

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA  
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI**

**TASVIRIY SAN'AT VA MUHANDISLIK  
GRAFIKASI KAFEDRASI**

**RADJABOV M.R.  
SHAFOATOV Z.J.**

**Ch I Z M A   G E O M E T R I Y A**  
**fanidan**  
**MA'RUZALAR MATNI**

**Qarshi - 2012 yil**

## KIRISH

«Chizma geometriya» fanidan ta'lim texnologiyasi texnik oliy ta'lim muassasalarida ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarni o'qitish texnologiyasi» o'quv qo'llanmasida bayon etilgan dars mashg'ulotlarida yangi texnologiyalarni qo'llash qonun-qoidalariga tayangan holda ishlab chiqildi. Talabalarga bilim berishda zamonaviy ta'lim texnologiyalarining ahamiyati to'g'risida so'z borganda Prezidentimiz I.A.Karimovning "O'quv jarayoniga yangi axborot va pedagogik texnologiyalarni keng joriy etish, bolalarimizni komil insonlar etib tarbiyalashda jonbozlik ko'rsatadigan o'qituvchi va domlarga e'tiborimizni yanada oshirish, qisqacha aytganda, ta'lim-tarbiya tizimini sifat jihatidan butunlay yangi bosqichga ko'tarish diqqatimiz markazida bo'lishi darkor" degan so'zlarini ta'kidlash o'rinlidir. Bu masala "Barkamol avlod yili" Davlat dasturida ham asosiy yo'nalishlardan biri sifatida e'tirof etilgan.

O'qo'llanmada keltirilgan ta'lim texnologiyalarining har biri o'zida o'quv mashg'ulotini o'tkazish shart-sharoiti to'g'risida axborot materiallarini, pedagogik maqsad, vazifa va ko'zlangan natijalarni, o'quv mashg'ulotning rejasi, o'qitishning usul va vositalarini mujassamlashtirgan. Shuningdek, bu o'quv mashg'ulotining texnologik kartasini, ya'ni o'qituvchi va o'quvchining mazkur o'quv mashg'ulotida erishadigan maqsadi bo'yicha hamkorlikdagi faoliyatning bosqichma-bosqich ta'riflanishini ham o'z ichiga oladi.

Qo'llanma tarkibi kirish, ta'lim texnologiyasining konseptual asoslari, har bir mavzu bo'yicha ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarida o'qitish texnologiyasidan iborat. Ma'lumotlar maksimal darajada umumlashtirilgan va tartibga solingan. Ularni o'zlashtirish va yodda saqlab qolishni kuchaytirish uchun jadval va chizmalardan foydalanilgan.

Qo'llanmaning konseptual asoslari qismida dastlab «Chizma geometriya va chizmachilik» fanining dolzarbligi va ahamiyati, mazkur o'quv fanining tarkibiy tuzilishi, o'qitishning usul va vositalarini tanlashda tayanilgan konseptual fikrlar, kommunikatsiyalar, axborotlar berilib, so'ngra loyihalashtirilgan, o'qitish texnologiyalari taqdim qilingan.

(1) To'qqiz turdagi ma'ruza mashg'ulotlari: kirish, tematik, muammoli, vizual-ma'ruza, binar ma'ruza, ma'ruza-munozara, hamkorlikdagi ma'ruza, avvaldan rejalashtirilgan yatoli ma'ruza, sharhlovchi ma'ruza berilgan.

(2) Amaliy mashg'ulotlarida muammoli mashg'ulot, bilimlarni kengaytirish va chuqurlashtirishga yo'naltirilgan mashg'ulot, ishbilarmonlik o'yinlariga asoslangan, aniq holatlarning yechimi bo'yicha seminar o'tish texnologiyalari mavjud va h.k.

Hozirgi kunda jahon tajribasidan ko'rinib turibdiki, ta'lim jarayoniga o'qitishning yangi, zamonaviy usul va vositalari kirib kelmoqda va samarali foydalanilmoqda. Jumladan, Qarshi Davlat universitetida ham innovatsion va zamonaviy pedagogik g'oyalar amalga oshirilmoqda: o'qituvchi bilim olishning yagona manbai bo'lib qolishi kerak emas, balki talabalar mustaqil ishlash jarayonining tashkilotchisi, maslahatchisi, o'quv jarayonining menejeri bo'lishi lozim. Ta'lim texnologiyasini ishlab chiqish asosida aynan shu g'oyalar yotadi.

## **I.BOB. ORTAGONAL PROEKSİYALARNI QAYTA TUZISH USULLARI.**

### **1-ma'ruza. Umumiy ma'lumotlar. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli. (2-soat)**

#### **REJA**

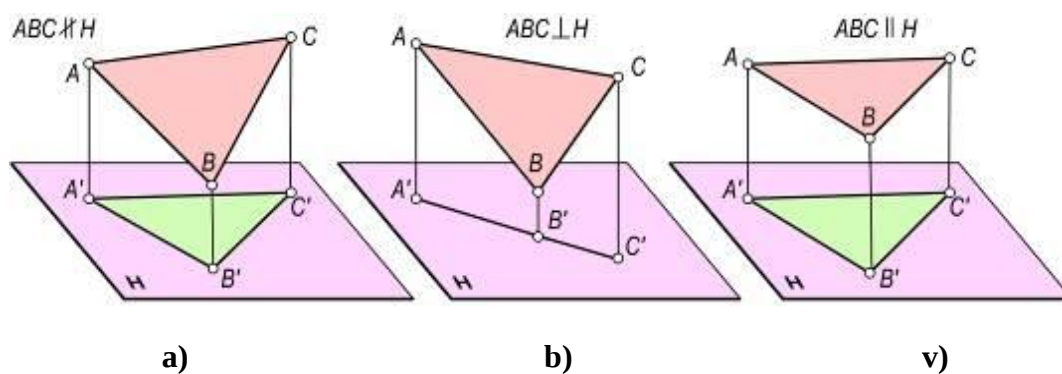
- 1. Umumiy ma'lumotlar.**
- 2. Proyeksiyalar tekisliklarining bittasini almashtirish.**
- 3. Proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish.**

#### **1.1– Umumiy ma'lumotlar**

Geometrik shaklning proyeksiyalaridagi holatlari uning fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan joylashuviga bog'liq. Umumiy vaziyatdagi geometrik shakllarning proyeksiyalari proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalash (1.1,a,b–rasm).

Agar geometrik shaklning proyeksiyasi originaliga teng bo'lib proyeksiyalansa, bu shaklga oid metrik xarakteristikalarini tomonlarining haqiqiy o'lshamlari, uchlaridagi burchaklarning qiymatlari va boshqa xarakteristikalarini aniqlash mumkin (1.1,v–rasm).

Demak, shunday xulosaga kelish mumkinki, agar geometrik shakl proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan fazoda xususiy vaziyatda berilsa yoki umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakl xususiy vaziyatga keltirilsa, bu bilan metrik va pozision masalalarni Yechish mumkin. Shuning uchun ayrim hollarda umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarning berilgan ikki proyeksiyasi asosida maqsadga muvofiq ravishda yangi xususiy vaziyatga keltirilgan proyeksiyalari tuziladi.



**1.1-rasm.**

Geometrik shaklning berilgan ortogonal proyeksiyalari asosida yangi proyeksiyalarini yasash *ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish* deyiladi.

Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarni xususiy vaziyatga keltirish asosan ikki usulda bajariladi.

1. Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shaklni fazoda harakatlantirib, proyeksiyalar tekisligiga nisbatan xususiy vaziyatga keltirish *tekis–parallel harakatlantirish usuli* deyiladi.
2. *Aylantirish usuli*. Bunda proyeksiyalar tekisliklari o'z holatlarini o'zgartirmaydi. Proyeksiyalanuvshi shakl ularga qulay holga kelguncha biror o'q atrofida aylantiriladi.

3. Geometrik shaklning fazoviy vaziyati o'zgartirilmasdan proyeksiyalar tekisliklari sistemasini unga nisbatan xususiy vaziyatga kelguncha yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtirish - *proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli* deyiladi.

Quyida bu usullarni alohida ko'rib shiqamiz.

Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usulida geometrik shaklning dastlabki fazoviy vaziyati saqlanib qoladi. Proyeksiyalar tekisliklari berilgan geometrik shaklga nisbatan xususiy (parallel yoki perpendikulyar) vaziyatda bo'lgan yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtiriladi. Bunda dastlabki va yangi proyeksiyalar tekisliklarining o'zaro perpendikulyarlik sharti bajarilishi talab qilinadi.

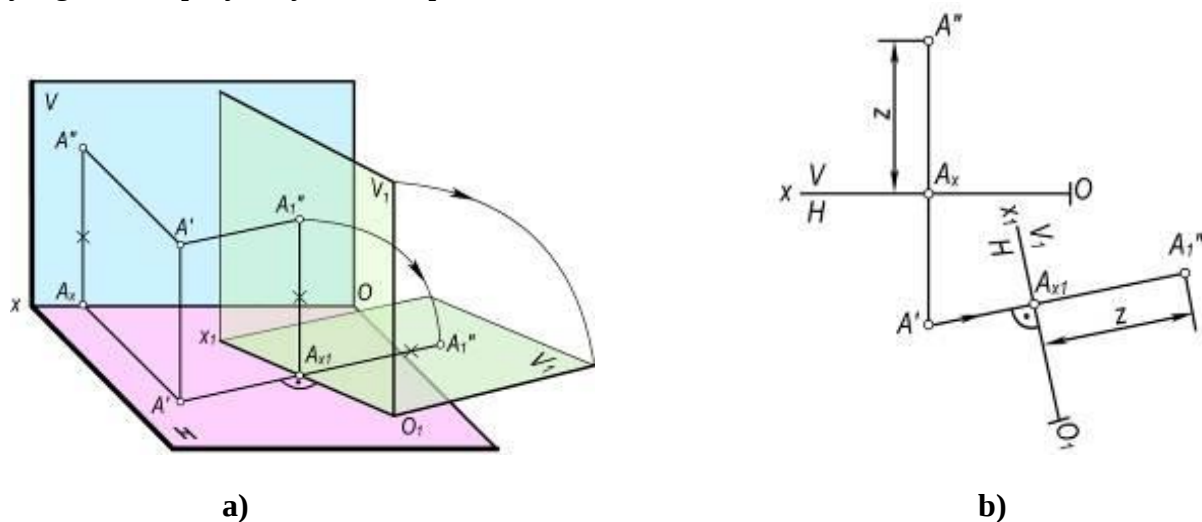
Bu usulda geometrik shaklning fazoviy vaziyati o'zgarmaydi, balki proyeksiyalash yo'nalishi yangi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar qilib olinadi.

Geometrik masalada qo'yilgan shartga ko'ra, proyeksiyalar tekisliklari bir yoki ikki marta ketma-ket almashtirish mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklarining ikki marta almashtirilganda, ular ketma-ket ravishda, masalan, avval geometrik shaklga nisbatan parallel, so'ngra unga perpendikulyar yoki aksinsha qilib almashtiriladi.

## 1.2. Proyeksiyalar tekisliklarining bittasini almashtirish.

Fazodagi biror  $A$  nuqta va uning  $H$  va  $V$  proyeksiyalar tekisliklardagi  $A'$  va  $A''$  ortogonal proyeksiyalari berilgan bo'lsin (1.2,a-rasm). Agar  $V$  tekislikni  $V_1$  tekislik bilan almashtirsak,  $\frac{V_1}{H}$  yangi proyeksiyalar tekisliklari tizimi hosil bo'ladi.  $A$  nuqtaning  $V_1$  tekislikdagi proyeksiyasini yasash uchun berilgan nuqtadan mazkur tekislikka perpendikulyar o'tkazib, yangi frontal proyeksiyasi  $A''_1$  topiladi.



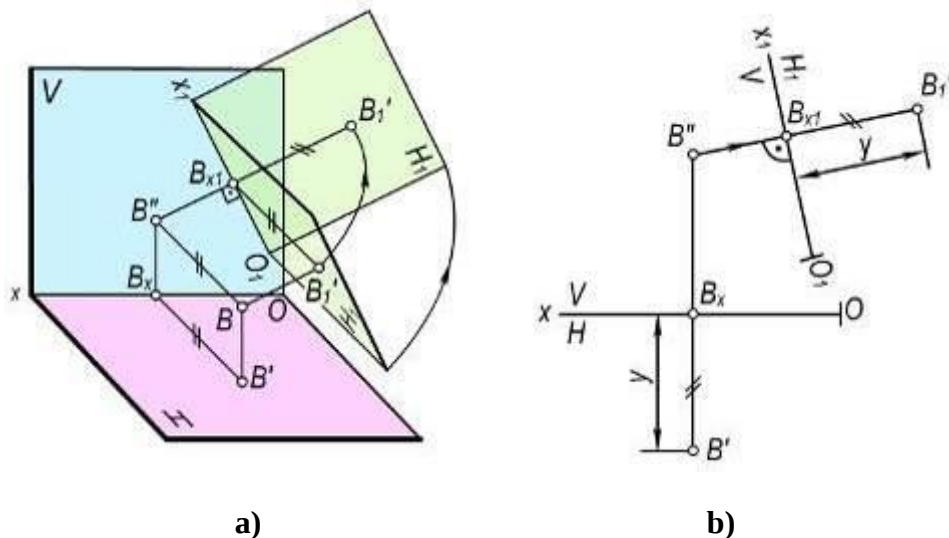
1.2-rasm.

Rasmdagi yasashlardan ko'rinishisha,  $A''$  nuqtadan  $Ox$  o'qigasha bo'lgan masofa  $A''_1$  nuqtadan  $O_1x_1$  o'qigasha bo'lgan masofaga tengdir, ya'ni  $A''_1A_{x1} = A''A_x$ .

Nuqtaning yangi proyeksiyalar tizimidagi chizmasini yasash uchun yangi proyeksiyalar tekisligi dastlabki proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtiriladi.

Chizmada  $A$  nuqtaning yangi  $A''_1$  proyeksiyasini yasash uchun  $A$  nuqtadan  $O_1x_1$  ga perpendikulyar tushiriladi (1.2,b-rasm). Uning davomiga  $A''A_x$  masofa qo'yiladi. Natijada, hosil bo'lgan  $A'$  va  $A''_1$  lar  $A$  nuqtaning yangi  $\frac{V_1}{H}$  tekisliklar sistemasidagi proyeksiyalari

bo'ladi. Frontal proyeksiyalar tekisligi yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtirilganda nuqtaning  $z$  koordinatasi o'zgarmaydi.



1.3-rasm.

$H$  va  $V$  proyeksiyalar tekisliklari tizimida  $B$  nuqta  $B'$  va  $B''$  proyeksiyalari berilgan bo'lsin (1.3,a-rasm).  $H$  tekislikni  $H_1 \perp V$  tekislik bilan almashtirsak,  $\frac{V}{H_1}$  yangi tekisliklar tizimiga ega bo'lamiz.  $B$  nuqtadan  $H$  tekislikka perpendikulyar o'tkazib, bu nuqtaning  $B'_1$  proyeksiyasini yasaymiz. Nuqtaning yangi tekisliklar tizimidagi chizmani yasash uchun (1.3,b-rasm)  $H_1$  tekislikni  $V$  tekislik bilan jipslashtiramiz. Chizmada  $B$  nuqtaning yangi proyeksiyasini yasash uchun uning  $B''$  proyeksiyasidan  $O_1x_1$  ga o'tkazilgan perpendikulyarning davomiga  $B'_1B_{x1}=B''B_x$  masofa qo'yiladi. Natijada hosil bo'lgan  $B'_1$  va  $B''$  yangi  $\frac{V}{H_1}$  tekisliklar tizimidagi  $B$  nuqtaning chizmasi bo'ladi. Demak, gorizontaal proyeksiya tekisligi almashtirilganda, nuqtaning yangi gorizontaal proyeksiyasida  $y$  koordinatasi o'zgarmaydi.

### 1.3. Proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish.

Ayrim geometrik masalalarni Yechishda proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish zarur bo'ladi.

1.4-rasmda  $A$  nuqtaning  $\frac{V}{H}$  tizimida berilgan  $A'$  va  $A''$  proyeksiyalari orqali uning yangi  $A'_1$  va  $A''_1$  proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Buning uchun avval  $V$  tekislikni  $V_1$  tekislik bilan almashtirib,  $\frac{V_1}{H}$  tizimi hosil qilinadi. Buning uchun chizmada ixtiyoriy vaziyatda  $O_1x_1$  proyeksiyalar o'qi tanlab olinadi,  $A$  nuqtaning yangi  $A''_1$  proyeksiyasini yasash uchun uning  $A'$  proyeksiyasidan  $O_1x_1$  proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga  $A''A_x$  masofa qo'yiladi. Natijada,  $A$  nuqtaning  $\frac{V}{H_1}$  tizimidagi yangi  $A''_1$  proyeksiyasi hosil bo'ladi.

$A$  nuqtaning  $A'_1$  proyeksiyasini yasash uchun  $\frac{V_1}{H}$  tizimdan  $\frac{V_1}{H_1}$  tizimga o'tiladi. Buning uchun ixtiyoriy vaziyatda joylashgan  $O_2x_2$  o'qi olinadi va nuqtaning  $A''_1$  proyeksiyasidan  $O_2x_2$  ga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga  $A'A_{x1}$  masofa qo'yiladi. Shunday qilib  $O_2x_2$  tizimda  $A$  nuqtaning  $A''_1$  va  $A'_1$  yangi proyeksiyalari hosil bo'ladi.

1.5-rasmda  $B$  nuqtaning  $\frac{V}{H_1}$  tizimdan  $\frac{V_1}{H}$  va  $\frac{V_1}{H_1}$  tizimga o'tish natijasida hosil

bo'ladigan yangi  $B''_1$  va  $B'_1$  proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan.

Nuqtaning yangi proyeksiyalarini yasash qoidalariga asosanib, geometrik shakllarning yangi, maqsadga muvofiq bo'lgan proyeksiyalarini yasash mumkin.

**1-masala.** Umumiy vaziyatda berilgan  $AB(A'B', A''B'')$  kesmaning haqiqiy uzunligi aniqlash talab etilsin (1.6-rasm).

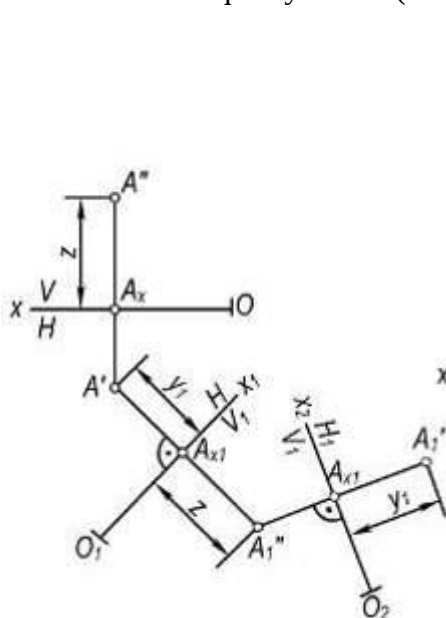
**Yechish.** Buning uchun umumiy vaziyatda berilgan  $AB$  kesmaga parallel qilib gorizontal yoki frontal proyeksiyalar tekisligini yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtiriladi. Chizmada masalani Yechish uchun uning yangi  $O_1x_1$  proyeksiyalar o'qini kesmaning biror, masalan,  $A'B'$  gorizontal proyeksiyasiga parallel qilib olinadi. Hosil bo'lgan  $\frac{V_1}{H}$  proyeksiyalar tekisliklari tizimida  $AB$  kesma  $V_1$  proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'ladi va bu tekislikda u haqiqiy uzunligiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

**2-masala.** Umumiy vaziyatdagi  $P(P_N, P_V)$  tekislikni frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (1.7-rasm).

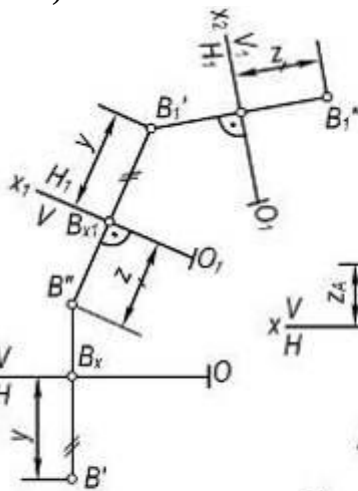
**Yechish.** Ma'lumki, frontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizontal izi  $Ox$  o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun umumiy vaziyatdagi  $P$  tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish uchun yangi  $O_1x_1$  proyeksiyalar o'qini tekislikning  $P_N$  gorizontal iziga ixtiyoriy joydan perpendikulyar qilib olinadi.

Tekislikning yangi  $P_{V1}$  izining yo'nalishini aniqlash uchun tekislikning  $P_V$  iziga tegishli biror, masalan,  $A(A', A'')$  olib, uning yangi  $A''_1$  frontal proyeksiyasi yasaladi. Tekislikning yangi  $P_{1V}$  izini  $P_{x1}$  va  $A''_1$  nuqtalardan o'tkaziladi. Chizmada ko'rsatilgan  $\alpha$  burchak  $P$  tekislikning  $H$  tekislik bilan tashkil etgan burshagi bo'ladi.

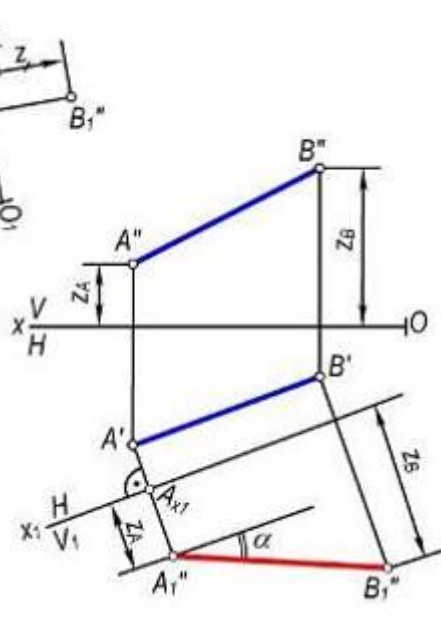
**3-masala.**  $AB(A'B', A''B'')$  to'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi  $Q(Q_H, Q_V)$  tekislik bilan kesishish nuqtasi yasalsin (1.8-rasm).



1.4-rasm.



1.5-rasm.

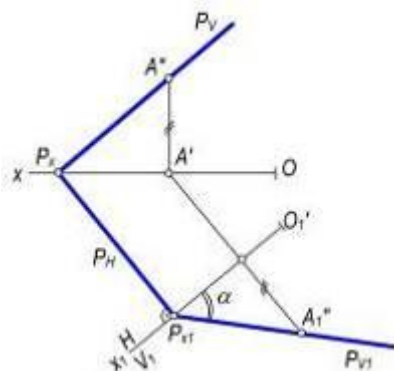


1.6-rasm.

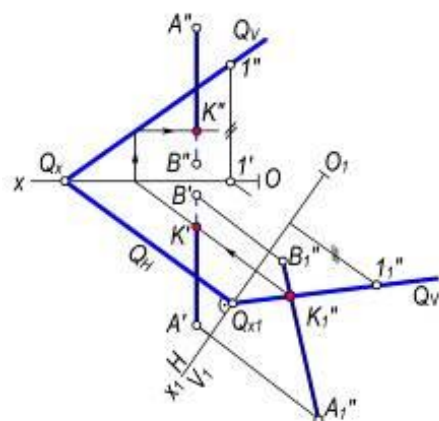
**Yechish.** Masalani yechish uchun  $Q$  tekislikni gorizontal yoki frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiramiz. Buning uchun yangi  $O_1x_1$  proyeksiyalar o'qini tekislikning biror iziga masalan,  $Q_H$  ga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Natijada, tekislikning yangi  $Q_{V1}$  izini hamda to'g'ri chiziqning  $A''_1 B''_1$  proyeksiyasi yasaladi. Hosil bo'lgan kesmaning  $A''_1 B''_1$  proyeksiyasi bilan tekislik  $Q_{V1}$  izining kesishgan  $K''_1$  nuqtasi  $AB$  kesmaning  $Q$  tekislik

bilan kesishish nuqtasi bo‘ladi. Bu nuqtani teskari yo‘nalishda proyeksiyalab, berilgan to‘g‘ri chiziq kesmasi bilan tekislikning kesishish nuqtasining  $K'$  va  $K''$  proyeksiyalari yasaladi.

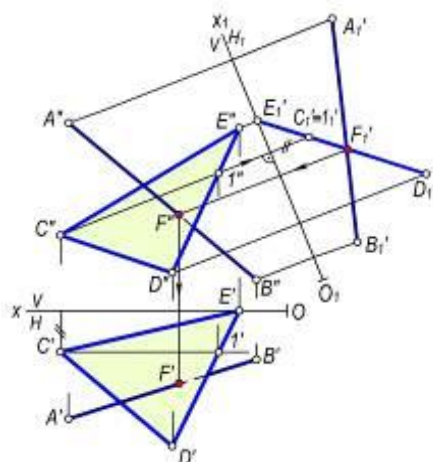
Xuddi shu usul bilan  $AB(A'B', A''B'')$  to‘g‘ri chiziqning  $\Delta SDE(\Delta S'D'E', \Delta S''D''E'')$ , bilan kesishish nuqtasining  $F'$  va  $F''$  proyeksiyalarini yasaladi (1.9–rasm). Bunda mazkur uchburchak tekislik proyeksiyalovchi tekislik vaziyatga keltiriladi. Buning uchun chizmada  $\Delta SDE$  tekislikning biror bosh chizig‘iga, masalan,  $S1(S'1', S''1'')$  frontaliga perpendikulyar qilib yangi  $O_1x_1$  proyeksiyalar o‘qini o‘tkaziladi. Uchburchakning  $S'_1D'_1E'_1$  to‘g‘ri chiziq kesmasi tarzida proyeksiyalangan proyeksiyasi va kesmaning  $A'_1B'_1$  yangi proyeksiyalari yasaladi. Ularning o‘zaro kesishgan  $F'_1$  nuqtasi belgilanadi, so‘ngra  $F$  nuqtaning frontal  $F''$  va gorizontal  $F'$  proyeksiyalarini yasaladi.



1.7-rasm.



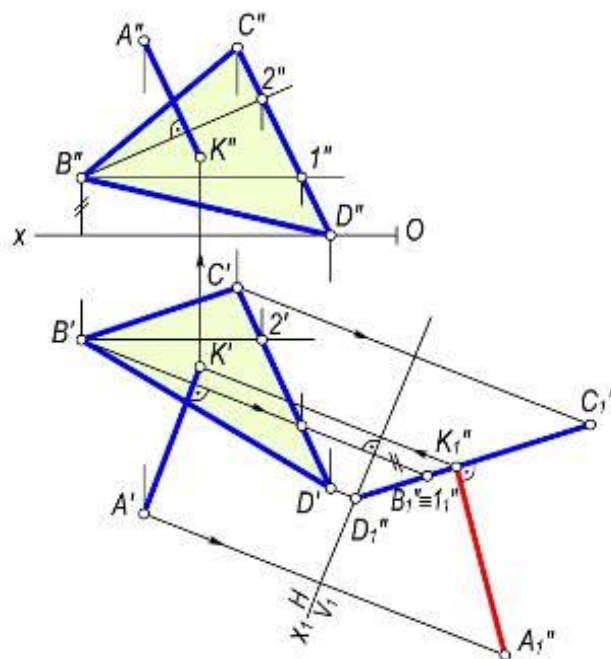
1.8-rasm.



1.9-rasm.

**4–masala.**  $A(A', A'')$  nuqtadan  $\Delta BSD(\Delta B'S'D', \Delta B''S''D'')$  tekislikkacha bo‘lgan masofani aniqlansin (1.10–rasm).

**Eshish.** Bu masofa  $A$  nuqtadan  $\Delta BSD$  tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan o‘lshanadi. Masalani Yechish uchun chizmada yangi proyeksiyalar o‘qini uchburchak tekisligining asosiy chiziqlaridan biriga, masalan, gorizontaliga perpendikulyar, ya‘ni  $O_1x_1 \perp B'1'$  qilib o‘tkaziladi. So‘ngra uchburchakning to‘g‘ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalangan yangi proyeksiyalovchi  $D''_1B''_1S''_1$  vaziyatini va nuqtaning  $A''_1$  proyeksiyasi yasaladi. Izlangan masofaning haqiqiy uzunligi  $A''_1$  dan  $D''_1B''_1S''_1$  kesmaga o‘tkazilgan  $A''_1K''_1$  perpendikulyar bo‘ladi. Bu masofaning gorizontal va frontal proyeksiyalari teskari proyeksiyalash bilan  $K'$  va  $K''$  proyeksiyalarni aniqlanadi. Mazkur  $K'$  va  $K''$  nuqtalar  $A$  nuqtaning  $A'$  va  $A''$  proyeksiyalaridan uchburchakning gorizontal hamda frontallariga mos ravishda tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida bo‘ladi.



1.10-rasm.

**5-masala.**  $\Delta ABS(\Delta A'B'S', \Delta A''B''S'')$  va  $\Delta EFD(\Delta E'F'D', \Delta E''F''D'')$  tekisliklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari va uchburchaklarning ko'rinishligi aniqlansin. (1.11-rasm).

**Yechish.** Masalani yechish uchun berilgan uchburchaklarning biri, masalan,  $\Delta EFD$  ni proyeksiyalovchi vaziyatga keltiriladi. Buning uchun chizmada  $\Delta EFD$  ning  $D'1'$  va  $D''1''$  gorizontalinining proyeksiyalarini hamda unga perpendikulyar, ya'ni  $O_1X_1 \perp D'1'$  qilib yangi proyeksiyalar o'qini o'tkaziladi. So'ngra uchburchaklarning yangi  $A''_1B''_1S''_1$  va  $E''_1F''_1D''_1$  proyeksiyalari yasaladi. Bunda  $\Delta EFD$  ning mazkur proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalanadi. Proyeksiyalar tekisliklarining yani tizimida ikki uchburchaklar  $2''_13''_1$  to'g'ri chiziq bo'yisha kesishadi. Kesishish chizig'ining  $2'3'$  gorizental va  $2''3''$  frontal proyeksiyalarini teskari proyeksiyalash bilan uchburchaklarning dastlabki berilgan proyeksiyalari aniqlanadi. So'ngra chizmada topilgan  $2'3'$  va  $2''3''$  kesmalarni  $\Delta EFD$  ning  $E'F'$ ,  $E''F''$  va  $D'F'$ ,  $D''F''$  tomonlari bilan kesishgan  $L'$ ,  $L''$  va  $T'$ ,  $T''$  nuqtalar aniqlanadi. Natijada, hosil bo'lgan  $L'T'$  va  $L''T''$  chiziqlar ikki uchburchak kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi.

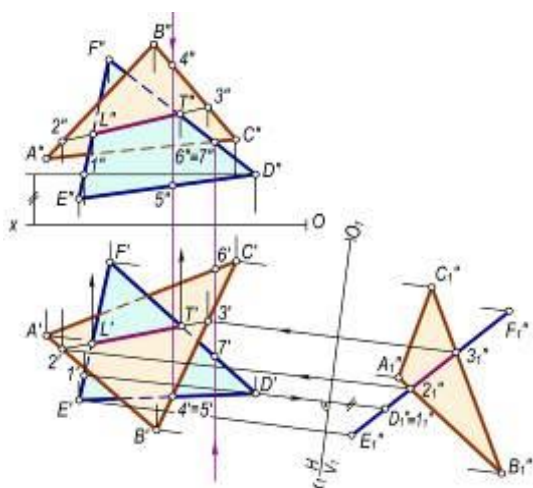
Chizmada uchburchaklarning ko'rinishligini aniqlash uchun ulardagi  $4'$ ,  $4''$  va  $5'$ ,  $5''$ , shuningdek,  $6'$ ,  $6''$  va  $7'$ ,  $7''$  konkurent nuqtalardan foydalaniladi.

**6-masala.**  $\Delta ABS(\Delta A'B'S', \Delta A''B''S'')$  va  $\Delta ABD(\Delta A'B'D', \Delta A''B''D'')$  tekisliklari orasidagi ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (1.12-rasm).

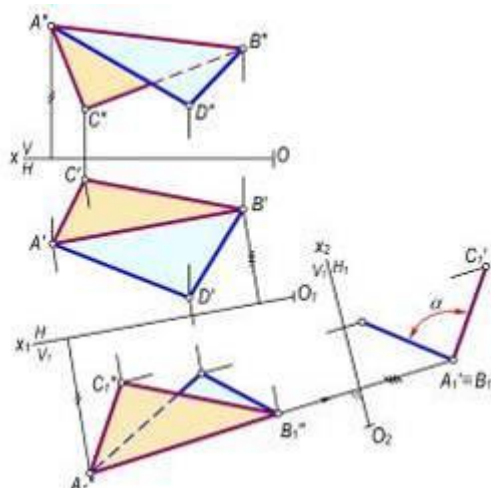
**Yechish.** Bu burchak berilgan  $\Delta ABS$  va  $\Delta ABD$  tekisliklariga perpendikulyar bo'lgan tekisliklar orasidagi chiziqli burchak bilan o'lsanadi. Shuning uchun ham yangi proyeksiyalar tekisligini ikki tekislikning umumiy  $AB$  kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib olinadi. Lekin  $AB$  qirra umumiy vaziyatda bo'lgani uchun  $Ox$ ,  $\frac{V}{H}$  proyeksiyalar

tekisliklari tizimini avval  $O_1X_1$ ,  $\frac{V_1}{H} \parallel AB$  qilib (chizmada  $O_1X_1 \parallel A'B'$ ), so'ngra  $O_2X_2$ ,  $\frac{V_1}{H_1} \perp AB$  qilib (chizmada  $O_2X_2 \perp A''_1B''_1$ ) ketma-ket almashtiriladi.

Natijada,  $\Delta ABS$  va  $\Delta ABD$  yangi  $H_1$  proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar vaziyatda bo'lib qoladi va o'zaro kesishuvchi kesmalar shaklida proyeksiyalanadi. Bu kesmalar orasidagi  $\alpha$  chiziqli o'tkir burchak izlangan burchak bo'ladi.



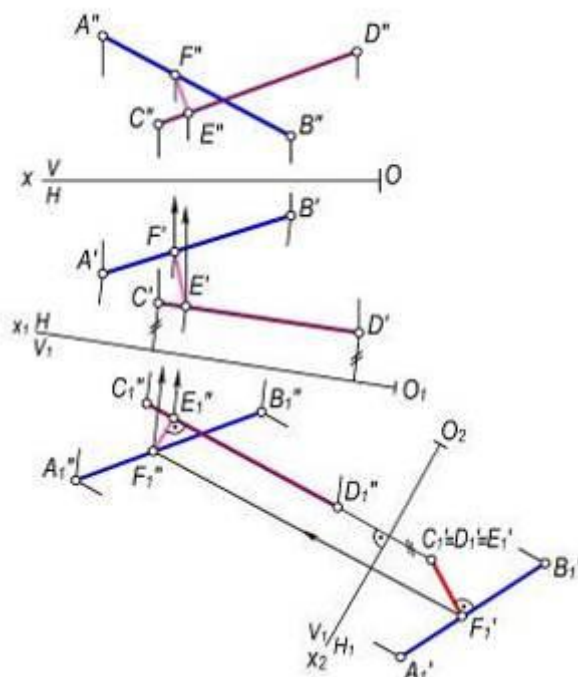
1.11-rasm.



1.12-rasm.

**7-masala.**  $AB(A'B', A''B'')$  va  $SD(S'D', S''D'')$  ushrashmas to'g'ri chiziqli kesmalari orasidagi masofani aniqlansin (1.13-rasm).

**Yechish.** Bunda  $SD$  kesmaga parallel qilib yangi  $V_1$  frontal proyeksiyalarni tekisligi o'tkaziladi. Bu tekislikda  $SD$  va  $AB$  kesmalarning yangi frontal proyeksiyalari  $S''_1D''_1$  va  $A''_1B''_1$  lar yasalanadi. So'ngra  $S''_1D''_1$  kesmaga perpendikulyar qilib  $N_1$  tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikda  $S''_1D''_1$  va  $A''_1B''_1$  larning yangi gorizontal proyeksiyalari topiladi. Bunda  $SD$  kesma  $S'_1 \equiv D'_1$  nuqta ko'rinishida proyeksiyalanadi. Bu nuqtadan  $A'_1B'_1$  kesmaga tushirilgan  $E'_1F'_1$  kesmaning uzunligi  $SD$  va  $AB$  lar orasidagi masofa bo'ladi. Teskari proyeksiyalash bilan  $E$  va  $F$  nuqtalarning  $E', E''$  va  $F', F''$  proyeksiyalari yasalgan.



1.13-rasm.

Yuqoridagi masalani, birinshidan,  $V_1$  tekislikni  $AB$  kesmaga parallel va  $H_1$  tekislikni uning yangi proyeksiyasiga perpendikulyar qilib o'tkazib yehsa, ikkinshidan esa  $AB$  yoki  $SD$  kesmalardan biriga parallel qilib avval  $H$  tekislikni, so'ngra ularning proyeksiyalaridan biriga perpendikulyar qilib  $V$  ni almashtirsa ham bo'ladi.

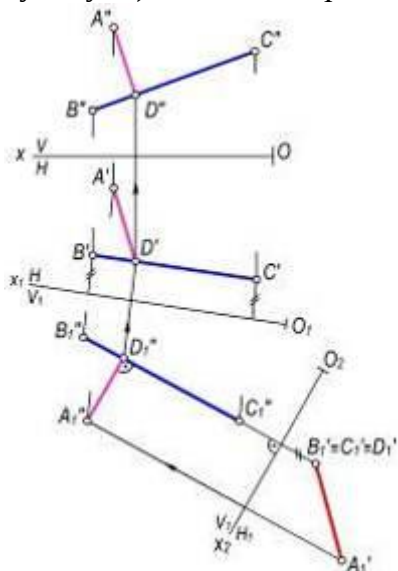
**8-misol.** Berilgan  $A(A', A'')$  nuqtadan  $BS(B'S', B''S'')$  kesmagasha bo'lgan masofa aniqlansin (1.14-rasm).

**Yechish.** Buning uchun  $V$  tekislikni  $BS$  kesmaga parallel bo'lgan  $V_1$  tekislik bilan almashtiramiz, ya'ni  $V_1 \parallel B'S'$  sharti bajarilsin.  $BS$  kesma va  $A$  nuqtaning  $V_1$  tekislikdagi yangi  $B''_1S''_1$  va  $A''_1$  frontal proyeksiyalari hosil qilinadi. So'ngra  $H$  tekislikni  $H_1$  tekislik bilan almashtiriladi. Bunda  $H_1 \perp B''_1S''_1$  bo'lishi kerak.

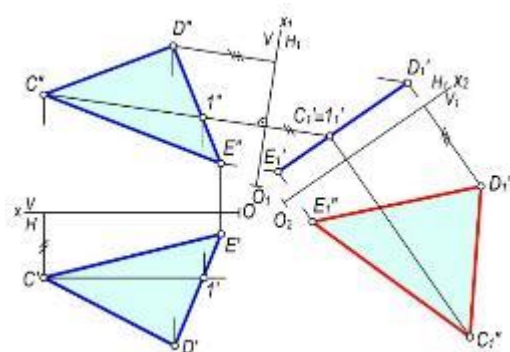
$H_1$  tekislikda  $BS$  va  $A$  larning yangi gorizontal proyeksiyalari yasaladi. Hosil bo'lgan  $A'_1$  va  $B'_1 \equiv S'_1$  nuqtalar orasidagi masofa  $A$  nuqtadan  $BS$  kesmagasha bo'lgan masofa bo'ladi. Bu misolni  $H$  ni  $H_1 \parallel B''S''$ , so'ngra  $V$  ni  $V_1 \parallel B'_1S'_1$  qilib almashtirish yo'li bilan ham Yechish mumkin.

**9-masala.**  $\Delta SDE(\Delta S'D'E', \Delta S''D''E'')$  uchburchakning proyeksiyalariga asosan uning haqiqiy kattaligi aniqlansin (1.15-rasm).

**Yechish.** Bunda  $H$  tekislikni  $H_1$  tekislikka shunday almashtiramizki,  $H_1 \perp \Delta SDE$  bo'lsin. Buning uchun  $H_1 \perp S''D''$  (uchburchak frontalining frontal proyeksiyasi) bo'lsa kifoya qiladi. Uchburchakning uchlarini  $H_1$  tekislikka proyeksiyalab, yangi  $S'_1D'_1E'_1$  gorizontal proyeksiyani to'g'ri chiziq ko'rinishida hosil qilinadi. So'ngra  $V$  tekislikni  $V_1$  tekislik bilan shunday almashtiramizki,  $V_1 \parallel S'_1D'_1E'_1$  bo'lsin.  $S, D, E$  nuqtalarning  $V_1$  tekislikdagi yangi  $S''_1D''_1E''_1$  frontal proyeksiyalari yasaladi. Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirib,  $\Delta S''D''E'' = \Delta SDE$  haqiqiy kattaligini hosil qilamiz. Bu misolni uchburchakning gorizontalini o'tkazib va unga avval  $V_1$  ni perpendikulyar qilib tekislik o'tkazish va hosil bo'lgan kesmaga (uchburchakning proyeksiyasi)  $H_1$  tekislikni parallel qilib o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.



1.14-rasm.



1.15-rasm.

### Nazorat savollari

1. Proyeksiyalarni qayta qurishning qanday usullari mavjud?
2. Proyeksiyalar tekisliklarni almashtirish usulining mohiyati nimadan iborat?
3. Umumiy vaziyatdagi uchburchakning haqiqiy kattaligini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklari ketma-ket qanday vaziyatlarda almashtiriladi.

## 2-ma'ruza. Aylantirish usuli. Ustma-ust qo'yish usuli. (2-soat)

### REJA

1. Geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish. Nuqtani aylantirish.
2. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirish.
3. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklariga tegishli o'q atrofida aylantirish yoki tekislikning izi atrofida aylantirish.

**Aylantirish usuli.** Aylantirish usuli parallel harakatlantirish usulining xususiy holi hisoblanadi. Bu usulda geometrik shaklga tegishli nuqtaning trayektoriyasi ixtiyoriy bo'lmay, balki berilgan biror o'qqa nisbatan aylana bo'yisha harakatlanadi. Aylana markazi berilgan o'qda joylashgan bo'lib, aylanish radiusi esa harakatlanuvshi nuqta bilan aylanish o'qi orasidagi masofaga teng bo'ladi yoki aylanish tekisligini aylanish o'qi bilan kesishgan nuqtasi bo'ladi.

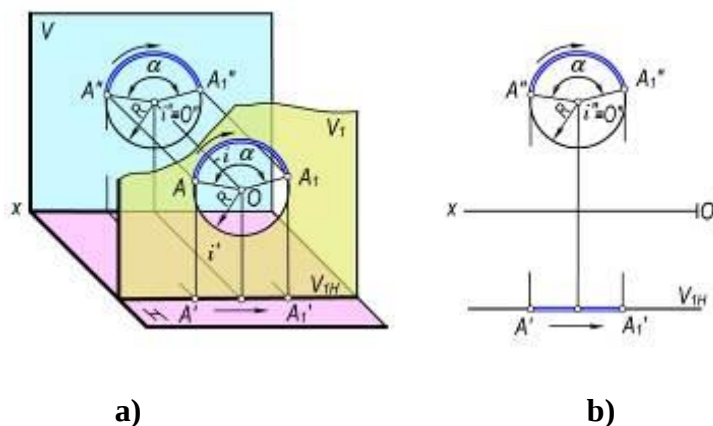
Aylanish o'qlari proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan perpendikulyar, parallel, shuningdek, proyeksiyalar tekisligiga tegishli va boshqa vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

Quyida turli vaziyatlarda joylashgan aylanish o'qlari atrofida aylantirish usullarni ko'rib shiqamiz.

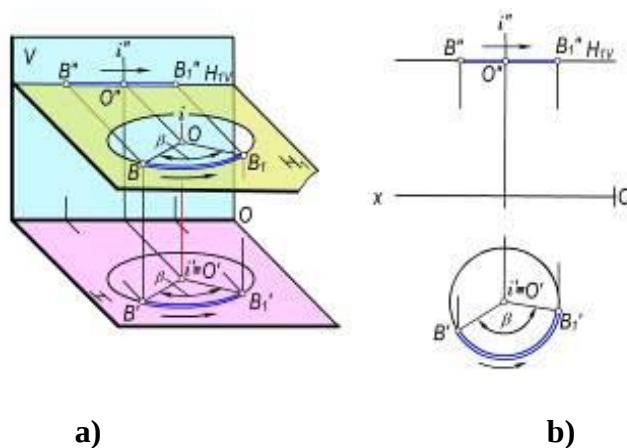
#### 2.1. Geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish. Nuqtani aylantirish.

$H$  va  $V$  tekisliklar sistemasida ixtiyoriy  $A$  nuqta va  $i$  aylanish o'qi berilgan bo'lsin (2.1 a-rasm). Agar  $A$  nuqtani  $i \perp V$  aylanish o'qi atrofida harakatlantirsak, mazkur nuqta  $V$  tekislikka parallel  $V_1$  tekislikda radiusi  $OA$  ga teng aylana bo'yisha harakatlanadi. Shuningdek,  $A$  nuqtaning ko'pyoqliklar trayektoriyasining gorizontaal proyeksiyasi  $V_1$  tekislikning  $V_{1N}$  izi bo'yisha harakat qiladi. Chizmada  $V_1$  tekislik  $V$  tekislikka parallel bo'lgani uchun  $A$  nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo'yisha, gorizontaal proyeksiyasi  $V_{1N} \parallel Ox$  bo'yisha harakat qiladi (2.1-rasm, b).

$B$  nuqtaning  $H$  tekislikka perpendikulyar  $i$  o'qi atrofida aylantirilishi 2.2-rasm, a da ko'rsatilgan.  $B$  nuqta  $B_1$  vaziyatga radiusi  $OB$  ga teng aylana bo'yisha  $H$  tekislikka parallel bo'lgan  $N_1$  tekislikda harakatlanadi. Bunda  $N_1$  tekislik  $H$  tekislikka parallel bo'lgani uchun  $B$  nuqta ko'pyoqliklar trayektoriyasining gorizontaal proyeksiyasi aylana bo'yisha, frontal proyeksiyasi  $N_1$  tekislikning  $N_{1V}$  izi bo'yisha  $Ox$  ga parallel bo'lib harakatlanadi. (2.2,b-rasm).



2.1-rasm.



2.2-rasm.

Yuqorida bayon qilinganlardan quyidagi xulosalarga kelamiz:

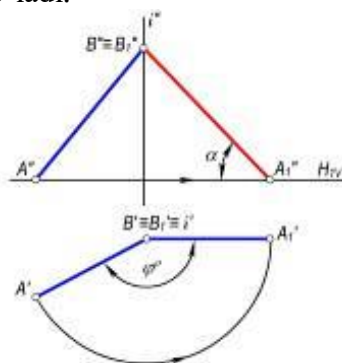
**1-xulosa.** Agar  $A$  nuqta frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, mazkur nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo'yisha, gorizontal proyeksiyasi  $Ox$  o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yisha harakatlanadi.

**2-xulosa.** Agar nuqta gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, nuqtaning gorizontal proyeksiyasi aylana bo'yisha, frontal proyeksiyasi  $Ox$  o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yisha harakatlanadi.

Nuqtani proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish qoidalariga asosan umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shakllarni xususiy yoki talab qilingan vaziyatga keltirish mumkin.

**1-masala.** Umumiy vaziyatdagi  $AB(A'B', A''B'')$  kesmani  $V$  tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin. (2.3-rasm).

**Yechish.**  $AB$  kesmaning biror, masalan  $B$  ushidan  $i \perp H$  aylantrish o'qi o'tkaziladi. So'ngra bu o'q atrofida kesmaning  $A'B'$  gorizontal proyeksiyasini  $A'B' \parallel Ox$  vaziyatga kelguncha aylantiramiz. Bunda  $AB$  kesmaning  $A''$  nuqtasi  $N_{1V} \parallel Ox$  bo'yisha harakatlanib,  $A''_1$  vaziyatni egallaydi. Shaklda hosil bo'lgan  $AB$  kesmaning yangi  $A'_1B'_1$  va  $A''_1B''_1$  proyeksiyalari uning  $V$  tekislikka parallelligini ko'rsatadi. Shakldagi  $\alpha$  burchak  $AB$  kesmani  $H$  tekislik bilan hosil etgan burshagi bo'ladi.



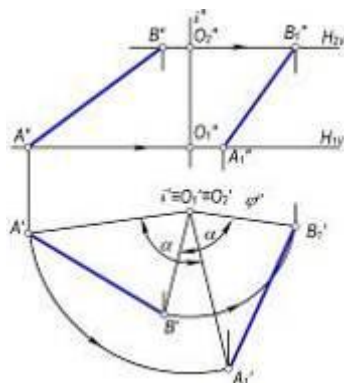
2.3-rasm.

**2-masala.**  $AB(A'B', A''B'')$  kesmani  $i \perp H$  o'q atrofida  $\alpha$  burchakka aylantirish talab qilinsin (2.4-rasm).

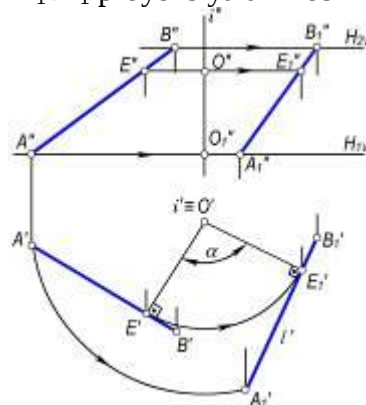
**Yechish.** Kesmani  $\alpha$  burchakka aylantirish uchun uning  $A'$  va  $B'$  proyeksiyalarini berilgan  $i$  o'qi atrofida  $A'O'_1$  va  $B'O'_2$  radiuslari bo'yisha  $\alpha$  burchakka aylantirish kifoya qiladi.

