = - \left(\ln \frac{1}{x^2} \right)^{-1} (x^{-1} - x)t$$

bo'lib v musbat agar $x < 0$ bo'lsa, va $x > 0$ bo'lsa, manfiy bo'ladi. (eslatib o'tamizki, $|x| < 1$) shu bilan birga $|v| > 1$ oson ko'rsatishimiz mumkin.

Umumiy holda, ya'ni $\alpha(z)$ N ta nolga ega, $r(z) = 0$ bo'lgan holda (25), (26) sochilish nazariyasining teskari masalasi $\Gamma_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$, tenglamalar sistemasi o'zgaruvchi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi va har doim uni yechish mumkin. KdF tenglamasidagidek (4) tenglamaning yechimlari N -solitonli bo'ladilar, ya'ni solitonlarning bir-birlariga urinishlari jarayonini ifodalaydi. Bu masalaning yechilishi va natijasi huddi KdF tenglamasining nazariyasi kabi bo'ladi. Solitonlar tezligi to'qnashuvgacha

va undan keyin ham bir xil o'zgarmaydi, faqat $(n_0(0))$ da solitonlar o'zgarishi mumkin, shu bilan solitonlar to'qnashuvida "ko'p zarrachali" bo'lmaydi.

Huddi shunday usulda (1) Volterra zanjirining solitonlarini oson aniqlash mumkin. Bu holda $\alpha(z)$ ning birlik aylanani ichida juft sonidagi nolga bo'ladi, ya'ni agar $\alpha(z_i) = 0$ bo'lsa, u holda $\alpha(-z_i) = 0$ bo'ladi. Oddiy holda $r(z) = 0$ $\alpha(z)$ ikkita $z_1 = x > 0$, $z_2 = -x$ nolga ega bo'ladi.

(28) tenglikni va $c > 0$ ligini hisobga olib ushbu

$$\frac{z_1 b_1}{\alpha'(z_1)} = -c = \frac{z_2 b_2}{\alpha'(z_2)}$$

belgilashni kiritamiz. $\Gamma_n^{(1)} = \Gamma_n^{(2)} = \Gamma_n$ deb faraz qilib va (26) tenglamani yechib, ushbu

$$\Gamma_n = \left(1 + 2c \frac{x^{2n}}{x^{-2} - x^2} \right)^{-1}, \quad 0 < x < 1$$

yechimni topamiz.

(26), (20) formulalar (1) sistemaning $c_n(t)$ yechimlarini aniqlaydi. Shu bilan birga (16) ifodani ko'rinishini hisobga olishimiz zarur:

$$c(t) = c(0)e^{(x^2 - x^{-2})t}$$

$$c_n = \frac{1 + 2cx^{2n-4}\Gamma_{n-1}}{1 + 2cx^{2n-2}\Gamma_n} \quad (30)$$

Shunday qilib, (30) formula o'zida

$$v = -(\ln x^{-2})^{-1}(x^{-2} - x^2)$$

tezlik bilan harakatlanuvchi solitonni ifodalanishini kiritamiz. Ma'lumki, ixtiyoriy x da tezlik $v(x) < -1$ bo'ladi. (30) ni yechimi $x \rightarrow 1$ da kutilganidek, KdF tenglamasining solitoniga aylanadi. Volterra zanjirining ko'p solitonli yechimlari o'zini huddi KdF tenglamasining N -solitonli yechimlaridek tutadi.

4-§.Volterra zanjirining Gamiltonian tuzilishi.

Cheksiz tenglamalar sistemasi uchun bunday sistemani ajratishi ushbu

$$v_{n+N} = v_n, \quad c_{n+N} = c_n$$

davriy shartni kiritish bilan ekvivalent bo'ladi. (9) masalani hos qiymatlari masalasini ham davriy funksiyalar sinfida yoki $\psi_{n+N} = \psi_n$ shart bilan qaraymiz. Bunda (6) cheksiz matrisa N chiziqli erkli hos qiymatlarga ega. yechimda $N \times N$ simmetrik matrisaga keltiriladi.