Aylantirish usulining qoidasiga muvofiq kesma uchlarining  $A''$  va  $B''$  proyeksiyalari  $N_{1V} \parallel Ox$  va  $N_{2V} \parallel Ox$  bo'yisha harakatlanadi. Natijada, hosil bo'lgan  $A_1B_1(A'_1B'_1, A''_1B''_1)$  kesma

**AB** kesmaning  $\alpha$  burchakka aylantirilgan vaziyati bo‘ladi. Bu misolni quyidagisha Yechish ham mumkin: **AB** kesmaning **A'B'** gorizontal proyeksiyasiga  $i$  aylanish o‘qining gorizontal proyeksiyasi  $i'$  dan unga perpendikulyar o‘tkaziladi. (2.5–rasm). Hosil bo‘lgan **E'O'** aylantirish radiusni talab qilingan  $\alpha$  burchakka aylantiriladi va **E'1O'** ga perpendikulyar qilib,  $\ell'$  chiziqli o‘tkaziladi. Bu chiziqqa shakldagi **A'E'=A'1E'1** va **E'B'=E'1B'1** kesmalar o‘lshab qo‘yiladi. So‘ngra **A'1B'1** ning frontal proyeksiyasi **A''1B''1** yasaladi. Natijada **AB** kesmaning  $\alpha$  burchakka aylantirilgan vaziyatining yangi **A'1B'1** va **A''1B''1** proyeksiyalari hosil bo‘ladi.



2.4-rasm.



2.5-rasm.

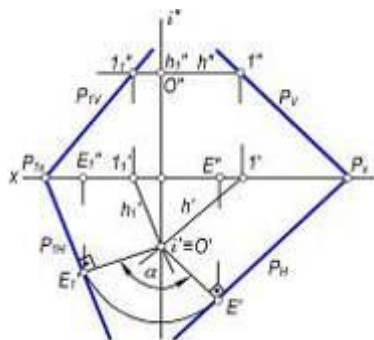
**3–masala.** Izlari bilan berilgan umumiy vaziyatdagi **P** tekislikni  $i \perp H$  o‘qi atrofida  $\alpha$  burchakka aylantirish talab qilinsin (2.6-rasm).

**Yechish.** **P** tekislikning  $h(h', h'')$  gorizontali  $i$  aylanish o‘qi orqali o‘tkaziladi va  $h \cap i = O(O', O'')$  aniqlanadi. So‘ngra  $O'$  nuqtadan  $P_N$  ga **O'E'** perpendikulyar tushiriladi. Hosil bo‘lgan **O'E'** berilgan **P** tekislikni  $i$  o‘q atrofida aylantirish radiusi bo‘ladi. Tekislikning  $P_N$  gorizontali izi **O'E'** radius bo‘yicha  $\alpha$  burchakka aylantirilganda, u  $P_{1N}$  vaziyatni egallaydi.

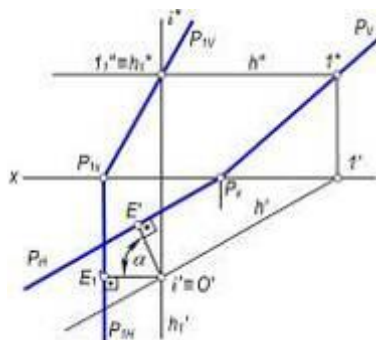
Tekislikning yangi  $P_{1V}$  frontal izini aniqlash uchun uning gorizontaldan foydalanamiz. Ma‘lumki, **P** tekislik  $\alpha$  burchakka aylantirilganda uning  $h(h', h'')$  gorizontali  $h_1(h_1', h_1'')$  vaziyatni egallaydi. Shuning uchun tekislikning  $P_{1V}$  izini yasashda  $P_{1X}$  va  $1_1''$  nuqtalar tutashtiriladi.

**4–masala.** Umumiy vaziyatdagi **P** ( $P_H, P_V$ ) tekislikni  $i(i', i'') \perp H$  o‘q atrofida aylantirib frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (2.7–shakl).

**Yechish.** **P** tekislikning  $h(h', h'')$  gorizontali  $i(i', i'')$  o‘qi orqali o‘tkaziladi va gorizontaning  $i'$  o‘qi bilan kesishish nuqtasi  $O(O', O'')$  topiladi. Tekislik bilan uning  $h(h', h'')$  gorizontali  $O'$  atrofida aylantirilib, proyeksiyalovchi, ya‘ni  $h_1' \perp O'x$  vaziyatga keltiriladi. Gorizontaning  $h''$  frontal proyeksiyasi esa  $h_1'' \equiv 1_1''$  vaziyatda bo‘ladi. Tekislikning yangi  $P_{1V}$  frontal izi  $P_{1X}$  va  $1_1''$  nuqtalardan o‘tadi.



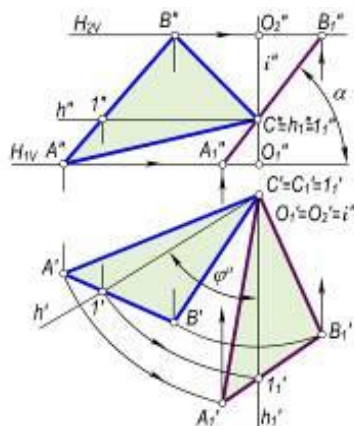
2.6-rasm.



2.7-rasm.

**5-masala.**  $\triangle ABS(\triangle A'B'S', \triangle A''B''S'')$  tekislikning  $H$  tekislik bilan tashkil etgan  $\alpha$  burshagini aniqlansin (2.8-rasm).

**Yechish.** Izlangan  $\alpha$  burchakni aniqlash uchun berilgan  $\triangle ABS$  tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish kerak bo'ladi. Buning uchun uchburchakning biror, masalan,  $S$  nuqtasidan  $i' \perp H$  aylanish o'qi o'tkaziladi va bu o'q atrofida uchburchakni  $h_1 \perp V$  (epyrda  $h'_1 \perp V$ ) vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bunda, uchburchakning  $A, B$  va  $S$  nuqtalari ham  $\varphi^\circ$  burchakka harakatlanadi. Chizmada uchburchak uchlarning yangi  $A'_1, B'_1$  va  $S'_1$  proyeksiyalari orqali uning  $A''_1B''_1S''_1$  frontal proyeksiyalarini aniqlanadi. Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa,  $A''_1B''_1S''_1$  kesma (uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi) hosil bo'ladi. Bu kesmaning  $Ox$  o'qi bilan tashkil etgan  $\alpha$  burshagi  $\triangle ABS$  ni  $H$  tekislik bilan hosil etgan burshagiga teng bo'ladi.



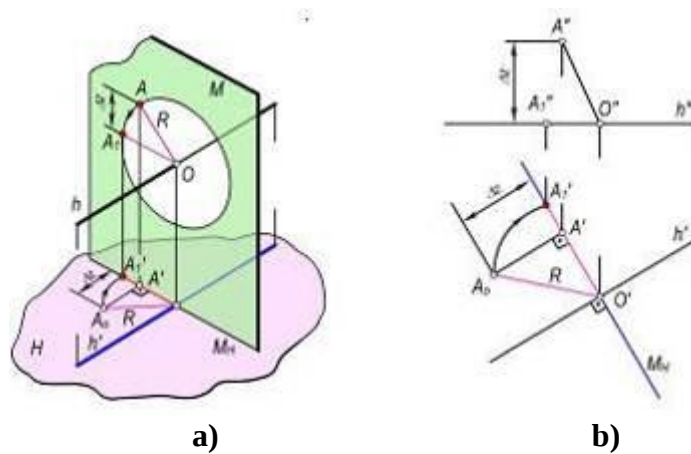
2.8-rasm.

## 2.2. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirish.

Umumiy vaziyatda joylashgan tekis geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisliklariga parallel bo'lgan o'qlar atrofida aylantirib, ba'zi metrik masalalarni Yechish mumkin. Bunda, aylanish o'qi sifatida umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shaklning asosiy chiziqlari – gorizontali yoki frontallaridan foydalaniladi. Geometrik shaklni uning gorizontali atrofida aylantirib,  $H$  tekislikka parallel vaziyatga, shuningdek, uni frontali atrofida aylantirib,  $V$  tekislikka parallel vaziyatga keltirish mumkin.

Geometrik shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirilganda uning har bir nuqtasi aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda aylana bo'ylab harakatlanadi. Masalan,  $A$  nuqtani  $h$  gorizontali atrofida aylantirilganda radiusi  $OA$  ga teng aylana bo'yisha  $M \perp h$  tekislikda harakatlanadi (2.9,a-rasm). Bunda, uning gorizontali proyeksiyasi gorizontaling  $h'$  gorizontali proyeksiyasiga perpendikulyar to'g'ri chiziq bo'yisha harakatlanadi.

Chizmada tasvirlangan  $A(A', A'')$  nuqtani  $A_1(A'_1, A''_1)$  vaziyatga kelguncha aylantirish uchun aylanish markazi  $O(O', O'')$  nuqtani aniqlash kerak (2.9,b-rasm). Bu nuqta aylanish o'qi  $h$  ning  $M$  tekislik bilan kesishish nuqtasi bo'ladi. Chizmada aylantirish radiusi  $R$  ning haqiqiy o'lshamni aniqlash uchun  $H$  tekislikda to'g'ri burchakli  $\triangle O'A'A_0$  yasaymiz. Buning uchun  $AO$  radiusning  $A'O'$  gorizontali proyeksiyasini to'g'ri burchakli uchburchakning bir kateti,  $OA$  kesma uchlari applikatorlarining  $\Delta z$  ayirmasini ikkinshi kateti qilib olamiz. Bu uchburchakning gipotenuzasi izlangan aylantirish radiusi  $R$  bo'ladi.  $A$  nuqtaning aylantirilgandan keyingi yangi vaziyatining  $A'_1$  gorizontali proyeksiyasi aylanish markazi  $O'$  nuqtada bo'lgan va  $O'A_0=R$  radiusli aylana yoyining  $M(M_H)$  tekislikning izi bilan kesishgan  $A'_1$  nuqtasi bo'ladi.  $A$  nuqtaning yangi  $A''_1$  frontal proyeksiyasi esa  $h''$  to'g'ri chiziqda bo'ladi.

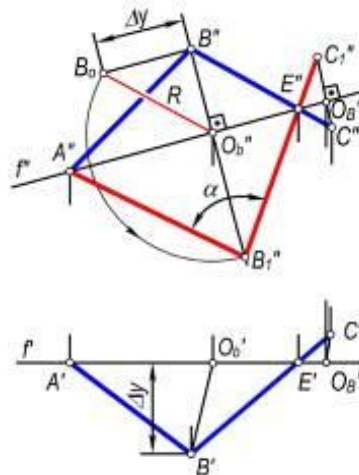


2.9-rasm.

**1-masala.** Umumiy vaziyatdagi  $\angle ABS(\angle A'B'S', \angle A''B''S'')$  ning haqiqiy o'lshami aniqlansin (2.10-rasm).

**Eshish.** Berilgan burchakning gorizontali yoki frontalidan foydalaniladi. Mazkur burchakning haqiqiy o'lshamini aniqlash uchun chizmada uning  $f(f', f'')$  frontali o'tkazilgan.

Rasmda hosil bo'lgan  $\angle ABE(\angle A'B'E', \angle A''B''E'')$  ning haqiqiy o'lshamini aniqlash uchun  $B$  nuqtani aylantirish radiusining haqiqiy o'lshamini aniqlash kifoya. Buning uchun  $B''$  nuqtadan  $f''$  ga perpendikulyar o'tkaziladi va aylanish markazining  $O_B(O'_B, O''_B)$ , so'ngra aylantirish radiusining  $BO_B(B'O'_B, B''O''_B)$  proyeksiyalari aniqlanadi. To'g'ri burchakli  $\Delta O''_B B'' B''_O$  yasash bilan radiusning haqiqiy o'lshami  $O''_B B''_1 = R$  aniqlanadi.  $B$  nuqtaning yangi vaziyatini yasash uchun  $O''_B$  dan  $R$  radius bilan  $O''_B B''_1$  perpendikulyarning davomi bilan kesishgunsha yoy o'tkaziladi va hosil bo'lgan  $B''_1$  bilan  $A''$  va  $E''$  nuqtalarni tutashtiriladi. Chizmada hosil bo'lgan  $\alpha$  berilgan burchakning haqiqiy o'lshami bo'ladi.

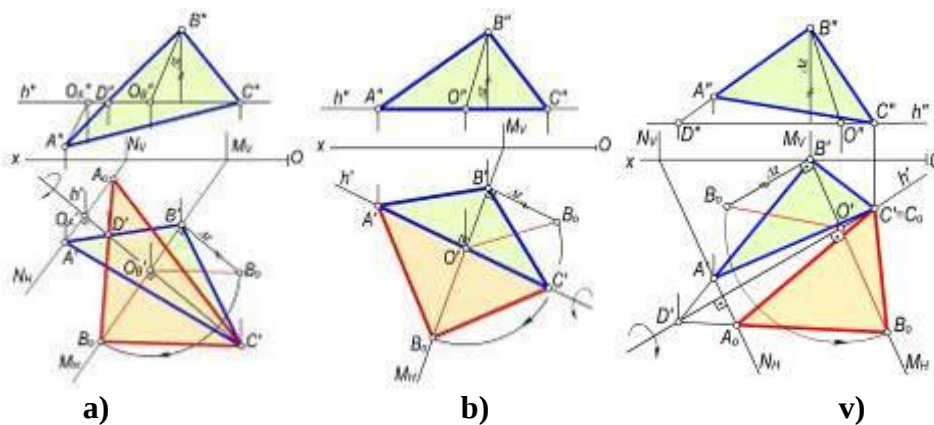


2.10-rasm.

**2-masala.** Umumiy vaziyatdagi  $\Delta ABS(\Delta A'B'S', \Delta A''B''S'')$  ning haqiqiy o'lshami aniqlansin (2.11-rasm).

**Yechish.** Uchburchak gorizontali  $h(h', h'')$  o'tkaziladi.  $\Delta ABS$  ning haqiqiy o'lshamini aniqlash uchun uning  $B(B', B'')$  va  $S(S', S'')$  uchlari aylantirish radiuslarining haqiqiy o'lshamlari aniqlanadi.

Chizmada  $B$  nuqtaning aylantirish radiusini aniqlash uchun uning  $O'B'$  va  $O''B''$  proyeksiyalaridan foydalanib, to'g'ri burchakli  $\Delta O'_B B' B''_O$  ni yasaymiz. Bu uchburchakning  $O'B'_O$  gipotenuzasi  $B$  nuqtaning aylantirish radiusi bo'ladi.  $B$  nuqtaning yangi vaziyati aylantirish markazining gorizantal proyeksiyasi  $O'$  dan radiusi  $O'B'_O$  ga teng qilib o'tkazilgan yoyning harakat tekisligining  $M_H$  izi bilan kesishgan  $B_O$  nuqtasi bo'ladi.



2.11-rasm.

Uchburchakning  $S$  va  $D$  nuqtalari aylanish o'qiga tegishli bo'lgani uchun ularning fazoviy vaziyatlari o'zgarmaydi. Uchburchak  $A$  nuqtasi aylantirish radiusining haqiqiy o'lshamini ham  $B$  nuqta aylantirish radiusining haqiqiy o'lshamini topish kabi aniqlash mumkin. Ammo uchburchakning  $A$  nuqtasi  $h$  o'qi atrofida  $B$  nuqta kabi harakatlenganda  $N(N_H)$  tekislikka va uchburchakning  $AB$  tomoniga tegishli bo'lib qoladi. Uchburchakning  $AB$  tomoni esa qo'zg'almas  $D$  nuqtadan o'tadi. Shuning uchun chizmada  $A$  nuqtaning yangi vaziyatini aniqlash uchun  $B_0$  va  $D'$  nuqtalar o'zaro tutashtiriladi va  $A'$  nuqtadan  $S'D'$  ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgunsha davom ettirilib,  $A_0$  nuqta topiladi. Agar  $A_0$ ,  $B_0$  va  $S'$  nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, uchburchakning haqiqiy kattaligi hosil bo'ladi.

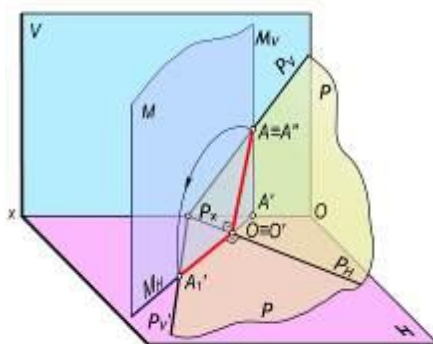
Agar uchburchakning biror tomoni (masalan,  $AS$ ) gorizontaal vaziyatda berilgan bo'lsa, masala 2.11,b-rasmda ko'rsatilgan kabi yeshiladi.

2.11,v-rasmda aylanish o'qi gorizontaal bo'lib, uchburchak konturidan tashqarida  $S$  nuqta orqali o'tkazilgan. Bu holda uchburchakning haqiqiy kattaligi uning gorizontaal proyeksiyasi bilan ustma-ust tushmaydi, natijada, masalaning yeshimi yaqqolroq bo'ladi.

### 2.3. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklariga tegishli o'q atrofida aylantirish yoki tekislikning izi atrofida aylantirish.

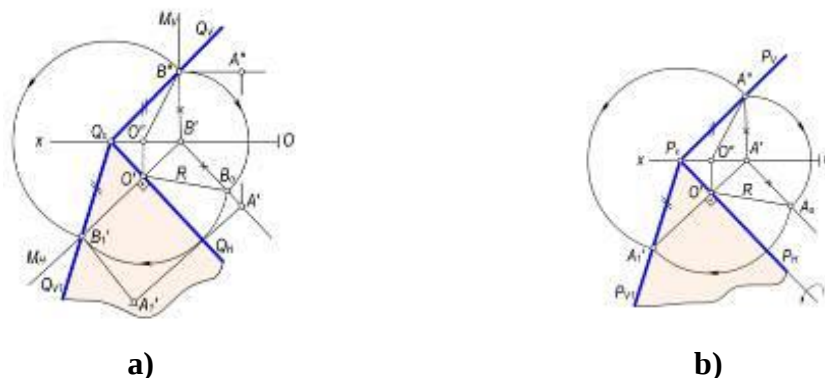
Aylanish o'qi sifatida umumiy vaziyatdagi tekislikning gorizontaal yoki frontal izlaridan biri qabul qilinadi (2.12-rasm). Bu holda tekislik biror izi atrofida aylantirilib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga jipslashtiriladi. Agar aylanish o'qi sifatida tekislikning gorizontaal izi qabul qilinsa, bu tekislikni gorizontaal proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtirish mumkin. Shuningdek, tekislikni frontal izi atrofida aylantirib, uni frontal proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi.

Tekisliklarni proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo'li bilan mazkur tekislikka tegishli bo'lgan tekis shakllarning haqiqiy o'lshamini aniqlash mumkin yoki umumiy vaziyatida berilgan tekislikka tegishli bo'lgan har qanday geometrik masalalarni Yechish mumkin.



2.12-rasm.

2.13,a–rasmda umumiy vaziyatdagi  $Q$  tekislikni  $Q_N$  gorizontal izi atrofida aylantirib,  $H$  tekislikka jipslashtirish ko'rsatilgan. Tekislikning gorizontal izi aylanish o'qi sifatida qabul qilingani uchun uning vaziyati o'zgarmaydi. Bu tekislikni  $H$  tekislikka jipslashtirish uchun mazkur tekislikka tegishli biror nuqtaning  $H$  tekislikka jipslashtirish kifoya. Bunday nuqta sifatida tekislikning frontal iziga tegishli  $B(B', B'')$  nuqtani olish mumkin. Bu nuqta orqali  $Q_N$  ga perpendikulyar  $M$  gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi.  $B$  nuqta  $O'B_0=R$  radiusli yoy bo'yisha  $M_N$  izi bilan kesishgunsha aylantiriladi. Natijada, hosil bo'lgan  $B'_1$  nuqta bilan  $Q_X$  ni o'zaro tutashtirsak,  $Q$  tekislikni  $H$  tekislikka jipslashtirilgan vaziyatiga ega bo'lamiz. Tekislikni bunday jipslashtirganda unga tegishli geometrik shakllar  $H$  tekislikka jipslashib, haqiqiy o'lshamlarida proyeksiyalanadi.



2.13-rasm.

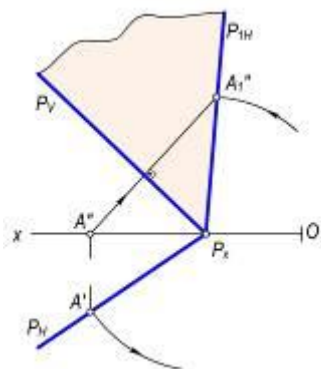
2.13,a–rasmdan shuni aniqlash mumkinki,  $Q$  tekislikni  $Q_N$  izi atrofida aylantirib, uni  $H$  tekislikka jipslashtirishda  $Q_V$  iziga tegishli  $Q_X B_1$  kesma o'zining haqiqiy o'lshamiga teng bo'lgani uchun  $Q_X B'' = Q_X B'_1$  bo'ladi. Demak, chizmada  $Q(Q_N, Q_V)$  tekislikni  $H$  tekislikka jipslashtirish uchun uning  $Q_V$  izida tanlab olingan  $B \equiv B''$  nuqtani va  $Q_X$  markazdan  $Q_X B''$  radius bilan yoy shizib,  $M$  tekislikning  $M_N$  izi bilan kesishgan  $B_1$  nuqta aniqlanadi. So'ngra  $B_1$  va  $Q_X$  nuqtalardan tekislikning  $Q_{V1}$  izi o'tkaziladi.

Chizmada  $P(P_N, P_V)$  tekislikni  $P_N$  izi atrofida aylantirib,  $H$  tekislikka jipslashtirish uchun aylantirish radiusining haqiqiy o'lshamini aniqlash zarur bo'lsin (2.13,b–rasm). Ma'lumki, aylantirish radiusi tekislikning aylanish o'qiga perpendikulyar bo'ladi. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga ko'ra, tekislikning  $P_V$  izida olingan  $A(A', A'')$  nuqtaning  $A'$  proyeksiyasidan tekislikning  $P_N$  iziga perpendikulyar o'tkaziladi va  $O'$  hamda  $O''$  nuqtalarni topamiz. Chizmada hosil bo'lgan  $O'A'$  va  $O''A''$  aylantirish radiusining proyeksiyalari,  $O'A_0$  esa uning haqiqiy o'lshami bo'ladi.

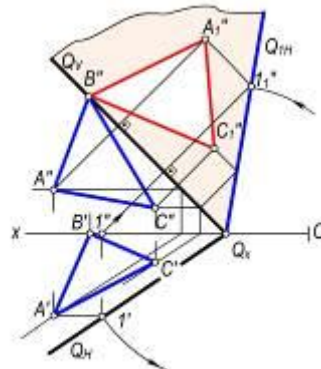
Xuddi shuningdek  $P(P_H, P_V)$  tekislikni  $V$  tekislikka ham jipslashtirish mumkin (2.14–rasm). Buning uchun berilgan  $P$  tekislikning  $P_H$  gorizontal izida ixtiyoriy  $A$  nuqta tanlab, uning aylantirish radiusi  $P_X A'$  aniqlanadi va tekislikning  $P_N$  izini  $P_V$  izi atrofida aylantirib, tekislikka jipslashtiriladi. Chizmadan ko'rinib turibdiki,  $P$  tekislikni  $P_N$  izi atrofida aylantirilganda  $P_X A'$  kesma  $P_X A''_1$  ga teng bo'ladi.

Umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli geometrik shaklning haqiqiy o'lshamini aniqlash uchun uning xarakterli nuqtalarini proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi. Masalan,  $Q(Q_N, Q_V)$  tekislikka tegishli  $\triangle ABS(A'B'S', A''B''S'')$  ning (2.15–rasm) haqiqiy o'lshami uning  $A, B$  va  $S$  nuqtalarini  $V$  tekislikka jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi.

Tekislikning jipslashgan holati berilgan bo'lsa, uning dastlabki vaziyatini tiklash mumkin. Tekislikning dastlabki vaziyatini aniqlash natijasida tekislikka tegishli bo'lgan shakllarning ham proyeksiyalarini aniqlash mumkin.



2.14-rasm.

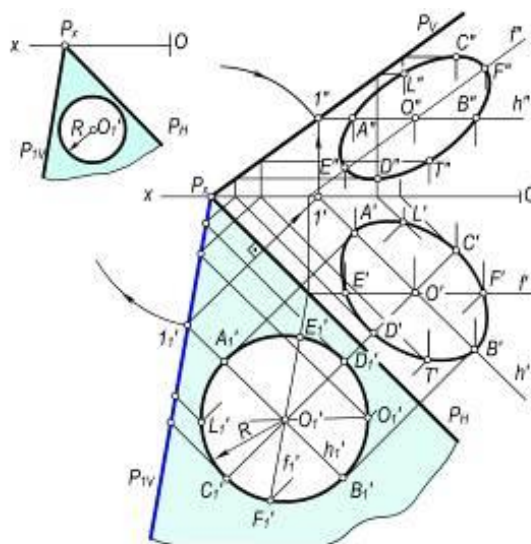


2.15-rasm.

Masalan,  $P$  tekislikning  $H$  tekislikka jipslashtirilgan vaziyati  $P_H$ ,  $P_V$ ,  $P_{1V}$  izlari va shu tekislikka tegishli  $O_1$  markaz va  $R$  radiusli aylana berilgan bo'lsin (2.16-rasm).

Bu aylananing  $P$  tekislikdagi proyeksiyalarini yasash uchun aylana markazidan tekislikning  $h'_1$  gorizontali o'tkaziladi va  $1'_1$  nuqta aniqlanadi. Bu nuqtadan tekislikning  $P_N$  iziga perpendikulyar o'tkazib,  $Ox$  proyeksiyalar o'qiga tegishli  $1'$  nuqta topiladi. Bu nuqtadan  $h'_1$  ning  $h'$  proyeksiyasi o'tkaziladi. So'ngra  $P_x$  markazdan  $P_x1'_1$  radius bilan o'tkazilgan yoyning  $1'$  dan  $Ox$  o'qiga o'tkazilgan perpendikulyar bilan kesishgan  $1''$  nuqtasi topiladi. Bu nuqtadan  $h'_1$  ning  $h''$  proyeksiyasini o'tkaziladi. So'ngra  $1''$  va  $P_x$  nuqtalar tutashtirilib, tekislikning  $P_V$  izi hosil qilinadi. Aylana markazining proyeksiyalarini yasash uchun  $O'_1$  dan  $P_N$  ga perpendikulyar o'tkazib,  $h'$  bilan kesishgan  $O'$  nuqtani va  $h''$  da  $O''$  nuqta topiladi. Shuningdek, bu gorizontalda joylashgan aylananing  $A'_1$  va  $B'_1$  nuqtalarining  $A'$ ,  $A''$  va  $B'$ ,  $B''$  proyeksiyalari aniqlanadi.

Tekislikning  $f'_1$  frontalini aylananing markazi  $O'_1$  dan  $P_{1V}$  ga parallel qilib o'tkazilib, aylananing  $E'_1$  va  $F'_1$  nuqtalarining  $E'$ ,  $E''$  va  $F'$ ,  $F''$  proyeksiyalari yasaladi.



2.16-rasm.

Xuddi shu tarzda aylananing  $L'_1$  va  $T'_1$ ,  $S'_1$  va  $D'_1$  nuqtalarining proyeksiyalari tekislikning gorizontallari yordamida aniqlanadi. Bu nuqtalarining bir nomli proyeksiyalarini mos ravishda o'zaro tutashtirsak, aylananing gorizont va frontal proyeksiyalari – ellipslar hosil bo'ladi.

## Nazorat savollari

1. Aylantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?
2. Gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi o'q atrofida aylanayotgan nuqtaning proyeksiyalari qanday harakatlanadi?
3. Nuqtaning aylanish radiusi, markazi va aylanish harakat tekisliklari deganda nimalar tushuniladi?
4. Kesmaning haqiqiy uzunligini yasash uchun uni qanday vaziyatga kelguncha aylantirish kerak.?
5. Uchburchakni gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi holga keltirish uchun uni qaysi o'q atrofida aylantirish kerak?
6. Izlari bilan berilgan tekislikni aylantirib frontal proyeksiyalovchi holga keltirish uchun nima qilish kerak?
7. Tekislikni izlari atrofida aylantirishdan ko'zlangan maqsad nima?

### 3-ma'ruza. Tekis- parallel harakatlantirish usuli. (2-soat)

#### REJA

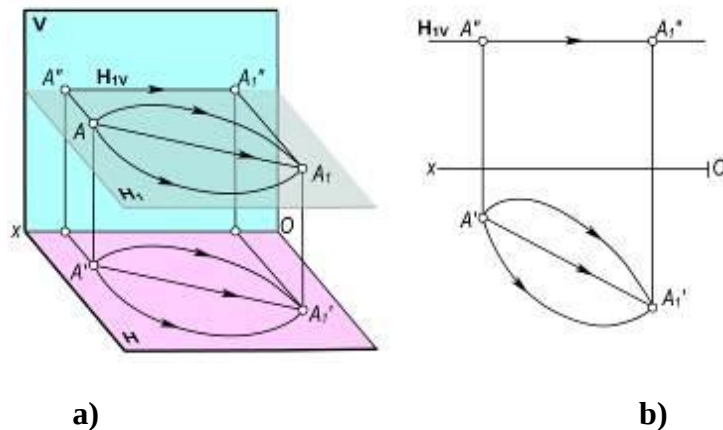
1. Tekis–parallel harakatlantirish usuli to'g'risida ma'lumot berish.
2. Tekis–parallel harakatlantirish usulida masalalar echishni o'rgatish.

#### 3.1. Tekis–parallel harakatlantirish usuli to'g'risida ma'lumot berish.

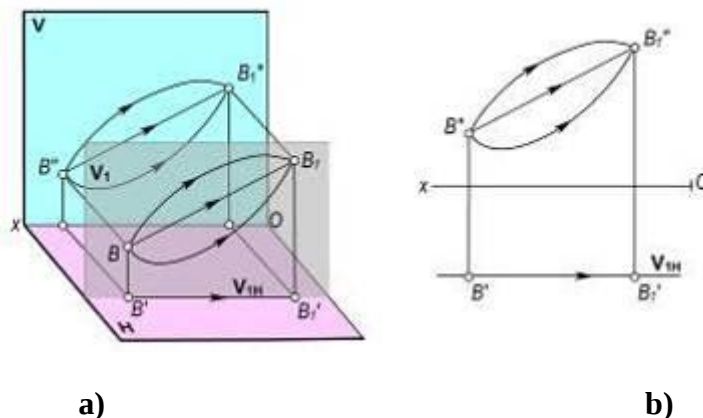
Tekis–parallel harakatlantirish usulida geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklari sistemasiga nisbatan vaziyati maqsadga muvofiq ravishda o'zgartirish uchun uning barsha nuqtalarining ko'pyoqliklar trayektoriyalari bir–biriga parallel tekisliklarda harakatlantirish yo'li bilan bajariladi.

Harakatlantirish tekisliklarining vaziyati va geometrik shakl nuqtalari ko'pyoqliklar trayektoriyasining xarakteriga qarab tekis–parallel harakatlantirish usuli *parallel harakatlantirish* va *aylantirish* usullariga bo'linadi.

**Parallel harakatlantirish usuli.** Bu usulda fazoda berilgan geometrik shaklning har bir nuqtasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan gorizontaal yoki frontal tekisliklarda harakatlantiriladi. Shuning natijasida hosil bo'lgan yangi proyeksiyasi proyeksiyalar tekisligiga nisbatan vaziyati o'zgaradi. 3.1,a,b–rasmda  $A$  nuqta  $H_1$  gorizontaal tekislikda harakatlantirilib  $A_1$  vaziyatga keltirilgan. Bunda  $A$  nuqta  $A_1$  vaziyatga qanday trayektoriya (to'g'ri yoki egri chiziqlar) bo'ylab harakatlantirilishidan qat'iy nazar, uning  $A''$  frontal proyeksiyasi ( $A_1''$  vaziyatga) tekislikning  $H_{1V}$  izi bo'yisha harakatlanadi. Shuningdek 3.2,a,b–rasmdagi  $B$  nuqta  $V_1$  frontal tekislikda  $B_1$  vaziyatga har qanday trayektoriya bo'yisha harakatlantirilmasin, uning  $B'$  proyeksiyasi  $V_{1H}$  izi bo'yisha harakatlanib,  $B_1'$  vaziyatni egallaydi.



3.1-rasm.



3.2-rasm.

Yuqorida bayon etilganlardan quyidagi xulosaga kelish mumkin:

- Fazoda nuqtani gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yisha harakatlantirilsa ham, uning frontal proyeksiyasi  $Ox$  o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yisha harakatlanadi.
- Fazoda nuqtani frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yisha harakatlantirilsa ham, uning gorizontal proyeksiyasi  $Ox$  o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yisha harakatlanadi.

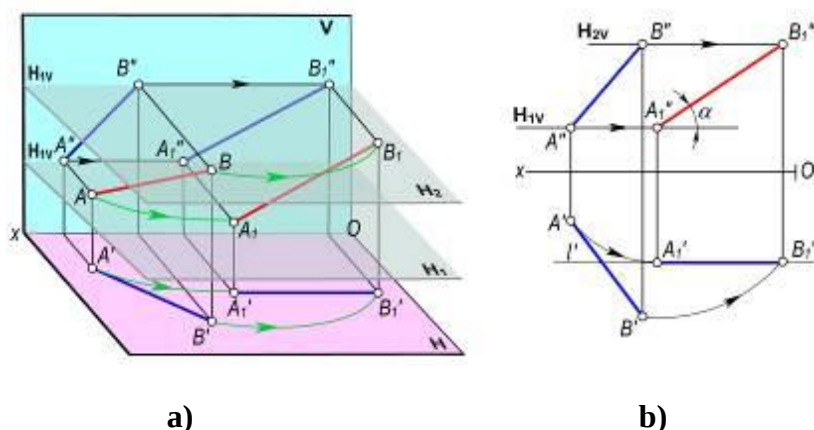
Parallel harakatlantirish usulining bu xususiyatlaridan foydalanib ayrim masalalarning yeshilishini ko'rib shiqamiz.

## 2. Tekis–parallel harakatlantirish usulida masalalar echishni o'rgatish.

**1–masala.** Umumiy vaziyatda berilgan  $AB$  kesmani  $V$  tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (3.3,a,b–rasm).

**Yechish.**  $AB \parallel V$  bo'lishi uchun chizmada  $A'B' \parallel Ox$  bo'lishi kerak. Demak, bu misolni Yechish uchun  $H$  tekislikda (3.3,a–rasm) ixtiyoriy  $A_1'$  nuqta tanlab, u orqali  $Ox$  o'qiga parallel  $l'$  to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga  $A_1'B_1' = A'B'$  kesmani o'lshab qo'yamiz. Kesmaning yangi frontal proyeksiyasini parallel harakatlantirish xususiyatiga muvofiq aniqlaymiz: kesmaning  $A''$  va  $B''$  proyeksiyalari mos ravishda  $H_{1V}$  va  $H_{2V}$  bo'yisha  $Ox$  o'qiga parallel ravishda harakatlanadi va  $A_1''$ ,  $B_1''$  vaziyatlarga keladi. Natijada,  $V$  tekislikka parallel  $A_1B_1(A_1'B_1', A_1''B_1'')$  to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari hosil bo'ladi.

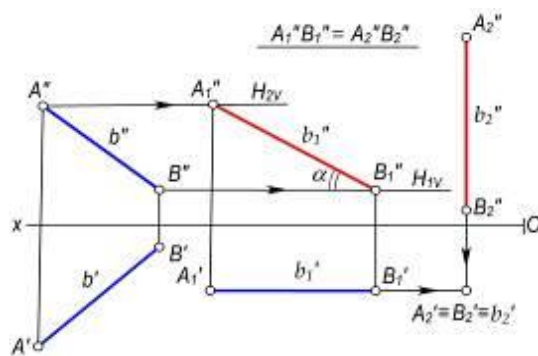
Shuningdek,  $AB$  kesma  $V$  tekislikka parallel bo'lishi bilan birga uning haqiqiy o'lshami va  $H$  tekislik bilan tashkil etgan  $\alpha$  burchagi aniqlanadi.



3.3-rasm.

**2–masala.** Umumiy vaziyatdagi  $AB(A'B', A''B'')$  kesma  $H$  tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (3.4–rasm).

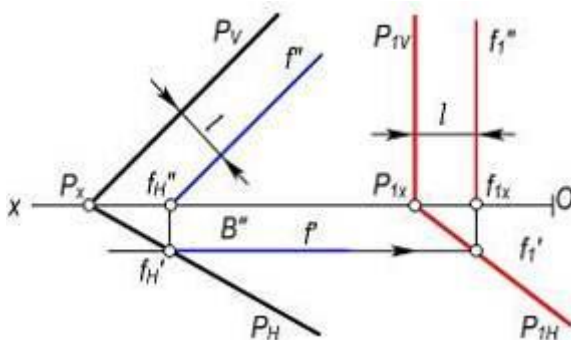
**Yechish.** Dastlab  $AB$  kesmani harakatlantirib,  $V$  tekislikka parallel  $A_1B_1(A_1'B_1', A_1''B_1'')$  vaziyatga keltiramiz. So'ngra ixtiyoriy  $B_2''$  nuqta tanlab olamiz va bu nuqtadan  $b_2'' \perp Ox$  to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga  $A_2''B_2'' = A_1''B_1''$  kesmani o'lshab qo'yamiz. Kesmaning gorizontal proyeksiyasi  $b_1'$  chiziq bo'yisha harakatlanib,  $A_2'' \equiv B_2'' \equiv b_2''$  bo'lib proyeksiyalanadi.



3.4-rasm.

**3-masala.** Umumiy vaziyatda berilgan  $P(P_H, P_V)$  tekislik  $H$  tekisligiga perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (3.5-rasm).

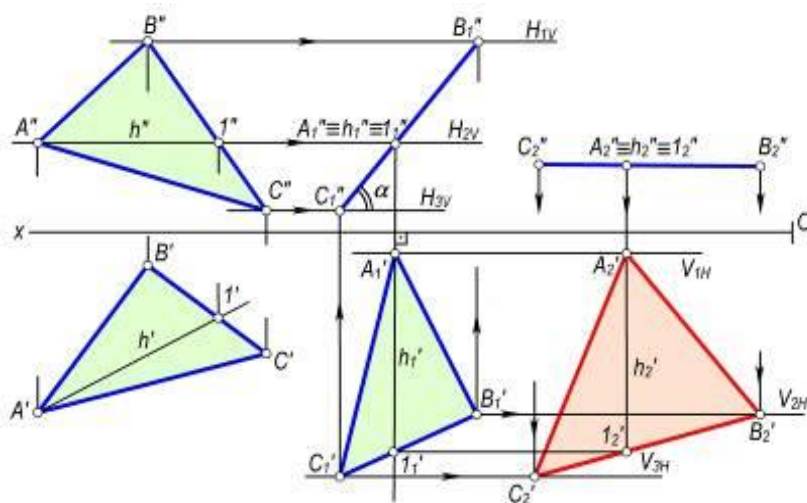
**Yechish.**  $P$  tekislikning ixtiyoriy  $f(f', f'')$  frontali o'tkaziladi. So'ngra  $Ox$  o'qida ixtiyoriy nuqtadan  $f_1'' \perp Ox$  qilib o'tkazamiz va chizmada ko'rsatilgan  $\ell$  masofada tekislikning frontal izi  $P_{1V} \perp Ox$  (yoki  $P_{1V} \parallel f_1''$ ) qilib o'tkazamiz. Tekislikning  $P_{1H}$  gorizontal izi  $P_{1x}$  va  $f_1'$  nuqtalardan o'tadi.



3.5-rasm

**4-masala.** Umumiy vaziyatdagi  $\triangle ABS(\triangle A'B'S', \triangle A''B''S'')$  tekislikni  $H$  tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (3.6-rasm).

**Eshish.** 1.  $\triangle ABS$  ni avval  $V$  tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun uchburchakning  $h(h', h'')$  gorizontalini o'tkazamiz. Chizmada ixtiyoriy  $A'_1$  nuqta tanlab, bu nuqtadan  $h'_1 \perp Ox$  qilib  $\triangle A'_1B'_1S'_1 = \triangle A'B'S'$  yangi gorizontal proyeksiyasini yasaymiz.



3.6-rasm.

2.  $\triangle ABS$  ning yangi vaziyati  $V$  tekislikka perpendikulyar bo'lgani uchun uning frontal proyeksiyasi  $S_1''A_1''B_1''$  kesma tarzida proyeksiyalanadi.

3. Ixtiyoriy  $S_2''$  nuqta tanlab, bu nuqtadan  $Ox$  o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga  $S_2''A_2''B_2''=S_1''A_1''B_1''$  bo'lgan kesmani o'lshab qo'yamiz. Parallel harakatlantirishning qoidasiga muvofiq uchburchak gorizontaal proyeksiyasining  $A_2' B_2'$  va  $S_2'$  nuqtalari mos ravishda  $V_{1N}$ ,  $V_{2N}$  va  $V_{3N}$  frontal tekisliklarning izlari bo'yisha ko'pyoqliklaridan  $\triangle A_2'B_2'S_2'$  hosil bo'ladi. Natijada,  $\triangle A_2'B_2'S_2'$   $H$  ga parallel bo'ladi va berilgan uchburchakning haqiqiy o'lshamiga teng bo'lgan proyeksiyasi hosil bo'ladi.

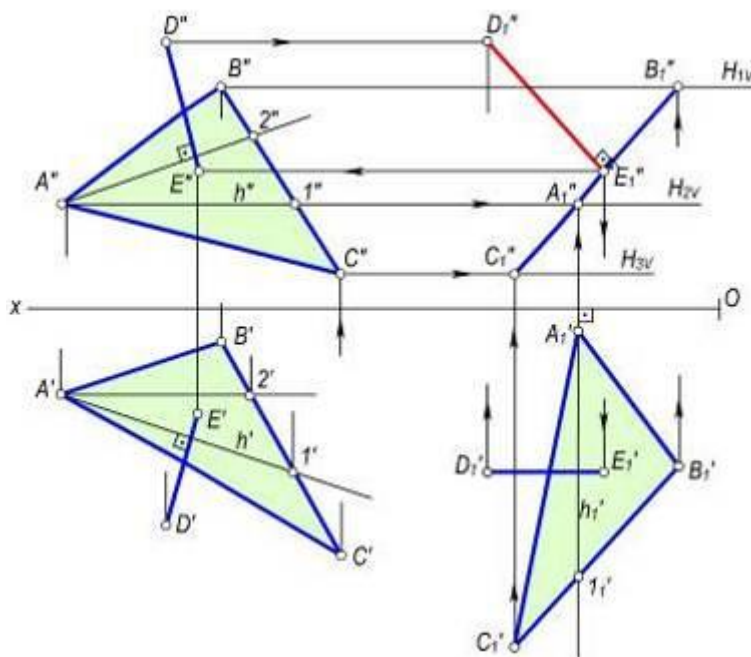
Chizmadagi  $\alpha$  burchak  $\triangle ABS$  ning  $H$  tekislik bilan hosil qilgan burshagini ko'rsatadi.

**4-masala.** D( $D'$ ,  $D''$ ) nuqtadan  $\triangle ABS$  ( $\triangle A'B'S'$ ,  $\triangle A''B''S''$ ) tekislikkasha bo'lgan masofa aniqlansin (3.7, a-rasm).

**Yechish.**

1.  $\triangle ABS$  ni parallel harakatlantirib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga, masalan,  $V$  tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun mazkur uchburchakni  $h(h', h'')$  gorizontali  $V$  tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirib,  $A_1'1_1'=A'1'$  va  $\triangle A_1'B_1'S_1'=\triangle A'B'S'$  qilib yasaladi.  $D'$  nuqtaning  $D_1'$  vaziyati ham planimetrik yasashlarga asosan yasaladi. Bunda uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi  $S_1''A_1''B_1''$  kesma tarzida proyeksiyalanadi. Parallel harakatlantirishning qoidalariga asosan D nuqtaning yangi  $D_1'$  va  $D_1''$  proyeksiyalarini aniqlaymiz.

2. Masofaning haqiqiy o'lshami  $D_1''$  nuqtadan  $S_1''A_1''B_1''$  kesmaga tushirilgan  $D_1'E_1''$  perpendikulyar bilan o'lshanadi. Izlangan masofaning gorizontaal proyeksiyasi  $D_1'E_1'$  esa  $Ox$  o'qiga parallel bo'ladi.



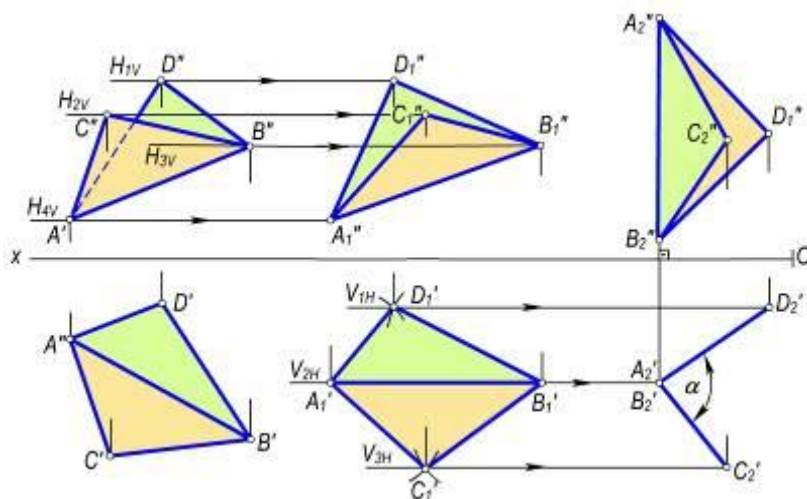
**3.7-rasm.**

3. Izlangan masofaning proyeksiyalarini tekislikning berilgan proyeksiyalarida yasash uchun D nuqtaning  $D'$  va  $D''$  proyeksiyalaridan tekislikning  $h(h', h'')$  gorizontali va  $f(f', f'')$  frontaliga tushirilgan perpendikulyarlar proyeksiyalari bilan aniqlanadi. Parallel harakatlantirishning qoidasiga muvofiq  $E$  nuqtaning  $E''$  va  $E'$  proyeksiyalarini ko'rsatilgan yo'nalish bo'yisha  $D'$  va  $D''$  proyeksiyalardan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida topamiz.

**5-masala.**  $SABD$  ( $S'A'B'D'$ ,  $S''A''B''D''$ ) ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi parallel harakatlantirish usulidan foydalanib aniqlansin (3.8-rasm).

**Yechish:**

1.  $AB$  qirrani  $V$  tekislikka parallel qilib joylashtiriladi. Buning uchun chizma maydonining ixtiyoriy joyida  $A'B'-A_1'B_1'$  va  $A_1'B_1' \parallel Ox$  qilib joylashtiriladi.
2.  $A_1'$  va  $B_1'$  nuqtalarga nisbatan  $D_1'$ ,  $S_1'$  nuqtalarni planimetrik yasashlardan foydalanib yasaymiz. Hosil bo'lgan  $A_1$ ,  $S_1'$ ,  $B_1'$  va  $D_1'$  nuqtalar yangi gorizontal proyeksiya bo'ladi.
3. Parallel harakatlantirish qoidasiga asosan  $A''$ ,  $S''$ ,  $B''$  va  $D''$  nuqtalar  $Ox$  o'qiga parallel chiziq bo'yisha harakat qilganligidan  $A_1''$ ,  $S_1''$ ,  $B_1''$  va  $D_1''$  yangi frontal proyeksiyalari yasaladi.
4.  $AB$  qirrani  $H$  tekisligiga perpendikulyar qilib joylashtiriladi. Buning uchun  $A_1''B_1''=A_2''B_2''$  ni chizmaning ixtiyoriy joyida  $A_2''B_2'' \perp Ox$  qilib joylashtiramiz.  $A_2''B_2''$  yangi frontal proyeksiya bo'ladi.
5.  $S_2''$  va  $D_2''$  nuqtalar esa  $A_2''$  va  $B_2''$  nuqtalarga nisbatan planimetrik yasashlar bilan yasaladi.
6. Parallel ko'shirish qoidasiga asosan  $A_1'$ ,  $S_1'$ ,  $B_1'$  va  $D_1'$  nuqtalar  $Ox$  ga parallel harakat qilib,  $A_2'' \equiv B_2''$ ,  $S_2'$  va  $D_2'$  nuqtalarning yangi gorizontal proyeksiyalarini hosil qiladi.
7. Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa,  $\angle D_2'A_2'S_2' = \alpha$  chiziqli burchak  $AB$  qirradagi ikki yoqli burchakni o'lshaydi. Bu misolni  $AB$  qirrani  $H$  ga parallel qilib olishdan boshlab ham Yechish mumkin.



3.8-rasm.

### Nazorat savollari

1 Tekis-parallel harakatlantirish usulining ma'nosi nimadan iborat?

## 4-ma'ruza. Metrik va pozitsion masalalar yechish. (2-soat)

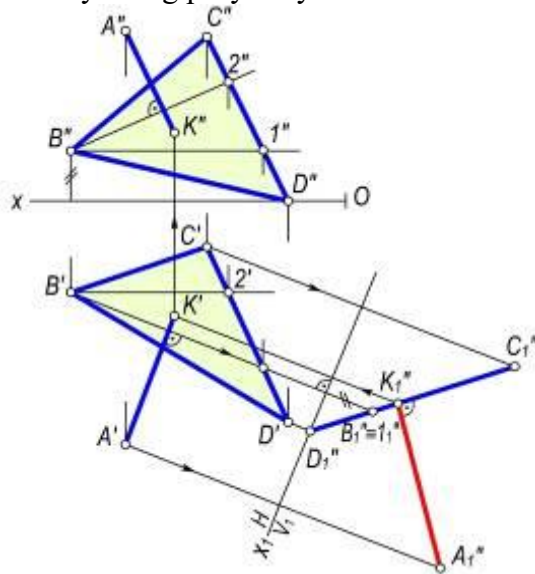
### REJA

1. Proyeksiya tekisliklarini almashtirish usulidan foydalanib masalalar yechishni o'rgatish.
2. Aylantirish usulida masala yechishni o'rgatish.
3. Ustma-ust qo'yish(jipislashtirish) usulida masala yechishni o'rgatish.
4. Tekis- parallel harakatlantirish usulida masala yechishni o'rgatish.

#### 4.1. Proyeksiya tekisliklarini almashtirish usulidan foydalanib masalalar yechishni o'rgatish.

**1-masala.**  $A(A', A'')$  nuqtadan  $\triangle BCD(\triangle B'C'D', \triangle B''C''D'')$  tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlansin (4.1-rasm).

**Echish.** Bu masofa  $A$  nuqtadan  $\triangle BCD$  tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan o'lchanadi. Masalani yechish uchun chizmada yangi proyeksiyalar o'qini uchburchak tekisligining asosiy chiziqlaridan biriga, masalan, gorizontaliga perpendikulyar, ya'ni  $O_1X_1 \perp B_1'1'$  qilib o'tkaziladi. So'ngra uchburchakning to'g'ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalangan yangi proyeksiyalovchi  $D''_1B''_1C''_1$  vaziyatini va nuqtaning  $A''_1$  proyeksiyasi yasaladi. Izlangan masofaning haqiqiy uzunligi  $A''_1$  dan  $D''_1B''_1C''_1$  kesmaga o'tkazilgan  $A''_1K''_1$  perpendikulyar bo'ladi. Bu masofaning gorizontal va frontal proyeksiyalari teskari proyeksiyalash bilan  $K'$  va  $K''$  proyeksiyalarni aniqlanadi. Mazkur  $K'$  va  $K''$  nuqtalar  $A$  nuqtaning  $A'$  va  $A''$  proyeksiyalaridan uchburchakning gorizontal hamda frontallariga mos ravishda tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida bo'ladi.



4.1-rasm.

**2-masala.**  $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$  va  $\triangle EFD(\triangle E'F'D', \triangle E''F''D'')$  tekisliklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari va uchburchaklarning ko'rinishligi aniqlansin. (4.2-rasm).

**Yechish.** Masalani yechish uchun berilgan uchburchaklarning biri, masalan,  $\triangle EFD$  ni proyeksiyalovchi vaziyatga keltiriladi. Buning uchun chizmada  $\triangle EFD$  ning  $D'1'$  va  $D''1''$  gorizontalining proyeksiyalarini hamda unga perpendikulyar, ya'ni  $O_1X_1 \perp D'1'$  qilib yangi proyeksiyalar o'qini o'tkaziladi. So'ngra uchburchaklarning yangi  $A''_1B''_1C''_1$  va  $E''_1F''_1D''_1$  proyeksiyalari yasaladi. Bunda  $\triangle EFD$  ning mazkur proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi

shaklida proyeksiyalanadi. Proyeksiyalar tekisliklarining yani tizimida ikki uchburchaklar  $2''_1 3''_1$  to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Kesishish chizig'ining  $2'3'$  gorizontal va  $2''3''$  frontal proyeksiyalarini teskari proyeksiyalash bilan uchburchaklarning dastlabki berilgan proyeksiyalari aniqlanadi. So'ngra chizmada topilgan  $2'3'$  va  $2''3''$  kesmalarni  $\triangle EFD$  ning  $E'F'$ ,  $E''F''$  va  $D'F'$ ,  $D''F''$  tomonlari bilan kesishgan  $L'$ ,  $L''$  va  $T'$ ,  $T''$  nuqtalar aniqlanadi. Natijada, hosil bo'lgan  $L'T'$  va  $L''T''$  chiziqlar ikki uchburchak kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi.

Chizmada uchburchaklarning ko'rinishligini aniqlash uchun ulardagi  $4'$ ,  $4''$  va  $5'$ ,  $5''$ , shuningdek,  $6'$ ,  $6''$  va  $7'$ ,  $7''$  konkurent nuqtalardan foydalaniladi.

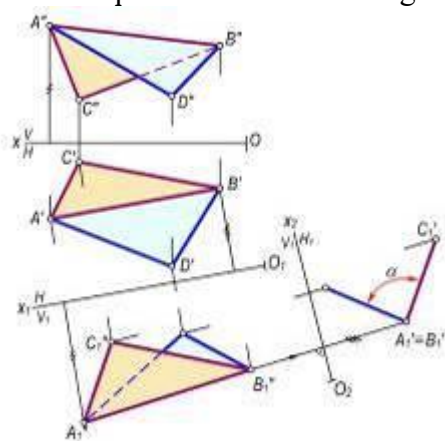
**3-masala.**  $\triangle ABC(A'B'C', A''B''C'')$  va  $\triangle ABD(A'B'D', A''B''D'')$  tekisliklari orasidagi ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (4.3-rasm).

**Yechish.** Bu burchak berilgan  $\triangle ABC$  va  $\triangle ABD$  tekisliklariga perpendikulyar bo'lgan tekisliklar orasidagi chiziqli burchak bilan o'lchanadi. Shuning uchun ham yangi proyeksiyalar tekisligini ikki tekislikning umumiy  $AB$  kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib olinadi. Lekin  $AB$  qirra umumiy vaziyatda bo'lgani uchun  $Ox$ ,  $\frac{V}{H}$  proyeksiyalar

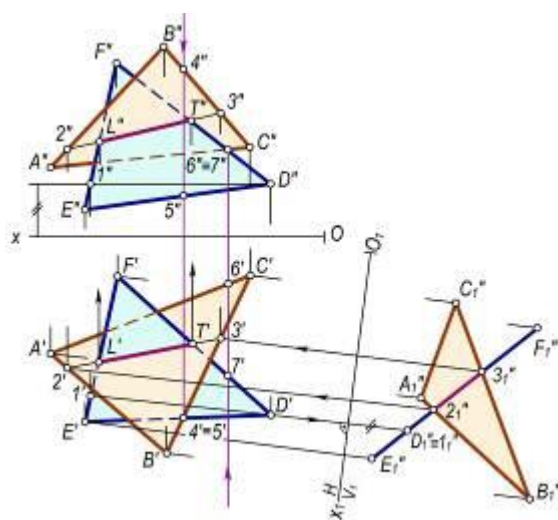
tekisliklari tizimini avval  $O_1X_1$ ,  $\frac{V_1}{H} \parallel AB$  qilib (chizmada  $O_1X_1 \parallel A'B'$ ), so'ngra  $O_2X_2$ ,  $\frac{V_1}{H_1} \perp AB$

qilib (chizmada  $O_2X_2 \perp A''_1B''_1$ ) ketma-ket almashtiriladi.

Natijada,  $\triangle ABC$  va  $\triangle ABD$  yangi  $H_1$  proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar vaziyatda bo'lib qoladi va o'zaro kesishuvchi kesmalar shaklida proyeksiyalanadi. Bu kesmalar orasidagi  $\alpha$  chiziqli o'tkir burchak izlangan burchak bo'ladi.



4.2-rasm.



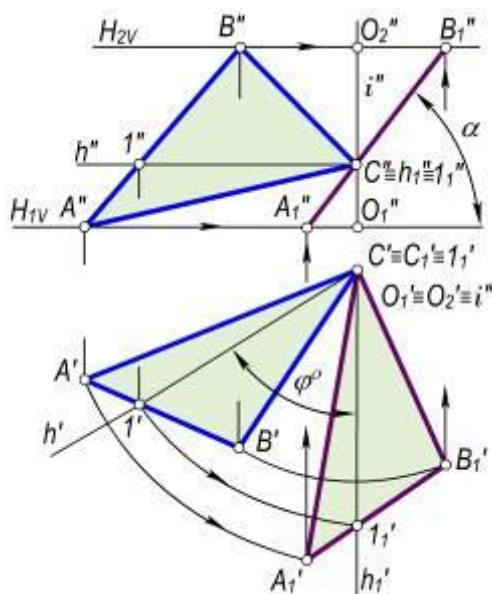
4.3-rasm.

## 4.2.Aylantirish usulida masala yechish.

**4-masala.**  $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$  tekislikning  $H$  tekislik bilan tashkil etgan  $\alpha$  burchagini aniqlansin (4.4-rasm).

**Yechish.** Izlangan  $\alpha$  burchakni aniqlash uchun berilgan  $\triangle ABC$  tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish kerak bo'ladi. Buning uchun uchburchakning biror, masalan,  $C$  nuqtasidan  $i' \perp H$  aylanish o'qi o'tkaziladi va bu o'q atrofida uchburchakni  $h_1 \perp V$  (epyrda  $h'_1 \perp V$ ) vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bunda, uchburchakning  $A$ ,  $B$  va  $C$  nuqtalari ham  $\varphi^\circ$  burchakka harakatlanadi. Chizmada uchburchak uchlarning yangi  $A'_1$ ,  $B'_1$  va  $C'_1$  proyeksiyalari orqali uning  $A''_1B''_1C''_1$  frontal proyeksiyalarini aniqlanadi. Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa,  $A''_1B''_1C''_1$  kesma (uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi) hosil

bo‘ladi. Bu kesmaning  $Ox$  o‘qi bilan tashkil etgan  $\alpha$  burchagi  $\triangle ABC$  ni  $H$  tekislik bilan hosil etgan burchagiga teng bo‘ladi.

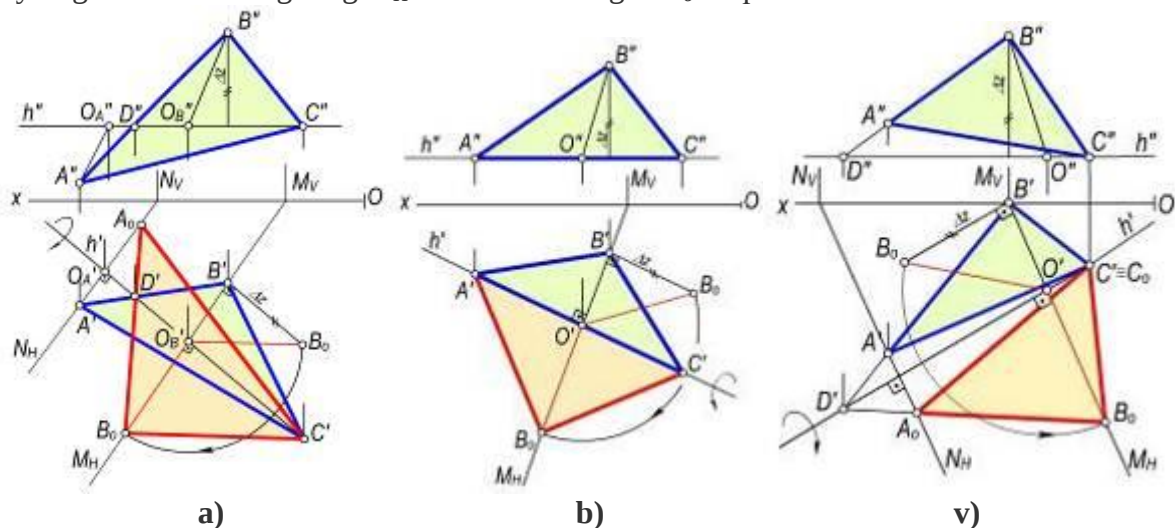


4.4-rasm.

**5-masala.** Umumiy vaziyatdagi  $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$  ning haqiqiy o‘lchami aniqlansin.

**Yechish.** Uchburchak gorizontali  $h(h', h'')$  o‘tkaziladi.  $\triangle ABC$  ning haqiqiy o‘lchamini aniqlash uchun uning  $B(B', B'')$  va  $C(C', C'')$  uchlari aylantirish radiuslarining haqiqiy o‘lchamlari aniqlanadi.

Chizmada  $B$  nuqtaning aylantirish radiusini aniqlash uchun uning  $O'B'$  va  $O''B''$  proyeksiyalaridan foydalanib, to‘g‘ri burchakli  $\triangle O'B'_0B''_0$  ni yasaymiz. Bu uchburchakning  $O'B'_0$  gipotenuzasi  $B$  nuqtaning aylantirish radiusi bo‘ladi.  $B$  nuqtaning yangi vaziyati aylantirish markazining gorizontaal proyeksiyasi  $O'$  dan radiusi  $O'B_0$  ga teng qilib o‘tkazilgan yoyning harakat tekisligining  $M_H$  izi bilan kesishgan  $B_0$  nuqtasi bo‘ladi.



4.5-rasm.

Uchburchakning  $S$  va  $D$  nuqtalari aylanish o‘qiga tegishli bo‘lgani uchun ularning fazoviy vaziyatlari o‘zgarmaydi. Uchburchak  $A$  nuqtasi aylantirish radiusining haqiqiy o‘lchamini ham  $B$  nuqta aylantirish radiusining haqiqiy o‘lchamini topish kabi aniqlash mumkin. Ammo uchburchakning  $A$  nuqtasi  $h$  o‘qi atrofida  $B$  nuqta kabi harakatlenganda  $N(N_H)$  tekislikka va uchburchakning  $AB$  tomoniga tegishli bo‘lib qoladi. Uchburchakning  $AB$

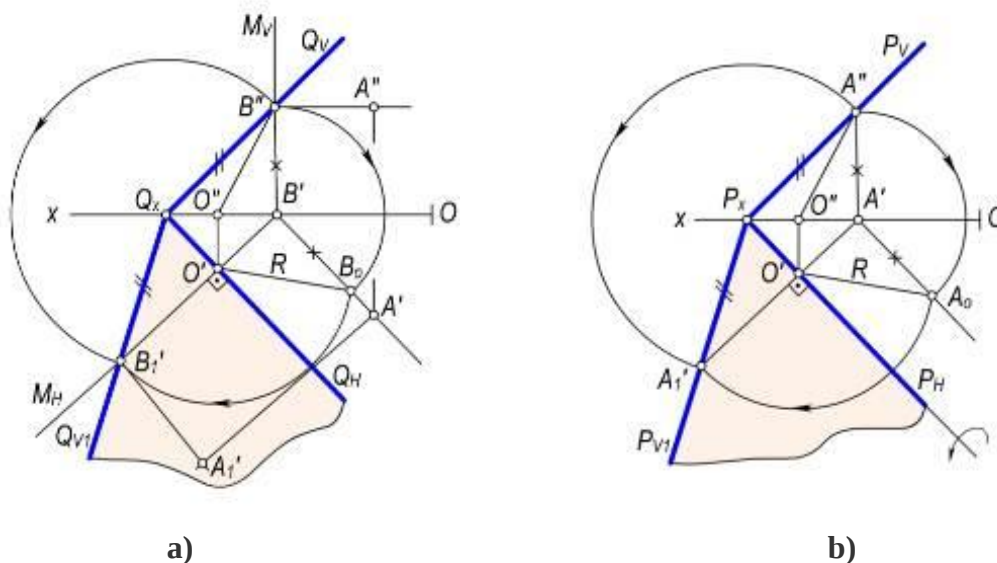
tomoni esa qo'zg'almas  $D$  nuqtadan o'tadi. Shuning uchun chizmada  $A$  nuqtaning yangi vaziyatini aniqlash uchun  $B_0$  va  $D'$  nuqtalar o'zaro tutashtiriladi va  $A'$  nuqtadan  $C'D'$  ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettirilib,  $A_0$  nuqta topiladi. Agar  $A_0$ ,  $B_0$  va  $C'$  nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, uchburchakning haqiqiy kattaligi hosil bo'ladi.

Agar uchburchakning biror tomoni (masalan,  $AC$ ) gorizontaal vaziyatda berilgan bo'lsa, masala 4.5,b-rasmda ko'rsatilgan kabi yechiladi.

4.5,v-rasmda aylanish o'qi gorizontaal bo'lib, uchburchak konturidan tashqarida  $C$  nuqta orqali o'tkazilgan. Bu holda uchburchakning haqiqiy kattaligi uning gorizontaal proyeksiyasi bilan ustma-ust tushmaydi, natijada, masalaning yechimi yaqqolroq bo'ladi.

### 4.3.Ustma-ust qo'yish (jipslashtirish) usuli yordamida masalalar echish bo'yicha tushunchalar

4.6,a-rasmda umumiy vaziyatdagi  $Q$  tekislikni  $Q_N$  gorizontaal izi atrofida aylantirib,  $H$  tekislikka jipslashtirish ko'rsatilgan. Tekislikning gorizontaal izi aylanish o'qi sifatida qabul qilingani uchun uning vaziyati o'zgarmaydi. Bu tekislikni  $H$  tekislikka jipslashtirish uchun mazkur tekislikka tegishli biror nuqtaning  $H$  tekislikka jipslashtirish kifoya. Bunday nuqta sifatida tekislikning frontal iziga tegishli  $B(B', B'')$  nuqtani olish mumkin. Bu nuqta orqali  $Q_N$  ga perpendikulyar  $M$  gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi.  $B$  nuqta  $O'B_0=R$  radiusli yoy bo'yicha  $M_N$  iz bilan kesishguncha aylantiriladi. Natijada, hosil bo'lgan  $B'_1$  nuqta bilan  $Q_x$  ni o'zaro tutashtirsak,  $Q$  tekislikni  $H$  tekislikka jipslashtirilgan vaziyatiga ega bo'lamiz. Tekislikni bunday jipslashtirganda unga tegishli geometrik shakllar  $H$  tekislikka jipslashib, haqiqiy o'lchamlarida proyeksiylanadi.



4.6-rasm.

4.6,a-rasmdan shuni aniqlash mumkinki,  $Q$  tekislikni  $Q_N$  izi atrofida aylantirib, uni  $H$  tekislikka jipslashtirishda  $Q_V$  iziga tegishli  $Q_x B_1$  kesma o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgani uchun  $Q_x B''=Q_x B'_1$  bo'ladi. Demak, chizmada  $Q(Q_N, Q_V)$  tekislikni  $H$  tekislikka jipslashtirish uchun uning  $Q_V$  izida tanlab olingan  $B \equiv B''$  nuqtani va  $Q_x$  markazdan  $Q_x B''$  radius bilan yoy chizib,  $M$  tekislikning  $M_N$  izi bilan kesishgan  $B_1$  nuqta aniqlanadi. So'ngra  $B_1$  va  $Q_x$  nuqtalardan tekislikning  $Q_{V1}$  izi o'tkaziladi.

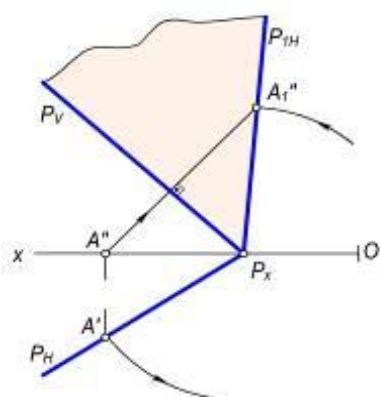
Chizmada  $P(P_N, P_V)$  tekislikni  $P_N$  izi atrofida aylantirib,  $H$  tekislikka jipslashtirish uchun aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini aniqlash zarur bo'lsin (4.6,b-rasm). Ma'lumki, aylantirish radiusi tekislikning aylanish o'qiga perpendikulyar bo'ladi. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga ko'ra, tekislikning  $P_V$  izida olingan  $A(A', A'')$  nuqtaning  $A'$  proyeksiyasidan tekislikning  $P_N$  iziga perpendikulyar o'tkaziladi va  $O'$  hamda

$O''$  nuqtalarni topamiz. Chizmada hosil bo'lgan  $O'A'$  va  $O''A''$  aylantirish radiusining proyeksiyalari,  $O'A_0$  esa uning haqiqiy o'lchami bo'ladi.

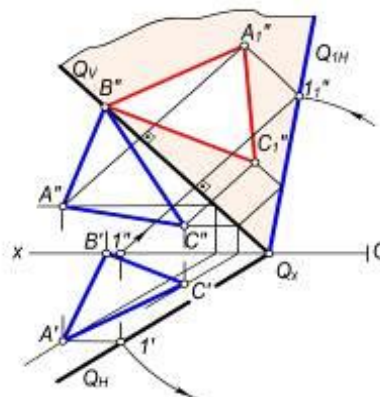
Xuddi shuningdek  $P(P_H, P_V)$  tekislikni  $V$  tekislikka ham jipslashtirish mumkin (4.7–rasm). Buning uchun berilgan  $P$  tekislikning  $P_H$  gorizontal izida ixtiyoriy  $A$  nuqta tanlab, uning aylantirish radiusi  $P_x A'$  aniqlanadi va tekislikning  $P_N$  izini  $P_V$  izi atrofida aylantirib, tekislikka jipslashtiriladi. Chizmadan ko'rinib turibdiki,  $P$  tekislikni  $P_N$  izi atrofida aylantirilganda  $P_x A'$  kesma  $P_x A''_1$  ga teng bo'ladi.

Umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli geometrik shaklning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun uning xarakterli nuqtalarini proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi. Masalan,  $Q(Q_N, Q_V)$  tekislikka tegishli  $\triangle ABC(A'B'C', A''B''C'')$  ning (4.8–rasm) haqiqiy o'lchami uning  $A, B$  va  $C$  nuqtalarini  $V$  tekislikka jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi.

Tekislikning jipslashgan holati berilgan bo'lsa, uning dastlabki vaziyatini tiklash mumkin. Tekislikning dastlabki vaziyatini aniqlash natijasida tekislikka tegishli bo'lgan shakllarning ham proyeksiyalarini aniqlash mumkin.



4.7-rasm.

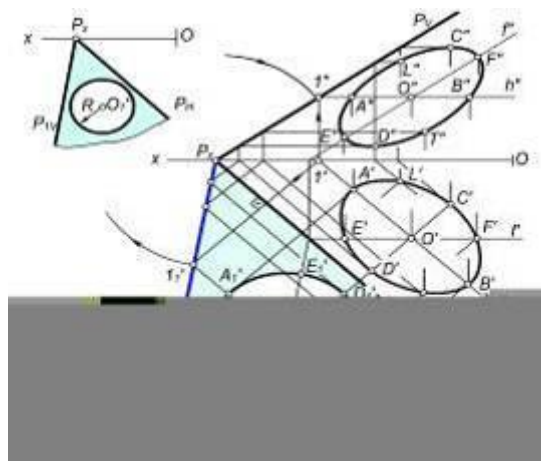


4.8-rasm.

Masalan,  $P$  tekislikning  $H$  tekislikka jipslashtirilgan vaziyati  $P_H, P_V, P_{1V}$  izlari va shu tekislikka tegishli  $O_1$  markaz va  $R$  radiusli aylana berilgan bo'lsin (4.9–rasm).

Bu aylananing  $P$  tekislikdagi proyeksiyalarini yasash uchun aylana markazidan tekislikning  $h'_1$  gorizontali o'tkaziladi va  $l'_1$  nuqta aniqlanadi. Bu nuqtadan tekislikning  $P_N$  iziga perpendikulyar o'tkazib,  $Ox$  proyeksiyalar o'qiga tegishli  $l'$  nuqta topiladi. Bu nuqtadan  $h'_1$  ning  $h'$  proyeksiyasi o'tkaziladi. So'ngra  $P_x$  markazdan  $P_x l'_1$  radius bilan o'tkazilgan yoyning  $l'$  dan  $Ox$  o'qiga o'tkazilgan perpendikulyar bilan kesishgan  $l''$  nuqtasi topiladi. Bu nuqtadan  $h'_1$  ning  $h''$  proyeksiyasini o'tkaziladi. So'ngra  $l''$  va  $P_x$  nuqtalar tutashtirilib, tekislikning  $P_V$  izi hosil qilinadi. Aylana markazining proyeksiyalarini yasash uchun  $O'_1$  dan  $P_N$  ga perpendikulyar o'tkazib,  $h'$  bilan kesishgan  $O'$  nuqtani va  $h''$  da  $O''$  nuqta topiladi. Shuningdek, bu gorizontalda joylashgan aylananing  $A'_1$  va  $B'_1$  nuqtalarining  $A', A''$  va  $B', B''$  proyeksiyalari aniqlanadi.

Tekislikning  $f'_1$  frontalini aylananing markazi  $O'_1$  dan  $P_{1V}$  ga parallel qilib o'tkazilib, aylananing  $E'_1$  va  $F'_1$  nuqtalarning  $E', E''$  va  $F', F''$  proyeksiyalari yasaladi.



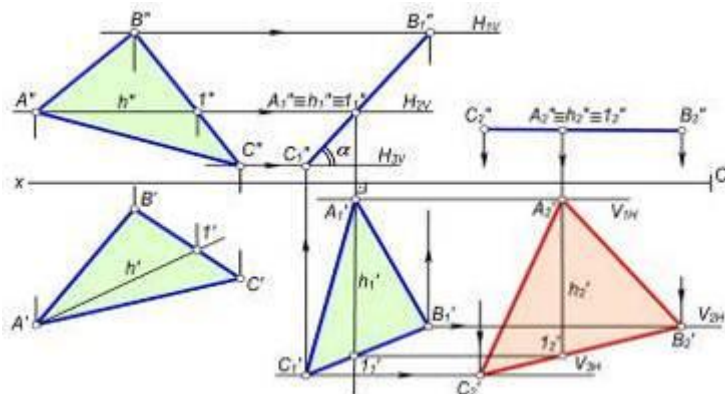
4.9-rasm.

Xuddi shu tarzda aylananing  $L'_1$  va  $T'_1$ ,  $C'_1$  va  $D'_1$  nuqtalarning proyeksiyalari tekislikning gorizontallari yordamida aniqlanadi. Bu nuqtalarning bir nomli proyeksiyalarini mos ravishda o'zaro tutashtirsak, aylananing gorizont va frontal proyeksiyalari – ellipslar hosil bo'ladi.

#### 4.4. Tekis- parallel harakatlantirish usulida masala yechish.

**6–masala.** Umumiy vaziyatdagi  $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$  tekislikni  $H$  tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (4.10–rasm).

**Echish.** 1.  $\triangle ABC$  ni avval  $V$  tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun uchburchakning  $h(h', h'')$  gorizontali o'tkazamiz. Chizmada ixtiyoriy  $A'_1$  nuqta tanlab, bu nuqtadan  $h'_1 \perp Ox$  qilib  $\triangle A'_1B'_1C'_1 = \triangle A'B'C'$  yangi gorizont proyeksiyasini yasaymiz.



4.10-rasm.

2.  $\triangle ABC$  ning yangi vaziyati  $V$  tekislikka perpendikulyar bo'lgani uchun uning frontal proyeksiyasi  $C''_1A''_1B''_1$  kesma tarzida proyeksiyalanadi.

3. Ixtiyoriy  $C''_2$  nuqta tanlab, bu nuqtadan  $Ox$  o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga  $C''_2A''_2B''_2 = C''_1A''_1B''_1$  bo'lgan kesmani o'lchab qo'yamiz. Parallel harakatlantirishning qoidasiga muvofiq uchburchak gorizont proyeksiyasining  $A'_2B'_2$  va  $C'_2$  nuqtalari mos ravishda  $V_{1N}$ ,  $V_{2N}$  va  $V_{3N}$  frontal tekisliklarning izlari bo'yicha harakatlanishidan  $\triangle A'_2B'_2C'_2$  hosil bo'ladi. Natijada,  $\triangle A'_2B'_2C'_2$   $H$  ga parallel bo'ladi va berilgan uchburchakning haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgan proyeksiyasi hosil bo'ladi.

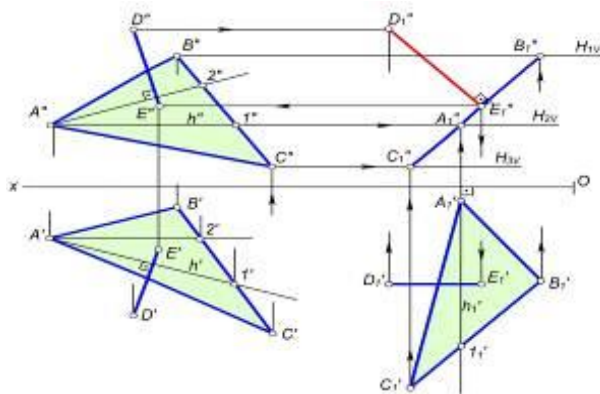
Chizmadagi  $\alpha$  burchak  $\triangle ABC$  ning  $H$  tekislik bilan hosil qilgan burchagini ko'rsatadi.

**7–masala.**  $D(D', D'')$  nuqtadan  $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$  tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (4.11,a–rasm).

**Yechish.**

1.  $\triangle ABC$  ni parallel harakatlantirib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga, masalan,  $V$  tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun mazkur uchburchakni  $h(h', h'')$  gorizontali  $V$  tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirib,  $A_1'l_1'=A'l'$  va  $\triangle A_1'B_1'S_1'=\triangle A'B'S'$  qilib yasaladi.  $D'$  nuqtaning  $D_1'$  vaziyati ham planimetrik yasashlarga asosan yasaladi. Bunda uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi  $C_1''A_1''B_1''$  kesma tarzida proyeksiyalanadi. Parallel harakatlantirishning qoidalariga asosan  $D$  nuqtaning yangi  $D_1'$  va  $D_1''$  proyeksiyalarini aniqlaymiz.

2. Masofaning haqiqiy o'lchami  $D_1''$  nuqtadan  $C_1''A_1''B_1''$  kesmaga tushirilgan  $D_1''E_1''$  perpendikulyar bilan o'lchanadi. Izlangan masofaning gorizontaal proyeksiyasi  $D_1'E_1'$  esa  $Ox$  o'qiga parallel bo'ladi.



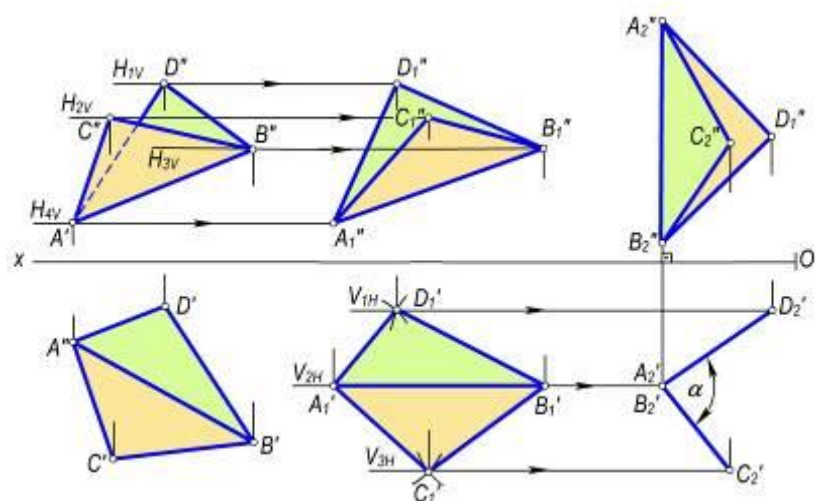
4.11-rasm.

3. Izlangan masofaning proyeksiyalarini tekislikning berilgan proyeksiyalarida yasash uchun  $D$  nuqtaning  $D'$  va  $D''$  proyeksiyalaridan tekislikning  $h(h', h'')$  gorizontali va  $f(f', f'')$  frontaliga tushirilgan perpendikulyarlar proyeksiyalari bilan aniqlanadi. Parallel harakatlantirishning qoidasiga muvofiq  $E$  nuqtaning  $E''$  va  $E'$  proyeksiyalarini ko'rsatilgan yo'nalish bo'yicha  $D'$  va  $D''$  proyeksiyalardan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida topamiz.

**8-masala.**  $CABD(C'A'B'D', C''A''B''D'')$  ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi parallel harakatlantirish usulidan foydalanib aniqlansin (4.12-rasm).

**Yechish:**

1.  $AB$  qirrani  $V$  tekislikka parallel qilib joylashtiriladi. Buning uchun chizma maydonining ixtiyoriy joyida  $A'B'-A_1'B_1'$  va  $A_1'B_1' \parallel Ox$  qilib joylashtiriladi.
2.  $A_1'$  va  $B_1'$  nuqtalarga nisbatan  $D_1'$ ,  $C_1'$  nuqtalarni planimetrik yasashlardan foydalanib yasaymiz. Hosil bo'lgan  $A_1'$ ,  $C_1'$ ,  $B_1'$  va  $D_1'$  nuqtalar yangi gorizontaal proyeksiya bo'ladi.
3. Parallel harakatlantirish qoidasiga asosan  $A''$ ,  $C''$ ,  $B''$  va  $D''$  nuqtalar  $Ox$  o'qiga parallel chiziqli bo'yicha harakat qilganligidan  $A_1''$ ,  $C_1''$ ,  $B_1''$  va  $D_1''$  yangi frontal proyeksiyalari yasaladi.
4.  $AB$  qirrani  $H$  tekisligiga perpendikulyar qilib joylashtiriladi. Buning uchun  $A_1''B_1''=A_2''B_2''$  ni chizmaning ixtiyoriy joyida  $A_2''B_2'' \perp Ox$  qilib joylashtiramiz.  $A_2''B_2''$  yangi frontal proyeksiya bo'ladi.
5.  $C_2''$  va  $D_2''$  nuqtalar esa  $A_2''$  va  $B_2''$  nuqtalarga nisbatan planimetrik yasashlar bilan yasaladi.
6. Parallel ko'chirish qoidasiga asosan  $A_1'$ ,  $C_1'$ ,  $B_1'$  va  $D_1'$  nuqtalar  $Ox$  ga parallel harakat qilib,  $A_2'' \equiv B_2''$ ,  $C_2'$  va  $D_2'$  nuqtalarning yangi gorizontaal proyeksiyalarini hosil qiladi.
7. Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa,  $\angle D_2'A_2'C_2' = \alpha$  chiziqli burchak  $AB$  qirradagi ikki yoqli burchakni o'lchaydi. Bu misolni  $AB$  qirrani  $H$  ga parallel qilib olishdan boshlab ham yechish mumkin.



4.12-rasm.

## II.BOB. YORDAMCHI PROYEKSIYALASH USULLARI.

5-ma'ruza. Qiyshiq burchakli yordamchi proyeksiyalash. To'g'ri burchakli yordamchi proyeksiyalash. Yordamchi proyeksiyalash usullarida masalalar echish. (2-soat)

### REJA

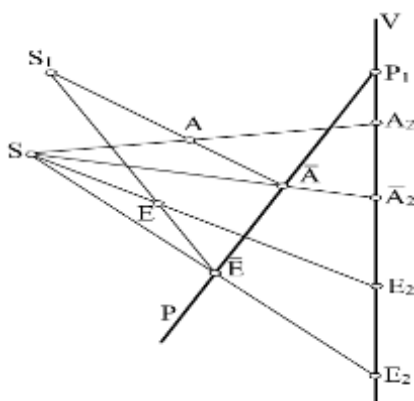
8. Qiyshiq burchakli yordamchi proyeksiyalash.
2. To'g'ri burchakli yordamchi proyeksiyalash.
3. Yordamchi proyeksiyalash usullarida masalalar echish.

Yordamchi proyeksiyalash usulining amaliy ahamiyati shundan iboratki, uni qo'llash orqali yechilishi bir nechta amallardan iborat bo'lgan masalalarning yechimiga bitta operatsiya orqali erishiladi. Bu usulni professor S.M.Kolotov (1880-1965) taklif qilgan.

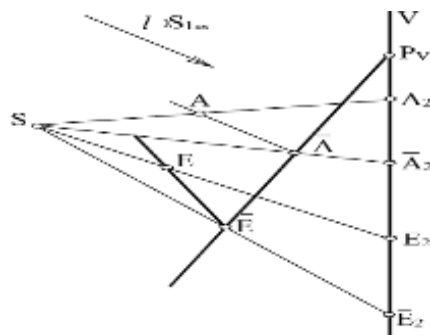
Usulning mohiyati quyidagilardan iborat. Nuqtaning tasviri chizma tekisligidagi asosiy proyeksiyalash yo'nalishi (markaziy yoki parallel) bo'yicha hosil qilingan bo'lsin. Qo'shimcha proyeksiyalar tekisligi va qo'shimcha proyeksiyalash markazini hos yoki hosmas nuqtada tanlab olamiz. Berilgan nuqtani bu markazdan qo'shimcha tanlangan tekislikka proyeksiyalaymiz va hosil bo'lgan qo'shimcha proyeksiyani asosiy proyeksiyalash yo'nalishi bo'yicha chizma tekisligiga proyeksiyalab, unda nuqtaning takroriy proyeksiyasini yasaymiz. Nuqtaning ana shu ikki marta proyeksiyalash natijasida, asosiy chizma tekisligida hosil qilingan takroriy proyeksiyasi, uning umumiy holdagi yordamchi proyeksiyasi bo'ladi.

5.1-rasmda asosiy proyeksiyalar tekisligi  $V$ , proyeksiyalash markazi  $S$  va  $A$  hamda  $E$  nuqtalar berilgan.  $A$  va  $E$  nuqtalarni  $V$  tekisligiga  $S$  proyeksiyalash markazidan foydalanib, ularning markaziy  $A_2$  va  $E_2$  proyeksiyalari yasalgan.

Qo'shimcha proyeksiyalash markazi  $S_1$  nuqta va qo'shimcha  $P$  tekislikni tanlab olamiz.  $S_1$  markazdan  $A$  va  $E$  nuqtalarni  $P$  tekislikka proyeksiyalab, unda qo'shimcha  $\bar{A}$  va  $\bar{E}$  proyeksiyalarni hosil qilamiz. So'ngra  $\bar{A}$  va  $\bar{E}$  proyeksiyalarni asosiy proyeksiyalash markazi  $S$  nuqtadan foydalanib  $V$  tekislikka proyeksiyalab, unda  $\bar{A}$  va  $\bar{E}$  nuqtalarning yordamchi  $\bar{A}_2$  va  $\bar{E}_2$  proyeksiyalariga ega bo'lamiz.



5.1-rasm.



5.2, a-rasm

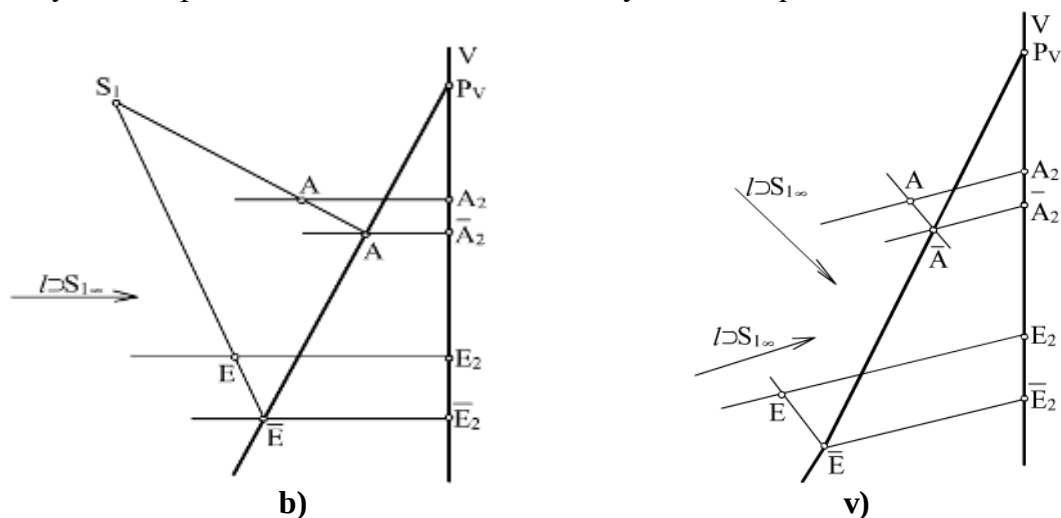
Yordamchi proyeksiyalashning bu umumiy holiga nisbatan amalda keng qo'llaniladigan quyidagi xususiy hollarini ko'rish mumkin:

1) asosiy proyeksiyalash markazi hos nuqta ( $S$ ), qo'shimcha proyeksiyalash markazi ( $S_{1\infty}$ ) esa hosmas nuqta (5.2-rasm, a);

2) asosiy proyeksiyalash markazi hosmas ( $S_\infty$ ) nuqtada, qo'shimcha proyeksiyalash markazi ( $S_1$ ) esa hos nuqtada (5.2-rasm, b);

3) har ikkala proyeksiyalash markazlari ( $S_\infty; S_{1\infty}$ ) hosmas nuqtalarda (5.2-rasm, v).

Bu hollardan birinchisi perspektivada, ikkinchi va uchinchi hollar esa, parallel proyeksiyalashda pozitsion va metrik masalalarni yechishda qo'llaniladi.



5.2-rasm

5.3-rasm, a) da  $P$  tekislik izlari orqali va unga perpendikulyar  $AB$  to'g'ri chiziq kesmasi berilgan.  $AB$  to'g'ri chiziqning  $P$  tekisligi bilan kesishish nuqtasini topish va  $P$  tekisligini uning frontal izi  $P_V$  atrofida aylantirib  $V$  proyeksiyalar tekisligi bilan ustma-ust qo'yish (jipslashtirish) talab qilinsin. Bu masalani yechish bir necha bosqichda bajariladi.

1.  $AB$  to'g'ri chiziq orqali  $P(P_H; P_V)$  tekisligini o'tkazamiz;  
2. Yordamchi tekislik  $R$  bilan  $P$  tekislikning kesishish chizig'i  $1_2$  ( $1_1 2_1; 1_2 2_2$ ) ni topamiz;

3. Kesishgan chizig'i bilan  $AB$  ning o'zaro kesishish nuqtasi  $K$  ni aniqlaymiz (chizmada uning frontal proyeksiyasi  $K_2$  ko'rsatilgan).

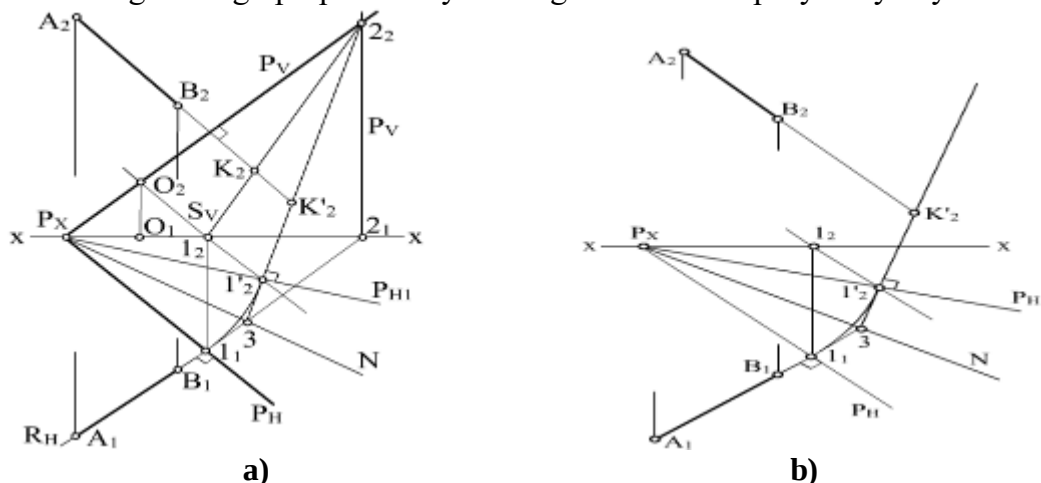
Endi  $P$  tekislikni  $P_V$  atrofida aylantirib, uni frontal proyeksiyalar tekisligi  $V$  bilan jipslashtirish uchun  $P_H$  da yotgan  $1(1_1; 1_2)$  nuqtani tanlaymiz. Tanlangan  $1(1_1; 1_2)$  nuqta orqali aylantirish o'qi  $P_V$  ga perpendikulyar harakat tekisligi  $S(S_V)$  ni o'tkazamiz, u  $P_V$  bilan kesishib, 1 nuqta uchun aylanish markazi  $O(0_1; 0_2)$  ni hosil qiladi. So'ngra  $P_X$  nuqtani markaz qilib  $R=P_X 1_1$  radius bilan yoy chizamiz va uning  $0_2 1_2$  bilan kesishish nuqtasi  $1'_2$  ni belgilaymiz. Topilgan  $1'_2$  nuqtani  $P_X$  bilan birlashtirib berilgan  $P$  tekislikning gorizontali izi  $P_H$  ning  $V$  tekislik bilan ustma-ust tutashgan yangi  $P_{H1}$  iziga ega bo'lamiz. O'zaro perpendikulyar  $R$  va  $P$  tekisliklarining kesishish chizig'i  $1_2$ , berilgan  $P$  tekisligi uchun eng katta og'ma chiziqdir, chunki u  $P_H$  ga perpendikulyar. Demak, u (ya'ni  $1_2$ )  $P_{H1}$  ga ham perpendikulyar bo'lib qoladi.  $A_2 B_2$  ni davom ettirib  $1_2 2_2$  bilan kesishish nuqtasi  $K_2$  ni belgilaymiz.  $A_2 B_2$  ning  $1'_2 2_2$  bilan kesishgan  $K'_2$  nuqtasi  $K_2$  nuqtaning  $V$  tekislik bilan ustma-ust tushgan holati bo'ladi.

Agar  $2_2 1'_2$  to'g'ri chiziqni davom ettirilsa u  $A_1 B_1$  bilan 3 nuqtada kesishadi. Hosil bo'lgan 3 nuqtani  $P_X$  bilan birlashtirsak birlamchi, ya'ni boshlang'ich, proyeksiya bilan berilgan tekislikning  $V$  bilan ustma-ust qo'yilgandagi holati orasida bir qiymatli moslik o'rnatuvchi  $N$  o'qiga ega bo'lamiz. Bu o'q moslik o'qi deb atalib, u aslida  $P$  va  $V$  tekisliklar orasidagi bissektor tekislikning gorizontali izi bo'ladi.

Endi  $P$  tekislikdagi biror nuqtaning ortogonal proyeksiyasini va uning  $P$  tekislik bilan birgalikda  $V$  bilan jipslashgan holatini quyidagi algoritm asosida bajarish mumkin. Buning uchun 1 nuqtaning gorizontali proyeksiyasidan  $A_1 B_1$  ga parallel o'tkazib, uning  $N$  bilan kesishish 3 nuqtasi orqali  $1'_2 2_2$  ga parallel o'tkaziladi va uning frontal proyeksiyasi orqali  $A_2 B_2$  ga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi, ya'ni

talab qilingan nuqtaga ega bo'linadi.  $1'2_2$  to'g'ri chiziq elito'vchi to'g'ri chiziq deb ataladi. 4.3-rasm, a) dagi  $P_V$  va  $R_V$  tekisliklar izlarini olib tashlasak chizma 4.3-rasm, b) dagi ko'rinishga kelib ancha ixchamlashadi. Bu chizma Kolotov diagrammasi deb nom olgan. Moslik o'qi  $N$  ni o'ziga parallel holda istalgan joyga ko'chirish mumkin.

**1-misol.**  $ABC(A_1B_1C_1; A_2B_2C_2)$  va  $ABD(A_1B_1D_1; A_2B_2D_2)$  uchburchak tekisliklari orasidagi ikkiyoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin. Bu burchakning haqiqiy kattaligini aniqlash uchun berilgan uchburchaklarni, ularning kesishish chizig'i  $AB$  ga perpendikulyar bo'lgan tekislikka proyeksiyalaymiz.

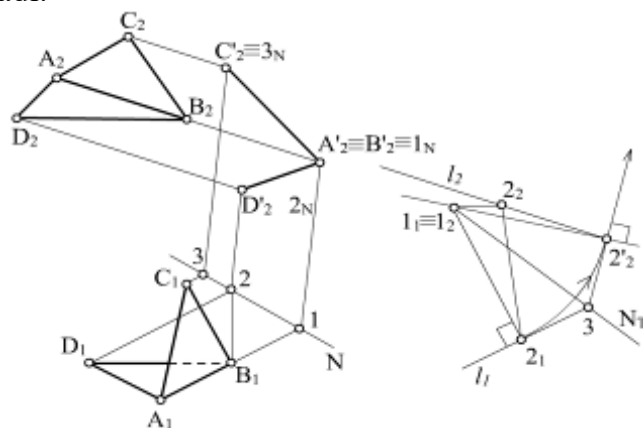


5.3-rasm

Uchburchaklar bu tekislikka o'zaro kesishuvchi ikki kesma ko'rinishda proyeksiyalanadi va ular orasidagi burchak ikkiyoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi.

Bu masalani yechish uchun asosiy chizmadan o'ng tomondagi bo'sh joyda diagramma yasaymiz (5.4-rasm). Ixtiyoriy  $1_1 \equiv 1_2$  nuqtadan  $A_1B_1$  ga perpendikulyar qilib  $1_2(1_12_1; 1_22_2)$  gorizontolni olamiz ( $A_1B_1 \perp 1_12_1$ ).  $2_2$  nuqtadan  $A_2B_2$  ga parallel  $l_2$  yo'nalishni o'tkazamiz ( $l_1 \parallel A_1B_1$ ;  $l_2 \parallel A_2B_2$ ), so'ngra  $1_1 \equiv 1_2$  nuqtani markaz qilib  $R=1_12_1$  radius bilan yoy chizamiz va uning  $l_2$  bilan kesishish nuqtasini  $2'_2$  bilan belgilaymiz. Hosil bo'lgan  $2'_2$  nuqtani  $1_2$  bilan birlashtirib,  $2'_2$  nuqtadan  $1_22'_2$  ga perpendikulyar o'tkazamiz va bu chiziq elituvchi bo'ladi.

Elituvchi chiziq bilan  $l_1$  ning kesishish nuqtasi 3 ni aniqlab, o'ni  $1_1 \equiv 1_2$  bilan tutashtirsak, u moslik o'qi  $N_T$  ni hosil qiladi. Moslik o'qi  $N$  ni unga parallel qilib, chizmaga yaqin va qulay joyga ko'chiramiz va  $A_1B_1$  yo'nalishda  $ABC$  va  $ABD$  larning gorizontaal proyeksiyasini unga proyeksiyalab 1, 2 va 3 nuqtalarni aniqlaymiz. Hosil bo'lgan 1, 2 va 3 nuqtalardan elituvchiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib ularning  $A_2B_2$  yo'nalishda proyeksiyalangan to'g'ri chiziqlar bilan mos ravishda kesishgan nuqtalarni belgilaymiz va ularni birlashtiramiz. Hosil bo'lgan  $\varphi$  burchak izlangan burchak bo'ladi.



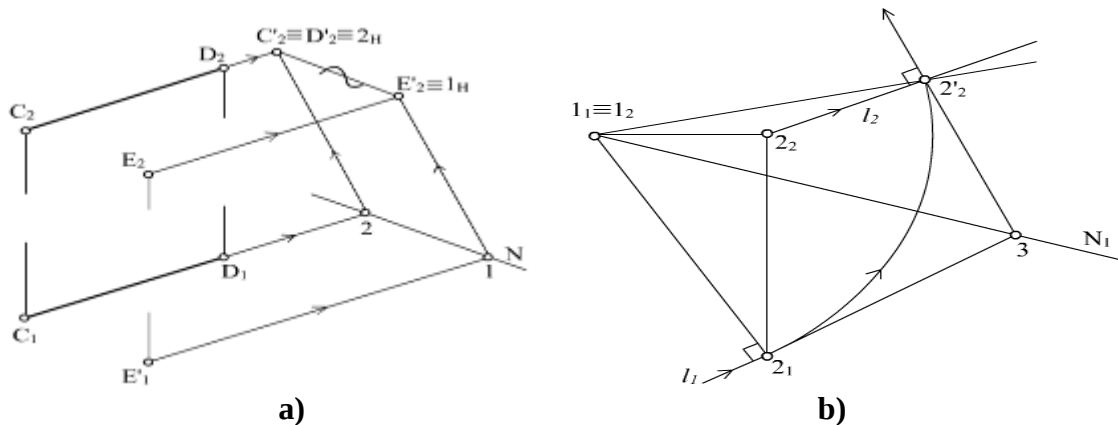
## 5.4-rasm

**2-misol.** Berilgan  $E(E_1;E_2)$  nuqtadan  $CD(C_1D_1;C_2D_2)$  to'g'ri chiziq kesmasigacha bo'lgan eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi topilsin.