Bu matrisa ushbu

$$L = \begin{vmatrix} v_1 & \sqrt{c_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c_1} \\ \sqrt{c_2} & v_2 & \sqrt{c_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c_3} & v_3 & \sqrt{c_4} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \sqrt{c_{N-1}} & v_{N-1} & \sqrt{c_N} \\ \sqrt{c_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & \sqrt{c_N} & v_N \end{vmatrix},$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, uning hos qiymatlari λ_i $i = 1, 2, \dots, N$, lar esa quyidagi

$$\det \|L - \lambda I\| = 0$$

xarakteristik tenglamani qanoatlantiradi. Bu yerda I — birlik matrisa.

Endi, ixtiyoriy λ_i , λ_j hos qiymatning Puasson qavsi nolga teng ekan (L) operatori hos qiymatlari o‘zaro kommutativ bo‘ladi). Uning gamiltoniani ushbu (4) sistema Gamilton sistemasidir va

$$H = \sum_n \frac{v_n^2}{2} + e^{x_{n+1}-x_n},$$

ko‘rinishga ega. v_n, x_n lar esa — kanonik qo‘shma o‘zgaruvchilar. Bu o‘zgaruvchilarda Puasson qavsi quyidagi oddiy ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\{S, T\} = \sum_n \frac{\partial S}{\partial c_n} \frac{\partial T}{\partial v_n} - \frac{\partial S}{\partial v_n} \frac{\partial T}{\partial c_n}$$

c_n, v_n o‘zgaruvchilar yordamida $\{S, T\}$ Puasson qavsi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\{S, T\} = \sum_n c_n \left(\frac{\partial S}{\partial c_n} \frac{\partial T}{\partial v_n} - \frac{\partial S}{\partial v_n} \frac{\partial T}{\partial c_n} \right) - c_{n+1} \left(\frac{\partial S}{\partial c_{n+1}} \frac{\partial T}{\partial v_n} - \frac{\partial S}{\partial v_n} \frac{\partial T}{\partial c_{n+1}} \right)$$

Endi $\frac{\partial \lambda_i}{\partial c_n}, \frac{\partial \lambda_j}{\partial v_n}$ hosilalarni hisoblaymiz. Buning uchun siljitishlar

(qo‘zg‘alishlar) nazariyasidagi mashhur formulasidan foydalanamiz:

$$\delta \lambda = \langle \psi | \delta \lambda | \psi \rangle$$

Bu yerda ψ — birlikdagi L hos vektori normallangani. Biz ushbu

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial c_n} = \frac{1}{\sqrt{c_n}} \psi_n(j) \psi_{n-1}(j), \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial c_n} = \psi_n^2(j)$$

tenglikka ega bo‘lamiz, bu yerda $\psi(j) - \lambda = \lambda_j$ hos qiymatga mos L hos funksiya.

Shuni aytish kerakki, (9) munosabatdan L operatorning ixtiyoriy ikkita hos funksiyasi uchun quyidagi ushbu:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \psi_n(j) \psi_n(i) = W_n(\psi_n(j), \psi_n(i)) - W_{n+1}(\psi_n(j), \psi_n(i))$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Bu tenglikda W (13) formuladan aniqlanadi.

Keltirilgan ifodalardan foydalanib, quyidagi

$$\begin{aligned} \{\lambda_i, \lambda_j\} &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \sum_{n=1}^N W_{n+1}^2(\psi_n(j), \psi_n(i)) - W_n^2(\psi_n(j), \psi_n(i)) = \\ &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \sum_{n=1}^N W_{N+1}^2(\psi_n(j), \psi_n(i)) - W_1^2(\psi_n(j), \psi_n(i)) \end{aligned}$$

ifodani ko‘rsatish mumkin.