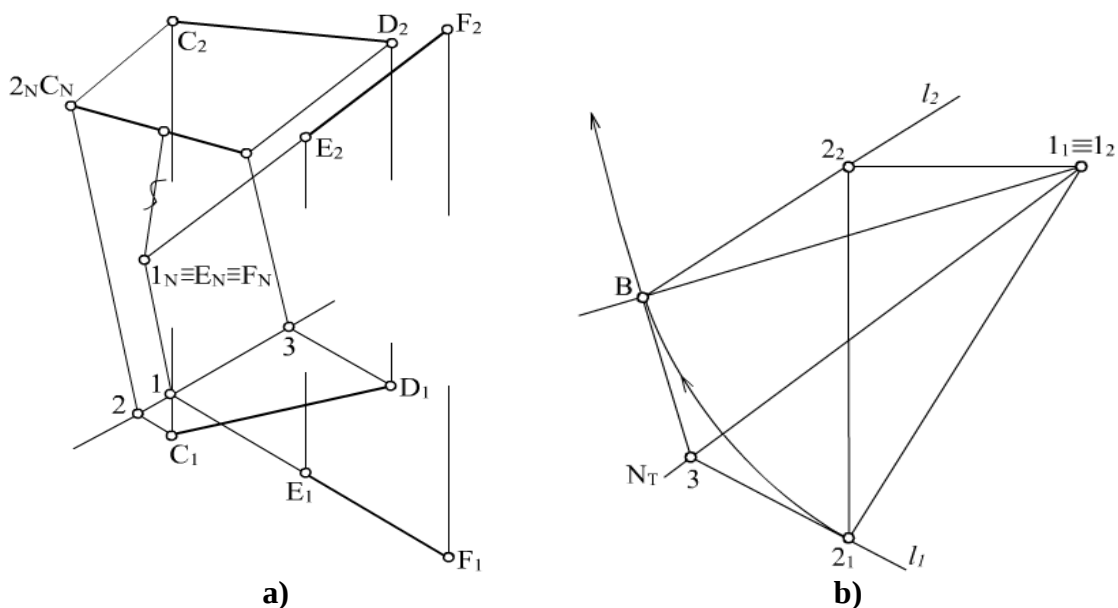
Bu so'ralgan masofaning haqiqiy kattaligini topish uchun berilgan to'g'ri chiziq kesmasini va  $E$  nuqtani  $CD$  ga perpendikulyar bo'lgan tekislikka  $CD$  yo'nalishda proyeksiyalanadi, natijada uning nuqta ko'rinishdagi proyeksiyasiga ega bo'lamiz va bu tekislikdagi ikki nuqta orasidagi masofa izlangan masofa bo'ladi. Bu masalani yechish uchun asosiy chizmaning o'ng tarafida bo'sh joyda ixtiyoriy  $1_1 \equiv 1_2$  nuqtani tanlab (5.5-rasm) diagramma yasaymiz. Buning uchun  $CD$  kesmaga perpendikulyar bo'lgan 12 gorizontaal chiziq o'tkazamiz: 12 ( $1_1 2_1; 1_2 2_2$ ) bunda  $1_1 \equiv 1_2$  vaziyatda olinadi.  $l_1$  yo'nalish  $C_1 D_1$  ga parallel ( $l_1 \parallel C_1 D_1$ ) bo'lib, u  $2_1$  nuqtadan o'tadi.

Endi asosiy chizmaga yaqin ixtiyoriy joyda moslik o'qini o'ziga parallel ko'chiramiz ( $N$ ). Bu o'qga  $C_1 D_1$  ni va  $E_1$  nuqtani ( $l_2 \parallel C_1 D_1$ ) proyeksiyalab 1 va 2 nuqta topiladi. Bu nuqtalardan tashuvchiga parallel to'g'ri chiziqlar chizib  $E'_2$  va  $C'_2 \equiv D'_2$  nuqtalar topiladi. Bu ikki nuqta orasidagi masofa izlangan masofa bo'ladi.

**3-misol.** O'zaro chalmashuvchi  $CD(C_1 D_1; C_2 D_2)$  va  $EF(E_1 F_1; E_2 F_2)$  to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofaning haqiqiy kattaligi topilsin. Bu masalani yechishda ham berilgan to'g'ri chiziqlardan biriga perpendikulyar tekislikka shu to'g'ri chiziq yo'nalishda proyeksiyalab, uni nuqta ko'rinishga keltiramiz. Bu nuqtadan ikkinchi to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa izlangan masofa bo'ladi. 5.6-rasmda  $l_1 \parallel E_1 F_1$ ;  $l_2 \parallel E_2 F_2$  qilib tanlab olingan.



5.5-rasm



5.6-rasm

### III.BOB. KO'PYOQLIKLAR

#### 6-ma'ruza. Ko'pyoqlar haqida tushunchalar va ularning proektsiyalari. Muntazam ko'pyoqliklar. (2-soat)

##### REJA

1. Ko'pyoqlar haqida tushunchalar va ularning proektsiyalari.
2. Muntazam ko'pyoqliklar.
3. Ko'pyoqliklarning tekis chizmada tasvirlanishi.

##### 6.1- Umumiy ma'lumotlar

**Ta'rif.** Hamma tomonidan tekis ko'pburchaklar bilan chegaralangan geometrik rasm - **ko'pyoqliklar** deyiladi.

Tekis ko'pburchaklarning o'zaro kesishuvidan hosil bo'lgan kesmalar, ko'pyoqliklarning-qirralari va qirralar orasidagi ko'pburchaklarni uning yoqlari deb ataladi. Qirralarning o'zaro kesishuv nuqtalari ko'pyoqliklarning uchlari deb yuritiladi (6.1, 6.2-rasmlar).

Ko'pyoqliklarning barsha yon yoqlarining yig'indisi uning sirti deb ataladi. Ko'pyoqliklarning uchlari va qirralari uning *aniqlovshilari* hisoblanadi (6.1-rasm). Ko'pyoqliklarning bir yon yog'ida yotmagan ikki ushini birlashtiruvshi kesma uning *diagonali* deb ataladi (6.2-rasm). Ko'pyoqliklar aniqlovshilari uning istalgan yon yog'iga (tekislikka) nisbatan bir tomonda joylashsa, uni *qabariq ko'pyoqliklar*, aksinsha *botiq ko'pyoqliklar* deb yuritiladi. Ko'pyoqliqlarining bir nesha turlari mavjud bo'lib, ulardan quyidagilarni ko'rib shiqamiz:

##### Piramida

**Ta'rif.** YOqlaridan biri tekis ko'pburchak bo'lib, qolgan yoqlari esa umumiy ushga ega bo'lgan uchburchaklardan tuzilgan ko'pyoqliklar **piramida** deyiladi

Ko'pburchak piramidaning asosi va uchburchaklar esa uning yon yoqlari deb ataladi. Yon yoqlarining umumiy ushi piramidaning ham ushi hisoblanadi va u asos tekisligida yotmaydi. Asosi muntazam ko'pburchakli piramida *muntazam piramida* deb ataladi. Piramida balandligi asosining markazidan o'tib, unga perpendikulyar bo'lsa, uni to'g'ri piramida, perpendikulyar bo'lmasa og'ma piramida deb yuritiladi (6.1-rasm).

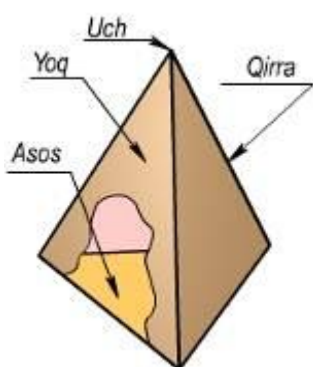
##### Prizma

**Ta'rif.** YOn yoqlari to'rt burchaklardan va asosi ko'p burchakdan iborat bo'lgan ko'pyoqliklar **prizma** deyiladi.

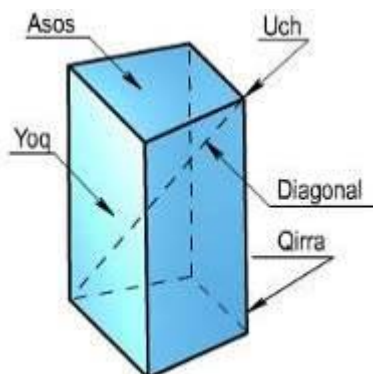
Yon yoqlarning kesishuv chiziqlari – prizma *qirralari*, qirralar orasidagi ko'p burchaklining yoqlari deyiladi (6.2-rasm). Prizmani barsha qirralarini kesuvchi parallel tekisliklarda hosil bo'lgan ko'pburchaklar–prizmaning asoslari deb ataladi. YOn qirralari asosiga nisbatan og'ma yoki perpendikulyar bo'lsa, prizma ham mos ravishda *og'ma* yoki *to'g'ri prizma* deb ataladi. Asosi muntazam ko'pburchak bo'lgan prizma, *muntazam prizma* deb yuritiladi.

Asoslari o'zaro parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko'pburchakdan va yon yoqlari esa asos uchlaridan o'tuvchi uchburchaklar va trapetsiyalardan iborat bo'lgan ko'pyoqliklar *prizmatoid* deyiladi (6.3-rasm). Ko'pyoqliklar bir jinsli qabariq, bir jinsli botiq, yulduzsimon hamda ularning birlashishidan hosil bo'lgan murakkab ko'pyoqliklarga bo'linadi. Bir jinsli

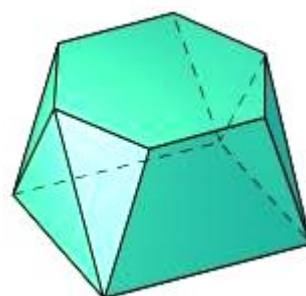
qabariq ko'pyoqliklar muntazam va yarim muntazam ko'pyoqliklarga ajraladi. Muntazam qabariq ko'pyoqliklar o'zaro teng bir xil muntazam ko'pburchaklardan iborat yoqlarga, o'zaro teng ikki yoqli burchaklarga va o'zaro teng qirralarga ega bo'ladi. Bu ko'pyoqliklar asosan besh xil bo'lib *Platon jismlari* deb yuritiladi (6.1-jadval).



6.1-rasm



6.2-rasm



6.3-rasm

Ko'pyoqliklarning muhim xossalaridan birini Eyler quyidagisha bayon etgan:

**Eyler teoremasi.** Har qanday qabariq ko'pyoqliklarda yoqlar bilan uchlar sonining yig'indisidan qirralar sonining ayirmasi ikkiga teng bo'ladi (ya'ni  $YO + U - Q = 2$ ).

## 6.2.Muntazam ko'pyoqliklar

6.1-jadval

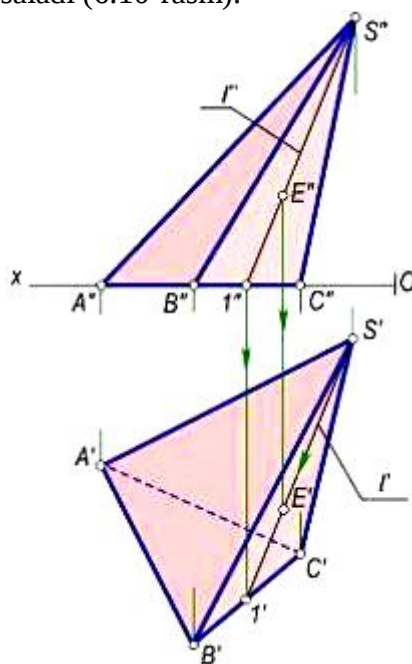
|                                                                                                                                          |                                    |                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------------|
| <p><b>Tetraedr (6.4-rasm)</b></p>                                                                                                        | <p><b>Dodekaedr (6.7-rasm)</b></p> | <p><b>Kub – geksaedr (6.5-rasm)</b></p> |
| <p><b>Ikosaedr (6.8-rasm)</b></p> <p> <math>YO + U - Q = 2</math><br/> YO – yoqlar soni<br/> U – uchlar soni<br/> Q – qirralar soni </p> | <p><b>Oktaedr (6.6-rasm)</b></p>   | <p><b>Kesik oktaedr (6.9-rasm)</b></p>  |

YOq yoqlari turli rasmdagi muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lgan ko'pyoqliklarni *yarim muntazam ko'pyoqliklar* deb yuritiladi. Bu ko'pyoqliklar 18 xil bo'lib, ular *Arximed jismlari* deb yuritiladi. 6.9-rasmda Arximed jismlaridan biri bo'lgan kesik oktaedrning yaqqol tasviri keltirilgan.

Ko'pyoqliklar texnikada turli ko'rinishdagi mashina detallari, ko'pyoqli linzalar yasashda, hamda arxitektura va qurilish ishlarida keng ishlatiladi. Masalan, devor va poydevor bloklari, tom, ko'priklarning temir-beton panellari va inshootning boshqa qismlari ko'pyoqliklardan iborat bo'ladi. Ko'pyoqliklardan yana «geodezik» gumbazlar yasashda, keng oraliqli binolarni ustunsiz yopishda keng foydalaniladi. Qadimiy binolarda esa gumbaz, gumbaz osti, bino gumbazidan prizmatik qismiga o'tish joylarida bezak-ornament sifatida ham qo'llanilgan.

**Ko'pyoqliklarning tekis chizmada tasvirlanishi.** Ko'pyoqliklar chizmada o'z aniqllovshilarining to'g'ri burchakli proyeksiyalari orqali beriladi. 6.10-rasmda  $SAB$  piramidaning tekis chizmasi o'z aniqllovshilari:  $S(S'S'')$  ushi, asosi  $ABS(A'B'S', A''B''S'')$  uchburchakning proyeksiyalari orqali tasvirlangan.  $SA, SB, \dots$  qirralarning proyeksiyalari  $S,A,B,S$  uchlarining bir nomli proyeksiyalarini birlashtiruvchi  $S'A'$  va  $S''A''$ ,  $S'B'$  va  $S''B''$  va x.k. kesmalar bo'ladi.

YOqlarining proyeksiyalari esa qirralarning proyeksiyalari bilan chegaralangan  $S'A'B'$  va  $S''A''B''$ ,  $S'A'S'$  va  $S''A''S''$ , ... tekis rasmlardan iborat bo'ladi. Ko'pyoqliklar sirtidagi ixtiyoriy  $ye(E'')$  nuqtaning yetishmagan  $E'$  proyeksiyasi yon tekislikka tegishli ixtiyoriy  $\ell(\ell', \ell'')$  to'g'ri chiziq vositasida yasaladi (6.10-rasm).



6.10-rasm

### Nazorat savollari

1. Ko'pyoqliklar deb nimaga aytiladi?
2. Ko'pyoqliklarning aniqllovshilariga nimalar kiradi?
3. Qanday ko'pyoqliklarni piramida deb ataladi?
4. Qanday ko'pyoqliklarni prizma deb ataladi?
5. Qanday ko'pyoqliklarni to'g'ri, ko'pyoqliklar deb ataladi?
6. Qanday ko'pyoqliklarni muntazam ko'pyoqliklar deb yuritiladi?

**7-ma'ruza. Ko'pyoqliklarning tekislik bilan kesishuv chizig'ini va to'g'ri chiziq bilan kesishuv nuqtasini yasash. (2-soat)**

**REJA**

1. Ko'pyoqlarning tekislik bilan kesishuv chizig'i.
2. Kesim tomonlarini yasash usuli.
3. Kesim uchlarini yasash usuli.
4. Ko'pyoqliklarning to'g'ri chiziq bilan kesishishi.

**7.1. Ko'pyoqlarning tekislik bilan kesishuv chizig'i.**

Ko'pyoqliklarni tekislik bilan kesilganda kesimda ko'pburchak hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan ko'pburchakning uchlari, ko'pyoqliklar qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtalari bo'ladi.

Kesimning tomonlari esa ko'pyoqliklar yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chiziqlari bo'ladi. Ko'pyoqliklarning tekislik bilan kesilgan qismini quyidagi ush usul bilan yasash mumkin:

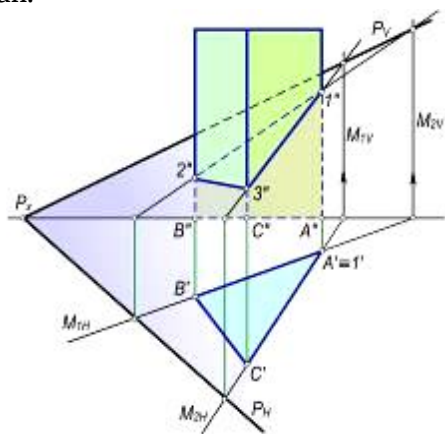
- kesim tomonlarini, ya'ni ko'pyoqliklar yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chizig'ini, yasash usuli.
- kesim uchlarini, ya'ni ko'pyoqliklar qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasash usuli.
- aralash usul, bunda yuqoridagi ikkala usuldan foydalaniladi.

Bu usullardan qaysi birini qo'llash ko'pyoqliklar va tekislikni tekis chizmada berilishiga qarab tanlanadi.

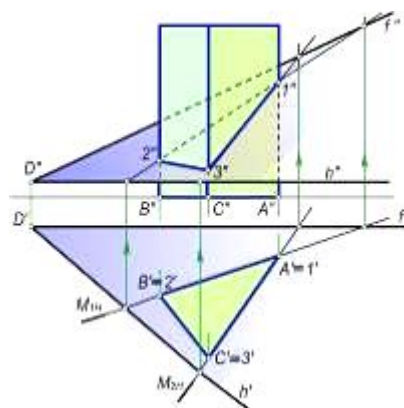
**7.2. Kesim tomonlarini yasash usuli.**

Bu usul ikki tekislikning kesishish chizig'ini yasash algoritmini bir nesha marta takrorlash asosida bajariladi. Bu usuldan proyeksiyalovchi vaziyatdagi prizmaning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashda foydalanish juda qulaydir. 7.1-rasmda ush yoqlik to'g'ri prizmaning umumiy vaziyatdagi  $P(P_H, P_V)$  tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimining proyeksiyalari yasalgan.

Bunda prizmaning yon yoqlari orqali  $M_1(M_{IH}, M_{IV})$  va  $M_2(M_{2H}, M_{2V})$  gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkazilgan. Bu tekisliklarni berilgan  $P$  tekislik bilan kesishgan chiziqlari yordamida kesim yuzasining  $12(1'2', 1'', 2'')$ ,  $13(1'3', 1'', 3'')$  tomonlari aniqlangan.



**7.1-rasm**

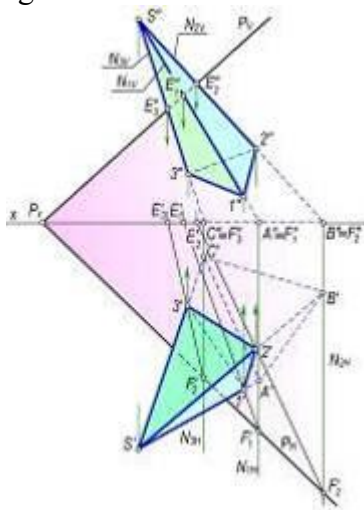


**7.2-rasm**

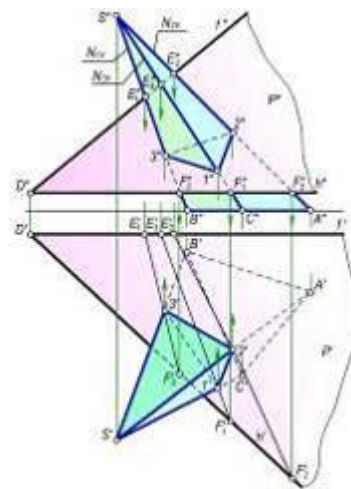
Aynan shu prizmani, o‘zaro kesishuvchi  $h(h',h'')$  va  $f(f',f'')$  to‘g‘ri chiziqlar orqali berilgan  $P(P',P'')$  tekislik bilan kesishuv chizig‘ini yasash 7.2-rasmda ko‘rsatilgan. Bunda kesishish chiziqlari prizma yoqlari orqali o‘tkazilgan  $M_1(M_{1H})$  va  $M_2(M_{2H})$  gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar vositasida kesim yuzasining  $\Delta 123(1'2'3',1''2''3'')$  proyeksiyalari yasalgan.

### 7.3. Kesim uchlarini yasash usuli.

Bu usul 1-usulga nisbatan umumiyroq hisoblanib, to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasash algoritmi asosida bajariladi. 7.3, 7.4-raslarda asosi N proyeksiyalar tekisligida bo‘lgan  $SAB$  ( $S'A'B'S'$ ,  $S''A''B''S''$ ) piramidani, izlari orqali berilgan  $R(P_V, P_H)$  tekislik va kesishuvchi chiziqlar ( $h$  va  $f$ ) proyeksiyalari orqali berilgan umumiy vaziyatdagi  $P(P',P'')$  tekislik bilan kesishishdan hosil bo‘lgan kesimini yasash ko‘rsatilgan.



7.3-rasm



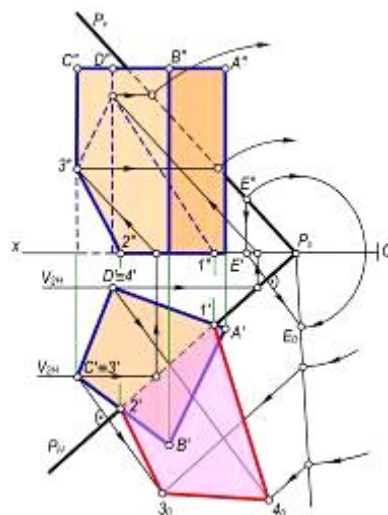
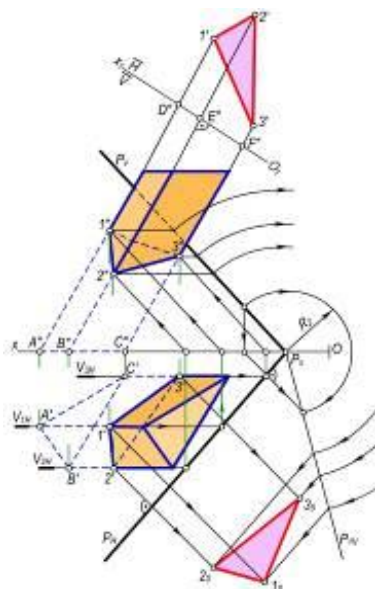
7.4-rasm

Bunda kesim proyeksiyalari  $\Delta 1'2'3'$  va  $\Delta 1''2''3''$  ni yasash algoritmi quyidagisha bo‘ladi:

- SA, SB, SS qirralar orqali yordamchi  $N_1, N_2, N_3$  frontal proyeksiyalovchi tekisliklar o‘tkaziladi;
- bu tekisliklarning  $P$  tekislik bilan kesishgan chiziqlari  $E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3$  ning proyeksiyalari yasaladi;
- kesishuv chiziqlari  $E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3$  bilan piramida qirralari SA, SB, SS ning mos ravishda kesishuv nuqtalari 1, 2, 3 larni proyeksiyalari aniqlanadi;
- hosil qilingan 1, 2, 3 nuqtalar o‘zaro birlashtirilib, kesim yuzasining proyeksiyalari  $\Delta 1'2'3'$  va  $\Delta 1''2''3''$  yasaladi.

7.5-rasmda aynan shu usul bilan og‘ma prizmaning umumiy holatdagi  $P(P_V, P_H)$  tekislik bilan kesishish chizig‘ini proyeksiyalarini yasash prizma qirralari orqali  $V_1, V_2$  va  $V_3$  yordamchi frontal tekisliklar o‘tkazish bilan aniqlash ko‘rsatilgan. Kesim yuzasi  $\Delta 123$  ning haqiqiy kattaligi  $P$  ni  $P_H$  izi atrofida aylantirib  $H$  ga jipslashtirish usuli bilan aniqlangan.

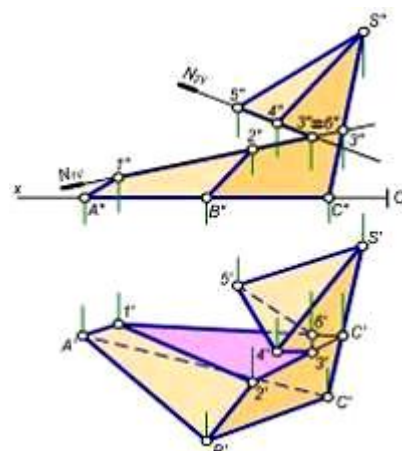
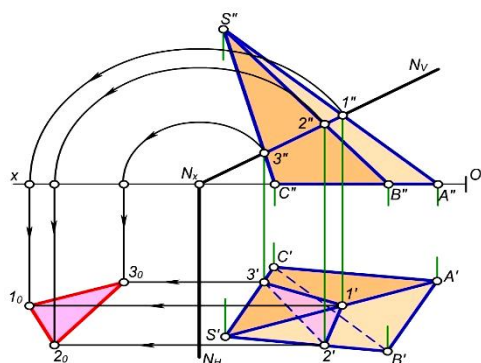
7.6-rasmda to‘g‘ri prizmaning umumiy vaziyatdagi  $R(P_V, P_H)$  tekislik bilan kesishish chizig‘ining proyeksiyalarini yasash ko‘rsatilgan. Kesimning 1( $1',1''$ ) va 2( $2',2''$ ) nuqtalari bevosita prizma asosi bilan  $R$  tekislikning  $P_n$  izi kesishgan nuqtalarida yotadi. S va D qirralar orqali o‘tkazilgan yordamchi kesuvchi  $V_1(V_{1H}), V_2(V_{2H})$  frontal tekisliklar vositasida 3,4 nuqtalar proyeksiyalari aniqlangan. Kesim yuzasining haqiqiy kattaligi  $R$  tekislikni uning  $P_N$  izi atrofida aylantirib  $N$  ga jipslashtirish usulida yasalgan.



**7.5-rasm**

**7.6-rasm**

Agar ko'pyoqliklar proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishsa, ularning kesim yuzasini proyeksiyalarini yasash yanada osonlashadi, shunki bunda kesim yuzaning bir proyeksiyasi proyeksiyalovchi tekislik izida bo'ladi 7.7-rasmda og'ma piramidaning frontal proyeksiyalovchi  $N(N_H, N_V)$  tekislik bilan kesishgan va kesim yuzasini va uning haqiqiy kattaligini yasash ko'rsatilgan. 7.8-rasmda ushhoqli piramidani  $N_1(N_{1V})$  va  $N_1(N_{2V})$  frontal proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesib, kesimda hosil bo'lgan o'yiqli qismining gorizontal proyeksiyasini yasash ko'rsatilgan. Kesim yuzasi proyeksiyalarini yasash yo'llarini chizmadan tushunib olish qiyin emas.



**7.7-rasm**

**7.8-rasm**

#### 7.4. Ko'pyoqliklarning to'g'ri chiziq bilan kesishishi

To'g'ri chiziqli kavariq ko'pyoqliklarning yoqlari bilan ikki nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarning biri *kirish* ikkinchisi *shiqish* nuqtalari deb yuritiladi. To'g'ri chiziqli ko'pyoqliklar sirtining kesishish nuqtalarini yasashda quyidagi usullardan foydalaniladi:

- to'g'ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish usuli;
- to'g'ri chiziq orqali umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish usuli.

Quyida to'g'ri chiziq bilan ko'pyoqliklarning kesishish nuqtalarini yasashga oid bir nisha misollarni ko'rib shiqamiz.

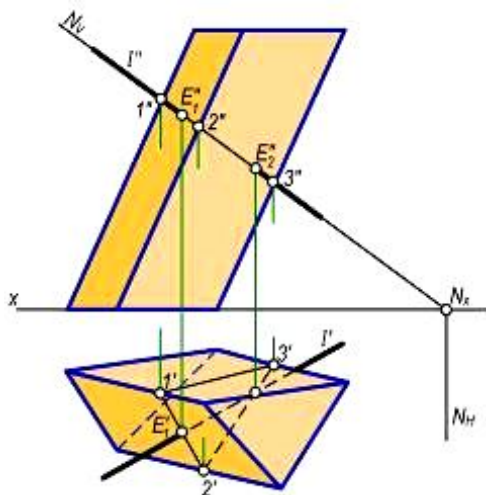
**1-usul:** To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqliklar sirtining o'zaro kesishish nuqtalarini xususiy vaziyatdagi tekislik vositasida yasash, qo'yidagi yasash algoritmi asosida bajariladi:

- berilgan to'g'ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o'tkaziladi;
- xususiy vaziyatdagi tekislik bilan berilgan ko'pyoqliklarning o'zaro kesishuvidagi kesim yuza chizig'i aniqlanadi;
- kesim yuza chizig'i bilan berilgan to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari belgilanadi.

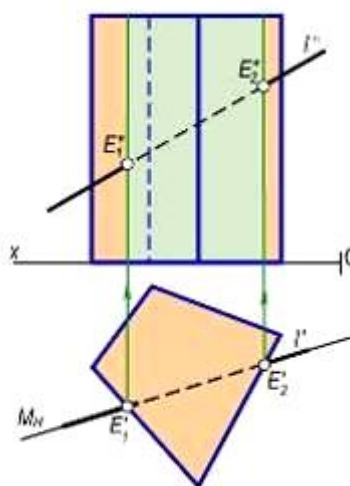
7.9-rasmda  $\ell(\ell', \ell'')$  to'g'ri chiziqning ush yoqli  $\Phi(\Phi', \Phi'')$  prizma sirti bilan kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan.

Yasash algoritmi qo'yidagisha:

- $\ell$  to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi  $N(N_H, N_V)$  tekislik o'tkaziladi;  $\ell'' \subset N_V$  va  $N_H \perp O_x$ ;
- $N$  tekislik bilan  $\Phi$  prizmaning kesishishidagi kesim yuza chizig'i proyeksiyalari  $1'2'3'$  va  $1''2''3''$  yasaladi.  $N \cap \Phi \Rightarrow 23$ ;
- Kesim yuza chizig'i  $\Delta 123$  bilan  $\ell$  to'g'ri chiziqning ushrashish nuqtalari  $E_1$  va  $E_2$  belgilanadi.  $12 \cap \ell = E_1$  va  $23 \cap \ell = E_2$ . Bunda avvalo  $1'2'3' \cap \ell' = E'_1$  va  $E'_2$  lar aniqlanib, so'ngra proyeksion bog'lanish chizig'i orqali  $E''_1$  va  $E''_2$  lar holati aniqlanadi.



7.9-rasm.



7.10-rasm

Agar ko'pyoqliklarning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklar bo'lsa, to'g'ri chiziq bilan bunday sirtning kesishish nuqtalarini yasash juda soddalashadi.

7.10-rasmda to'rt yoqlik to'g'ri prizma sirti bilan  $\ell(\ell', \ell'')$  to'g'ri chiziqning o'zaro kesishish  $E_1(E'_1, E''_1)$ ,  $E_2(E'_2, E''_2)$  nuqtalarini yasash tasvirlangan.

Bunda prizmaning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklardan iborat bo'lgani uchun  $\ell$  orqali  $M(M_N)$  gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi, kesishuv nuqtalari proyeksiyalari  $E'_1$  va  $E'_2$  belgilanadi. So'ngra ularning  $E''_1$  va  $E''_2$  proyeksiyalari yasaladi.

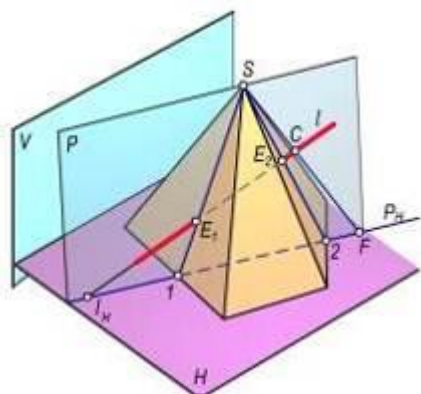
**2-usul:** To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqliklar sirtining o'zaro kesishish nuqtalarini, umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik vositasida yasash. Bunda umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish uchun markaziy yoki qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash usullarining biridan foydalaniladi. Bunda to'g'ri chiziqni ko'pyoqliklar sirtiga kirish va shiqish nuqtalarini yasash algoritmi quyidagisha:

- berilgan to'g'ri chiziq orqali sirtning asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik o'tkaziladi;
- yordamchi tekislik bilan sirt asosi tomonlarining kesishish nuqtalari belgilanadi;

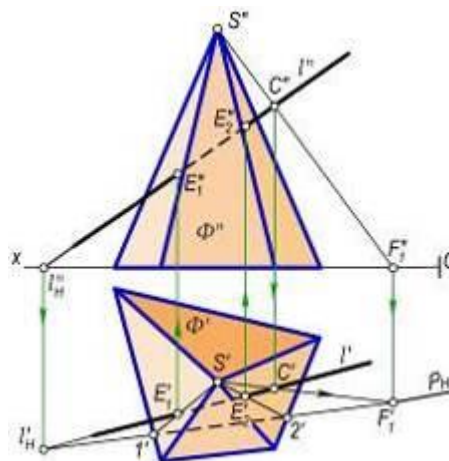
- bu nuqtalar orqali yordamchi tekislik bilan sirt yon yoqlarining kesishish chiziqlari aniqlanadi;
- bu chiziqlar berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishib sirtga tegishli kirish va shiqish nuqtalarni hosil qiladi.

7.11a,b-rasmda  $\ell(\ell',\ell'')$  to'g'ri chiziq bilan  $\Phi(\Phi',\Phi'')$  piramidaning o'zaro kesishish nuqtasini yasash tasvirlangan. Bunda piramidaning S ushi va  $\ell$  to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi umumiy vaziyatdagi P tekislikning  $R_N$  izini o'tkazish uchun:

- berilgan  $\ell$  to'g'ri chiziqning gorizontall  $\ell'_H$  izi yasaladi;
- piramidaning S ushidan  $\ell$  to'g'ri chiziqni ixtiyoriy  $S(S',S'')$  nuqtada kesib o'tuvchi  $SS(S'S',S''S'')$  to'g'ri chiziq o'tkazib uning ham gorizontall  $F'_1$  izi yasaladi;
- $\ell'_H$  va  $F'_1$  izlar orqali piramidani asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi  $P$  tekislikning gorizontall  $P_H$  izini o'tkazamiz.  $P_H$  bilan piramida asosining kesishish nuqtalari  $1'$  va  $2'$  ni belgilanadi.
- $S'$  nuqtani  $1'$  va  $2'$  nuqtalar bilan birlashtirib,  $P$  tekislik bilan piramidaning kesishish chizig'i  $\Delta S'1'2'$  ni yasaladi;
- $\Delta S'1'2'$  bilan  $\ell'$  to'g'ri chiziqning o'zaro ushrashish  $E'_1$  va  $ye'_2$  nuqtalarini belgilanadi. Bu nuqtalardan foydalanib ularning frontal  $E''_1$  va  $ye''_2$  proyeksiyalari aniqlanadi. Hosil bo'lgan  $E_1$  va  $ye_2$  nuqtalar  $\ell$  to'g'ri chiziq bilan  $\Phi$  piramida sirtining kesishishidagi kirish va shiqish nuqtalari bo'ladi.



a)



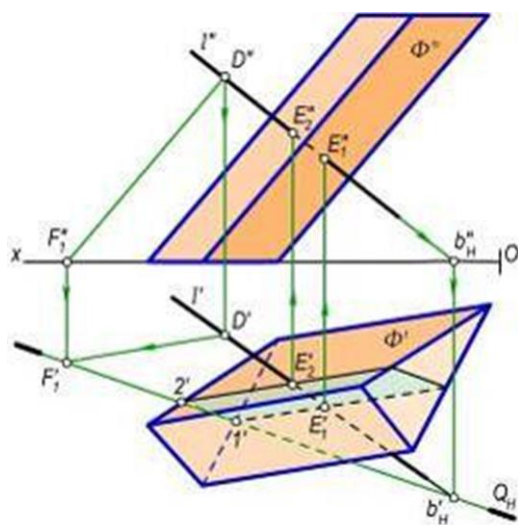
b)

### 7.11-rasm

Yuqorida bayon etilgan usulni yordamchi markaziy proyeksiyalash usuli deb ham ataladi. Bu usuldan to'g'ri chiziq bilan konus sirtining kesishish nuqtalarini yasashda ham foydalaniladi. Prizma yoki silindr sirtlari bilan to'g'ri chiziqning kesishuv nuqtalarini yasashda ham umumiy vaziyatdagi tekisliklaridan foydalangan qulay. Bunda berilgan to'g'ri chiziq bilan ko'pyoqliklar sirtining o'zaro kesishish nuqtalari berilgan to'g'ri chiziq orqali ko'pyoqliklarning yon qirralariga parallel qilib o'tkazilgan umumiy vaziyatdagi tekislik vositasida aniqlanadi.

Proyeksiyalash yo'nalishi ko'pyoqliklar qirralariga parallel bo'lgani uchun uni *qiyshiq burchakli yordamchi parallel proyeksiyalash usuli* deb ham ataladi.

7.12-rasmda og'ma vaziyatdagi  $\Phi(\Phi',\Phi'')$  prizma sirti bilan  $b(b',b'')$  to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan. Bu misolni chizmada Yechish algoritmi quyidagisha:



7.12-рasm

to'g'ri chiziqlarni prizma sirti bilan kesishishidagi kirish va shiqish nuqtalari hosil bo'ladi.

- berilgan  $b$  to'g'ri chiziqlarning gorizontal  $b_h(b'_h, b''_h)$  izi yasaladi;

- $b$  to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy  $D(D', D'')$  nuqtasidan prizmaning yon qirralariga parallel qilib to'g'ri chiziq o'tkaziladi va uning ham gorizontal  $F_1(F'_1, F''_1)$  izi aniqlanadi.

- $b'_h$  va  $F'_1$  izlar orqali, prizmaning qirralariga parallel kesuvchi umumiy vaziyatdagi  $Q$  tekislikning  $Q_H$  izi o'tkaziladi. Bu tekislik prizmaning asosini  $1'$  va  $2'$  nuqtalarda kesadi. Ushbu nuqtalaridan prizma qirralariga parallel o'tkazilgan kesim chiziqlari  $l'$  to'g'ri chiziqlarni  $E'_1$  va  $ye'_2$  nuqtalarida kesadi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari  $E''_1$  va  $ye''_2$  nuqtalar,  $l''$  to'g'ri chiziqda aniqlanadi. Natijada,

## 8-ma'ruza. Ko'pyoqliklarning yoyilmasini bajarish. (2-soat)

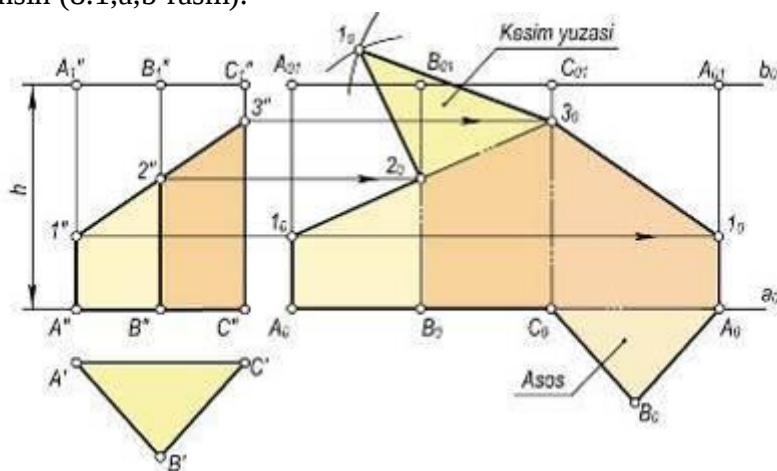
### REJA

1. Uchburchakli to'g'ri prizmaning yoyilmasini yasash.
2. Uch yoqli og'ma piramidaning to'la yoyilmasi yasash.

#### 8.1. Uchburchakli to'g'ri prizmaning yoyilmasini yasash

Ko'pyoqliklar to'la yoyilmasini yasash uchun uning yon yoqlari va asoslarining yoyilmalari yasaladi. Bunday yoqlar (uchburchak yoki ko'pburchak) ni yoyilmada yasash ularga teng bo'lgan yoqlarni yasash demakdir. Bunday yoqlarni yoyilmada yasash uchun tomonlari ya'ni qirralarining haqiqiy uzunliklari bo'lishi kerak. Agar ularning haqiqiy uzunliklari chizmada bo'lmasa, ularni turli usullar orqali yasash mumkin.

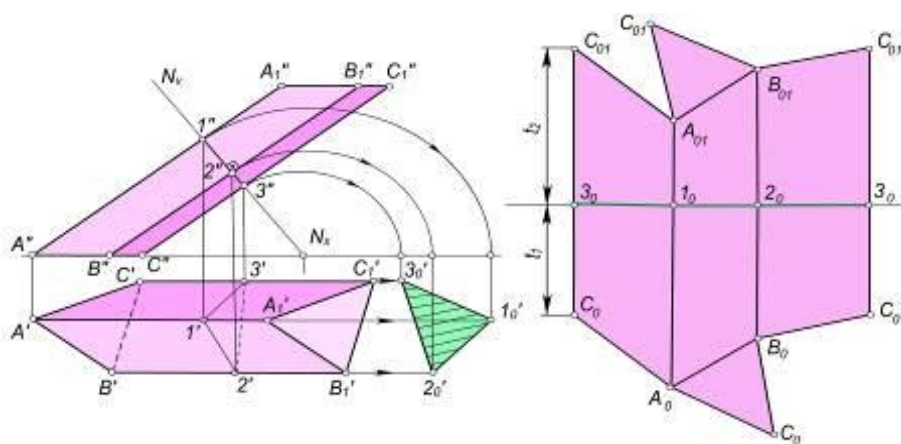
**1-masala.** Asosi  $H$  tekislikda yotgan uchburchakli to'g'ri prizmaning yoyilmasini yasash talab qilinsin (8.1,a,b-rasm).



8.1-rasm

**Yechish.** Prizmaning yon qirralari frontal proyeksiyada, asosidagi qirralari esa gorizontaal proyeksiyada haqiqiy uzunlikda tasvirlangan. Prizmaning yoyilmasini yasash uchun dastlab uning biror masalan,  $AA_1$  qirrasi bo'ylab xayolan kesish kerak. So'ngra uchta to'g'ri to'rtburchaklar (yon yoqlar) yonma-yon qo'yib yasaladi. Bu to'rtburchaklarning balandligi prizmaning balandligi  $h$  ga, asoslari esa mos ravishda  $A'B'$ ,  $B'A'$  va  $C'A'$  kesmalarga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga asoslari qo'shiladi va prizmaning to'la yoyilmasi hosil bo'ladi.

8.2,a,b-rasmlarda berilgan uch yoqli og'ma prizmaning yon qirralari frontal vaziyatda bo'lgani uchun ularning haqiqiy uzunliklari  $A''A_1''$ ,  $B''B_1''$  va  $C''C_1''$  kesmalarga teng bo'ladi. Asoslari gorizontaal vaziyatda bo'lganligi uchun asos qirralarining haqiqiy qiymati  $A'B'$ ,  $B'A'$  va  $C'A'$  kesmalarga teng bo'ladi. Bunday og'ma prizmaning yoyilmasini normal kesim usulida yasash qulay hisoblanadi. Buning uchun og'ma prizmaning yon qirralariga perpendikulyar qilib ixtiyoriy  $N(N_V)$  tekislik o'tkaziladi. Normal kesim 123 uchburchakning proyeksiyalari ( $1'2'3'$ ,  $1''2''3''$ ) ni hosil qilinadi. So'ngra normal kesimning haqiqiy kattaligi  $\Delta 1_0 2_0 3_0$  aylantirish usulida yasaladi



8.2-rasm

Yoyilmani yasash uchun ixtiyoriy (bo'sh) joyda  $a_0$  – yordamchi chiziqli ingichka qilib o'tkaziladi. Bu chiziqqa normal kesim tomonlarning haqiqiy uzunliklari biror (masalan,  $3_0$ ) nuqtadan boshlab o'lchab qo'yiladi (8.2,b-rasm). Hosil bo'lgan  $3_0, 1_0, 2_0$  va  $3_0$  nuqtalardan  $a_0$  chiziqqa perpendikulyar vaziyatda chiziq o'tkaziladi. Bu chiziqlarga qirralarning haqiqiy uzunliklari o'lchab qo'yiladi. YOyilmada  $C''3''=C_03_0$  va  $3''C''=3_0C_0$  qirralarning o'lchab qo'yilishi ko'rsatilgan. Hosil bo'lgan qirralarning uchlari o'zaro tutashtiriladi. Prizma yon sirti va asosining haqiqiy kattaligi yoyilmasi qo'shilib to'la yoyilma hosil bo'ladi.

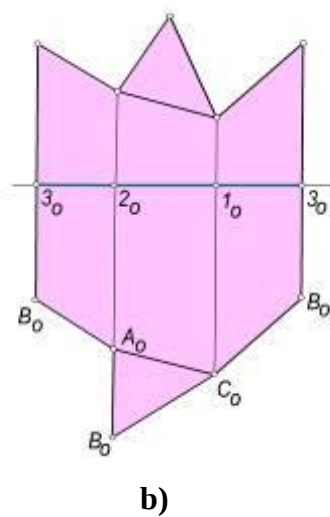
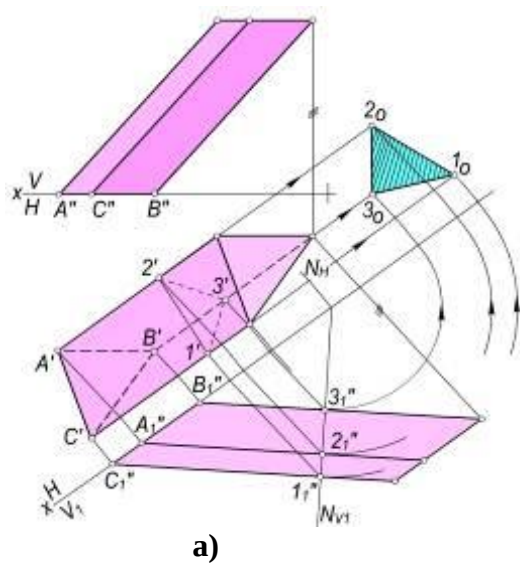
## 8.2. Uch yoqli og'ma piramidaning to'la yoyilmasi yasash.

**2-masala.** Berilgan yon qirralari umumiy vaziyatda bo'lgan uch yoqli prizmaning yoyilmasini yasash talab etilsin (8.3,a-rasm).

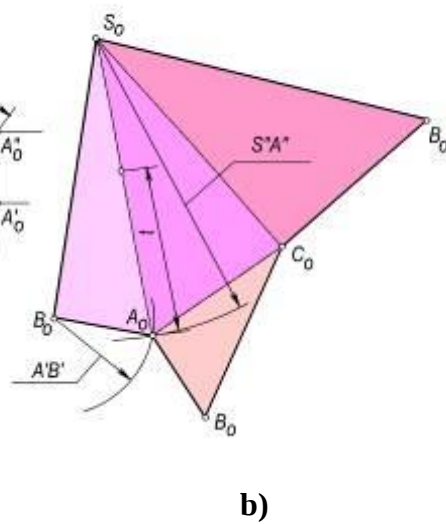
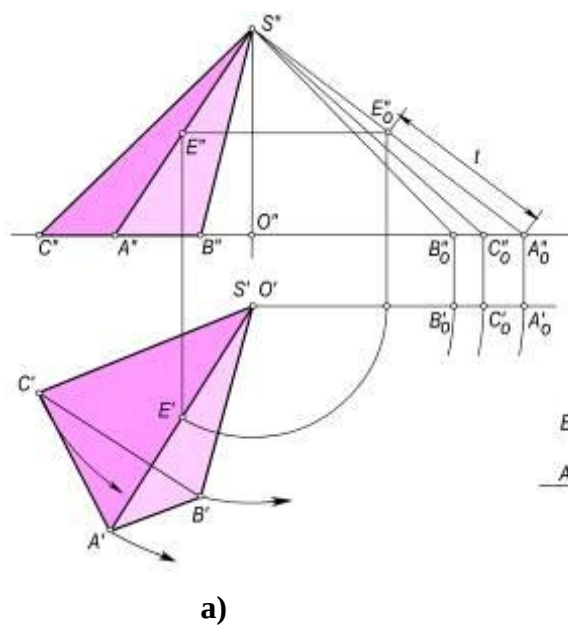
**Yechish.** Mazkur masala yuqorida keltirilgan masala asosida yechiladi. Dastlab prizma qirralari va normal kesimining haqiqiy uzunliklarni yasash kerak bo'ladi. Buni esa proyeksiyalar tekisliklarini (prizma qirralariga parallel vaziyatda) almashtirish bilan amalga oshirish maqsadga muvofiqdir. Chizmadagi qolgan yasashlar va yoyilmaning hosil qilinishi ortiqcha tushuntirishlarni talab qilmaydi (8.3,b-rasm).

**3-masala.** Asosi  $H$  tekislikka tegishli bo'lgan uch yoqli og'ma piramidaning to'la yoyilmasi yasalsin (8.4,a-rasm).

**Yechish.** Piramida kabi sirtlarning yoyilmalarini yasashda **uchburchak usulidan** foydalaniladi. Buning uchun dastlab piramida yon qirralarining haqiqiy uzunliklari yasiladi. Chizmada ular aylantirish usuli yordamida topilgan. Asos qirralarining haqiqiy uzunliklari  $A'B', B'C'$  va  $C'A'$  kesmalarga teng bo'ladi. Piramida yon sirtining yoyilmasini yasash uchun chizmaning ixtiyoriy (bo'sh) joyida  $S_0$  nuqta belgilab olinadi (14.5,b-rasm). Bu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa  $S_0B_0=S''B''$  kesma o'lchab qo'yiladi. Chunki piramida  $SB$  qirasi bo'yicha kesilgan deb faraz qilinadi. So'ngra markazi  $B_0$  nuqtada, radiusi  $B_0A_0=B'A'$  bo'lgan va markazi  $S_0$  nuqtada, radiusi  $S_0A_0=S''A_0''$  bo'lgan ikkita yoy chiziladi. Bu yoylarning kesishuvidan  $A_0$  nuqta hosil bo'ladi.  $S_0B_0A_0$  nuqtalar o'zaro tutashtirilib  $\triangle ABC$  ning yoyilmadagi o'rni hosil qilinadi. Qolgan yon yoqlarning yoyilmalari ham shu tarzda yasiladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga piramida asosining yoyilmadagi o'rni qo'shilsa, piramida to'la sirtining yoyilmasi hosil bo'ladi.



8.3-rasm



8.4-rasm

## 9-ma'ruza. Ikki ko'pyoqlikning o'zaro kesishuv chizig'ini yasash. (2-soat)

### REJA

#### 1. Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishishi.

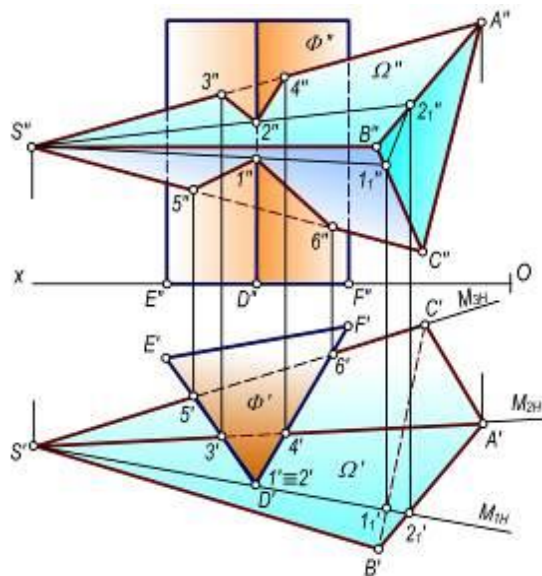
##### 1.1 Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishishi

Ko'pyoqliklar fazoda bir-biriga nisbatan o'zaro joylashuviga qarab, to'la, qisman kesishgan yoki butunlay kesishmagan vaziyatlarda ushraydilar. Ko'pyoqliklar o'zaro kesishganda bir yoki bir nisha yopiq fazoviy yoki tekis siniq chiziqlar hosil bo'ladi. Bu siniq chiziq uchlarini, ko'pyoqliklarning to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini yasash usuli yordamida aniqlanadi. Agar kesishuvchi ko'pyoqliklardan birini va ikkinshisini deb belgilasak, ularning kesishgan chizig'ini yasash qo'yidagi algoritm bilan bajariladi:

- $\Phi$  ko'pyoqliklar qirralarining  $\Omega$  ko'pyoqliklar sirti yoqlari bilan kesishish nuqtalari yoki  $\Omega$  ko'pyoqliklar qirralarining  $\Phi$  ko'pyoqliklar yoqlari bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi;
- $\Phi$  va  $\Omega$  qo'pyoqlarning yon yoq tekisliklarini o'zaro kesishish chiziqlari yasaladi.

Hosil bo'lgan kesishish nuqtalarini yoki chiziqlarni tegishli tartibda birlashtirilsa berilgan ko'pyoqliklarning kesishish chizig'i hosil bo'ladi. Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda avvalo ularning kesishishida qatnashmaydigan qirralari aniqlanadi; so'ngra ko'pyoqliklarning ko'rinar, ko'rinmas qirralarini aniqlanib va ularning ko'rinar qismlarini asosiy tutash chiziqlarda yurg'izib chiqiladi.

9.1-rasmda tasvirlangan prizma va piramida sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi qo'yidagisha bo'ladi:



9.1 – rasm.

- prizma qirralarining piramida sirti bilan kesishgan nuqtalari yasalgan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, prizmaning faqat oldingi D qirrasigina piramida sirtini 1 va 2 nuqtalarda kesib o'tgan. Bu nuqtalar D nuqta orqali o'tgan  $M_1(M_{1N})$  gorizontal proyeksiyalovchi tekislik yordamida yasalgan;
- piramida qirralarining prizma sirti bilan kesishgan 3,4,5,6 nuqtalari yasalgan. Piramidaning faqat SA va SS qirralari prizma bilan kesishadi. SA va SS qirralarining prizma bilan kesishgan  $3(3',3'')$ ,  $4(4',4'')$ ,  $5(5',5'')$ ,  $6(6',6'')$  nuqtalari 8.20-rasmda ko'rsatilganidek  $M_2(M_{2H})$  va  $M_3(M_{3H})$  gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar yordamida topilgan;

- Aniqlangan  $1'', 2'', 3'', 4'', 5'', 6''$  nuqtalarni rasmda ko'rsatilganidek, ko'rinar-ko'rinmas qismlarini e'tiborga olib, tartib bilan birlashtirib shiqilsa, ikki sirtning o'zaro kesishish siniq chizig'ining frontal proyeksiyasi hosil bo'ladi.

### **Nazorat savollari**

1. Ikki ko'pyoqliklarning o'zaro kesishish chizig'ini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?

## IV-BOB. EGRI CHIZIQLAR

**10-ma'ruza.** Umumiy ma'lumotlar. Tekis egri chiziqlar ularga urunma va normallar o'tkazish. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. (2-soat)

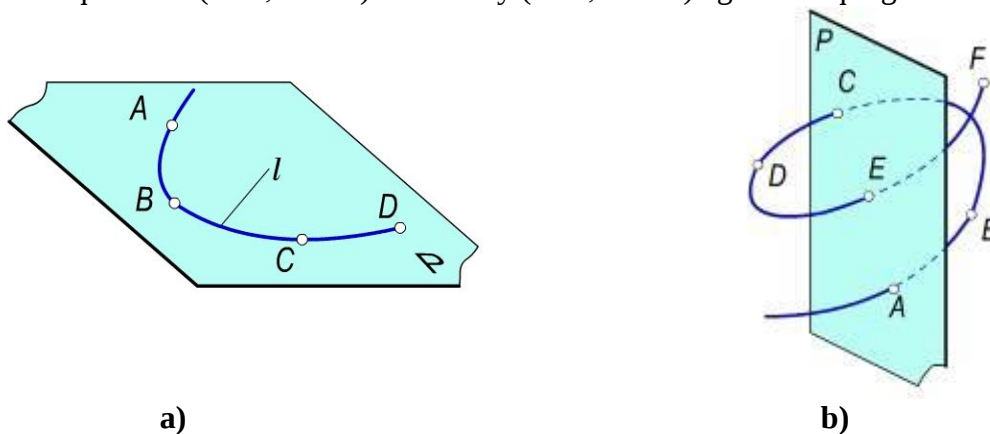
### REJA

1. Egri chiziqlar va uning hosil bo'lishi haqida umumiy tushunchalar.
2. Tekis egri chiziqlar. Ularga urunma va normal o'tkazish

#### 10.1. Egri chiziqlar va uning hosil bo'lishi haqida umumiy tushunchalar.

Chizma geometriyada egri chiziqlarning geometrik va mexanik xususiyatlaridan grafik ravishda amaliy foydalanish e'tiborga olinib, ularga oddiy kinematik ta'rif beriladi. Shuning uchun egri chiziqni fazoda yoki tekislikda ma'lum yo'nalishda uzluksiz harakatlanuvchi biror nuqtaning izi sifatida qabul qilinadi.

Egri chiziqlar tekis (10.1,a-rasm) va fazoviy (10.1,b-rasm) egri chiziq'larga bo'linadi.



10.1-rasm

Egri chiziqlar qonuniy va qonunsiz egri chiziqlarga bo'linadilar. Egri chiziqni tashkil kiluvchi nuqtalar to'plami ma'lum biror qonunga buysunsa u *qonuniy*, aksincha nuqtalar to'plami hech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday egri chiziq *qonunsiz egri chiziq* deyiladi. Qonuniy egri chiziqlarning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamalariga qarab algebraik va transsendent egri chiziqlarga bo'linadilar. Tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq *algebraik*, transsendent funksiya bilan ifodalangan egri chiziq esa *transsendent* egri chiziq deyiladi.

Algebrik egri chiziqlar tartib va klass tushunchalari bilan xarakterlanadi. Egri chiziqlarning tartibi uni ifodalovchi tenglamaning darajasiga teng bo'ladi.

Grafik jihatdan tekis egri chiziqlarning tartibi uning to'g'ri chiziq bilan, fazoviy egri chiziqning tartibi esa uning biror tekislik bilan maksimum kesishish nuqtalar soni orqali aniqlanadi.

Tekis egri chiziqning klassi unga shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmalar soni bilan, fazoviy egri chiziqning klassi unga biror to'g'ri chiziq orqali o'tkazilgan urinma tekisliklar soni bilan aniqlanadi.

Egri chiziqning tartibi va klassi har xil bo'ladi. Faqat ikkinchi tartibli egriliklarning tartibi va klassi bir xil bo'lib, u 2 ga teng bo'ladi.

## 10.2. Tekis egri chiziqlar. Ularga urinma va normal o'tkazish;

**Ta'rif.** Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq **tekis egri chiziq** deyiladi.

Tekis egri chiziqlar analitik va grafik ko'rinishlarda berilishi mumkin. Analitik ko'rinishda quyidagi xollar bilan beriladi:

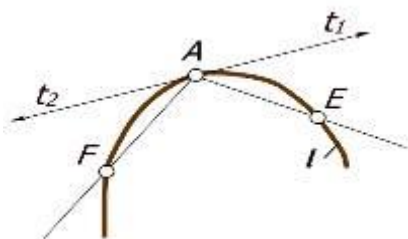
- dekart koordinatalar sistemasida  $f(x,u)=0$  ko'phad bilan;
- qutb koordinatalar sistemasida  $r=f(\varphi)$  bilan;
- parametrik ko'rinishda  $x=x(t)$  va  $u=u(t)$  bilan.

Egri chiziqlarning grafik ko'rinishda berilishining turli xil usullari mavjud.

Tekislikka tegishli biror nuqtaning uzluksiz harakati natijasida tekis egri chiziq hosil bo'ladi. Tekis egri chiziqning har bir nuqtasidan unga bitta urinma va bitta normal o'tkazish mumkin.

10.2-rasmda berilgan  $\ell$  tekis egri chizig'iga uning biror A nuqtasida urinma va normal o'tkazish ko'rsatilgan. Buning uchun A nuqta orqali egri chiziqni kesuvchi AE va AF to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. ye nuqtani A nuqtaga egri chiziq buylab yaqinlashtira boshlaymiz. Natijada, AE kesuvchi A nuqta atrofida burila boshlaydi. ye nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushganda AE kesuvchi  $t_1$  urinmani xosil qiladi. Uni  $\ell$  egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan **yarim urinma** deyiladi. F nuqtani ham egri chiziq ustida harakatlantirib A nuqta bilan ustma-ust tushiramiz. AF kesuvchi  $t_2$  yarim urinmani xosil qiladi. Qarama-qarshi yo'nalgan  $t_1$  va  $t_2$  yarim urinmalar xosil qilgan to'g'ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada o'tkazilgan **urinma** deyiladi. Shunday nuqtalardan tashkil topgan egri chiziq **ravon egri chiziq** deyiladi.

Egri chiziqning A nuqtadagi  $t$  urinmaga o'tkazilgan perpendikulyar  $n$  to'g'ri chiziq uning normali deb ataladi. Ba'zan yarim urinmalar o'zaro ustma-ust tushmasdan o'zaro kesishishi mumkin. Bunday nuqtalar **sinish nuqtasi** deyiladi (10.3-rasm). Amaliyotda egri chiziqlarga urinma va normal o'tkazish masalalari ko'p uchraydi, shuning uchun urinma va normal o'tkazishning ba'zi bir grafik usullarini kurib chikamiz.

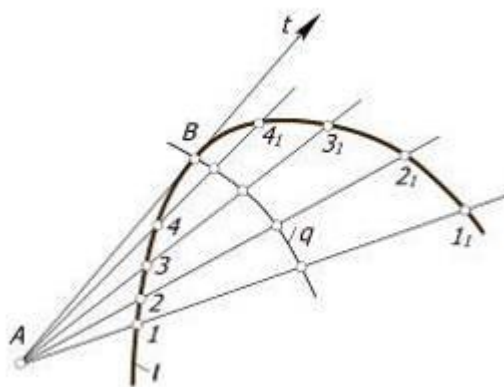


10.2-rasm



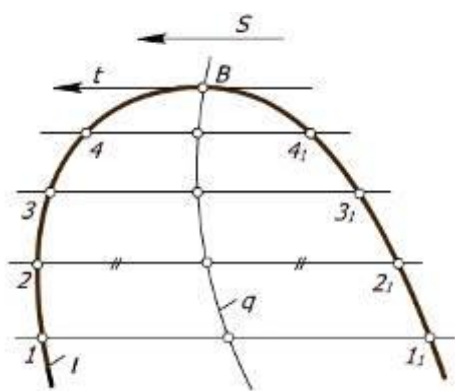
10.3-rasm

**Egri chiziqqa undan tashqari olingan nuqta orqali urinma o'tkazish.** iror  $\ell$  egri chiziq va undan tashqarida olingan A nuqta berilgan (10.4-rasm) A nuqtadan  $\ell$  egri chiziqqa urinma o'tkazish talab qilinsin. Buning uchun A nuqta orqali  $\ell$  egri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Xosil bo'lgan vatarlarning uchlarini  $11_1, 22_1, 33_1, \dots$  nuqtalar bilan belgilab, har bir vatarning o'rta nuqtalari topiladi. Vatarlarning o'rta nuqtalarini birlashtirib q egri chiziqni xosil qilinadi. Bu egri chiziq **xatoliklar egri chizig'i** deyiladi va uning  $\ell$  egri chizig'i bilan kesishish B nuqtasi A nuqtadan o'tuvchi urinmaning egri chiziqqa urinish nuqtasi bo'ladi. A va B nuqtalarni to'g'ri chiziq bilan birlashtirilsa,  $t$  urinma xosil bo'ladi.

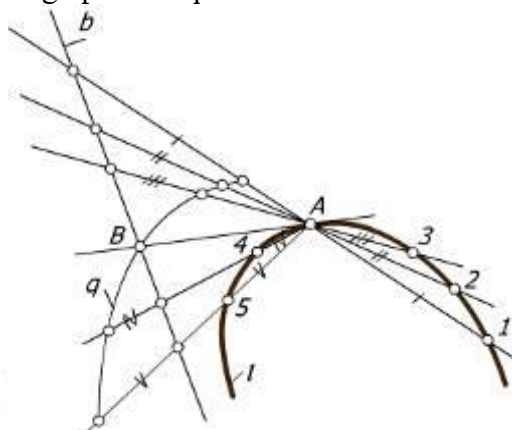


10.4-pacm

**Berilgan yo‘nalishga parallel urinma o‘tkazish.** Biror  $\ell$  egri chiziqqa berilgan  $s$  yo‘nalishga parallel urinma o‘tkazish uchun  $\ell$  egri chiziqni  $s$  yo‘nalishga parallel chiziqlar bilan kesiladi va xosil bo‘lgan  $11_1, 22_1, 33_1, \dots$  vatarlarni teng ikkiga buluvchi nuqtalar orqali  $q$  xatoliklar egri chizig‘ini o‘tkaziladi (10.5-rasm).  $q$  egri chiziqning  $\ell$  bilan kesishish nuqtasi  $B$  ni topiladi.  $B$  nuqta orqali berilgan  $s$  yo‘nalishga parallel qilib  $t$  urinmani o‘tkaziladi.

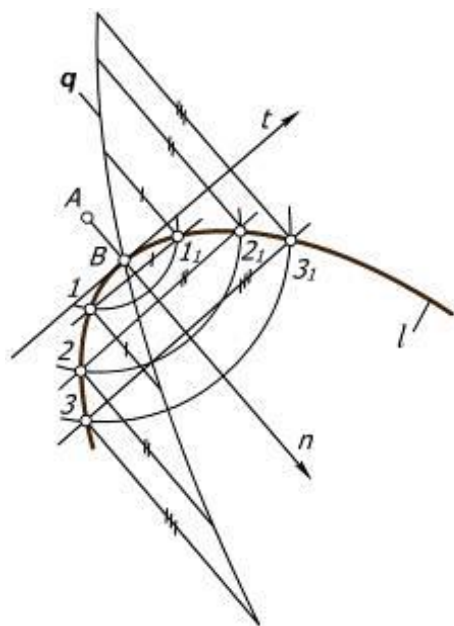


10.5-rasm



10.6-rasm

**Egri chiziq ustida yotgan nuqta orqali unga urinma o‘tkazish.** Berilgan  $\ell$  egri chiziqni uning ustida yotgan  $A$  nuqtadan chikuvchi to‘g‘ri chiziqlar bilan kesiladi (10.6-rasm).  $A$  nuqtadan o‘tuvchi urinmaning taxminiy yo‘nalishiga perpendikulyar qilib  $b$  to‘g‘ri chiziqni o‘tkaziladi. kesuvchi nurlarga  $b$  to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tgan nuqtalardan boshlab usha chiziqning  $\ell$  dagi vatar uzunligi o‘lchab quyiladi. Nuqtalar to‘plami  $q$  egri chiziqni xosil qiladi.  $q$  egri chiziqning  $b$  bilan kesishish nuqtasi  $B$  ni  $A$  nuqta bilan birlashtirganda  $t$  urinmaga xosil bo‘ladi.



10.7-rasm

**Egri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan unga normal o'tkazish.**  $\ell$  egri chiziqdan tashqaridagi A nuqtani konsentrik aylanalarining markazi sifatida qabul qilib (10.7-rasm), undan berilgan egri chiziqni kesuvchi bir necha aylanalar  $\ell$  egri chiziqni  $11_1, 22_1, 33_1, \dots$  nuqtalarda kesadi. Mos nuqtalarni o'zaro birlashtirib, egri chiziqning  $11_1, 22_1, 33_1, \dots$  vatarlarini xosil qilinadi. Vatarlar uchlaridan qarama-qarshi yo'nalishda unga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi va ularga vatarlar uzunliglarini o'lchab quyiladi. Bu kesmalarning uchlarini tartib bilan birlashtirib q chiziq xosil qiladi. q va  $\ell$  egri chiziqlar o'zaro B nuqtada kesishadilar. A va B nuqtalarni birlashtiruvchi n to'g'ri chiziq  $\ell$  egri chiziqning normali bo'ladi.

**11-ma'ruza. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o'tkazish. Fazoviy egri chiziqning uzunligini uning to'g'ri burchakli proeksiyalariga asosan aniqlash. Vint chiziqlari. (2-soat)**

**REJA**

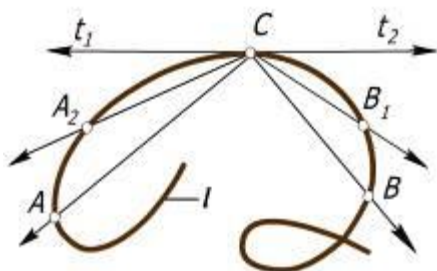
1. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o'tkazish.
2. Tekis egri chiziq nuqtalarining klassifikatsiyasi.
3. Evolyuta va evolventa.
4. Fazoviy egri chiziqning uzunligini uning to'g'ri burchakli proeksiyalariga asosan aniqlash

**11.1. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o'tkazish.**

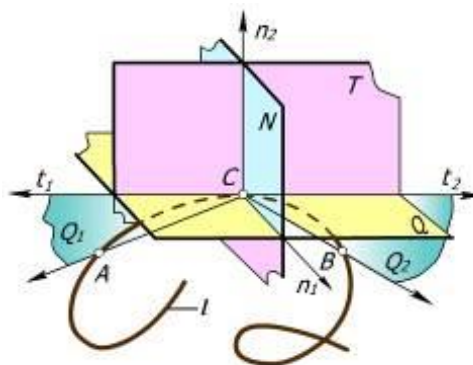
**Ta'rif.** Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq **fazoviy egri chiziq** deyiladi.

Fazoviy egri chiziqni ikki xil egrilikka ega chiziq ham deb yuritiladi, 11.1-rasmda tasvirlangan fazoviy  $\ell$  egri chiziqqa uning  $S$  nuqtasida urinma o'tkazish ko'rsatilgan. Egri chiziq ustidagi  $S$  nuqta orqali  $SA$  va  $SB$  kesuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. So'ngra  $A$  nuqtani egri chiziq buylab  $S$  nuqtaga yaqinlashtira boramiz.

$A$  nuqta  $S$  nuqtaga cheksiz yaqinlashganda  $SA$  kesuvchining limiti  $\ell$  egri chiziqning  $S$  nuqtasidagi  $t_1$  urinmaga aylanadi. Bunda  $t_1$  urinma  $\ell$  egri chiziqning  $S$  nuqtasida o'tkazilgan yarim urinma deyiladi.  $S$  nuqta orqali o'tuvchi  $t_2$  yarim urinma ham  $SB$  kesuvchi orqali xuddi shunday yasaladi. U o'zining limit vaziyatida  $t_1$  yarim urinma bilan bitta  $\ell$  to'g'ri chiziqda yotadi (11.2-rasm).  $\ell$  fazoviy egri chiziqqa o'tkazilgan urinma orqali tekisliklar dastasi o'tadi. Egri chiziqning xarakterini aniqlash uchun ana shu tekisliklar dastasidan yopishma, to'g'rilovchi va ularga perpendikulyar bo'lgan normal deb ataluvchi tekisliklar muhim rol o'ynaydi.



**11.1-rasm**



**11.2-rasm**

Egri chiziqning **yopishma** tekisligi quyidagicha yasaladi. Berilgan  $\ell$  fazoviy egri chiziqda yotgan  $S$  nuqta orqali unga  $t_1$ ,  $t_2$  yarim urinmalar o'tkazilgan bo'lsin. 11.2-rasmda  $SA$  va  $SB$  kesuvchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazib  $t_1SA$  ( $Q_1$ ) va  $t_2SB$  ( $Q_2$ ) kesuvchi tekisliklarni hosil qilamiz.  $A$  va  $B$  nuqtalarni  $S$  nuqtaga yaqinlashtirganda  $Q_1$  va  $Q_2$  tekisliklar  $t_1$  va  $t_2$  yarim

urinmalar atrofida aylanib, ular ustma-ust tushib,  $Q$  tekisligini hosil qiladi.  $Q$  tekislik  $\ell$  fazoviy egri chiziqqa uning berilgan  $S$  nuqtasida o'tkazilgan **yopishma** tekisligi deyiladi.

Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasida unga cheksiz ko'p normal o'tkazish mumkin. Normallar to'plami hosil kilgan  $N$  tekislik egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan **normal tekisligi** deyiladi.

Normallar to'plamidagi chiziqlardan biri  $n_1$  yopishma tekislik ustida yotadi ( $n_1 \in Q$ ), boshqa biri  $n_2$  esa unga perpendikulyar joylashgan ( $n_2 \perp Q$ ) bo'ladi. Shulardan birinchisi  $n_1$  – bosh normal, ikkinchisi  $n_2$  – binormal deyiladi. Binormal  $n_2$  va urinma  $t$  hosil kilgan  $T$  tekislik to'g'rilovchi (rostlovchi) **tekislik** deb ataladi.

O'zaro perpendikulyar  $N$ ,  $Q$ ,  $T$  tekisliklar uchyoqlikni tashkil qiladi. Buni 1847 yilda birinchi bo'lib taklif qilgan fransuz matematigi Jan Frederik Frene nomi bilan **Frene uchyoqligi** deb yuritiladi. Frene uchyoqligidan fazoviy egri chiziqni proeksiyalash uchun tekisliklar sistemasi o'rnida foydalaniladi. Shuningdek,  $Q$ -gorizontal,  $T$ -frontal va  $N$ -profil proeksiyalar tekisliklari sifatida qabul qilinadi. Biror fazoviy egri chiziq xossalari uning Frene uchyoqlik tekisliklaridagi proeksiyalari bo'yicha tekshiriladi.

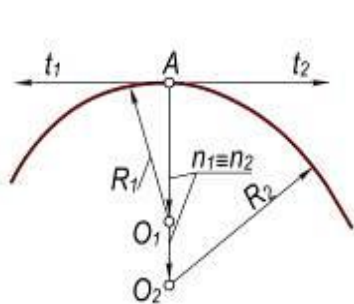
## 11.2. Tekis egri chiziq nuqtalarining klassifikatsiyasi.

Tekis egri chiziqlar *monoton* va *ulama* chiziqlarga bo'linadi. Monoton egri chiziqning qator nuqtalarida egrilik radiusi uzluksiz o'sib yoki kamayib boradi. Monoton egri chiziq yo'ylaridan tashkil topgan chiziq *ulama* chiziq deyiladi. Bu yoylarning ulanish nuqtalari ulama chiziqning *uchlari*, ulanuvchi yoylarning o'zi esa ulama chiziqning tomonlari deb ataladi. YOylarning ulanish xarakteriga qarab, ulama chiziqning uchlari *oddiy* va *maxsus* nuqtalar bo'lishi mumkin. Egri chiziqning oddiy nuqtasida yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bitta to'g'ri chiziq ustida yotadi va egrilik markazlari ustma-ust tushadi. Egri chiziqlarning maxsus nuqtalari quyidagilardan iborat:

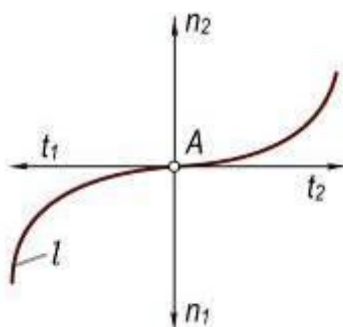
**Qo'sh nuqta.** Yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishga ega, normallar ustma-ust tushadi, egrilik markazlari esa har xil joylashadi (11.3-rasm).

**Egilib o'tish nuqtasi.** Yarim urinmalar ham, normallar ham qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi (11.4-rasm).

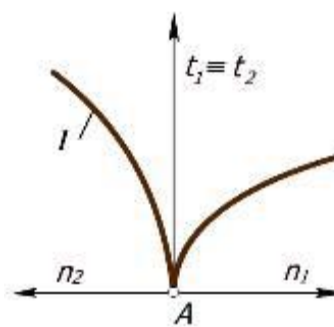
**Birinchi turdagi qaytish nuqtasi.** Yarim urinmalar ustma-ust tushadi va bir xil yo'nalishda bo'ladi, normallar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bir chiziq ustida yotadi (11.5-rasm).



11.3-rasm



11.4-rasm

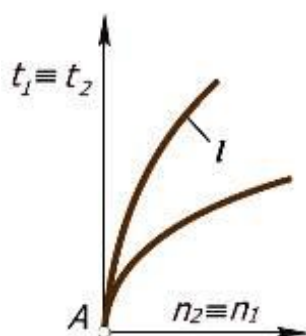


11.5-rasm

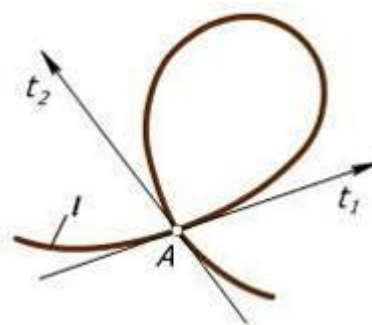
**Ikkinchi turdagi qaytish nuqtasi.** Yarim urinmalar va normallar juft-juft bo'lib bir xil yo'nalishga ega bo'ladi (11.6-rasm);

**Sinish nuqtasi.** Yarim urinmalar va normallar har xil yo'nalishda bo'ladi (11.5-rasm);

**Tugun nuqta.** Tugun nuqtada egri chiziq o'zini-o'zi bir va bir necha marta kesib o'tadi (11.7-rasm).



11.6-rasm

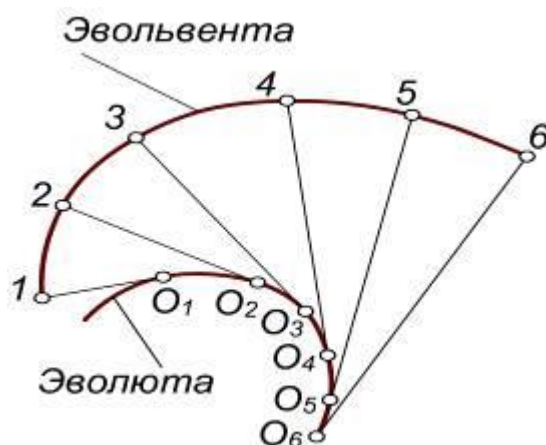


11.7-rasm

### 11.3. Evolyuta va evolventa.

Biror  $\ell$  egri chiziqlarning hamma nuqtalari uchun egrilik markazlari yasalsa, ularning to'plami  $\ell_1$  egri chiziqni hosil qiladi. Bu  $\ell_1$  egri chiziq berilgan  $\ell$  egri chiziqlarning *evolyutasi* deb ataladi (11.8-rasm).  $\ell$  egri chiziq  $\ell_1$  evolyutaga nisbatan *evolventa* deyiladi).

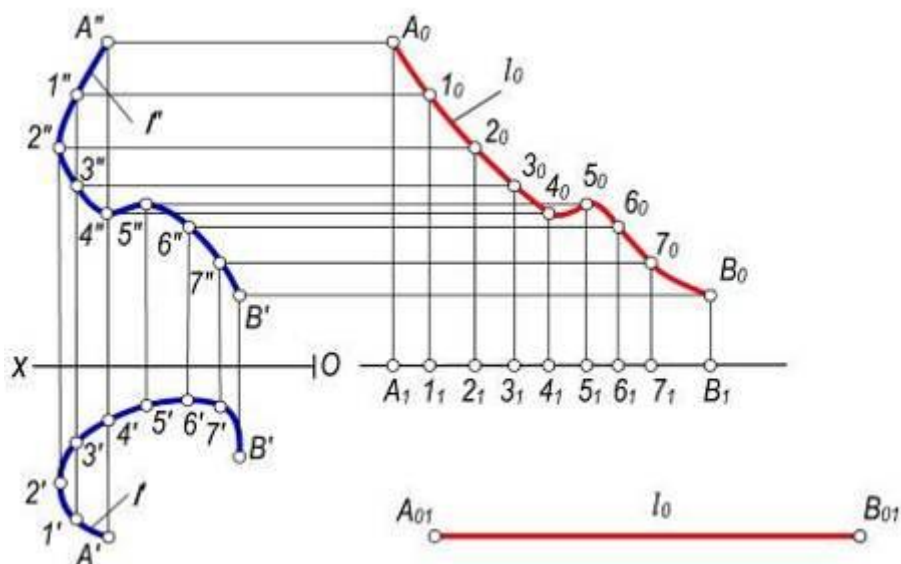
Evolyutaning urinmalari  $\ell$  evolventaning normalidir. Evolyuta urinmalarida cheksiz ko'p evolventalar joylashgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun egri chiziqlarning evolyutasi o'z evolventasini aniqlay olmaydi, lekin uning evolventasi o'z evolyutasini aniqlay oladi.



11.8-rasm

### 11.4. Fazoviy egri chiziqlarning uzunligini uning to'g'ri burchakli proeksiyalariga asosan aniqlash

Biror fazoviy  $\ell$  egri chiziqlarning  $\ell'$  va  $\ell''$  to'g'ri burchakli proeksiyalari berilgan bo'lsin. (11.9-rasm). Uning uzunligini grafik usulda aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi.



11.9-rasm

Egri chiziqlarning  $\ell'$  - gorizantal proeksiyasi  $A'B'$  ni har bir bo'lagini ixtiyoriy tanlangan  $a$  to'g'ri chiziqlarning  $A_1$  nuqtadan boshlab unga ketma-ket quyib chiqiladi. Xosil bo'lgan  $A_1, B_1$  kesma  $A'B'$  gorizantal proeksiyani to'g'rilangani yoki uni uzunligini o'lchovchi kesma bo'ladi.

So'ngra  $a$  to'g'ri chiziqlarning  $A_1, 1_1, 2_1, 3_1, \dots, V_1$  nuqtalaridan unga perpendikulyarlar chiqariladi. Bu perpendikulyarlarga ixtiyoriy tanlangan gorizantal  $Ox$  chiziqdan  $\ell''(A''B'')$  nuqtalarigacha bo'lgan masofalar o'lchanib qo'yiladi. Natijada  $\ell_0$  egri chiziq hosil qilinadi.

Chizmaning ixtiyoriy bo'sh joyida  $\ell_{01}$  to'g'ri chiziq olinib, bu to'g'ri chiziqqa  $\ell_0$  egri chiziq nuqtalari ketma-ket o'lchab qo'yiladi, ya'ni  $\ell_0$  to'g'rilanadi.

Hosil bo'lgan  $A_{01}B_{01}$  kesma  $\ell$  fazoviy egri chiziqlarning  $AB(A'B', A''B'')$  bo'lagining uzunligi bo'ladi.

### Nazorat savollari

1. Tekis va fazoviy egri chiziqlarning farqi nimada?
2. Egri chiziqqa urinma deb nimaga aytiladi?
3. Egri chiziqlarning egriligi deb nimaga aytiladi?
4. Egri chiziqlarning evolyutasi deb nimaga aytiladi?
5. Egri chiziqlarning biror nuqtasida unga normal qanday o'tkaziladi?
6. Tekis egri chiziqlarning maxsus nuqtalarini aytib bering?
7. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar deb nimaga aytiladi va ularning turlarini aytib bering?
8. Silindrik va konussimon vint chiziqlari qanday xosil bo'ladi?
9. Vint chiziqlarining qadami nima?
10. Qanday chiziqni geodezik chiziq deyiladi?

## V-BOB. SIRTULAR VA ULARNING HOSIL BO'LISHI

**12-ma'ruza.** Sirtlarning hosil bo'lishi va ularni chizmada berilishi.  
Sirtlarning klassifikatsiyasi. Aylanish sirtlari, kanod va truba sirtlari. Vint  
sirtlari.5.Gelikoidlar. (2-soat)

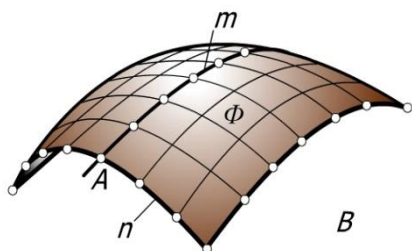
### REJA

- 1.Sirtlarning hosil bo'lishi va ularning chizmada berilishi haqida umumiy tushunchalar.
2. Sirtlarning berilish usullari.
3. Chiziqli sirtlar.

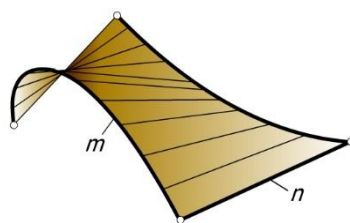
#### 12.1. Sirtlarning hosil bo'lishi va ularning chizmada berilishi haqida umumiy tushunchalar.

Biror chiziqlarning fazodagi uzluksiz harakati natijasida sirtlar hosil bo'ladi. Sirtlarning hosil qilishning turli usullari ma'lum.

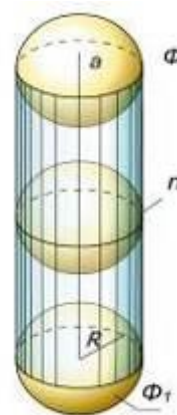
Fazoda  $m$  egri chiziq va uni  $A$  nuqtada kesib o'tuvchi  $n$  egri chiziq berilgan (12.1-rasm). Agar  $n$  egri chiziqni  $m$  egri chiziq buylab uzluksiz harakatlantirilsa, uning qator vaziyatlarining to'plamidan iborat biror  $\Phi$  sirtni hosil bo'ladi. Bunda  $\Phi$  sirtidagi  $m$  egri chiziq sirtning yo'naltiruvchisi,  $n$  egri chiziq uning yasovchisi deb ataladi. Aksincha,  $n$  egri chiziqni yo'naltiruvchi,  $m$  egri chiziqni yasovchi sifatida qabul qilish ham mumkin. Bunda  $m$  egri chiziq  $n$  egri chiziq bo'yicha harakatlangan bo'ladi.



12.1-rasm.



12.2-rasm.



12.3-rasm.

Yasovchilarning turiga qarab egri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt **egri chiziqli sirt** (12.1-rasm), to'g'ri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt **chiziqli sirt** (12.2-rasm) deb ataladi.

Ixtiyoriy sirtni uzluksiz harakatlantirish natijasida ham sirt hosil qilish mumkin. Bunda hosil bo'lgan  $\Phi$  sirt harakatlanuvchi  $\Phi_1$  yasovchi sirtning har bir vaziyatida u bilan eng kamida bitta umumiy  $n$  chiziqqa ega bo'ladi. Masalan, o'zgarmas  $R$  radiusli sfera markazini (12.3-rasm)  $a$  to'g'ri chiziq bo'ylab uzluksiz harakatlantirilsa,  $\Phi$  doiraviy silindr sirti hosil bo'ladi.

Sirt yasovchisi harakat davomida o'z shaklini uzluksiz o'zgartirib borishi yoki o'zgartirmasligi mumkin.

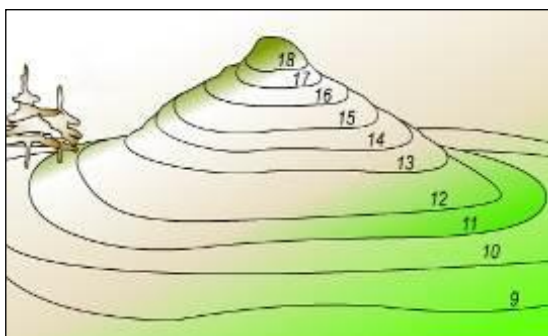
Sirtlar hosil bo'lish jarayoniga qarab qonuniy va qonunsiz sirtlarga bo'linadi. Sirtning hosil bo'lishi biror matematik qonunga asoslangan bo'lsa, bunday sirt **qonuniy sirt** deyiladi. Doiraviy silindr, konus, sfera ikkinchi tartibli va hokazo sirtlar bunga misol bo'la oladi.

Sirtning hosil bo'lishi xech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday sirt *qonunsiz sirt* deb ataladi. Bunga topografik (12.4-rasm) va empirik (tajriba asosida olingan) sirtlar (12.5-rasm) kiradi.

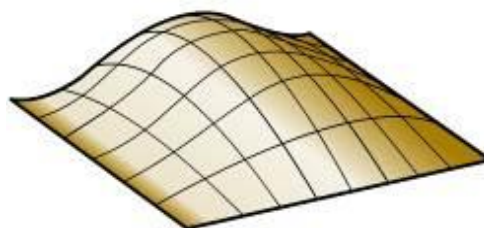
Qonuniy sirtlar o'z navbatda algebraik va transsendent sirtlarga bo'linadi.

Algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirt **algebraik**, transsendent tenglamalar bilan ifodalangan sirt **transsendent** sirt deyiladi. Sirtlarning tartibi va klassi mavjud.

Chizma geometriyada sirtning tartibi uni tekislik bilan kesganda hosil bo'lgan kesimning tartibi bilan aniqlanadi. Biror to'g'ri chiziq orqali o'tib, sirtga uringan tekisliklar soni sirtning klassini aniqlaydi.



12.4-rasm.



12.5-rasm

Qonuniy sirtlar analitik yoki grafik usulda berilishi mumkin. Qonunsiz sirtlar faqat grafik va jadval usulida beriladi.

## 12.2. Sirtlarning berilish usullari.

Chizma geometriyada sirtlar asosan analitik, kinematik va karkas usullarda beriladi.

**Sirtlarning analitik usulda berilishi.** Analitik geometriyada sirtni bitta xususiyatga ega bo'lgan nuqtalar to'plami sifatida talqin qilinadi.

Sirdagi biror ixtiyoriy **A** nuqtaning  $x, u, z$  koordinatalari orasidagi bog'lanish orqali undagi hamma nuqtalarga tegishli xususiyatni ifodalovchi tenglama *sirtning tenglamasi* deyiladi.

Uch o'lchamli fazoda sirt analitik usulda berilishi mumkin.

Sirt umumiy ko'rinishdagi oshkormas funksiya tenglamasi orqali quyidagicha beriladi:

$$F(x, u, z)=0. \quad (1)$$

8.6,a-rasmdagi sfera sirtida yotgan **A** nuqtaning  $x, u, z$  koordinatalari orasidagi bog'lanishni aniqlaydigan tenglama sferaning tenglamasini ifodalaydi. Markazi koordinata boshida joylashgan sferaning tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x^2 + u^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (2)$$

Sirtni funksiyaning grafigi sifatida aniqlaydigan oshkor ko'rinishda berish mumkin

$$z=f(x, u). \quad (3)$$

Sferaning tenglamasini  $z$  applikataga nisbatan

$$z=\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Sirt parametrlari orqali berilishi mumkin.

Sirtni  $r = r(u, v)$  vektorlar orqali ifodalab, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$x=x(u, v), u=u(u, v), z=z(u, v) \quad (5)$$

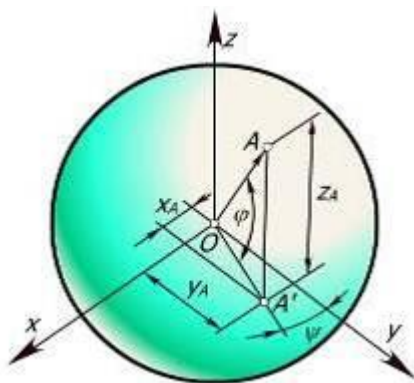
Bu tenglamalardagi  $u$  va  $v$  parametrlar bo'lib, ular  $(u, v)$  tekislikning ma'lum qismini uzluksiz bosib o'tadi.

Sferaning parametrik tenglamasi  $\varphi$  kenglik va  $\psi$  uzunlik (12.6-rasm) parametrlari orqali quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi \cos \psi, \\u &= R \cos \varphi \sin \psi, \\z &= R \sin \varphi\end{aligned}\quad (6)$$

Agar (6) tenglamalar  $\varphi$  va  $\psi$  parametrlardan ozod qilinsa, sferaning  $x$ ,  $u$ ,  $z$  koordinatalar orqali ifodalangan (2) tenglamasiga ega bo‘linadi.

Sirlarning analitik usulda berilishi ularning chizmalarini kompyuterlarda chizish, sirlarning differensial geometrik xossalari tekshirish, shu jumladan, ularning yoyilmalarini aniq bajarish kabi imkoniyatlarni beradi.



12.6-rasm.

**Sirlarning kinematik usulda berilishi.** Biror chiziqlarning fazodagi uzluksiz harakatidan kinematik sirt hosil bo‘ladi. Unda sirtning o‘zi ham uzluksiz bo‘ladi. Kinematik harakatning oddiy asosiy turlari: ilgarilanma, aylanma va bu ikki harakatning yig‘indisi vintsimon harakatdir.

**Ta’rif.** Yasovchisining kinematik harakati natijasida xosil bo‘lgan sirt **kinematik sirt** deyiladi.

Xarakatning turiga qarab, ilgarilanma harakat natijasida hosil bo‘lgan sirt **tekis parallel ko‘chirish sirti**, aylanma harakatdan hosil bo‘lgan sirt **aylanish sirti** va vintsimon harakat natijasida hosil bo‘lgan sirt **vint sirti** deb ataladi.

Chizma geometriyada, ko‘pincha, sirlarning kinematik usulda hosil bo‘lishidan foydalaniladi. Kinematik sirlarning ko‘inishi uning yasovchisining shakliga va fazodagi harakat qonuniga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, chiziqli sirlarda yasovchining shakli to‘g‘ri chiziq bo‘ylab, uning fazodagi harakat qonunini sirtning yo‘naltiruvchisi belgilaydi. Aylanish sirtlarida yasovchining shakli ixtiyoriy chiziq bo‘lib, hosil bo‘lish qonuni uning ma‘lum o‘q atrofida aylanishidir.

Vint sirtlarda yasovchining shakli to‘g‘ri yoki egri chiziq bo‘lib, hosil bo‘lish qonuni vintsimon (aylanma va ilgarilama) harakatdir.

**Tekis parallel ko‘chirish sirtlari**

**Ta’rif.** Yasovchining ma‘lum yo‘naltiruvchi bo‘yicha doimo o‘z-o‘ziga parallel ravishda harakatlanishidan hosil bo‘lgan sirt **tekis parallel ko‘chirish sirti** deyiladi

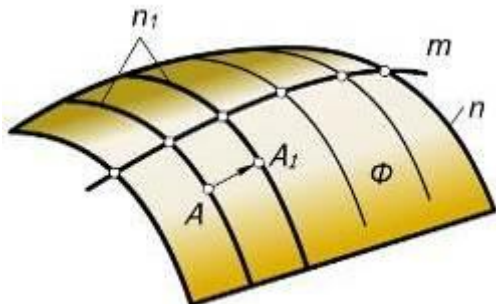
12.7-rasmda  $\mathbf{n}$  tekis egri chiziqli yasovchining  $\mathbf{m}$  egri chiziq buylab doimo o‘z-o‘ziga parallel ravishda ilgarilanma harakatlanishi natijasida hosil bo‘lgan  $\Phi$  sirti ko‘rsatilgan. Bu sirt tekis parallel ko‘chirish sirtidir.  $\mathbf{n}$  yasovchining hamma nuqtalari harakat davomida  $\mathbf{m}$  yo‘naltiruvchiga o‘xshash tekis egri chiziqlar hosil qiladi.

Agar  $\mathbf{m}$  egri chiziqni  $\mathbf{n}_1$  egri chiziq bo‘ylab harakatlantirilsa, uning nuqtalari ham  $\mathbf{n}_1$  egri chiziqga o‘xshash egri chiziqlar hosil qiladi. Bu chiziqlar nuqtalarning yo‘llari deyilib, sirt ustida to‘r hosil qiladi.

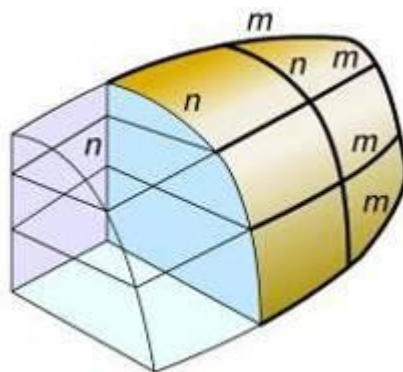
Kinematik sirt yasovchilarining uzluksiz harakati va sirtning o'zining uzluksizligidan quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi: **kinematik sirtning ixtiyoriy nuqtasidan shu sirt yotuvchi va to'r oilalarga kiruvchi ikkita egri chiziq o'tkazish mumkin.**

Agar  $m$  yo'naltiruvchi to'g'ri chiziq bo'lsa, silindr sirti hosil bo'ladi.

Biror parabolani boshqa parabola bo'yicha tekis siljitilgan, giperbolik paraboloid sirti hosil bo'ladi. Demak, bu sirtlar ham tekis parallel ko'chirish sirtlari turiga kiradi.



12.7-rasm



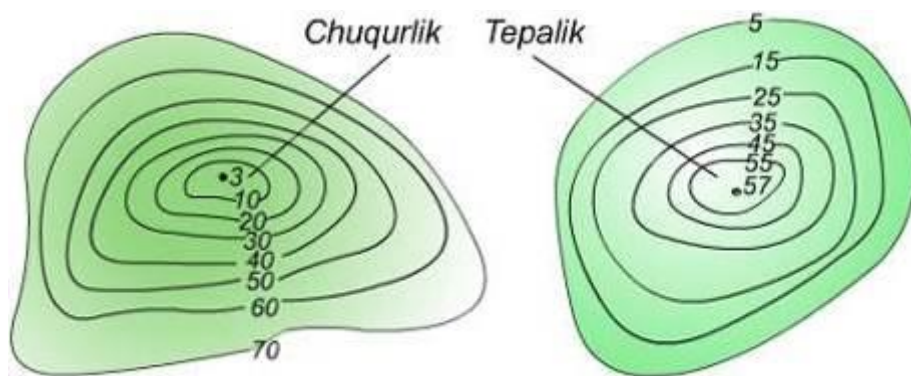
12.8-rasm

**Sirtlarning karkas usulida berilishi.** Ba'zi bir sirtlarini aniq geometrik qonuniyatlar bilan berib bo'lmaydi. Bunday sirtlar shu sirt ustida yotuvchi bir nechta nuqtalar yoki chiziqlar bilan beriladi.

Sirtning uning ustidagi bir nechta nuqtalar yoki chiziqlar bilan berilishi uning *karkas usulida berilishi* deb yuritiladi. Sirt ustida tanlangan chiziqlar to'plami *sirtning karkaslari* deyiladi (12.8-rasm).

Sirtlarni uzluksiz karkaslar orqali hosil qilish qulaydir. Sirtlarning karkaslari fazoviy egri chiziqlar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin. Ammo sirtlarni tekis egri chiziqlar (kesimlar) dan iborat karkaslari bilan berish qulayrokdir. Sirtlarning karkaslari bir, ikki va uch tekis kesimlari to'plamidan iborat bo'lishi mumkin (12.9-rasm). Bunda har bir to'plam sirtning asosiy karkasi bo'lib, qolganlari unga qo'shimcha karkas sifatida olinadi.

Har bir sirt bir parametrli tekis egri chiziqlardan tashkil topgan bo'lib, bu egri chiziqlarning joylashishi va xossalari sirtning xossalari aniq qayd etiladi.



12.9-rasm

Sirt nuqtali karkas yoki chiziqli karkaslari bilan berilishi mumkin. Sirt nuqtali karkas bilan berilsa bu nuqtalar to'plami shunday tanlanishi kerakki, unga asosan sirtning va uning har bir bo'lakining ko'rinishi va shaklini tasavvur qilish mumkin bo'lsin.

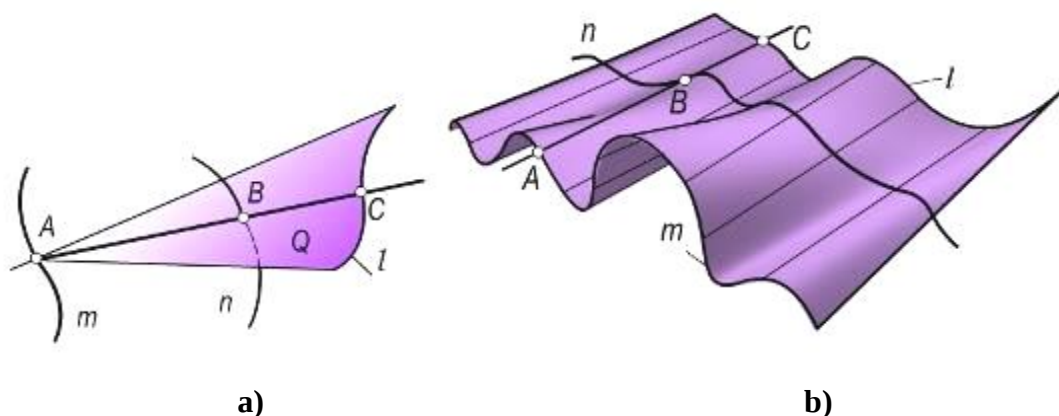
### 12.3. Chiziqli sirtlar.

**Ta'rif.** To'g'ri chiziqlarning fazoda berilgan uchta ( $m$ ,  $n$  va  $l$ ) yo'naltiruvchi chiziqlarni kesib o'tib, uzluksiz harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt **chiziqli sirt** deyiladi.