Bu ifoda davriy chegaraviy shartda nolga aylanadi, ya’ni

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$$

λ_i hos qiymat Laks juftligi ko‘rinishida harakat integralini ifodalaydi. Shunday qilib, biz ko‘rsatdikki, (4) gamiltonian sistema N darajadagi N ta chiziqli erkli o‘zaro kommutativlashgan harakat integralini ifodalar ekan.

Mashxur Liuvill teoremasi yordamida qaralayotgan sistemada to'liq integrallanishlikni anglatadi.

Yana bilamizki, Toda zanjirining L kvadrat matrisaning izi orqali ifodalanadi:

$$H = \frac{1}{2} Sp L^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \lambda_n^2$$

Yuqorida Liuvillning teoremasiga ko'ra, λ_i kattaliklar (4) sistemaning kanonik harakatlari sifatida tanlashimiz mumkin. Oxirgi formula bu o'zgaruvchilarda gamiltonianni ko'rinishini aniqlaydi. Endi quyidagi holni ko'rib chiqamiz: L hamma hos yechimlari kommutativligi, (4) sistemaning ko'rinishiga bog'liq emas. Shuning uchun biz ushbu,

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial v_n}, \quad \dot{v}_n = \frac{\partial H}{\partial x_n}$$

ko'rinishdagi sistemaning to'liq integrallanishini aytishimiz mumkin, bu yerdan gamiltonian L matrisalarning invariantlaridan tuzilgan ixtiyoriy funksiya; oxirgilarini invariantini $I_n(x, v) = Sp L^n$ ko'rinishda tanlash mumkin, shunday ekan $H = f(I_1, I_2, \dots, I_n)$ va I_n $n = 1, 2, \dots, N$ kanonik harakat hisoblanadi.

Xulosa

Maskur bitiruv malakaviy ishida Volterra zanjirini sochilish nazariyasida teskari masala usulida yechishga qaratilgan. Bu yerda Koshi masalasini qo'yilishi, uning yechimlarini topilishi berilgan. Volterra zanjirini plazma fizikasida qo'llaniladi. Yana bir integrallanuvchi misol sifatida Toda zanjirini keltirishimiz mumkin. Bu tenglamaning aniq yechimi - solitoni aniqlaydigan tipdagi panjaralar ilk bora 1970-yilda o'rganila boshlangan va ushbu sistemaga Toda zanjiri deyildi. Bazi bir adabiyotlarda Volterra zanjiri "Lengmyur zanjiri" deb ham yuritiladi. Volterra zanjirini sochilish nazariyasida teskari masala usulida yechishda Laks juftliklari katta rol o'ynaydi. Ushbu bitiruv malakaviy ishida Volterra zanjirini teskari masala usulida yechish uchun barcha teorema va tariflar keltirilgan.

Adabiyotlar.

1. Теория солитонов: Метод обратной задачи. /Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С.П., П и т а е в с к и й Л. П. Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
2. Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095.
3. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С.П.— УМН, 1976, т. 31, вып. 1, с. 55.
4. Miura R. M. (editor) Lecture Notes in Mathem.— Springer, 1976, v. 515.
5. Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков: Гостехиздат Украины, 1939.
6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
7. Kay I., Moses H. E.— Nuovo Cimento, 1955, v. 2, p. 917;
Kay I., Moses H. E.— Nuovo Cimento, 1956, v. 3, p. 66.
9. Gardner C, et al.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1095.
10. Lax P. D.— Commun. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, p. 467.
11. Flaschka H.— Phys. Rev., 1974, v. B9, p. 1924.
Flaschka H.—Progr. Theor. Phys., 1974, v. 51, p. 703.
12. Манаков С. В.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 543.
13. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.— ТМФ, 1974, т. 21, с. 160.

14. Lax P. D.— Lect. in Appl. Math., 1974, v. 15, p. 85.

ILOVA