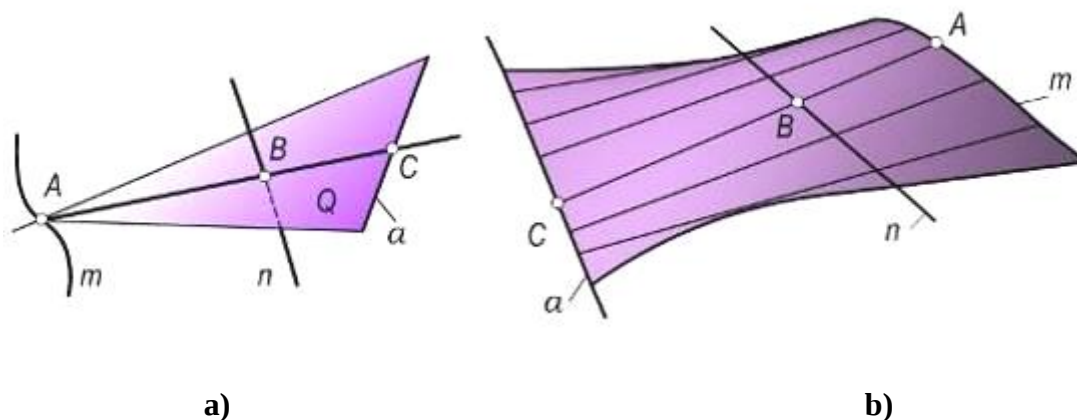
Bu sirtning uch yo'naltiruvchi chiziqli sirt deb yuritiladi. Bu chiziqli sirt aniqlovchi parametrlar orqali  $\Phi(m, n, l)$  ko'rinishda yoziladi.

12.10,a-rasmda umumiy holdagi chiziqli sirtning hosil qilish ko'rsatilgan. Chiziqli sirtning bunday umumiy holi *qiyshiq silindr* deyiladi. 12.10,b-rasmda qiyshiq silindrning yaqqol tasviri ko'rsatilgan.

Bu sirtning hosil bo'lish jarayoni quyidagichadir.  $m$ ,  $n$  va  $l$  egri chiziqli yo'naltiruvchilar berilgan bo'ladi  $m$  chiziqda ixtiyoriy  $A$  nuqta tanlaymiz (12.10,a-rasm).  $l$  chiziqni yo'naltiruvchi qilib,  $(A, l)$  konus sirti hosil kilamiz. Bu konus  $n$  chiziq bilan biror  $B$  nuqtada kesishadi.  $A, B, C$  nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq uch yo'naltiruvchi sirt (qiyshiq silindr)ning yasovchilaridan biri bo'ladi. Shuningdek,  $m$  ga tegishli bo'lgan barcha nuqtalarni konuslarning uchi deb qabul qilib,  $l$  chiziq shu konuslarning yo'naltiruvchisi bo'lganda, bu konuslar  $n$  chiziq bilan kesishib, uning ustida konusga tegishli nuqtalar hosil qiladi. Bu nuqtalardan o'tuvchi chiziqlar qiyshiq silindr sirtining to'g'ri chiziqli yasovchilari to'plamini hosil qiladi.



12.10-rasm



12.11-rasm

Xususiylarda yo'naltiruvchi  $m$ ,  $n$  va  $l$  egri chiziqlarning ba'zilar yoki hammasi to'g'ri chiziq bo'lishi mumkin. Bu to'g'ri chiziqlardan birtasi cheksiz uzoqlikda (xosmas) bo'lishi yoki ba'zilar nuqta ko'rinishida bo'lishi ham mumkin.

Cheksiz uzoqlikda bo'lgan to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchining vaziyati biror tekislik bilan beriladi va sirtning barcha yasovchilari unga parallel bo'ladi. Bu tekislik *parallellizm tekisligi* deyiladi.

Cheksiz uzoqlashtirilgan nuqtaning vaziyati biror to'g'ri chiziq bilan beriladi va sirtning barcha yasovchilari uning yo'nalishiga parallel bo'ladi.

Agar fazoda ixtiyoriy biror  $S$  nuqta tanlab u orqali  $\Phi_2$  qiyshiq silindr sirtining yasovchilariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, biror  $\Phi_1$  konus sirti xosil bo'ladi. Bu konus sirt **yo'naltiruvchi konus** deb yuritiladi. Demak, qiyshiq silindr sirtini ikki egri chiziqdan iborat yo'naltiruvchilar ( $m, n$ ) va yo'naltiruvchi konus  $\Phi_1$  bilan ham berish mumkin. Bunday holda sirtni yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi.  $m$  va  $n$  egri chiziqli yo'naltiruvchilar hamda  $S$  uchli  $\Phi_1$  yo'naltiruvchi konus berilgan bo'lsin (12.11-rasm).  $m$  chiziq ustidagi ixtiyoriy  $A$  nuqtani biror  $\Phi_2$  konusning uchi deb olib,  $\Phi_2 \parallel \Phi_1$  konus yasaladi. So'ngra  $\Phi_2 \cap n = B$  nuqta aniqlanadi.  $A$  va  $B$  nuqtalar to'g'ri chiziq orqali tutashtirilib, qiyshiq silindrning to'g'ri chiziqli yasovchisi hosil qilinadi.  $A$  nuqtani  $m$  egri chiziq bo'yicha harakatlantirib,  $n$  chiziq ustida  $B$  nuqta singari qator nuqtalar xosil qilish mumkin. Qiyshiq silindrning bu usul bilan hosil bo'lishini geometrik tomondan quyidagicha analiz qilish mumkin. Sirtning  $m$  va  $n$  egri chiziqli yo'naltiruvchilari xos chiziqlar bo'lib,  $\ell$  yo'naltiruvchi egri chiziq cheksiz uzoqlashtirilgan bo'ladi. Cheksiz uzoqlashtirilgan  $\ell$  yo'naltiruvchining vaziyati yo'naltiruvchi konus orqali beriladi, ya'ni sirtning har bir to'g'ri chiziqli yasovchisi  $m$  va  $n$  chiziqlarni kesib, yo'naltiruvchi konusning mos yasovchisi bilan cheksiz uzoqlikda kesishadi.

Chiziqli sirtlar yoyiladigan va yoyilmaydigan sirtlarga bo'linadi.

**Ta'rif.** Cheksiz yaqin turgan ikki qo'shni yasovchilar (to'g'ri chiziq) o'zaro parallel yoki kesishuvchi bo'lib, tekis element hosil kilsa, bunday chiziqli sirtlar *yoyiladigan sirtlar* deyiladi

Yoyiladigan sirtlarga konus, silindr sirtlarni misol bo'la oladi.

Agar cheksiz yaqin turgan ikki qo'shni yasovchi (to'g'ri chiziq) o'zaro uchrashmas vaziyatda bo'lsa, bunday chiziqli sirtlar *yoyilmaydigan sirtlar* deyiladi.

### Nazorat savollari

1. Sirtlar qanday hosil bo'ladi?
2. Sirtning yasovchisi va yo'naltiruvchisi nima?
3. Sirtlarni hosil bo'lishining qanday usullari mavjud?
4. Sirtlarni hosil qilishning kinetik usulini tushuntirib bering.
5. Aylanish sirtlari nima va ularga misollar keltiring.
6. Aylanish sirtlarining xarakterli chiziqlari nimalar?
7. Chiziqli va chiziqli bo'lmagan sirtlarning farqi nimada?
8. Qanday sirtlar yoyiladigan sirtlar deyiladi?
9. Vint sirtini hosil bo'lishini tushuntirib bering.
10. Bir pallali va ikki pallali giperboloid sirtlar qanday hosil bo'ladi?
11. Siyiq va cho'ziq ellipsoidlarning farqi nimada?
12. To'g'ri chiziq kesmasini aylantirish yo'li bilan qanday sirtlar hosil bo'lishi mumkin?
13. Ikkinchi tartibli sirtlarga qanday sirtlar kiradi?
14. Sirtga tegishli bo'lgan yuzidagi nuqta qanday aniqlanadi?
15. Tor va tors sirtlarning farqi nimada?

## VI-BOB. SIRTLARNING YOYILMALARINI BAJARISH.

13-ma'ruza. Sirtlarning yoyilmalarini bajarish usullari. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash. (2-soat)

### REJA

1. Sirtlarning yoyilmasi haqida umumiy ma'lumlot
2. Sirtlarning yoyilmalarini bajarish usullari.
3. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash.

#### 13.1. Sirtlarning yoyilmasi haqida umumiy ma'lumlot.

Sirtning egilish deformasiyasi yordamida tekislikka aylantirish mumkin bo'lsa, bunday sirt **yoyiladigan sirt** deyiladi. Sirtning biror bo'lagi tekislikning ma'lum bir sohasiga yoyilishi mumkin. Masalan, silindrik sirt tekislikning o'zaro parallel ikki to'g'ri chizig'i orasidagi sohasida yoyiladi. Konus sirti esa tekislikka tegishli ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi sohada yoyiladi.

**Ta'rif.** Sirtning biror bo'lagining cho'zilmasdan, yirtilmasdan tekislikka yoyilishidan hosil bo'lgan tekis shakl uning **yoyilmasi** deyiladi.

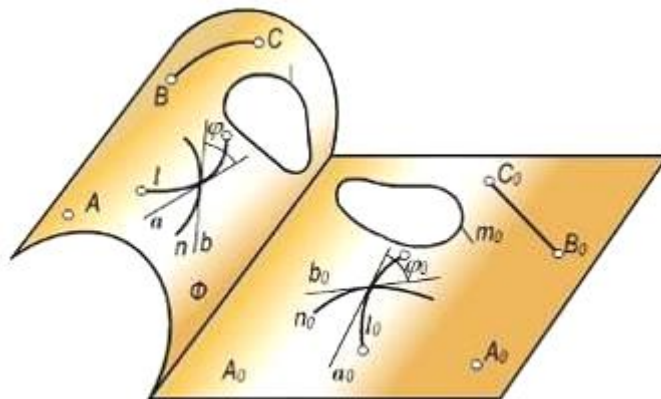
Yoyiladigan sirtlarga to'g'ri chiziqli sirtlardan faqat yondosh yasovchilari xos yoki xosmas nuqtalarda kesishadigan sirtlar kiradi.

Torslarda yondosh yasovchilarning kesishish nuqtalari qaytish qirrasida, konus sirtlarda esa uning uchida va silindrik sirtlarda cheksiz uzoqlikdagi nuqtada bo'ladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasash muhandislik amaliyotida katta ahamiyatga ega. Mashinasozlik, samolyotsozlik va qurilishda turli-tuman konstruksiyalarning shakllarini hosil qilish uchun yaxlit listlarda sirtlarning yoyilmalari yasali, ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan turli andozalar yasaladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasashda uchburchaklar, dumalatish va normal kesim usullari mavjud.

Uchburchaklar usuli bilan qirrali sirtlar, konus va tors sirtlarning yoyilmalari yasaladi. Dumalatish usuli bilan proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda berilgan qirrali, konus va silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash qulaydir. Yasovchilari yoki qirralari proyeksiya tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda bo'lgan silindrik yoki prizmatik sirtlarning yoyilmalarini normal kesim usulida yasash osonroqdir.



13.1-rasm

Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari taqriban yasaladi.

Sirt va uning yoyilmasi elementlari orasida qo'yidagi o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lishi kerak, ya'ni sirtga tegishli har bir nuqta va shaklga, shu sirt yoyilmasiga tegishli nuqta va shakl mos keladi yoki aksincha, yoyilmaga tegishli har bir nuqta va shaklga sirtga tegishli nuqta va figura mos kelishi kerak (13.1-rasm). Bu moslikka asosan qo'yidagi xossalarni keltirish mumkin.

**1-xossa.** Sirt va uning yoyilmasiga tegishli mos yoylarning uzunliklari o'zaro teng bo'ladi:  $l = l_0$ .

**Natija.** Sirt va uning yoyilmasiga tegishli mos yopiq egri chiziqlar bir xil yuzaga ega bo'ladi:  $S_m = S_{m_0}$ .

**2-xossa.** Sirtga tegishli ikki chiziq orasidagi burchak yoyilmaga tegishli mos chiziqlar orasidagi burchakka tengdir:  $\varphi = \varphi_0$ .

**3-xossa.** Sirtga tegishli to'g'ri chiziqqa yoyilmada ham to'g'ri chiziq mos keladi. Ammo yoyilmaga tegishli to'g'ri chiziqqa sirtning biror to'g'ri chizig'i hamma vaqt ham mos kelmaydi.

**4-xossa.** Sirtga tegishli o'zaro parallel to'g'ri chiziqlarga yoyilmada ham o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar mos keladi.

**5-xossa.** Agar sirtga tegishli egri chiziqqa yoyilmada to'g'ri chiziq mos kelsa, bunday chiziq sirtning **geodezik chizig'i** deyiladi. 13.1-rasmda ko'rsatilgan sirtning **BC** chizig'i uning geodezik chizig'i bo'la oladi.

**Ta'rif.** Sirtga tegishli ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofada tutashtiruvchi chiziq sirtning **geodezik chizig'i** deb ataladi.

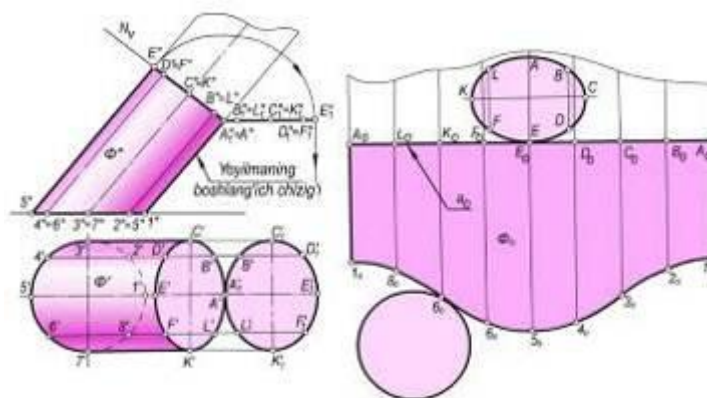
Sirtning yoyilmasini yasash deganda uni yirtmasdan, uzmasdan yoki g'ijimlamasdan faqat egib bir tekislikka jipslashtirish tushuniladi. Albatta bunday jarayon sirtning biror chizig'i (qirradi, yasovchilari va shu kabilar) bo'yicha kesib amalga oshirilishi mumkin. Lekin amaliyotda sirtlarning yoyilmalari yasaliib, so'ngra egish deformasiyasi yordamida bu yoyilmalardan kerakli konstruksiyalar yasaladi. Shuning uchun ham sirtlarning yoyilmalarini tekislik (qog'oz) da yasash muhim kasb etadi.

## 13.2. Sirtlarning yoyilmalarini bajarish usullari.

**Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash.** Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasashda *nog'mal kesim va dumalatish usullaridan foydalaniladi. Har ikkala usul bilan ham yoyilmani yasashda silindrik sirtni approksimasiya qilib prizmatik sirtga keltiriladi va masala prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi.*

Umuman biror silindrning yoyilmasini yasash uchun: silindr yoyilmasida qatnashadigan yasovchilarning haqiqiy uzunliklari aniqlanadi; qo'shni yasovchilar orasidagi asos yoylarining haqiqiy uzunliklari topiladi; planimetrik yasashlarga asosan silindr elementlari ketmaket yoyilmada yasaladi.

13.2,a-rasmda yasovchilari frontal vaziyatda va asosi **H** tekislikda yotgan og'ma, elliptik silindr tasvirlangan. Bunday silindrning yoyilmasi (13.2,b-rasm) normal kesim usulida bajarilgan. Silindrik sirt prizmatik sirtga approksimasiya qilinadi. Buning uchun silindr asosini ixtiyoriy bo'laklarga bo'linadi (rasmda 8 ta teng bo'lakka bo'lingan).



13.2-rasm

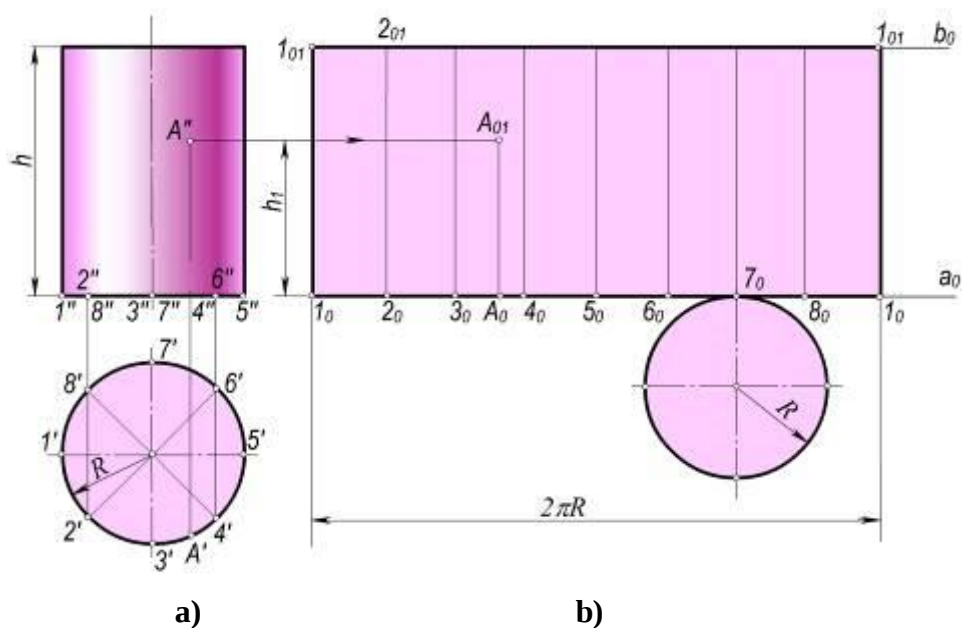
Bu holda silindrni 8 yoqli prizma ga almashtiriladi. Silindrning yasovchilariga perpendikulyar bo'lgan  $N(N_v)$  tekislik bilan kesishish chizig'i yasaladi. Kesishish chizig'i, ya'ni normal kesimning haqiqiy kattaligi aylantirish usuli bilan topiladi.

Silindrik sirtning yoyilmasini yasash uchun chizma qog'ozining bo'sh joyida ixtiyoriy  $a_0$  to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Yoyilmaning boshlanish chizig'i deb  $1A$  yasovchi olingan.  $a_0$  to'g'ri chiziqqa uzunligi nog'mal kesimning perimetriga teng bo'lgan  $[A_0A_0]$  kesma o'lchab qo'yiladi. Bu kesmaga  $A_0$  nuqtadan boshlab  $A_0L_0=A_0'L_0'$ ,  $L_0K_0=L_0'K_0'$ ,  $K_0F_0=K_0'F_0'$ ,... kesmalar o'lchab qo'yilib oralikdagi  $L_0$ ,  $K_0$ ,  $F_0$ , ... nuqtalar aniqlanadi. Bu nuqtalar orqali  $a_0$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar o'tkaziladi. 13.2, a-rasmda silindr yasovchilarining frontal proyeksiyalari o'z haqiqiy uzunliklariga teng ekanligini ko'rish mumkin. Shuning uchun yasovchilarning frontal proyeksiyadagi uzunliklari o'lchab olinib, yoyilmadagi mos perpendikulyarlarga qo'yiladi. O'lchab qo'yilgan kesmalarining ikkinchi uchlari tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan  $\Phi_0$  figura  $\Phi$  silindr yon sirtining yoyilmasi bo'ladi.  $\Phi_0$  figura silindrning asosi va normal kesimning haqiqiy kattaligi bilan to'ldirilib, to'la yoyilma hosil qilinadi

Asoslari aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindr yon sirtining yoyilmasi to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lib, bunday to'rtburchakning tomonlari  $2\pi R$  va  $h_0$  ga teng bo'ladi (13.3,a,b-rasm). Bu yerda  $R$  – asosning radiusi,  $h$  – silindrning balandligi. Asosi  $H$  tekisligiga tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindrning to'la yoyilmasini yasash 13.3,b-rasmda ko'rsatilgan.

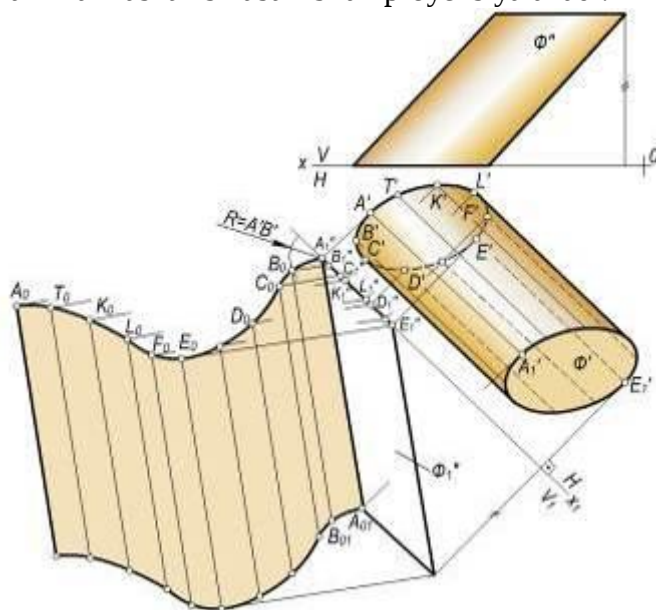
Bunda silindrning  $1_02_0$  ( $1'2',1''2''$ ) yasovchisi yoyilmaning boshlanish chizig'i deb olingan.

Ixtiyoriy  $a_0$  to'g'ri chiziq o'tkazib, unga  $[1_01_0] = 2\pi R$  kesma o'lchab qo'yiladi va u teng 8 bo'lakka bo'linadi. Kesmaning har ikkala uchidan  $a_0$  to'g'ri chiziqqa perpendikulyarlar chiqarilib, ularga  $1_01_{01}=h$  kesma, ya'ni silindrning balandligiga teng kesmalar o'lchab kuyiladi. Hosil bo'lgan  $1_01_{01}1_{01}1_0$  to'g'ri to'rtburchak berilgan silindr yon sirtining yoyilmasi bo'lib, to'la yoyilmani yasash uchun  $1_01_{01}$  va  $2_02_{01}$  tomonlarga urinuvchi qilib silindrning asoslari chiziladi. Sirtga tegishli  $A$  nuqtaning yoyilmadagi o'rnini aniqlash 13.3,a,b-rasmdan ko'rinib turibdi. Bunda  $3' \wedge A' = 3_0A_0$ ,  $A_0A_{01}=h_1$ , ya'ni  $A$  nuqtaning applikatasiga teng bo'ladi.



13.3-rasm.

13.4-rasmda tasvirlangan og'ma elliptik silindr yon sirtining yoyilmasi dumalatish usulida bajarilgan. Dastavval silindr uning yasovchilariga parallel bo'lgan  $\nabla$  tekislikka, proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli bilan proyeksiyalanadi.



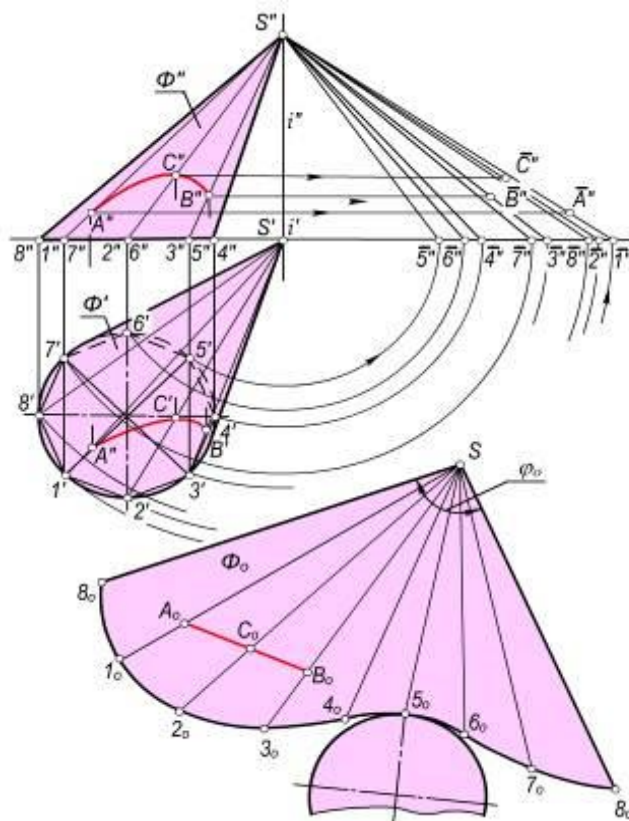
13.4-rasm.

Silindrning  $AA_1(A'A'_1, A''A''_1)$  yasovchisi yoyilmaning boshlanish chizig'i deb olingan.  $\Phi$  silindr o'zining  $AA_1$  yasovchisi orqali o'tgan tekislikka yoyiladi. Buning uchun silindrik sirt yana prizmatik sirtga approssimatsiya iqlinadi va prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Silindr yasovchilaridan biri  $BB_1(B'B'_1, B''B''_1)$  ning yoyilmadagi o'rni  $B_0B_{01}$  ni yasashni ko'rib chiqaylik. Markazi  $A_1''$  nuqtada va radiusi  $A'B'$  ga teng bo'lgan aylana yoyi chiziladi.  $B_1''$  nuqtadan esa  $A_1''A_{01}''$  yasovchiga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Ular o'zaro kesishib, yoyilmaga tegishli  $B_0$  nuqtani hosil qiladi.  $B_0$  nuqta orqali  $A_1''A_{01}''$  ga parallel qilib  $B_0B_{01}$  ( $B_0B_{01}=A_1''A_{01}''$ ) yasovchi o'tkaziladi. Yoyilmadagi  $C_0, D_0, \dots$  nuqtalar va ular orqali o'tuvchi yasovchilar ham  $B_0$  nuqta va  $B_0B_{01}$  yasovchi singari yasaladi.

**Konus sirtlarning yoyilmalarini yasash.** Umumiy holdagi konus sirtining yoyilmasi ham piramida yoyilmasini yasashdagidek, uchburchaklar usuli bilan

bajariladi. Buning uchun konus o'ziga ichki chizilgan ko'pyoqliklar piramidaga approksimasiya qilinadi va shu piramidaning yoyilmasi konus sirtining yoyilmasi deb qabul qilinadi. Ichki chizilgan ko'pyoqliklar piramidaning yoqlari qanchalik ko'p bo'lsa, konus sirtining yoyilmasi shunchalik aniq bo'ladi. Umuman, konusni yoyish uchun uning bir necha yasovchilarining haqiqiy uzunliklari va yunaltiruvchi egri chizig'i (yoki uning bo'laklarining) — asosining haqiqiy uzunligi topiladi. so'ngra konus yasovchilari va asosining bo'laklari birin ketin yoyilmaga ko'chiriladi.

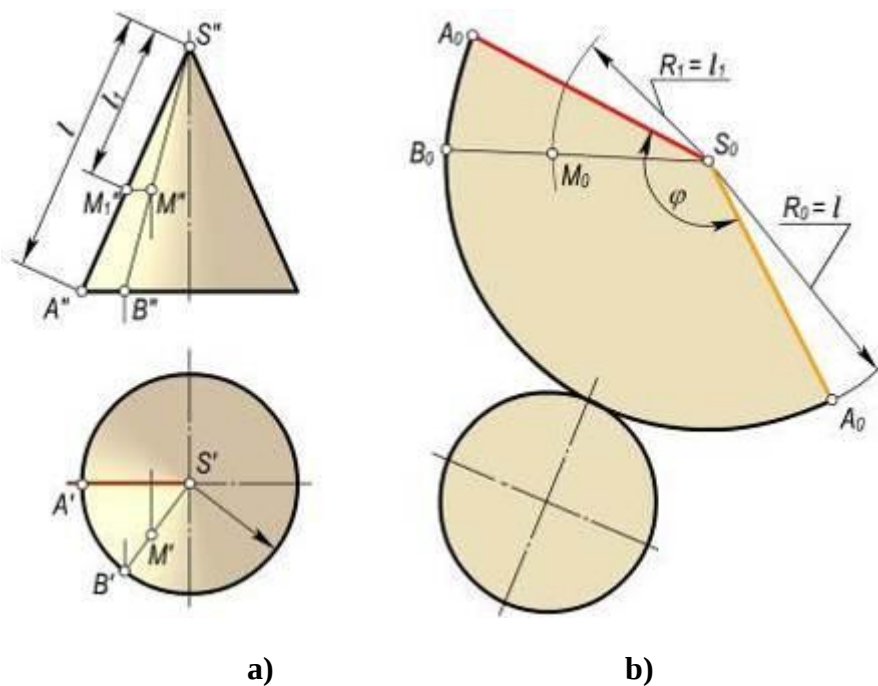
13.5,a-rasmda asosi  $H$  tekislikka tegishli  $\Phi$  og'ma konus tasvirlangan. Bu konusning yoyilmasini yasashda uchburchaklar usulidan foydalanamiz. Konusni o'ziga ichki chizilgan piramidaga approksimasiyalaymiz. Konus yasovchilari yoki ichki chizilgan piramida qirralarining haqiqiy uzunliklarini yasash rasmda aylantirish usulida bajarilgan.



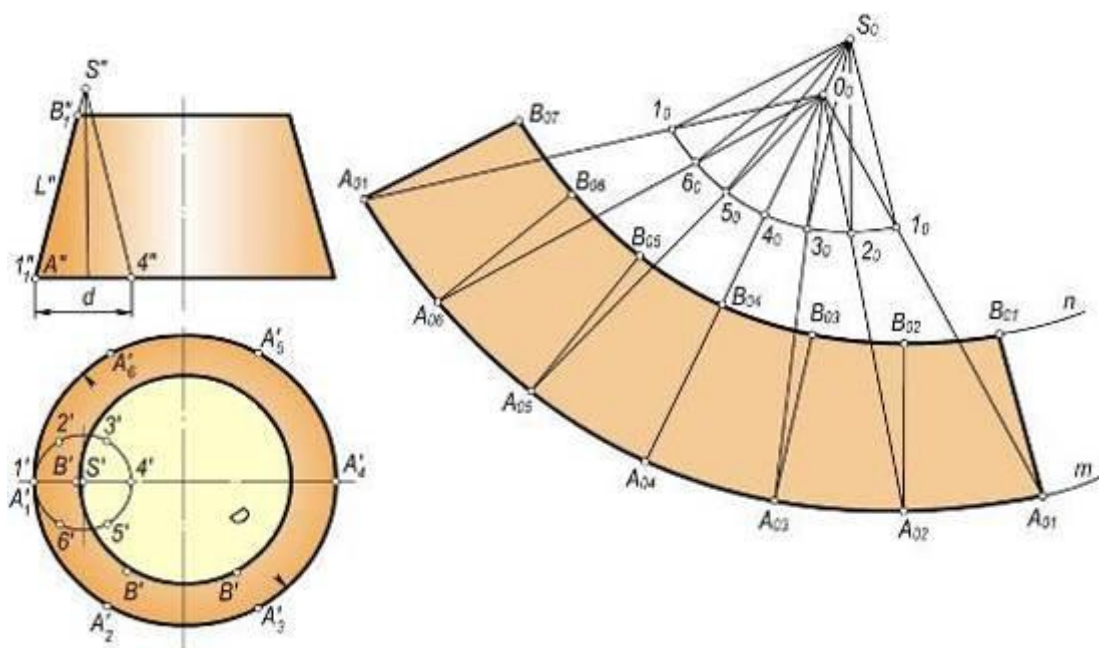
13.5-rasm

$S_8$  yasovchini yoyilmaning boshlanish chizig'i deb olamiz. Chizma qog'ozining bo'sh joyida ixtiyoriy  $S_0$  nuqtani belgilaymiz (13.5,b-rasm). 13.5,a-rasmdan  $S_8$  yasovchining haqiqiy uzunligi bo'lgan  $S''8_1$  kesmani o'lchab va uni  $S_0$  nuqtadan chiqarilgan ixtiyoriy  $a_0$  to'g'ri chiziqqa qo'yib,  $8_0$  nuqtani hosil qilamiz. So'ngra  $S_0$  nuqtani markaz,  $S''1_1$  ni radius qilib yoy chizamiz. Markazi  $8_0$  nuqtada va radiusi  $8'1'$  bo'lgan ikkinchi yoy chizamiz. Har ikkala yoylar o'zaro kesishib  $1_0$  nuqtani hosil qiladi. Yoyilmaning qolgan  $2_0, 3_0, 4_0, \dots$  nuqtalari ham shu tartibda yasaladi. Hosil bo'lgan  $\Phi_0$  figura berilgan konus yon sirtining yoyilmasi bo'ladi. Uni konusning asosi – ellips bilan to'ldirib, to'la yoyilmani hosil qilamiz.  $\Phi(\Phi', \Phi'')$  konus sirtidagi  $AB$  egri chiziqqa  $\Phi_0$  figurada  $A_0B_0$  to'g'ri chiziq mos kelgan. Shuning uchun  $AB$  – konusning geodezik chizig'i bo'ladi. Shuningdek, konusning hamma yasovchilari uning geodezik chizig'i bo'la oladi.

13.6,a,b-rasmda asosi  $H$  tekislikka tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy  $\Phi(\Phi', \Phi'')$  konus Monj chizmasida berilgan. Bunday konus yon sirtining yoyilmasi doira sektoridan iborat bo'ladi.



13.6-rasm



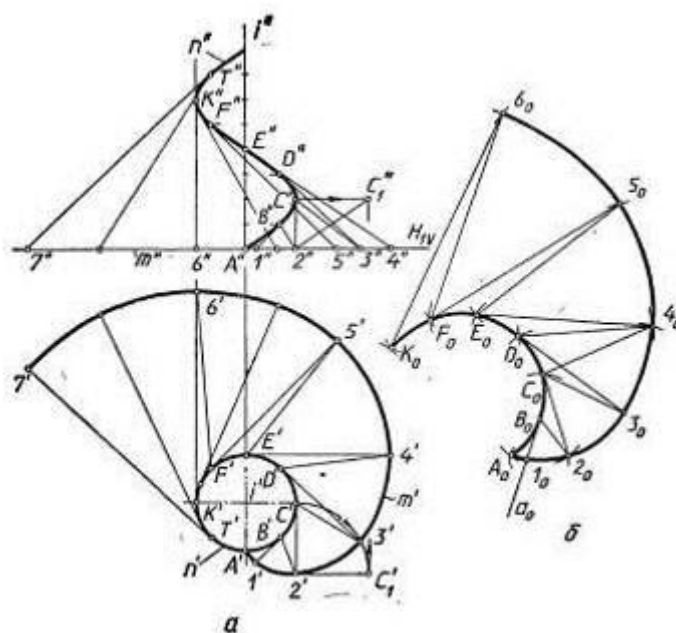
13.7-rasm

Doiraviy sektorning radiusi konus yasovchisining uzunligi  $L$  ga teng, markaziy burchagi  $\omega = \frac{r}{l} 360^\circ$  bo'ladi. Bu yerda  $r$  – konus asosining radiusi,  $l$  – konusning yasovchisi.

13.7,a,b-rasmda uchi chizma maydonidan tashqarida joylashgan kesik konus tasvirlangan. Bunday konusning yoyilmasini yasash uchun shunday yordamchi konus chizish kerakki, unda  $K = \frac{d}{D}$  nisbat butun son orqali ifodalansin. Bunda  $D$  – berilgan kesik konus katta asosining diametri,  $d$  – yordamchi konusning diametri. Rasmda bu nisbat 3 ga teng qilib olingan.

Dastlab yordamchi konusning yoyilmasini yasaymiz (13.7,b-rasm). Keyin  $\angle 1_0 S_0 1_0$  ning bissektrisasiga tegishli ixtiyoriy  $O_0$  nuqta orqali  $O_0 1_0$ ,  $O_0 2_0$ ,  $O_0 3_0$ , ... nurlarni o'tkazamiz. Bu nurlarga  $O_0$  nuqtadan boshlab  $O_0 A_{01} = K \times O_0 1_0$ ,  $O_0 A_{02} = K \times O_0 2_0$ ,  $O_0 A_{03} = K \times O_0 3_0$ , ... kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan  $A_{01}$ ,  $A_{02}$ ,  $A_{03}$ , ... nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz. Amalda bunday egri chiziqni markazi  $O_0$  nuqtada radiusi  $O_0 A_{01}$  bo'lgan aylana yoyi ko'rinishida chiziladi. So'ngra  $A_{01}$ ,  $A_{02}$ ,  $A_{03}$ , ... nuqtalar orqali  $S_0 1_0$ ,  $S_0 2_0$ ,  $S_0 3_0$ , ... yasovchilarga mos ravishda parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularga kesik konusning  $A''B''$  yasovchisiga teng bo'lgan  $A_{01} B_{01}$ ,  $A_{02} B_{02}$ ,  $A_{03} B_{03}$ , ... kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan  $B_{01}$ ,  $B_{02}$ ,  $B_{03}$ , ... nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, kesik konus yon sirtining yoyilmasini hosil qilamiz.

**Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash.** Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash ham konus sirtlarning yoyilmalarini yasashdagidek uchburchaklar usulida bajariladi. 13.8,a-rasmda yoyiladigan gelikoid va 13.8,b-rasmda uning yoyilmasini yasash ko'rsatilgan. qaytish qirrasi silindrik vint chizig'ida  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ... nuqtalarni belgilab olamiz.



13.8-rasm.

Ular orqali vint chizig'iga urinmalar o'tkazib, sirt yasovchilarini hosil qilamiz. Sirtning o'qiga perpendikulyar bo'lgan  $H_1$  tekislik bilan sirtni kesamiz. Bu holda berilgan sirt  $n$  — vint chizig'i va  $m$  — evolventa bilan chegaralangan bo'ladi. Urinmalarining  $H_1(H_{1V})$  tekislik bilan kesishish nuqtalari 1, 2, 3, ... ni belgilab olamiz. Sirtning qo'shni yasovchilari orasidagi bo'laklarining, ya'ni egri chizikli to'rtburchaklarning bittadan diagonallarini o'tkazib, ularni ikkita uchburchakka ajratamiz. Masalan,  $BC21$  bo'lakning  $B2$  diagonalini o'tkazib, uni  $B12$  va  $B2C$  uchburchaklarga ajratamiz. Agar  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ... nuqtalar orasidagi masofalar qisqa bo'lsa, uchburchaklarning egri chizikli tomonlari

Shunday qilib, qaytish qirrali sirt ko'pyoqliklar sirtga approksimasiya qilinadi. Bu holda sirt yoyilmasini yasash ko'pyoqliklar sirtining yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Buning uchun uchburchaklarning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Shunday tomonlardan biri, masalan,  $C2$  ning haqiqiy uzunligini yasash 13.8,a-rasmda aylantirish usulida bajarilib ko'rsatilgan. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yoyilmada uchburchaklar ketma-ket yasaladi. 13.8,b-rasmda yoyilma  $A_0 B_0 1_0$  uchburchakni yasashdan boshlangan. Bu uchburchak quyidagicha yasaladi: ixtiyoriy  $a_0$  to'g'ri chiziq o'tkazib, unga  $B1$  tomonning haqiqiy uzunligiga teng bo'lgan  $B_0 1_0$  kesma o'lchab qo'yiladi. Markazlari  $1_0$  va  $B_0$  nuqtalarda bo'lgan va radiuslari mos ravishda  $A1$ ,  $AB$  tomonlarning

haqiqiy uzunliklariga teng bo'lgan ikki aylana yoylari chiziladi. Bu yoylarning o'zaro kesishuvidan  $A_0$  nuqta hosil bo'ladi.

Qolgan uchburchaklarning haqiqiy kattaliklari ham shu tarzda bir-biriga yondashtirib yasaladi.

### 13.3. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash.

Muhandislik amaliyotida ko'pgina hollarda yoyilmaydigan sirtlar yoki ularning bo'laklaridan ba'zi konstruksiyalarni yasashga to'g'ri keladi. Ammo ularning faqat taqribiy yoyilmalarini yasash mumkin. Taqribiy yoyilmalarni yasashning umumiy usuli shundan iboratki, berilgan sirt yoyiladigan sirtlardan biriga (ko'pyoqliklar, silindrik yoki konussimon) approksimasiya qilinadi.

Sirtlarning yoyilmalarini taqribiy yasashning uch usuli:

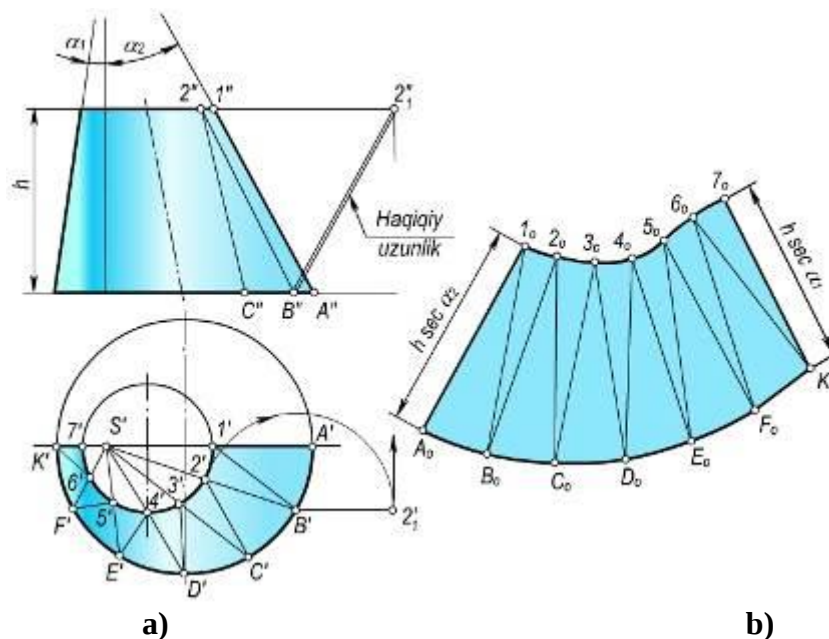
- Yordamchi uchburchaklar usuli.
- Yordamchi silindrik sirtlar usuli.
- Yordamchi konus sirtlar usuli mavjud.

**Yordamchi uchburchaklar usuli.** Bu usulning mohiyati qo'yidagidan iborat. Dastlab yoyilmaydigan sirt uchburchaklarga bo'lib chiqiladi, ya'ni berilgan sirt ko'pyoqliklar sirtga approksimasiya qilinadi. Keyin ko'pyoqliklar sirtning yoyilmasi yasaladi. Buning uchun uchburchak tomonlarining haqiqiy uzunliklari proyeksiyalarda yasaladi. Har bir uchburchakning yoyilmadagi vaziyati uchala tomonining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yasaladi.

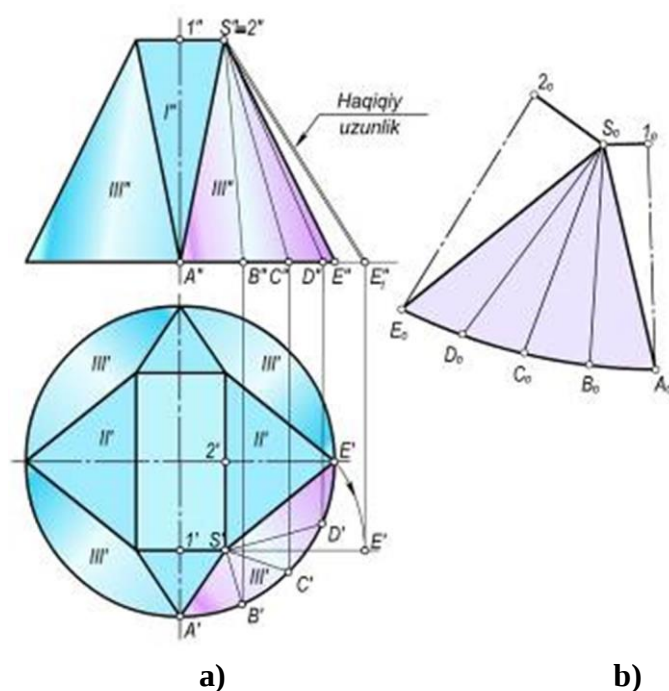
Amalda og'ma konus sirtlarning yoyilmalari umuman taqribiy usulda yasaladi. 13.9,a-rasmda Monj chizmasida og'ma konus tasvirlangan. Uning yoyilmasini yasash uchun berilgan konus sirti  $A1B$ ,  $B12$ ,  $B2C$ ,... uchburchaklarga ajratiladi. Bu uchburchaklarning bittadan tomonlari konusning uchidan o'tadigan qilib olinadi. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Ulardan biri  $B2$  ning haqiqiy uzunligi aylantirish usulida yasalgan. Yoyilmani hosil qiluvchi uchburchaklarni ularning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yasash qiyin emas. Bunda yoyilmadagi uchburchaklar tomonlarining o'zaro joylashuv tartibi proyeksiyadagi joylashuv tartibi bilan bir xil bo'lishi kerak. 13.9,b-rasmda og'ma konus yon sirti yoyilmasining yarmi ko'rsatilgan. 13.10,a-rasmda tasvirlangan sirt silindrik trubadan to'rtburchakli trubaga o'tish elementi bo'lib, u ikkita  $I$  ko'rinishdagi, ikkita  $II$  ko'rinishdagi tekis uchburchaklardan hamda to'rtta  $III$  ko'rinishdagi elliptik konus sirtlardan tashkil topgan. Bunday sirtning yoyilmasini yasash uchun dastlab konus sirtlarni piramida sirtlariga approksimasiya qilamiz (rasmda faqat bitta konus sirtining piramidaga approksimasiya qilinishi ko'rsatilgan). Buning uchun konusning asosida bir necha  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  nuqtalarni belgilab olib, ularni konusning uchi bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklarini yasaymiz. 13.10,a-rasmda  $SE$  tomonning haqiqiy uzunligini yasash ko'rsatilgan. Bu sirt yoyilmasini yasash uchun tomonlarning haqiqiy uzunliklari bo'yicha uchburchaklar yasaymiz.

Berilgan sirtning  $S2EA1$  choragining yoyilmasini yasash 13.10,b-rasmda ko'rsatilgan. Qolgan choraklarining yoyilmasi ham yuqorida bayon qilinganidek yasaladi.

**Yordamchi silindrik sirtlar usuli.** Bu usul yoyilmaydigan aylanish sirtlarining taqribiy yoyilmalarini yasashda qulay. Uning mohiyati qo'yidagidan iborat. Berilgan sirtni meridianlari bo'yicha bir necha o'zaro teng bo'laklarga bo'lib chiqiladi. Bu bo'laklar o'z navbatida silindrik sirtlar bilan almashtiriladn. Bunday silindrik sirtlar berilgan sirtga har bo'lagingining o'rta meridiani bo'yicha urinib o'tishi shart. 13.11,a-rasmda proyeksiyalari bilan berilgan sferik sirt bo'lagingining taqribiy yoyilmasi 13.11,b-rasmda tasvirlangan.



13.9-rasm.

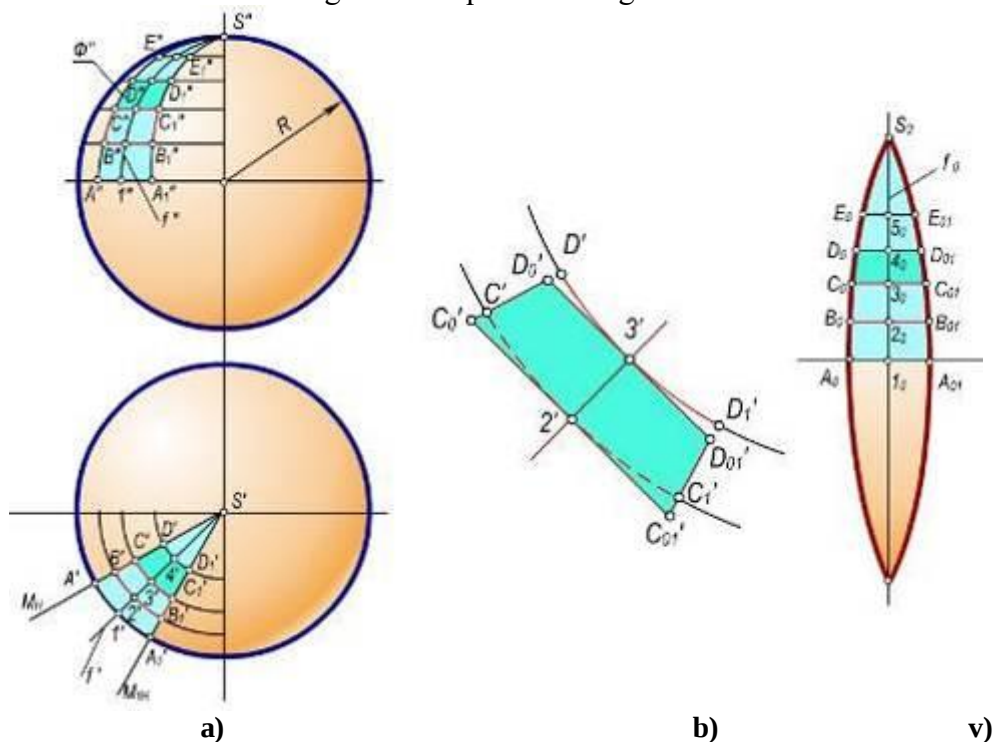


13.10-rasm.

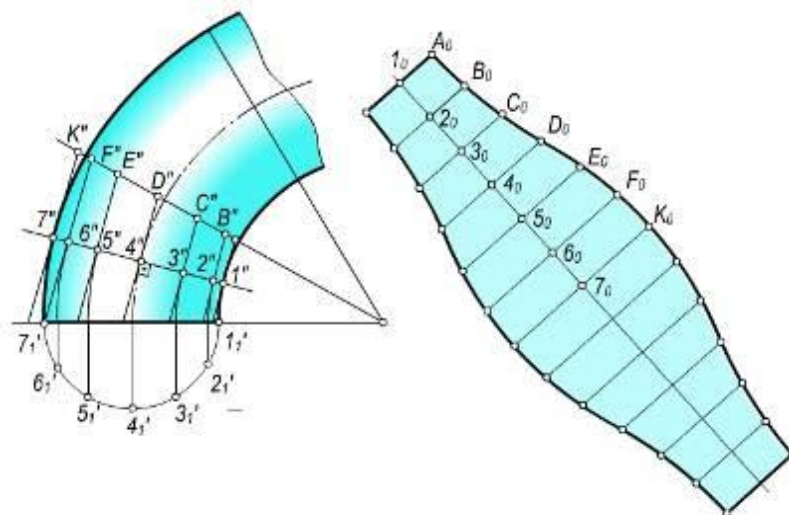
Dastavval sferik sirtni meridianlar bo'yicha kesuvchi  $V_1$ ,  $M$ ,  $M_1$  va  $W_1$  tekisliklar bilan teng bo'laklarga bo'lamiz. Bunda bo'laklar soni qancha ko'p bo'lsa, sferaning yoyilmasi shuncha aniqroq bo'ladi.  $M$  va  $M_1$  tekisliklar orasidagi sferaning  $\Phi(\Phi', \Phi'')$  bo'lagi yoyilmasini yasashni ko'rib chiqamiz. Bu bo'lakni silindrik sirt bilan almashtiramiz. Bunday almashtirish 13.11, v-rasmda kattalashtirib ko'rsatilgan.  $M$  va  $M_1$  meridional tekisliklar orasidagi masofalar silindrik sirt yasovchilarining uzunliklari bo'ladi. Demak, bu yasovchilar gorizontaal vaziyatdagi kesmalar bo'lib, ularning gorizontaal proyeksiyalari haqiqiy uzunliklarida tasvirlanadi.

Bunday silindrik sirt  $\Phi$  bo'lakning o'rta meridiani  $f$  bo'yicha urinuvchi bo'ladi.  $\Phi$  bo'lakning yoyilmasini yasash uchun gorizontaal vaziyatda ixtiyoriy  $t_0$  to'g'ri chiziqli o'tkazamiz. Unga  $A_01_0$  va  $1_0A_{01}$  kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Bu kesmaning o'rtasidan unga perpendikulyar qilib  $f_0$  to'g'ri chiziqli o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqli o'rta meridional kesim uzunligining yarmi  $\frac{\pi D}{2}$  ni  $1_0$  nuqtadan boshlab o'lchab qo'yib,  $S_0$  nuqtani belgilab olamiz. 1, 2, 3, 4, 5 va  $S$  nuqtalar orasidagi masofalarning haqiqiy uzunliklarini aniqlab  $f_0$  to'g'ri chiziqqa  $1_0, 2_0, 3_0, 4_0$  va  $5_0$  nuqtalarni belgilaymiz. Bu nuqtalar orqali gorizontaal to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularga  $f_0$  vertikal to'g'ri chiziqdan boshlab har ikkala tomonga  $1', 2', 3', 4'$  va  $5'$  nuqtalar orqali o'tgan yasovchilarning yarmini o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan  $A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, S_0$  va  $S_{01}, A_{01}, B_{01}, C_{01}, D_{01}, E_{01}$  nuqtalarni tekis egri chiziqli bilan tutashtiramiz.  $A_0S_0A_{01}$  figura  $\Phi$  bo'lak yoyilmasining yarmi hisoblanadi. Ikkinchi yarmining yoyilmasi ham xuddi shu tarzda yasoladi. Sfera sirtining to'la

yoyilmasini hosil qilish uchun shunday yoyilmadan yana  $n-1$  tasini yasash kerak bo'ladi. Bunda  $p$  – sferik sirt bo'laklarining soni. Yuqorida ko'rilgan hol uchun  $n = 12$ .



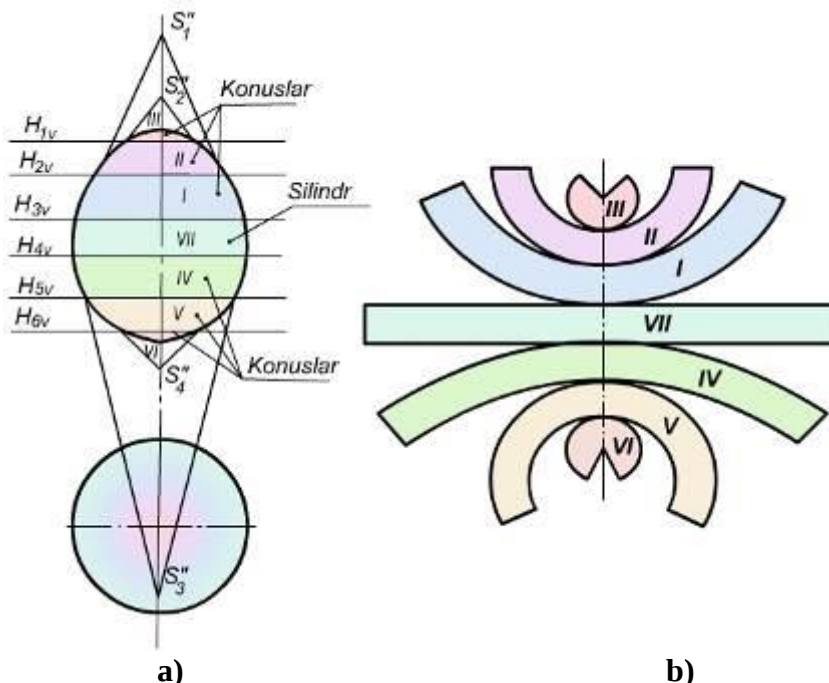
13.11-rasm.



13.12-rasm

13.12,a-rasmda tasvirlangan tor halqaning taqribiy yoyilmasini yasash uchun uni 12 teng bo'lakka bo'lib, bir bo'lagining yoyilmasini yasaylik (13.12,b-rasm). Torning bu bo'lagini tashqi chizilgan yordamchi silindrik sirt bilan almashtiramiz. Bunday silindrik sirt halqa bo'lagining o'rta meridiani yoki normal kesimi bo'yicha urinadi. YOyilmani yasash uchun gorizontaal vaziyatda  $a_0$  to'g'ri chiziq o'tkazamiz (13.12,b-rasm) va unga normal kesimning uzunligini o'lchab qo'yamiz. Keyin bu to'g'ri chiziqda  $1_0, 2_0, 3_0, \dots$  nuqtalarni belgilab, ular orqali  $a_0$  to'g'ri chiziqda perpendikulyar qilib yordamchi silindrning yasovchilarini o'tkazamiz. Bularga yasovchilarning uzunliklarini o'lchab qo'yamiz. Hosil bo'lgan  $A_0, B_0, C_0, \dots$  nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib yoyilmani hosil qilamiz. Bu esa halqa 1/12 qismining yoyilmasi bo'ladi.

**Yordamchi konussimon sirtlar usuli.** Bu usul bilan konturi egri chiziqli aylanish sirtlarining taqribiy yoyilmasi yasaladi. Berilgan sirt aylanish o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesiladi. Sirtning har bir bo'lagi konussimon yoki silindrik sirlarga approksimasiya qilinadi va bu sirtlarning yoyilmalari yasaladi. 13.13,a-rasmda Monj chizmasida berilgan aylanish sirtlari aylanish o'qiga perpendikulyar tekisliklar bilan bir necha bo'laklarga bo'linadi. Bu bo'laklar konussimon (I, II, III, IV, V, VI) va silindrik (VII) sirlarga approksimasiya qilinadi.



13.13-rasm

13.13,b-rasmda konussimon va silindrik sirlarga approksimasiya qilingan sirt bo'laklarining yoyilmalari ko'rsatilgan. Bu yoyilmalar to'g'ri doiraviy silindr va konus sirtlarining yoyilmalarini yasashga asoslanib bajarilgan.

13.13,b-rasmda hosil qilingan yoyilma bo'yicha berilgan sirtning aynan o'zini yasab bo'lmaydi. Bunda yoyilmadagi I, II, III, IV, V va VI, VII bo'laklar orasida ochiq joylar mavjud bo'lib, ular berilgan sirtning aynan o'zini yasash imkoniyatini bermaydi. Shuning uchun ham bunday yoyilmalar shartli yoyilmalar deyiladi.

### Nazorat savolari

1. Sirtning yoyilmasi deb nimaga aytiladi?
2. Yoyiladigan sirtlar deb nimaga aytiladi?
3. To'g'ri doiraviy silindrning yoyilmasi nimadan iborat?
4. Og'ma silindrning yoyilmalari qanday usulda yasaladi va yasash algoritmi nimalardan iborat?
5. To'g'ri doiraviy konusning yoyilmasi nimadan iborat?
6. Og'ma konusning yoyilmasi qanday yasaladi?
7. Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari qanday yasaladi?
8. Shartli yoyilmalarni yasashning treangulyafsiya usuli nimadan iborat?
9. Elliptik konusning yoyilmasi qanday yasaladi?
10. Sferaning taqribiy yoyilmasi qanday yasaladi?

## VII-BOB. SIRTLAGA URINMA TEKISLIKLAR O'TKAZISH.

**14-ma'ruza.** Sirtlarga urinma tekisliklar o'tkazish, sirt ustidagi nuqtalarning klassifikatsiyasi. Parabolik, elliptik va giperbolik nuqtalarga ega bo'lgan sirtlarga urinma tekisliklar o'tkazish. Sirtlarning ocherklarini yasash. (2-soat)

### REJA

- 1 Sirtlarga urinma tekisliklar o'tkazish, sirt ustidagi nuqtalarning klassifikatsiyasi.
2. Parabolik, elliptik va giperbolik nuqtalarga ega bo'lgan sirtlarga urinma tekisliklar o'tkazish.
3. Sirtlarning ocherklarini yasash.

#### 14.1. Sirtlarga urinma tekisliklar o'tkazish, sirt ustidagi nuqtalarning klassifikatsiyasi.

Sirtning biror nuqtasi orqali shu sirtga cheksiz ko'p urinma to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Bu urinma to'g'ri chiziqlar to'plami shu nuqtadagi sirtning urinma tekisligini tashkil qiladi (14.1-rasm).

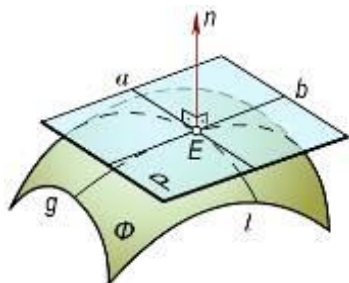
Sirtga urinma tekislikning urinish nuqtasidan o'tib, bu tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq sirtning shu nuqtadagi *normali* deyiladi (14.1-rasm).

Berilgan sirtlarni shakliga qarab, urinma tekisliklar sirtning nuqtasiga (14.1-rasm), yoki to'g'ri chizig'iga (14.2-rasm), yoki aylanasiga (14.3-rasm) yoki boshqa geometrik shakllariga urinadi.

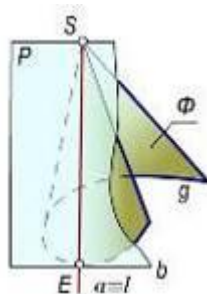
Berilgan sirtga yagona yoki chekli sondagi urinma tekislik quyidagi hollarda o'tkazilishi mumkin:

- sirt ustidagi nuqta orqali;
- sirt tashqarisidagi nuqta orqali;
- berilgan to'g'ri chiziq orqali;
- berilgan to'g'ri chiziqqa parallel;
- berilgan tekislikka parallel;
- berilgan ikki sirtga urinma va hokazo.

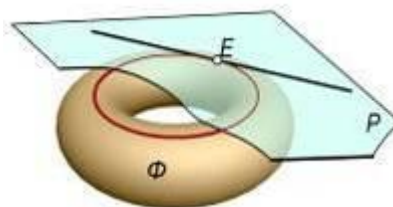
Bu shartlar tekislikning berilish usullari bilan uzviy bog'liq bo'lib, sirtlarning turiga qarab tanlanadi. Masalan, ikkinchi holda, **S** nuqtadan shar sirti uchun cheksiz urinma tekisliklarni o'tkazish imkonini beradi (14.4-rasm). Shar sirti uchun chekli urinma tekislik hosil qilish masalasi faqat 1-, 3-, 5- hollar qo'yilganda hal bo'ladi (14.5-rasm). Boshqa sirtlar uchun ham xuddi shunday mulohaza yuritish mumkin.



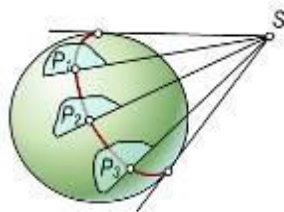
14.1-rasm



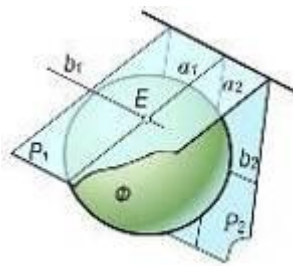
14.2-rasm



14.3-rasm



14.4-rasm



14.5-rasm

## 14.2 Parabolik, elliptik va giperbolik nuqtalarga ega bo'lgan sirtlarga urinma tekisliklar o'tkazish.

Urinma tekislik, chizmada tekisliklarni berilish usullari singari, bir to'g'ri chiziqda yotmagan uch nuqta; to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta; ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq; parallel to'g'ri chiziqlar va boshqa tekis shakllarining proyeksiyalari orqali berilishi mumkin. Tekislikning berilishida qatnashuvchi nuqtalar va to'g'ri chiziqlar urinish nuqtalari yoki urinish chiziqlarini ifodalashi mumkin. Masalan, konus sirtiga uringan tekislik kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq ko'rinishida berilishi mumkin va bu chiziqlarning biri urinish chizig'i bo'lib xizmat qiladi (14.2-rasm).

Urinma tekislik, sirtga qanday urinishidan qat'iy nazar, urinish chiziqlariga tegishli nuqtalar elliptik, parabolik, giperbolik nuqtalarga bo'linadi.

### Sirtning elliptik nuqtasi

Bunga ellipsoid, paraboloid, shar sirtlarining nuqtalari misol bo'la oladi.

**Ta'rif:** Agar urinma tekislik sirt bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa va shu nuqta orqali o'tuvchi sirtning barcha kesim chiziqlari urinma tekislikning bir tomonida qolsa, sirtning bunday urinish nuqtasi *elliptik nuqta* deyiladi (14.1-rasm).

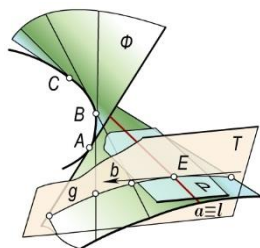
### Sirtning parabolik nuqtasi

Bunga konus, silindr kabi sirtlar misol bo'ladi.

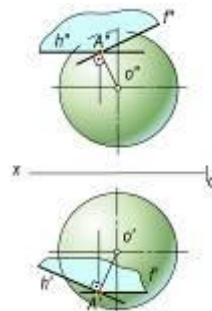
**Ta'rif:** Agar urinma tekislik sirt bilan to'g'ri chiziq hosil qilib urinsa, bu urinish chizig'ining nuqtalari *parabolik nuqtalar* deyiladi (14.2-rasm).

### Sirtning giperbolik nuqtasi

**Ta'rif:** Agar urinma tekislik sirtga urinib, uni kessa, hosil bo'lgan kesishish chizig'iga oid sirtning nuqtasi *giperbolik nuqta* deyiladi (14.6-rasm).



14.6-rasm.



14.7-rasm.

Bunday sirtlarga bir pallali giperboloid, giperbolik paraboloid kabi sirtlarning nuqtalari misol bo'la oladi.

Urinma tekisliklar amaliy va nazariy jihatdan katta ahamiyatga ega. Nazariy jihatdan, urinma tekisliklardan differensial geometriyada sirtlarning urinish nuqtasi atrofida xossalari o'rganishda keng foydalaniladi. Urinish nuqtasidagi normalning yo'nalishini aniqlashdan esa muxandislik amaliyotida keng foydalaniladi. Bundan tashqari, urinma tekisliklardan arxitektura va rassomchilik amaliyotida sirtlarning o'z soyasi yoki tushgan soyasining chegaralarini aniqlashda, chizma geometriyada sirtlarning ocherklarini yasashda keng qo'llaniladi.

### Sirtning ixtiyoriy nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazish

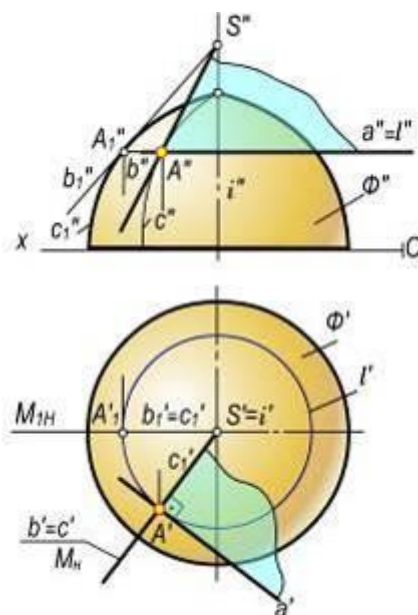
Sirtidagi ixtiyoriy nuqtadan yagona urinma tekislik o'tadi. Bu tekislik sirtning urinish nuqtasiga o'tkazilgan bir juft kesishuvchi urinma to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari orqali tasvirlanadi. Sirtning ixtiyoriy nuqtasiga urinma tekislik o'tkazishga doir bir necha misollarini ko'rib chiqamiz.

**1-masala.** Sferaning  $A(A', A'')$  nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazilsin (14.7-rasm).

**Echish.** Izlagan urinma tekislik urinish nuqtasi  $A(A', A'')$  orqali o'tkazilgan  $OA(O'A', O''A'')$  radiusga perpendikulyar bo'ladi. Shunga ko'ra, to'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro perpendikulyarlik shartiga asosan,  $A$  nuqtadan sferaning  $OA$  radiusiga perpendikulyar qilib, ikkita urinma to'g'ri chiziq, ya'ni gorizontal  $h(h', h'')$  va frontal  $f(f', f'')$  chiziqlar o'tkaziladi. Bu chiziqlar birgalikda izlangan urinma tekislikni ifodalaydi;

**2-masala.**  $\Phi(\Phi', \Phi'')$  aylanish sirtining ixtiyoriy  $A(A', A'')$  elliptik nuqtasi orqali unga urinma tekislik o'tkazilsin (14.8-rasm).

**Echish.** Izlangan urinma tekislikni sirtning  $A$  nuqtasi orqali o'tgan paralleli va meridianiga urinma bo'lgan to'g'ri chiziqlar orqali ifodalash qulaydir.



14.8-pacm.

Urinma tekislikni ifodalovchi chiziqlarni yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:

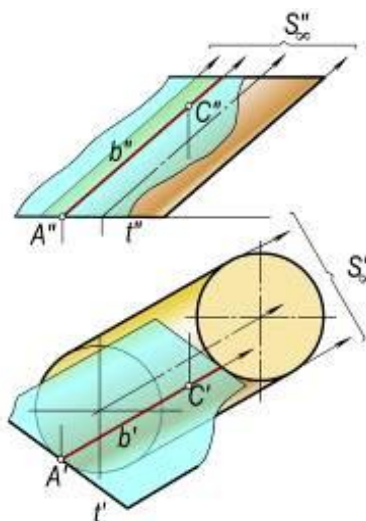
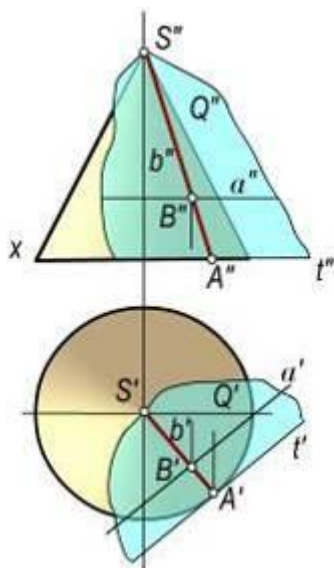
- $A(A', A'')$  nuqtadan sirtning  $N(N_V)$  tekislikdagi  $\ell$  ( $\ell'$ ,  $\ell''$ ) paralleli va  $M(M_H)$  tekislikdagi  $c(c', c'')$  meridiani o'tkaziladi;
- $\ell(\ell', \ell'')$  parallelning  $A(A', A'')$  nuqtasidan  $a(a', a'')$  urinma o'tkaziladi; Bu urinma, tekislikning gorizontali bo'ladi.
- $c(c', c'')$  meridian chizig'iga o'tkazilgan urinmaning gorizontali proyeksiyasi  $b'$  ni  $a'$  ga perpendikulyar qilib o'tkaziladi.

- $b$  urinma chiziqning frontal proyeksiyasi  $b''$  ni yasash uchun aylanish o'qi  $i(i', i'')$  va  $A(A', A'')$  urinish nuqtasidan iborat  $M$  meridian tekisligini  $V$  proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgunga qadar  $i$  atrofida burib,  $A$  nuqtaning, yangi  $A_1(A'_1, A''_1)$  vaziyati aniqlanadi;
- $A$  urinish nuqtasining yangi  $A''_1$  frontal proyeksiyasidan sirtning frontal proyeksiyasi chegara chizig'i  $c''_1$  ga urinma o'tkazib,  $i'$  o'qi bilan kesishgan joyda  $S''$  nuqta aniqlanadi;
- $S''$  va  $A''$  nuqtalarni birlashtirib,  $b''$  ni hosil qilinadi. Natijada hosil bo'lgan kesishuvchi  $a(a', a'')$  va  $b(b', b'')$  urinma chiziqlar izlangan urinma tekislikni ifodalaydi.

**3 masala.** Konus sirtining ixtiyoriy  $B(B', B'')$  parabolik nuqtasi orqali urinma tekislik o'tkazilsin (11.9-rasm).

**Echish.** Izlangan tekislik konus sirti bilan, to'g'ri chiziq bo'ylab urinadi. Uni yasash algoritmi quyidagicha:

- Konus uchi  $S(S', S'')$  bilan berilgan  $B(B', B'')$  nuqtani o'zaro birlashtirib, urinish chizig'ining  $b'$  va  $b''$  proyeksiyalari aniqlanadi;
- $b(b', b'')$  chiziqning konus asosi bilan kesishgan  $A(A', A'')$  nuqtasidan konus asosiga urinma to'g'ri chiziq  $t(t', t'')$  o'tkaziladi; Bunda  $t' \perp b'$  bo'ladi.
- Hosil bo'lgan kesishuvchi  $b(b', b'')$  va  $t(t', t'')$  to'g'ri chiziqlar izlangan urinma tekislikni ifodalaydi. Konus uchi orqali cheksiz ko'p urinma tekisliklar o'tadi, chunki  $S$  dan o'tuvchi cheksiz yasovchi-urinish chiziqlari mavjuddir.



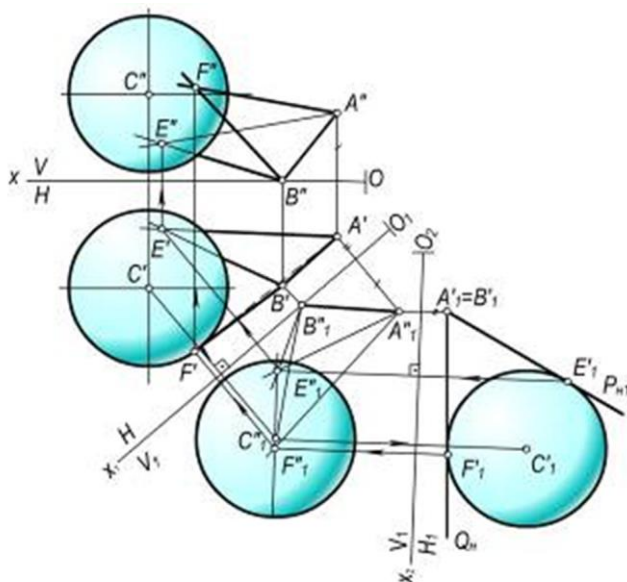
14.9-rasm.

14.10-rasm.

Silindr sirtiga urinma tekislik o'tkazish, 3-misoldagidek bo'lib, faqat urinish chizig'ini silindr yasovchilariga parallel qilib o'tkazish yetarlidir. (14.10-rasm)

### Berilgan to'g'ri chiziq orqali urinma tekislik o'tkazish

Berilgan to'g'ri chiziq orqali sirtga urinma tekislik o'tkazish



14.11-rasm.

masalasi tekislikning nuqta, shu nuqtadan o'tmagan to'g'ri chiziq orqali berilish usuli bilan bog'liqdir, ya'ni tekislik sirtga bitta nuqtasi bilan urinishi mumkin.

Shar tashqarisida olingan  $AB$  to'g'ri chiziq orqali shar sirtiga urinma tekislik o'tkazish 14.11-rasmda tasvirlangan.

Ma'lumki, berilgan  $AB$  to'g'ri chiziq orqali sharga ikkita:  $P$  va  $Q$  urinma tekisliklar o'tkazish mumkin. Yasash algoritmi qo'yidagicha:

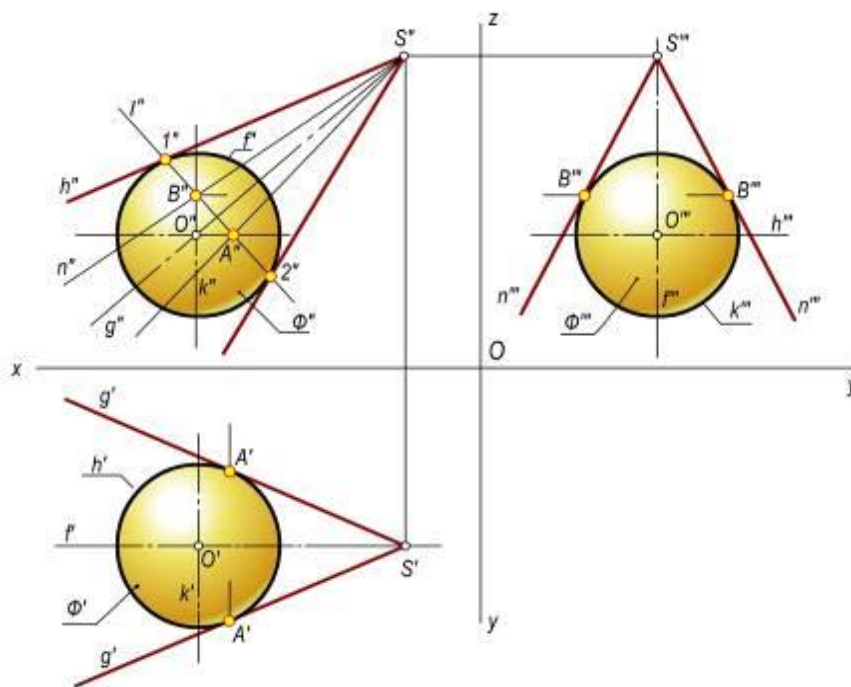
- Berilgan  $AB$  to'g'ri chiziqni proyeksiyalar tekisliklarini ikki marta almashtirish usuli yordamida uni proyeksiyalovchi  $A_1' \equiv B_1'$  vaziyatga nuqta ko'rinishida keltiriladi.
- Yangi tekisliklar sistemasidagi sharning proyeksiyasi konturiga urinma qilib  $P_{H1}$  va  $Q_{H1}$  urinma tekislik izlarini o'tkaziladi va  $E_1', F_1'$  urinish nuqtalari aniqlanadi;
  - So'ngra  $E_1'$  va  $F_1'$  nuqtalarni teskari proyeksiyalash yo'li bilan dastlab ularning  $E_1'', F_1''$ , so'ngra  $E', F'$  va  $E'', F''$  proyeksiyalari aniqlanadi. Bu nuqtalarni tegishli  $A$  va  $B$  nuqtalar bilan tutashtirish natijasida izlangan  $P(AB, E)$ ,  $Q(AB, F)$  urinma tekisliklarning  $(A'B', E')$ ,  $(A''B'', E'')$  va  $(A'B', F')$ ,  $(A''B'', F'')$  proyeksiyalari hosil bo'ladi.
  - Agar  $AB$  to'g'ri chiziq shar sirti bilan kesishsa, u holda masala yechimga ega bo'lmaydi.

### 14.3. Sirt proyeksiyalarining ocherklarini yasash

**Ta'rif.** Kuzatuvchiga nisbatan sirtning aniq shaklini belgilovchi tashqi konturiga sirtning ocherki deyiladi.

O'qi frontal vaziyatda bo'lgan  $S(S', S'')$  uchli og'ma doiraviy konusning, frontal proyeksiyasiga asosan uning gorizont va profil ocherklarini yasash talab qilinadi (14.12-rasm). Doiraviy konusning  $S$  uchi orqali o'tuvchi uning o'qi  $SO(S'O', S''O'')$  frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgani uchun konusning frontal tekislikdagi ocherki teng yonli uchburchak bo'ladi.

Qolgan ocherk proyeksiyalarini yasash quyidagicha bajariladi: Konusning o'qida ixtiyoriy  $O'$  ( $O', O'', O'''$ ) nuqtani markaz qilib olib, konus sirtiga urinma yordamchi  $\Phi(\Phi', \Phi'')$  sfera chiziladi. Ushbu sferaning  $h(h', h'')$  ekvatori, va  $f(f', f'')$  bosh meridini va  $k(k', k'', k''')$  profil meridiani bo'lgan aylanalar chiziladi.  $\Phi$  sfera frontal proyeksiyasida konus sirtiga  $1''2''$  aylana bo'yicha urinadi. Bu  $1''2''$  aylana sferaning  $h(h', h'')$  ekvatori bilan kesishib -  $A(A', A'')$ ,  $K''$  profil meridiani bilan kesishib  $B''$  nuqtalarni hosil qiladi.  $A$  nuqtaning gorizont  $A'$  proyeksiyasi  $h'$  ekvatorida yotadi.  $B$  nuqtaning  $B'''$  profil proyeksiyasi  $K'''$  da aniqlanadi. Natijada, gorizont proyeksiyada  $A'$  nuqta orqali o'tuvchi  $S'g'$  va profil proyeksiyada  $B'''$  nuqta orqali o'tuvchi  $S'''n'''$  chiziqlar konusning chetki yasovchilari proyeksiyalari bo'lib, uning ocherklarini hosil qiladi.



14.12-rasm.

### Nazorat savollari

1. Urinma tekislik deb nimaga aytiladi?
2. Qanday chiziq sirtning normaliy deyiladi?
3. Berilgan sirtga urinma tekislik qanday shartlar asosida o'tkaziladi?
4. Qanday nuqtalar sirtning elliptik, parabolik va giperbolik nuqtalari deyiladi?
5. Sirt tashqarisidagi nuqtadan unga qanday qilib urinma tekislik o'tkazish mumkin?
6. Sirt tashqarisidagi to'g'ri chiziq orqali unga nechta va qanday qilib urinma tekislik o'tkazish mumkin?
7. Berilgan tekislikka parallel qilib nechta urinma tekislik o'tkazish mumkin?
8. Sirtning ocherki deb nimaga aytiladi?
9. Berilgan to'g'ri chiziqqa parallel qilib hamma vaqt konus sirtiga urinuvchi tekislik o'tkazsa bo'ladimi?

## VII-BOB. SIRTDLARNING O‘ZARO KESISHISHI.

### 15-ma’ruza. Sirtlarning tekislik bilan kesishuv chizig‘ini va kesim yuzalarining haqiqiy kattaligini yasash. (2-soat)

#### REJA

1 Sirtlarning tekislik bilan kesishuv chizig‘ini va kesim yuzalarining haqiqiy kattaligini yasash.

#### 15.1. Sirtlarning tekislik bilan kesishuv chizig‘ini va kesim yuzalarining haqiqiy kattaligini yasash.

Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishish chiziqlari quyidagi algoritm asosida bajariladi:

- berilgan  $\Phi$  sirt va  $Q$  tekislik yordamchi kesuvchi  $P_1$  tekislik bilan kesiladi (15.1-rasm).  $P_1$  yordamchi tekislikni shunday o‘tkazish kerakki, uning  $\Phi$  sirt bilan kesishi chizig‘i to‘g‘ri chiziq yoki aylana singari sodda chiziq bo‘lsin.
- yordamchi  $P_1$  tekislik bilan  $\Phi$  sirtning kesishish chizig‘i  $m_1$  yasiladi:  $\Phi \cap P_1 = m_1$
- berilgan  $Q$  va  $P_1$  tekisliklarning o‘zaro kesishish to‘g‘ri chizig‘i yasiladi:  $Q \cap P_1 = a_1$ ;
- $a_1$  va  $m_1$  chiziqlarning kesishish nuqtasi  $A_1$  ni belgilab,  $(A_1 = a_1 \cap m_1)$  olinadi.  $a_1$  va  $m_1$  chiziqlarining kesishish nuqtalari bitta yoki ko‘p bo‘lishi mumkin.

Yuqorida bayon qilingan yasashlarga asosan  $P_2, P_3, \dots$  tekisliklar o‘tkazilib  $A_2, A_3, \dots$  nuqtalar xolati aniqlanadi.

Bu nuqtalar o‘zaro tutashtirilib,  $\Phi$  sirt bilan  $Q$  tekislikning kesishishidan hosil bo‘lgan tekis egri chizig‘i  $\ell$  hosil qilinadi.

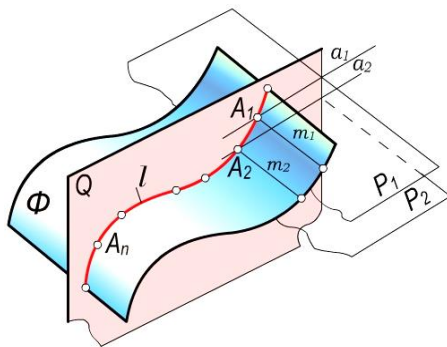
$\Phi$  sirtning  $Q$  tekislik bilan kesishish chizig‘ini shu sirt yasovchilarning tekislik bilan kesishish nuqtalarini topish orqali ham yasash mumkin.

**1-masala.** To‘g‘ri doiraviy silindrning  $Q(Q', Q'')$  tekislik bilan kesishish chizig‘ini proyeksiyalari yasalsin. (15.2-rasm).

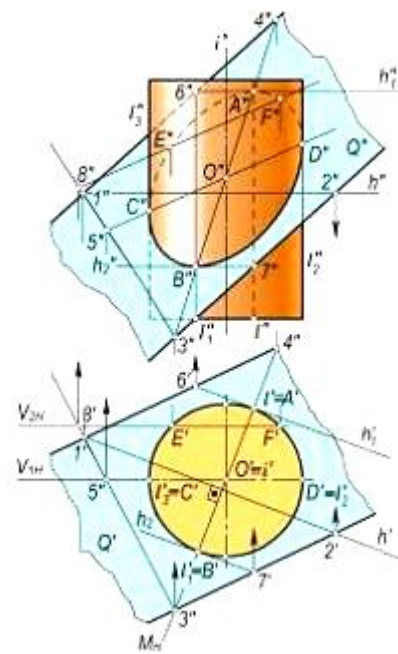
**Yechish.** Bunda  $A(A', A'')$  yuqori va  $B(B', B'')$  quyi nuqtalarni topish ikki xil usulda ko‘rsatilgan. Bu usullardan biri-urinma gorizontallar o‘tkazishdir. Yuqori va quyi nuqtalar kesuvchi tekislikning silindrga urinma vaziyatda o‘tkazilgan  $h_1$  va  $h_2$  gorizontallarga tegishli bo‘ladi.

Ikkinchisi  $A$  va  $B$  nuqtalarni silindrning  $i(i', i'')$  o‘qi orqali o‘tuvchi va  $Q$  tekislikka perpendikulyar bo‘lgan  $M(M_H)$  tekislik yordamida ham topish mumkin. Buning uchun  $Q$  tekislikning ixtiyoriy  $h$  gorizontali o‘tkaziladi. Uning  $h'$  gorizontali proyeksiyasiga perpendikulyar ravishda silindrning  $i$  o‘qi orqali  $M$  tekislikning gorizontali  $Mn$  izi o‘tkaziladi. Bu tekislik silindrni  $\ell$  va  $\ell_1$  yasovchilari bo‘yicha, berilgan  $Q$  tekislikni esa 3,4 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. 3,4 kesishish chizig‘i va  $l, l_1$  yasovchilarning frontal proyeksiyalari 3"4" hamda  $l', l''$  larning o‘zaro kesishuvidan  $A''$  va  $B''$  nuqtalar hosil bo‘ladi. Yuqori va quyi nuqtalarning  $A'$  va  $B'$  proyeksiyalari silindr asosining proyeksiyasiga tegishli bo‘ladi.

Silindr ocherkiga tegishli  $C$  va  $D$  nuqtalar shu ocherkni ifodalovchi  $l_2$  va  $l_3$  yasovchilarning  $Q$  tekislik bilan kesishuvida hosil bo‘lgan, oraliqdagi  $E$  va  $F$  nuqtalar esa  $C$  hamda  $D$  nuqtalar singari topiladi.



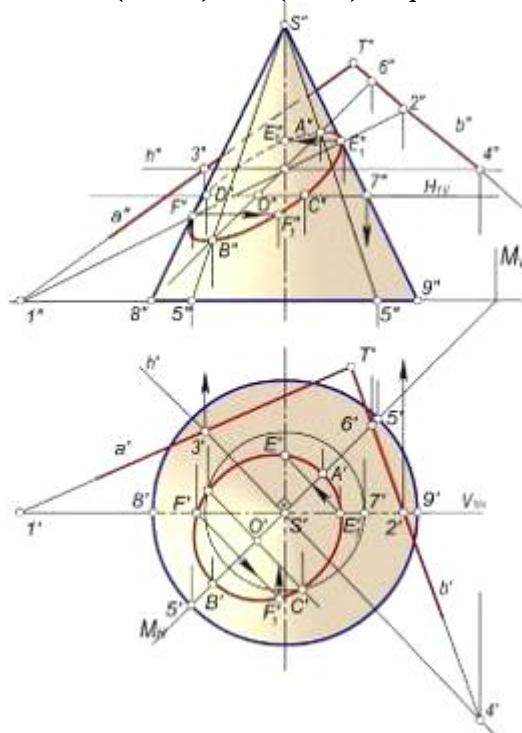
15.1-rasm.



15.2-rasm.

**2-masala.** To'g'ri doiraviy konusning berilgan tekislik bilan kesishuvidagi kesim yuza proyeksiyalari yasalsin (15.3-rasm).

**Yechish.** Kesuvchi tekislik o'zaro kesishuvchi  $a(a', a'')$  va  $b(b', b'')$  to'g'ri chiziqlar bilan berilgan. Dastlab tayanch nuqtalarning topilishini ko'rib chiqamiz. Kesishish chizig'ini konus ocherkiga tegishli, ya'ni konus chetki yasovchilari  $S_9$  va  $S_8$  larning berilgan tekislik bilan kesishish nuqtalari  $E, F$  lar quyidagicha topiladi:  $S_9$  va  $S_8$  yasovchilar orqali yordamchi  $V_{H1}$  frontal tekislik o'tkaziladi. U berilgan  $(a \cap b)$  tekislikni 12 ( $1'2', 1''2''$ ) to'g'ri chiziq, konusni esa  $S_8(S'8', S''8'')$  va  $S_9(S'9', S''9'')$  yasovchilar bo'yicha kesadi. 12 to'g'ri chiziq bilan  $S_8$  va  $S_9$  yasovchilarning kesishuvidan  $E(E', E'')$  va  $F(F', F'')$  nuqtalar hosil bo'ladi.



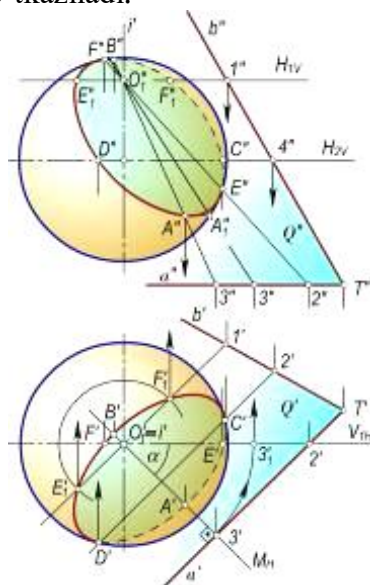
15.3-rasm.

Kesimning yuqori va quyi nuqtalar esa konusning i o'qi orqali o'tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan yordamchi  $M(M_H)$  tekislikdan foydalanib topiladi. Buning uchun berilgan tekislikning ixtiyoriy  $h(h', h'')$  gorizontali o'tkaziladi. Bu gorizontalin  $h_1'$

proyeksiyasiga perpendikulyar qilib,  $S'$  nuqta orqali yordamchi  $M$  tekislikning  $M_H$  izini o'tkazamiz.  $M$  tekislikning konus bilan kesishishi chiziqlari  $S_5$  va  $S_{51}$  yasovchilar hamda berilgan tekislik bilan kesishish chizig'i  $S_{16}(S_1'6', S_1''6'')$  larning frontal proyeksiyalari o'tkaziladi. Ular o'zaro kesishib, mos ravishda quyi  $B$  va yuqori  $A$  nuqtalarning frontal proyeksiyalari  $B''$  va  $A''$  nuqtalarni hosil qiladi.  $A$  va  $B$  nuqtalar orasidagi masofa kesim yuza – ellipsning katta o'qi bo'ladi. Uning kichik o'qi  $CD$  ni topish uchun  $AB$  kesmani teng ikkiga bo'luvchi  $O_1$  nuqta orqali  $AB$  ga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu holda  $CD$  kichik o'q gorizontal vaziyatdagi to'g'ri chiziq bo'lib uning proyeksiyasini yordamchi  $H_1(H_{1V})$  tekislikdan foydalanib topamiz. Gorizontal proyeksiyada kesuvchi tekislikning  $M_H$  izi kesishish chizig'ining simmetriya o'qi bo'ladi. Oraliqdagi  $E_1$  va  $F_1$  nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari  $E_1'$  va  $F_1'$  nuqtalar shu simmetriya o'qiga asoslanib yasalgan. So'ngra ular orqali  $E_1''$  va  $F_1''$  nuqtalar topilgan. Hosil bo'lgan nuqtalarning ko'rinishligi  $V_{1H}$  simmetriya tekisligi frontal bo'yicha aniqlanib, tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi.

**3-masala.** Shar sirtining  $Q(a \cap b)$  tekislik bilan kesishishidagi kesim yuzaning proyeksiyalari yasalsin (15.4-rasm).

**Yechish.** Kesishish chizig'ining quyi va yuqori nuqtalarini aylantirish usuli bilan topish qulay. Dastavval sferaning markazidan o'tuvchi yordamchi  $M(M_H)$  tekislik berilgan  $Q(Q', Q'')$  tekislikka perpendikulyar qilib o'tkaziladi.

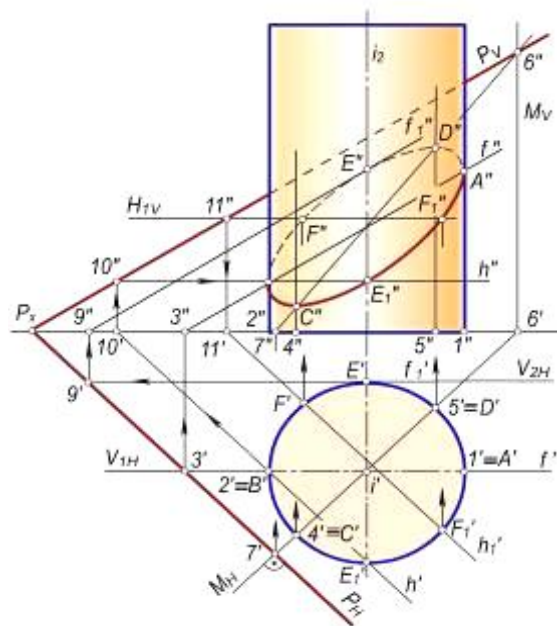


15.4-rasm.

So'ngra  $M(M_H)$  yordamchi tekislikning sfera va berilgan  $Q(Q', Q'')$  tekislik bilan kesishish chiziqlari sferaning  $i(i', i'')$  o'qi atrofida frontal vaziyatga keltuncha aylantiriladi. Bu holda  $M(M_H)$  tekislikning sfera bilan kesishish chizig'i (aylana) ning frontal proyeksiyasi sferaning ocherki bilan ustma-ust tushadi.  $M$  va berilgan tekislikning kesishish chizig'i  $O_13$  ning frontal proyeksiyasi  $O_1''3''$  esa  $O_1''3_1''$  vaziyatni egallaydi. Demak, sferaning frontal proyeksiyadagi ocherki bilan  $O_1''3_1''$  to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalarini belgilab (rasmda faqat  $A_1''$  nuqta belgilangan), ularni teskari yo'nalishda  $\alpha$  burchakka burish kerak bo'ladi. Buning uchun  $A_1''$  nuqtadan gorizontal vaziyatda to'g'ri chiziq o'tkazib, uning  $O_1''3''$  to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi  $A''$  ni belgilash yetarli bo'ladi.  $B''$  nuqta ham xuddi shunday topiladi. Ocherklarning berilgan tekisliklar bilan kesishish nuqtalari  $C, D, E$  va  $F$  lar  $H_2$  hamda  $V_1$  tekisliklar yordamida topilgan. Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalardan  $E_1$  va  $E_2$  lar esa yordamchi  $H_1$  tekislikdan foydalanib topilgan.

**4-masala.**  $H$  tekislikda joylashgan to'g'ri doiraviy silindrning ixtiyoriy vaziyatdagi  $P(P_H, P_V)$  tekislik bilan kesishishidagi kesim yuza proyeksiyalari yasalsin (15.5-rasm).

**Yechish.** Kesim yuzasining gorizontal proyeksiyasi silindrning gorizontal proyeksiyasi (asosi) bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun kesimning faqat frontal proyeksiyasi topiladi.



15.5-rasm.

Dastlab silindrning chetki 1, 2 yasovchilari bilan  $P$  tekislikning kesishish nuqtalari  $A$  va  $B$  ning frontal proyeksiyalari  $A''$  va  $B''$  nuqtalari topiladi. Buning uchun chetki yasovchilar orqali  $V_1(V_{1H})$  frontal tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik berilgan  $P$  tekislikni frontal chiziq bo'yicha kesadi. Kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi  $f''$  silindr chetki yasovchilarining frontal proyeksiyalari bilan kesishib,  $A''$  va  $B''$  nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning eng yuqori va eng quyi nuqtalarning frontal proyeksiyalari  $D''$  va  $C''$  nuqtalarni topish uchun silindrning o'qidan o'tuvchi va  $P$  tekislikka perpendikulyar bo'lgan  $M(M_H, M_V)$  gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi:  $i \subset M_H \perp H$ . Bu tekislik silindrni  $4(4', 4'')$  va  $5(5', 5'')$  yasovchilari,  $P$  tekislikni esa  $6(6', 6'')$  to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi. Yasovchilarning frontal proyeksiyalari  $6''$  to'g'ri chiziq bilan kesishib,  $D''$  va  $C''$  nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning boshqa nuqtalarini kesuvchi tekislikning gorizontaal yoki frontal chiziqlaridan foydalanib topish mumkin. Masalan,  $E$  nuqtaning frontal proyeksiyasi  $E''$  ni topish uchun  $E$  nuqtadan o'tkazilgan  $V_2(V_{2H})$  tekislik silindrni yasovchisi bo'yicha,  $P$  tekislikni  $f_1(f_1', f_1'')$  frontal chiziq bo'yicha kesadi. Frontalning frontal proyeksiyasi  $f_1''$  va  $E'$  nuqtadan o'tuvchi yasovchi o'zaro kesishib,  $E''$  nuqtani hosil qiladi.  $F'$  va  $F_1''$  nuqtalar ixtiyoriy  $H_1(H_{1V})$  gorizontaal yordamchi tekislik o'tkazish yo'li bilan topiladi. Yordamchi tekislikning  $H_{1V}$  izi  $C''$  va  $D''$  nuqtalar oralig'ida o'tkaziladi. Bu tekislik silindrni aylana bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontaal proyeksiyasi silindrning asosi bilan ustma-ust tushadi. Berilgan  $P(P_H, P_V)$  tekislik  $H_1(H_{1V})$  tekislik bilan  $1_1(1_1', 1_1'')$  nuqtadan o'tuvchi  $h(h_1', h_1'')$  gorizontaal bo'ylab kesishadi.

$h_1$  gorizontaalning gorizontaal proyeksiyasi  $h_1'$  va silindrning asosi o'zaro kesishib,  $F'$  va  $F_1'$  nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib,  $H_{1V}$  izda  $F''$  va  $F_1''$  nuqtalar belgilab olinadi.

Silindrning kuzatuvchiga karatilgan oldingi yarim qismi ko'rinadi, orqa tomondagi qismi esa ko'rinmaydi. Shunga asosan, kesimning frontal proyeksiyasidagi  $A''F_1''E_1''C''B''$  qismi ko'rinadi,  $B''F''E''D''A''$  qismi esa ko'rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq - ellips hosil qilinadi.

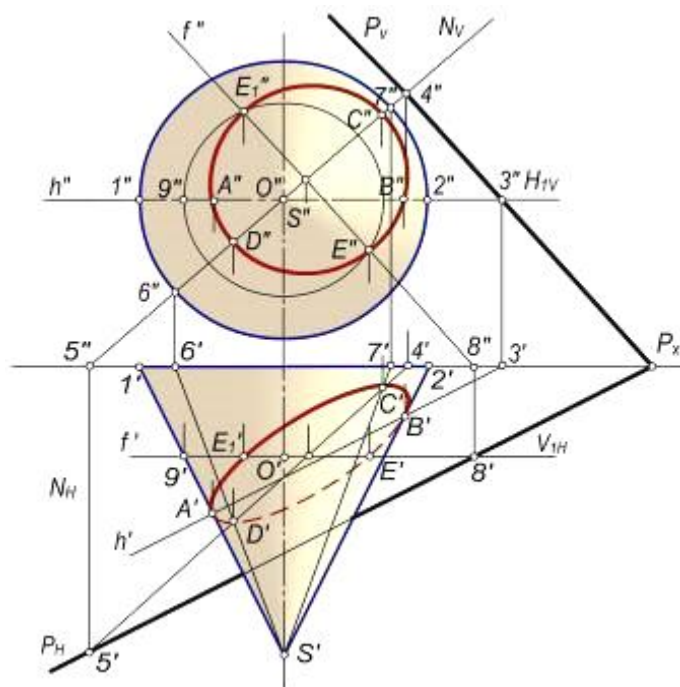
**5-masala.** Asosi  $V$  tekislikda joylashgan to'g'ri doiraviy konusning  $P(P_H, P_V)$  tekislik bilan kesishishidagi kesim yuza proyeksiyalari yasalsin (15.6-rasm).

**Yechish.** Kesim yuza – ellipsning proyeksiyalarini yasash konusning  $S1(S_1', S_1'')$  va  $S2(S_2', S_2'')$  yasovchilari bilan  $P(P_H, P_V)$  tekislikning kesishish nuqtalari  $A(A', A'')$  va  $B(B', B'')$  larni topishdan boshlanadi.  $S1$  va  $S2$  yasovchilarning frontal proyeksiyalari  $S_1''$  va  $S_2''$

lar orqali  $H_1(H_{1V})$  gorizontal tekislik izi o'tkaziladi. Bu tekislik berilgan  $P$  tekislikni  $3(3', 3'')$  nuqtadan o'tgan  $h(h', h'')$  gorizontal chiziq bo'yicha kesadi. Bu gorizontalning  $h'$  gorizontal proyeksiyasi konusning  $S'1'$  va  $S'2'$  chetki yasovchilari bilan kesishib,  $A'$  va  $B'$  nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chizig'ini o'tkazib,  $S''1''$  va  $S''2''$  yasovchilarda  $A''$  va  $B''$  nuqtalar belgilab olinadi.

$V$  tekislikka eng yaqin  $C(C', C'')$  va eng uzoq  $D(D', D'')$  nuqtalarning proyeksiyalari quyidagicha topiladi. Konusning o'qi orqali o'tuvchi va berilgan  $P(P_H, P_V)$  tekislikka perpendikulyar bo'lgan  $N(N_H, N_V)$  frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik konusni  $S6(S'6', S''6'')$  va  $S7(S'7', S''7'')$  yasovchilari bo'yicha kesadi.  $P(P_H, P_V)$  va  $N(N_H, N_V)$  tekisliklar esa  $45(4'5', 4''5'')$  to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, ya'ni  $P \cap N = 45$ .

Bu to'g'ri chiziqning  $4'5'$  gorizontal proyeksiyasi  $S6$  va  $S7$  yasovchilarning gorizontal proyeksiyalari  $S'6'$  va  $S'7'$  lar bilan kesishib,  $D'$  va  $C'$  nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib,  $S''6''$  va  $S''7''$  yasovchilarda  $D''$  va  $C''$  nuqtalar belgilab olinadi.



15.6-rasm.

Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalar esa konusning o'qiga perpendikulyar yordamchi frontal tekisliklar o'tkazish bilan topiladi. Masalan,  $C'$  va  $D'$  nuqtalar oraligida  $V_1$  frontal tekislikning  $V_{1H}$  gorizontal izi o'tkaziladi. Bu tekislik konusni radiusi  $0'9'$  ga teng aylana bo'yicha,  $P$  tekislikni esa  $8(8', 8'')$  nuqtadan o'tuvchi  $f(f', f'')$  frontal bo'yicha kesadi. Frontal proyeksiyada chizilgan  $0'9'=0''9''$  radiusli aylana va  $f''$  to'g'ri chiziq o'zaro kesishib,  $E''$  va  $E_1''$  nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkazilib,  $f'$  to'g'ri chiziqda  $E'$  va  $E_1'$  nuqtalar belgilab olinadi. Hosil bo'lgan nuqtalar silliq tutashtirilib kesim yuza – ellips chiziladi. Frontal proyeksiyada kesimga tegishli bo'lgan hamma nuqtalar ko'rinadi. Gorizontal proyeksiyada esa konusning yuqori yarimda joylashgan kesimning  $A'E_1'C'B'$  qismi ko'rinadi,  $B'E'D'A'$  qismi esa ko'rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq ellipsni hosil qilamiz.

### **Nazorat savollari**

1. Sirtlarni tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi nimalardan iborat?
2. Sferani tekislik bilan kesganda qanday shakl hosil bo'ladi va uning proyeksiyalari qanday yasaladi?
3. Silindrni tekislik bilan kesishuvidan qanday shakllar hosil bo'lishi mumkin?
4. Konus kesimlari nimalardan iborat?
5. Sirtning tekislik bilan kesishish chizig'idagi maxsus nuqtalar nimalardan iborat?
6. Sirtlarni qanday tekisliklar bilan kesilsa, kesimning bitta proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi bo'ladi?
7. Qanday tekisliklar tor sirtini aylanalar bo'yicha kesadi?

## REJA

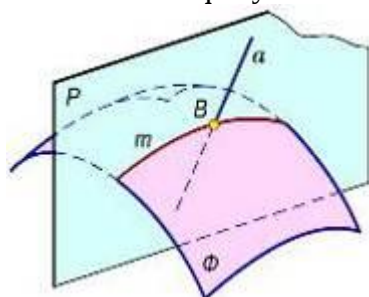
### 1 To'g'ri chiziq bilan sirtning kesishuv nuqtasini yasash.

#### 16.1.Sirtlarni to'g'ri chiziq bilan kesishishi

To'g'ri chiziq bilan sirtlarning kesishish nuqtalari sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashga asoslanib topiladi. Umuman, biror to'g'ri chiziq bilan sirtning kesishish nuqtasi aniqlanadi (16.1-rasm):

- Berilgan  $a$  to'g'ri chiziq orqali ixtiyoriy yordamchi  $P$  tekislik o'tkaziladi.  $P \supset a$ .
- $\Phi$  sirt bilan  $P$  tekislikning kesishish chizig'i  $m$  yasaladi.  $\Phi \cap P = m$ .
- $m$  chiziq bilan berilgan  $a$  to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi  $B$  belgilab olinadi:  $a \cap m = B$ .

Ma'lumki, berilgan to'g'ri chiziq orqali istalgancha tekislik o'tkazish mumkin. Masalalarni osonroq yechish uchun to'g'ri chiziq orqali yordamchi tekislik proyeksiyalovchi vaziyatda o'tkaziladi. Bu holda masalaning yechilishi soddalashadi. Berilgan sirt silindrik yoki konus sirt bo'lganda, to'g'ri chiziq orqali silindr yasovchilariga parallel yoki konus uchidan umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish qulay.



16.1-rasm

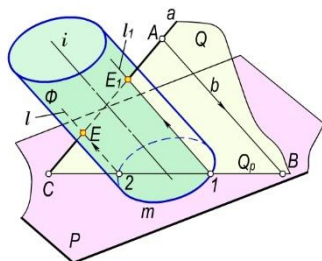
**1-masala.** Berilgan  $a$  to'g'ri chiziq bilan  $\Phi$  og'ma elliptik silindrning kesishish nuqtalari yasalsin (16.2- 16.3-rasmlar).

**Yechish.** Kesishish nuqtalari  $E$  va  $E_1$  larni yasash quyidagicha bajariladi:

- berilgan  $a$  to'g'ri chiziq orqali silindrning yasovchilariga parallel qilib ixtiyoriy  $Q$  tekislik o'tkaziladi. Buning uchun  $a$  to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy  $A$  nuqtani belgilab olib, u orqali  $b$  to'g'ri chiziqni silindrning yasovchilariga parallel qilib o'tkaziladi. Kesishuvchi  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlar yordamchi  $Q$  tekislikni ifodalaydi;
- $Q$  tekislik bilan  $\Phi$  silindrning kesishish chiziqlari  $\ell$  va  $\ell_1$  yasovchilar yasaladi. Buning uchun  $Q$  tekislik va silindrning asos tekisligi  $P$  ning o'zaro kesishish chizig'i  $BC$  yasaladi.  $BC$  to'g'ri chiziqning silindr asosi  $m$  bilan kesishish nuqtalari 1 va 2 orqali  $\ell$  va  $\ell_1$  yasovchilar (kesishish chiziqlari) o'tkaziladi;
- berilgan  $a$  to'g'ri chiziq bilan  $\ell$  va  $\ell_1$  yasovchilarning kesishish nuqtalari  $E$  va  $E_1$  belgilab olinadi.

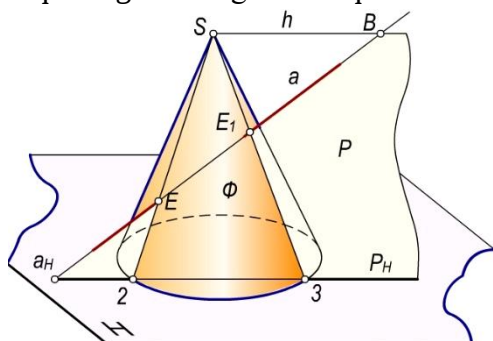
**2-masala.** Asosi  $H$  tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri doiraviy konus sirti bilan  $a$  to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari aniqlansin (16.4 - 16.5-rasmlar).

**Yechish.** Bu holda  $a$  to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi yordamchi tekislik konusning uchidan o'tkaziladi.

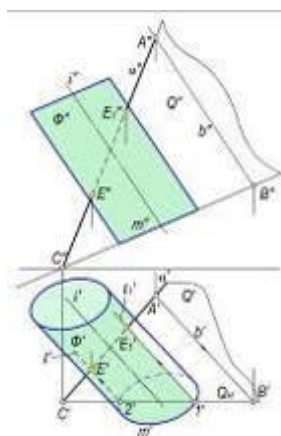


16.2-rasm

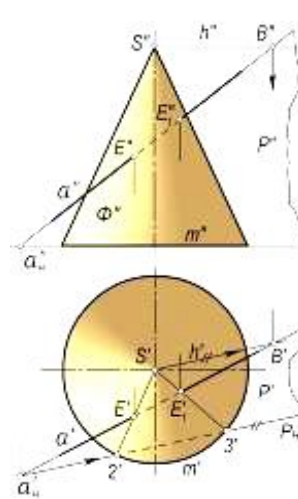
Rasmlarda bunday  $P$  tekislik o'zaro kesishuvchi  $a$  va  $h$  to'g'ri chiziqlar orqali berilgan. Bunda  $h$  gorizontal to'g'ri chiziq konusning  $S$  uchidan o'tkazilgan:  $h \ni S$ . Ushbu  $h$  gorizontal to'g'ri chiziq berilgan  $a$  to'g'ri chiziq bilan  $B$  nuqtada kesishadi.



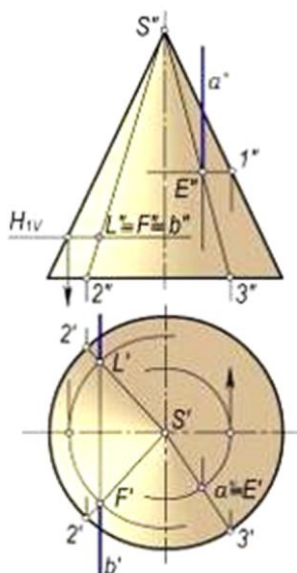
16.4-rasm



16.3-rasm



16.5-rasm



16.6-rasm

$P$  tekislikning  $P_H$  gorizontal izini yasab olamiz.

Buning uchun  $a$  to'g'ri chiziqning  $a_H$  ( $a_H'$ ,  $a_H''$ ) gorizontal izini topib, u orqali gorizontalning gorizontal proyeksiyasi  $h$  ga parallel qilib  $P_H$  iz o'tkaziladi. Konusning  $m'$  asosi tekislikning  $P_H$  izi bilan  $2'$  va  $3'$  nuqtalarda kesishadi.  $2'$  va  $3'$  nuqtalarni  $S'$  bilan tutashtirib,  $S'2'$  va  $S'3'$  yasovchilar hosil qilinadi. Bu yasovchilar  $a'$  to'g'ri chiziq bilan kesishib,  $E'$  va  $E_1'$  nuqtalarni xosil qiladi.  $E'$  va  $E_1'$  nuqtalardan proyeksiyon bog'lanish chiziqlari o'tkazilib,  $a''$  to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari  $E''$  va  $E_1''$  belgilab olinadi.

**3-masala.** Xususiyl holda berilgan  $a(a', a'')$  va  $b(b', b'')$  to'g'ri chiziqlarning to'g'ri doiraviy konus bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (16.6-rasm).

**Yechish.** Berilgan  $a$  to'g'ri chiziq gorizontal proyeksiyalovchi,  $b$  to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli kesishish nuqtalarining bittadan proyeksiyalari  $E'$  va  $F'' \equiv L''$  (mos ravishda gorizontal va frontal proyeksiyalari) ma'lum bo'lib qoladi. Bu nuqtalar orqali o'tuvchi yasovchilarning

avvalo  $S'3'$ ,  $S''2'' \equiv S''2_1''$ , so'ngra  $S''3''$ ,  $S'2'$  va  $S'2_1'$  proyeksiyalari o'tkaziladi.  $a''$  va  $S''3''$

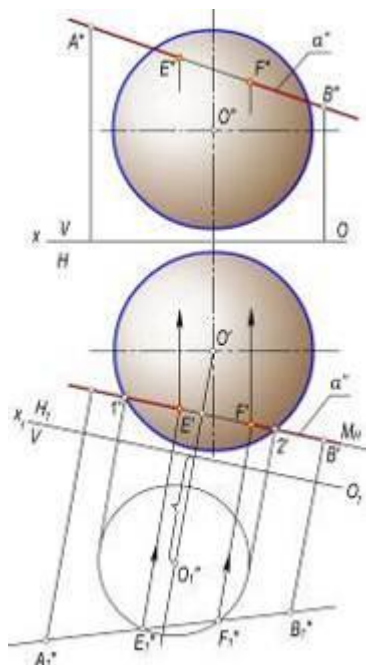
larning o'zaro kesishish nuqtasi  $E''$  hamda  $b'$  bilan  $S'2'$  va  $S'21'$  larning kesishish nuqtalari  $F'$  va  $L'$  belgilab olinadi.

**4-masala.** To'g'ri chiziqlarning sfera bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (16.7-rasm).

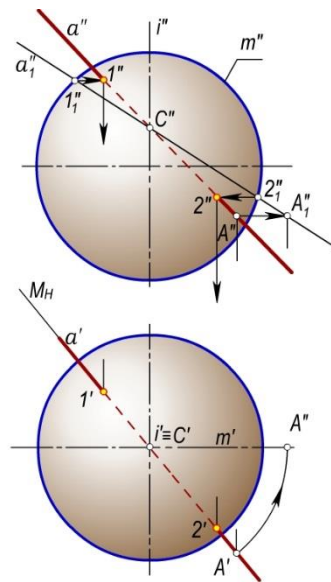
**Yechish.** Berilgan  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziqlarning sfera bilan kesishish nuqtalarini yasash uchun bu to'g'ri chiziqlar orqali  $M(M_H)$  gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik sferani diametri  $1'2'$  kesmaga teng bo'lgan aylana bo'yicha kesadi.  $1'2'$  diametrli aylananing gorizontal proyeksiyasi tekislikning  $M_H$  izi bilan ustma-ust tushadi:  $1'2' \equiv M_H$ .

Berilgan  $a$  to'g'ri chiziqlar bilan 12 diametrli aylananing kesishish nuqtalari  $E$  va  $F$  larning proyeksiyalari quyidagicha yasaladi:  $V$  tekislik  $M$  ga parallel bo'lgan ixtiyoriy  $V_1$  tekislik bilan almashtiriladi. Berilgan  $a$  to'g'ri chiziqlar va 12 diametrli aylanani  $V_1$  tekislikka proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuliga asosan proyeksiyalanadi. Hosil bo'lgan  $O_1''$  markazli aylana va  $a''$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalari  $E''$  va  $F''$  lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan  $O_1X_1$  proyeksiyalar o'qiga perpendikulyarlar o'tkazilib, ularning  $a'$  to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari  $E'$  va  $F'$  lar aniqlanadi. Bu nuqtalardan esa  $OX$  o'qiga perpendikulyarlar chiqarilib, ularning  $a''$  to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari  $E''$  va  $F''$  lar belgilab olinadi.

Agar  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziqlar biror aylanish sirtining aylanish o'qi bilan kesishadigan vaziyatda berilgan bo'lsa (9.17-rasm), u holda to'g'ri chiziqlar bu o'q atrofida aylantirib, uning aylanish sirti bilan kesishish nuqtalarini osongina yasash mumkin. Berilgan  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziqlar orqali o'tgan gorizontal proyeksiyalovchi  $M(M_H)$  tekislik sferani  $m(m', m'')$  meridiani (aylana) bo'yicha kesadi (chizmada  $m''$  ko'rsatilmagan). Bu meridian frontal tekislikka ellips bo'lib proyeksiyalanadi. Bu ellipsni chizmaslik maqsadida  $m(m', m'')$  meridian va  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziqlar sirtning  $i(i', i'')$  o'qi atrofida frontal vaziyatga kelguncha aylantiriladi. U holda  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziqlar  $a_1(a_1', a_1'')$  vaziyatga,  $m(m', m'')$  meridian esa  $m_1(m_1', m_1'')$  vaziyatga keladi.  $a_1''$  to'g'ri chiziqlar bilan  $m_1''$  bosh meridianning kesishish nuqtalari  $1_1''$ ,  $2_1''$  lar yordamida  $1''$ ,  $2''$  hamda  $1'$ ,  $2'$  nuqtalar belgilab olinadi.



16.7-rasm.



16.8-rasm.

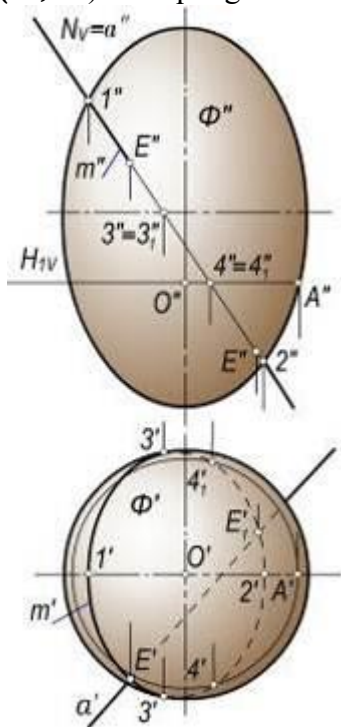
**5-masala.** Umumiy vaziyatdagi  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziqlarning  $\Phi(\Phi', \Phi'')$  aylanma ellipsoid bilan kesishish nuqtalari  $E(E', E'')$ ,  $E_1(E_1', E_1'')$  aniqlansin (16.9-rasm).

**Yechish.** Bunda  $a$  to'g'ri chiziqlarning ellipsoid aylanish o'qi bilan kesishmaydigan vaziyati berilgan. Agar berilgan  $a$  to'g'ri chiziqlar ellipsoidning aylanish o'qi bilan kesishadigan bo'lsa, u holda bunday masalani 16.8-rasmga ko'rsatilgandek yechishimiz mumkin. Berilgan  $a$

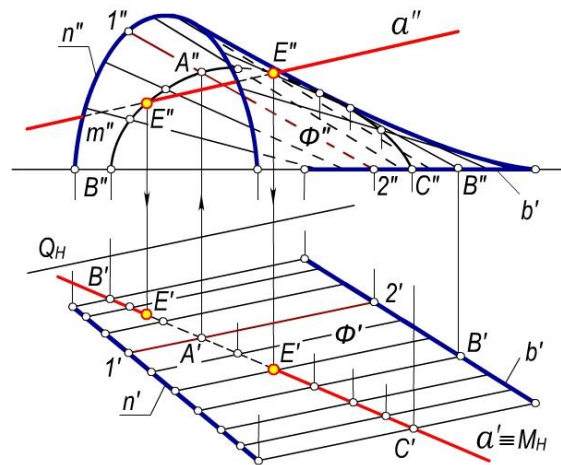
to'g'ri chiziqlarning ellipsoid bilan kesishish nuqtalari  $E$  va  $E_1$  larni yasash uchun to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi  $N(N_V)$  tekislik o'tkaziladi.  $N(N_V)$  tekislikning ellipsoid bilan kesishish chizig'i  $m(m', m'')$  yasaladi. Bu chiziqlarning berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishuvda izlanayotgan nuqtalar hosil bo'ladi. Tekislikning  $N_V$  frontal izi, to'g'ri chiziqlarning  $a''$  frontal proyeksiyasi va kesishish chizig'ining frontal proyeksiyasi  $m''$  lar ustma-ust tushadi. Kesishish chizig'ining  $m'$  gorizontal proyeksiyasini yasash uchun  $m''$  ga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni belgilab, ularning gorizontal proyeksiyasini topish va ularni tekis egri chiziq bilan tutashtirish kerak. Ellipsoidning frontal konturiga tegishli  $1(1', 1'')$  va  $2(2', 2'')$  nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari  $1'$  va  $2'$  nuqtalar bevosita belgilab olinadi. Ixtiyoriy olingan  $4(4', 4'')$  va  $4_1(4_1', 4_1'')$  nuqtalarning  $4'$  va  $4_1'$  gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun  $4'' = 4_1''$  nuqta orqali gorizontal tekislikning frontal izi  $H_{1V}$  o'tkaziladi. So'ngra gorizontal proyeksiyada radiusi  $0'A' = 0''A''$  bo'lgan aylana chizamiz.  $4 = 4_1''$  nuqtadan proyeksion bog'lanish chizig'ini tushirib,  $0'A'$  radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari  $4'$  va  $4_1'$  lar belgilab olinadi. Qolgan nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ham xuddi shunday yasaladi.  $a$  to'g'ri chiziq va  $m$  kesishish chizig'ining gorizontal proyeksiyalari  $a'$ ,  $m'$  o'zaro kesishib  $E'$  va  $E_1'$  nuqtalarni hosil qiladi.  $E'$  va  $E_1'$  nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlarini chiqarib, ularning  $a''$  frontal proyeksiya bilan kesishuvda  $E''$  va  $E_1''$  nuqtalar hosil qilinadi.

**6-masala.**  $n(n', n'')$  va  $b(b', b'')$  yo'naltiruvchilari va  $Q(Q_n)$  parallellizm tekisligi bilan berilgan konoidning  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini proyeksiyalari yasalsin (16.10-rasm).

**Yechish.** Bunda berilgan to'g'ri chiziq orqali gorizontal proyeksiyalovchi  $M(M_n)$  tekislik o'tkaziladi. Uning konoid bilan kesishish chizig'i  $m(m', m'')$  yasaladi.  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziq va  $m(m', m'')$  chiziqlarning o'zaro kesishish nuqtalari  $E(E', E'')$  va  $E_1(E_1', E_1'')$  lar belgilab olinadi.



16.9-rasm.



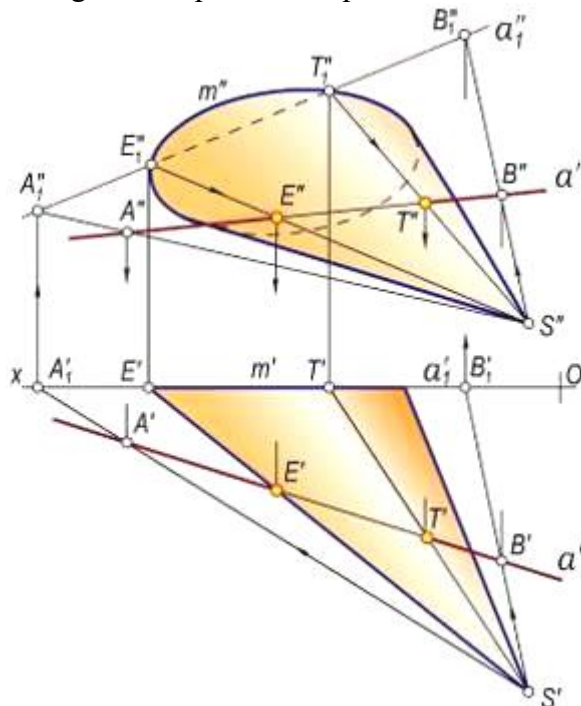
16.10-rasm.

Piramida yoki konus sirtlar qatnashgan pozision masalalarni yechishda markaziy proyeksiyalashdan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

**1-masala.** Konus sirt bilan ixtiyoriy  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini yasash kerak bo'lsin (16.11-rasm).

**Yechish.** Konusning  $V$  asos tekisligini proyeksiyalar tekisligi, konusning uchi  $S$  nuqtani esa proyeksiyalash markazi deb qabul qilamiz. U holda konus sirtning  $V$  dagi markaziy proyeksiyasi uning  $m(m', m'')$  asosi bilan ustma-ust tushadi.  $a(a', a'')$  to'g'ri chiziqlarning  $V$

tekislikdagi markaziy proyeksiyasi  $a_1(a_1', a_1'')$  esa  $A(A', A'')$  va  $B(B', B'')$  nuqtalar orqali aniqlanadi. Konusning  $m''$  asosi va  $a_1''$  to'g'ri chiziqning o'zaro kesishish nuqtalari  $E_1''$  va  $T_1''$  lar izlanayotgan kesishish nuqtalarining markaziy proyeksiyalari bo'ladi.  $E_1''$  va  $T_1''$  nuqtalarni  $S$  proyeksiyalash markazining frontal proyeksiyasi  $S''$  bilan tutashtiriladi. Natijada ular  $a''$  bilan kesishib  $E''$  va  $T''$  nuqtalarni hosil qiladi.  $E''$  va  $T''$  nuqtalarning gorizontaal proyeksiyalari  $E'$  va  $T'$ ,  $a'$  to'g'ri chiziq ustida aniqlanadi.



16.11-rasm.

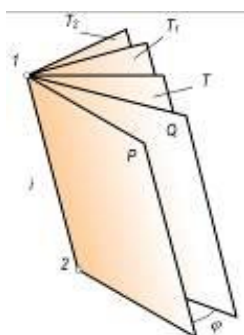
## Nazorat savollari

1. To'g'ri chiziq bilan sirtning kesishish nuqtalarini yasash qanday bajariladi?
2. To'g'ri chiziq bilan konusning kesishish nuqtalarini yasashda, yordamchi kesuvchi tekislikni qanday vaziyatda o'tkazish maqsadga muvofiq bo'ladi?
3. To'g'ri chiziq aylanish sirtlarning aylanish o'qini kesib o'tsa, ularning kesishish nuqtalarini qanday usulda yasash osonroq bo'ladi?

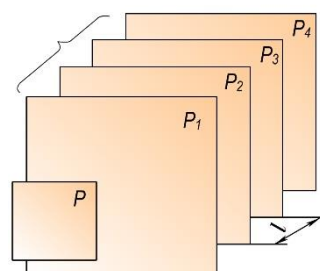
## REJA

1. Sirtlarning o'zaro kesishuv chizig'ini yasash usullari.
2. Kesishuvchi tekisliklar dastasi usuli.

**Tekisliklar dastasi.** Birta to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekisliklarni tekisliklar dastasi deyiladi. To'g'ri chiziq tekisliklar dastasining o'qi deb yuritiladi. Tekisliklar dastasi xos (17.1-rasm) yoki xosmas o'qqa (17.2-rasm) ega bo'ladi. Xos o'qli tekisliklar dastasining chizmadagi bir ismli izlari bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasini tashkil qiladi (17.3-rasm). Shu izlar dastasining 1" va 2" nuqtalari tekisliklar dastasi  $i$  o'qining izlaridan iborat bo'ladi. Dasta tekisliklarining vaziyati esa, bitta parametr, ya'ni aylanish burchagi  $\varphi$  ning kattaligi orqali aniqlanadi.



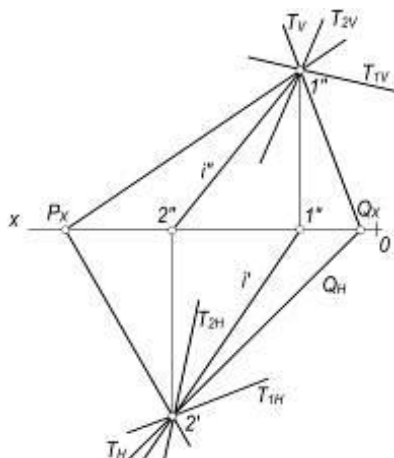
17.1-rasm



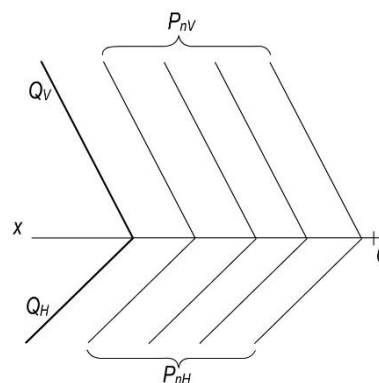
17.2-rasm

Xosmas o'qqa ega bo'lgan tekisliklar dastasining chizmadagi bir ismli izlari o'zaro parallel to'g'ri chiziqlar dastasidan iborat bo'ladi (17.4-rasm). Bu dasta tekisliklarining vaziyati bitta parametr, ya'ni tekisliklar orasidagi  $l$  masofa bilan aniqlanadi. Xosmas o'qqa ega bo'lgan tekisliklar dastasining yo'nalishi esa biror  $Q$  yo'naltiruvchi tekislik orqali beriladi. Bu tekislik parallelizm tekisligi deb ham yuritiladi.

Tekisliklar dastasi, asosan, tekislik bilan sirtning, sirt bilan sirtning va sirt bilan ko'pyoqliklar sirtining o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usuli nomi bilan ishlatiladi.

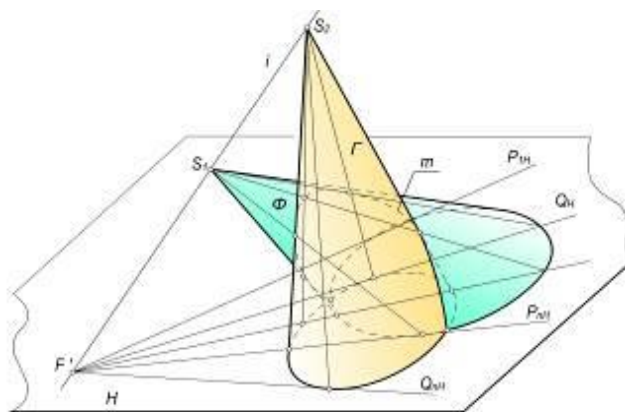


17.3-rasm



17.4-rasm

**Chiziqli sirtlarning o'zaro vaziyatini ularning kesishish chiziqlarini yasamasdan aniqlash.** Har bir chiziqli sirtning yasovchilari orqali o'tgan tekisliklar dastasi sirtning asos tekisligida izlar dastasi to'plamini hosil qiladi. Bu izlar dastasi sirt asosiga urinuvchi izlari orasida bo'ladi.

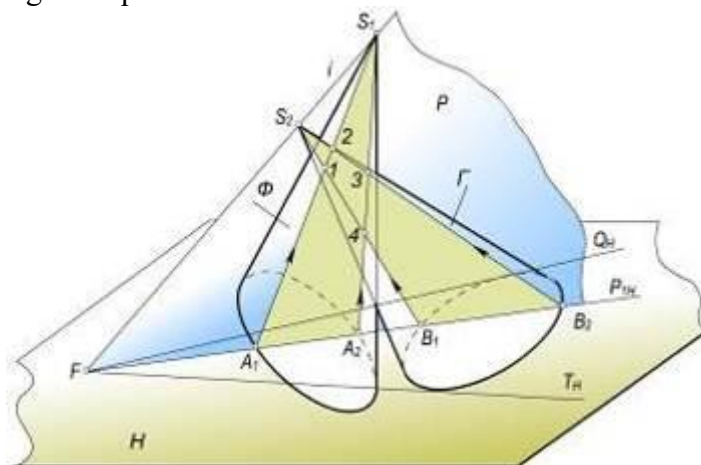


17.5-rasm

Asoslari bir tekislikda yotgan sirtlarning o'zaro vaziyatini shu sirtlarning yasovchilari orqali o'tgan, umumiy o'qli kesuvchi tekisliklar dastasi izlari to'plamining o'zaro vaziyati aniqlaydi. Agar izlar dastasi o'zaro kesishsa, sirtlar ham kesishadi. Ular kesishmasa, sirtlar ham kesishmaydi. 17.5-rasmda asoslari  $H$  tekislikda yotgan ikki konus sirtining o'zaro vaziyati aniqlangan.  $S_1$  va  $S_2$  konus uchlari orqali o'tgan kesuvchi tekisliklar  $P_{1H} \dots P_{nH}$  va  $Q_{1H} \dots Q_{nH}$  izlar to'plamini hosil qilgan. Bu to'plamlar qisman kesishgani uchun konus sirtlari ham qisman kesishib, bitta  $m$  fazoviy egri chiziq hosil qilgan. Izlar to'plamining bu xususiyati, berilgan o'zaro kesishuvchi sirtlarning kesishish chiziqlarini yasamasdan oldin uning xarakterini aniqlash imkonini beradi. Buni asoslari bir tekislikda (masalan,  $H$  da) yotgan kesishuvchi sirtlarning 17.1-jadvalda keltirilgan sxematik chizmalardan kuzatish mumkin.

#### Sirtlarning kesishish chiziqlarini yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usuli bilan yasashning umumiy algoritmi

- Ikki sirtning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatiga qarab kesuvchi tekisliklar dastasining vaziyati tanlanadi. Bunda kesuvchi sirtlarning hosil bo'lish qonuniyatlariga asosan ular berilgan sirtlar bilan kesishganda kesimda to'g'ri chiziqlar yoki aylanalar to'plami hosil bo'ladigan qilib tanlanadi.
- Sirtlarning asoslari yotgan tekislikda kesuvchi tekisliklar izlarining dastasi yasaladi.
- Kesishuvchi sirtlar asoslarining o'zaro vaziyati va kesuvchi tekisliklar izi dastasining vaziyati 12.13-jadvalga asosan aniqlanadi.
- Kesishuvchi sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari belgilanadi.
- Kesishish chizig'ining oraliq nuqtalari yasaladi.
- Hosil bo'lgan nuqtalar ketma-ket ravon tutashtiriladi.

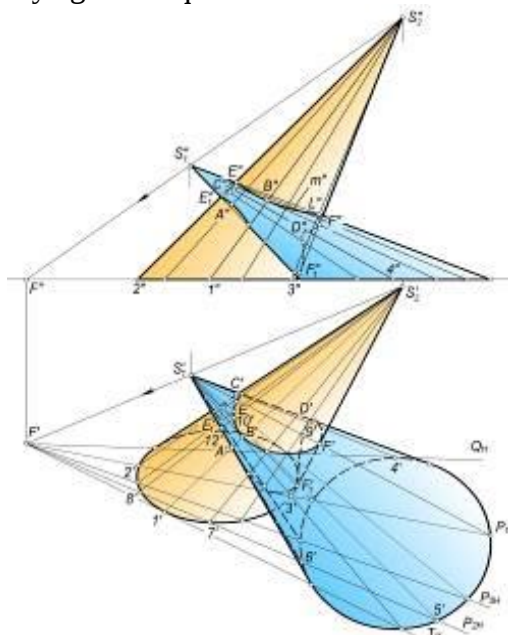


17.6-rasm

**Konus bilan konusning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash.** (17.6-17.7-rasmlar). Konus uchidan o‘tgan har qanday tekislik konusni yasovchilari bo‘yicha kesadi. Berilgan  $\Phi$  va  $\Gamma$  konuslarni kesib o‘tuvchi tekisliklar dastasining  $i$  o‘qi kesishuvchi konuslarning  $S_1$  va  $S_2$  uchlaridan o‘tuvchi  $S_1S_2$  to‘g‘ri chiziq bo‘ladi (17.7-rasm).  $i$  o‘qi orqali o‘tkazilgan  $P$  tekislik yordamida ikki sirtga umumiy bo‘lgan 1,2,3 va 4 nuqtalarni yasash ko‘rsatilgan. Bu konuslarning asosi va xos o‘qli yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasining izlari 17.1-jadvalning 1-punktidadidek bo‘ladi. Shuning uchun berilgan  $\Phi$  va  $\Gamma$  sirtlar qisman kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qilishini oldindan jadval yordamida aniqlab olamiz.

17.7-rasmda asoslari  $H$  tekislikda yotgan ikki konusning kesishish chizig‘ini yasash tekis chizmada ko‘rsatilgan. Bunda avvalo kesishish  $A(A',A'')$ ,  $B(B',B'')$ ,  $C(C',C'')$ ,  $D(D',D'')$  nuqtalari yasaladi. Kesishish chizig‘ining  $A$  va  $B$ ,  $C$  va  $D$  nuqtalari  $T_H$  va  $Q_H$  urinma tekisliklar yordamida aniqlab, ular  $S_2'1'$  va  $S_1'4'$  yasovchilarning nuqtalaridir  $E', E_1'$  va  $F', F_1'$  nuqtalar kesishuvchi konus sirtlarning gorizontaal proyeksiyasidagi ixtiyoriy yasovchilar ustidagi nuqtalardir. Bu nuqtalar esa kesuvchi tekisliklar dastasining  $P_{1H}, P_{2H}, P_{3H}, \dots$  kabi izlari yordamida hosil qilingan.

Konus sirtlarning joylashishi 17.1-jadvalning 2-punktiga to‘g‘ri kelgani uchun ularning kesishish chizig‘i bitta fazoviy egri chiziq bo‘ladi.

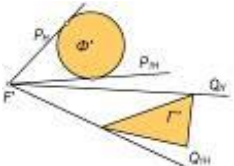
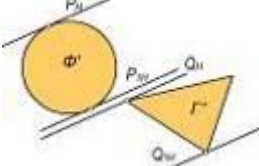


17.7-rasm

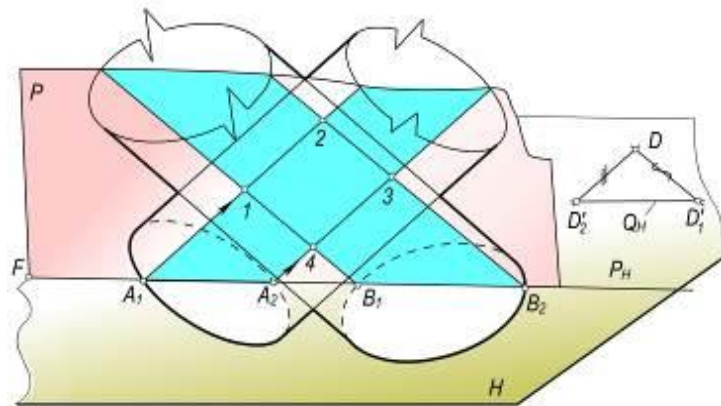
17.1-jadval

| №  | Kesishuvchi sirtlar asoslarining o‘zaro vaziyati va ke-suvchi tekisliklar dastasining izlari |              | Kesishish chiziqining sxematik ko‘rinishi | Kesishuvchi sirtlarning o‘zaro vaziyati                                                     |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | Xos o‘qli                                                                                    | Xosmas o‘qli |                                           |                                                                                             |
| 1. |                                                                                              |              |                                           | $\Phi$ va $\Gamma$ sirtlar o‘zaro to‘liq kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qiladi. |
| 2. |                                                                                              |              |                                           | $\Phi$ va $\Gamma$ sirtlar o‘zaro qisman kesishib, bitta fazoviy egri chiziq hosil qiladi.  |

|    |  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                 |
|----|--|--|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. |  |  |  | <p>Φ va Γ sirtlar o‘zaro qisman kesishib, bitta kesishish nuqtasiga ega bo‘lgan bitta yopiq egri chiziq hosil qiladi. A nuqta sirlarning urinish nuqtasi bo‘ladi.</p>                                                           |
| 4. |  |  |  | <p>Φ va Γ sirtlar o‘zaro to‘liq kesishib, ikkita tekis egri chiziq hosil qiladi. Kesishish chiziqlari A'_1 va A'_2 nuqtalarda bir – biri bilan kesishadi. A'_1 va A'_2 nuqtalar Φ va Γ sirtining urinish nuqtalari bo‘ladi.</p> |
| 5. |  |  |  | <p>Φ va Γ sirtlar o‘zaro kesishmaydi.</p>                                                                                                                                                                                       |
| 6. |  |  |  | <p>Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqliklar sirti o‘zaro to‘liq kesishib, ikkita fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi.</p>                                                                                                                |
| 7. |  |  |  | <p>Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti qisman kesishib, bitta fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi.</p>                                                                                                                           |
| 8. |  |  |  | <p>Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti qisman kesishib, urinish nuqtasiga ega bo‘lgan bitta fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi, A nuqta Φ va Γ sirlarning o‘zaro urinish nuqtasi bo‘ladi.</p>                                   |
| 9. |  |  |  | <p>Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti o‘zaro to‘liq kesishib, A'_1 va A'_2 urinish nuqtalariga ega bo‘lgan ikkita fazoviy siniq chiziq hosil qiladi. A'_1 va A'_2 nuqtalar Φ va Γ sirlarning o‘zaro urinish nuqtalari bo‘ladi.</p> |

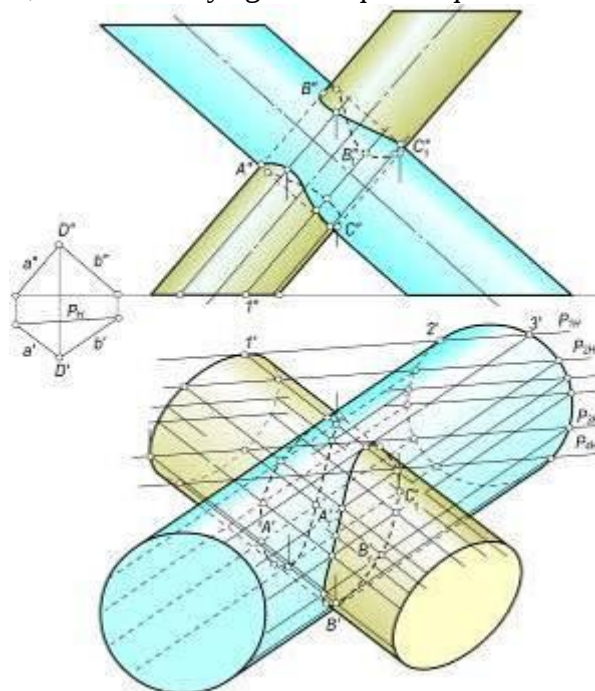
|     |                                                                                   |                                                                                   |                                                           |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 10. |  |  | $\Phi$ sirt bilan $\Gamma$ ko'pyoqlik o'zaro kesishmaydi. |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|

**Silindr bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash.** Silindr bilan silindr sirti o'zaro kesishib, fazoviy egri chiziq xosil qiladi. Bu silindrlarning to'g'ri chiziqli yasovchilari orqali o'tgan kesuvchi yordamchi tekisliklar dastasi o'zaro parallel bo'lib, xosmas o'qqa ega bo'ladi. Bunda yordamchi tekisliklar dastasining yo'nalishi berilgan silindrlar yasovchilariga parallel bo'lgan yo'naltiruvchi tekislikni aniqlaydi va bu tekislik parallelizm tekisligi deb yuritiladi. Berilgan silindrlarning o'zaro vaziyati 17.1-jadvaldan aniqlab olinadi. 17.8-rasmda ikki silindr sirti kesishish chizig'ining 1,2,3,4 nuqtalarini yasash ko'rsatilgan. Bu nuqtalar  $Q$  tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy yordamchi va ikki silindrni kesuvchi  $P$  tekislikni o'tkazish yo'li bilan yasalgan.



17.8-rasm

17.9-rasmda asoslari  $H$  tekislikda yotgan ikki silindrning kesishish chizig'ini yasash tekis chizmada ko'rsatilgan. Silindr sirtlarining biriga urinib, ikkinchisini kesuvchi yordamchi  $P_1$  va  $P_4$  tekisliklar dastasining gorizontall  $P_{1H}$ ,  $P_{4H}$  izlari o'tkaziladi. Bunda  $P_{1H} \parallel P_{4H} \parallel Q_H$  bo'ladi. Silindrlarning o'zaro vaziyati 17.1-jadvalning 1-punktiga mos kelgani uchun bu silindrlar qisman kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qiladi.



17.9-rasm.

Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari xuddi konus bilan konusning yoki konus bilan silindr kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari kabi bo'ladi. Bu  $A(A',A'')$ ,  $B(B',B'')$ ,  $C(C',C'')$  nuqtalarning gorizontaal proyeksiyalari  $P_{2H}$ ,  $P_{3H}$ ..., tekislik izlari yordamida yasaladi.

Kesishish chizig'ining boshqa oraliq nuqtalari  $P$  parallel yordamchi tekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasaladi. Hosil bo'lgan barcha kesishish nuqtalari o'zaro ravon birlashtiriladi.

Prizma bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi xuddi yuqorida bayon etilgan ketma-ketlikda bo'ladi.

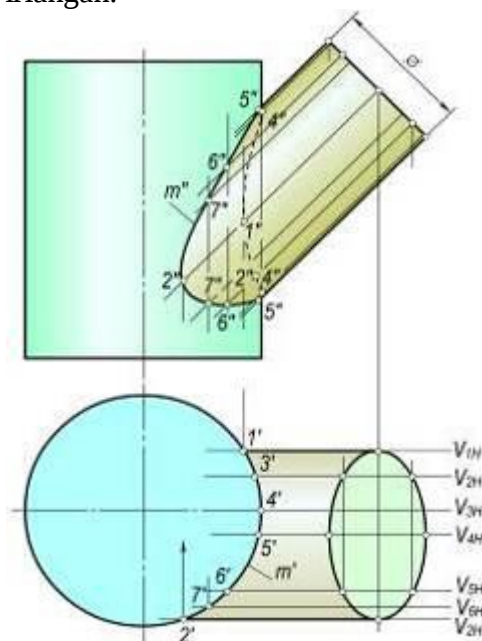
### ***O'qlari bir tekislikda yotmaydigan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi.***

#### ***Parallel kesuvchi tekisliklar usuli***

Agar ikki kesishuvchi sirtlarning o'qlari o'zaro kesishmasdan, ulardan biri biror proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lib, ikkinchi sirtning o'qi ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar yoki parallel bo'lsa, u holda bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasashda parallel kesuvchi tekisliklar usulidan foydalanish. Parallel kesuvchi tekisliklarni proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga parallel qilib olinadi.

Parallel kesuvchi tekisliklar usulining qulayligi shundaki, bunda yordamchi kesuvchi tekisliklar kesishuvchi sirtlarni aylanalar va to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi. Parallel kesuvchi tekisliklar usulida tekisliklar dastasining o'qi xosmas bo'ladi. Parallel kesuvchi tekisliklar usuli bilan yechiladigan bir necha sirtlarning o'zaro kesishuvini ko'rib chiqamiz.

**Ikki silindrning o'zaro kesishishi.** 17.10–rasmda kesishuvchi silindrlarning biri gorizontaal proyeksiyalovchi, ikkinchisining o'qi frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan holda silindrlar tasvirlangan.



**17.10-rasm**

Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar  $V$  tekislikka parallel bo'ladi. Ularning o'zaro vaziyati chizmaning gorizontaal proyeksiyasidan ko'rinib turibdi. Kesishish chizig'ining xarakterli  $1(1',1'')$ ,  $2(2',2'')$ ,  $4(4',4'')$ ,  $5(5',5'')$  nuqtalari yordamchi kesuvchi frontal  $V_{1H}$ ,  $V_{2H}$ ,  $V_{3H}$ ... tekisliklar yordamida hosil qilingan. Bunda yordamchi parallel tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Bir tekislikda yotuvchi ikki silindrga mansub bo'lgan yasovchilarning kesishish nuqtalari ikkala sirt uchun umumiy bo'lib, yasaladigan  $m(m', m'')$  egri chiziqning nuqtalari bo'ladi.  $m$  egri chiziqning kolgan nuqtalari  $V_{1H}$  va  $V_{2H}$  tekisliklar orasida yordamchi kesuvchi tekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasalgan. Kesishish chizig'ining frontal silindrning  $V_5$  simmetriya tekisligidan kuzatuvchi tomondagi nuqtalari ko'rinadi, uning orqasidagi nuqtalari esa ko'rinmaydi.

**O'qlari uchramas va  $H$  yoki  $V$  ga perpendikulyar bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash** (17.11-rasm). Kesishuvchi sirtlardan doiraviy silindr o'qi

$V$  tekislikka va doiraviy konus o'qi  $H$  tekislikka perpendikulyar bo'lganda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklar gorizont tekisliklar bo'ladi. Bu tekisliklar konusni aylanalar va silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Hosil bo'lgan aylana va yasovchilar o'zaro kesishib, kesishish chizig'ining nuqtalarini hosil qiladi.

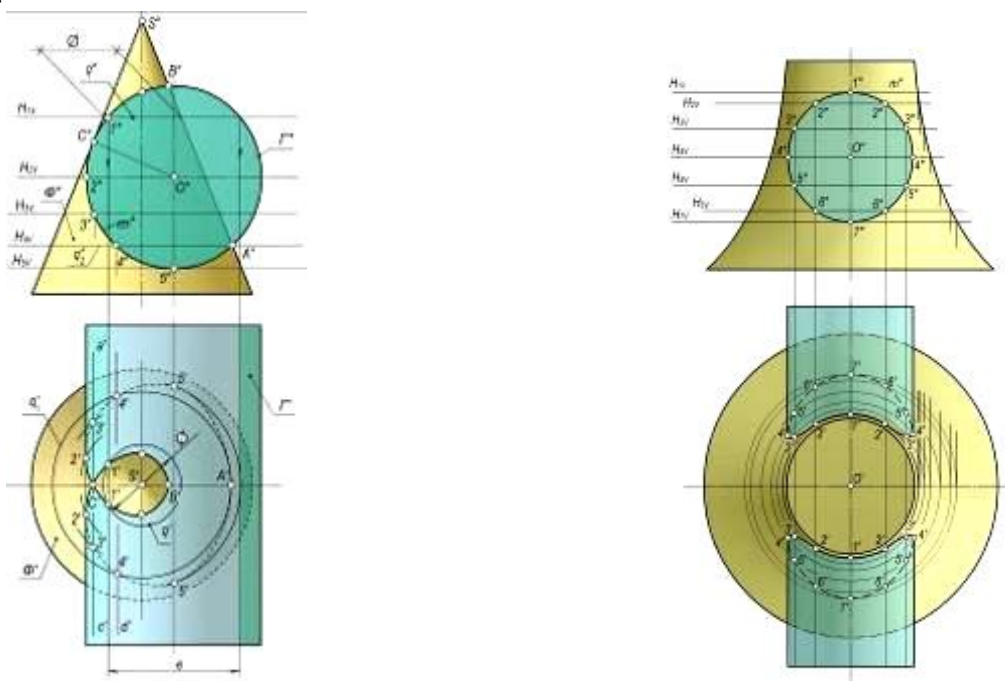
Kesishish chizig'ining  $A(A',A'')$ ,  $B(B',B'')$ ,  $C(C',C'')$ , nuqtalari xarakterli nuqtalardir. Ular bevosita sirtlar frontal ocherklarining kesishish nuqtalarida belgilanadi. Qolgan nuqtalar kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Masalan, 1,2,3,4,5 nuqtalar  $H_1 \parallel H, \dots$  va  $H_5 \parallel H$  tekisliklar o'tkazib, gorizont proyeksiyadagi  $q'$  va  $q_1'$  aylanalarining va  $a', b', c'$  va  $d'$  to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchak kesimlarining kesishuvidan hosil qilingan. Qolgan nuqtalar ham shu tartibda hosil qilinadi.

2(2',2'') xarakterli nuqta  $\Gamma$  silindrning  $H_2(H_{2V})$  simmetriya tekisligini o'tkazish yo'li bilan topiladi. Kesishish chizig'ining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan nuqtalari ham  $H_2$  simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.

17.12-rasmda o'qlari kesishib o'zaro perpendikulyar bo'lgan aylanish silindri bilan tor sirti bo'lagining kesishish chizig'ini yasash tasvirlangan. Kesishish egri chizig'ini yasash  $H_1(H_{1V}), \dots$  gorizont kesuvchi tekisliklar o'tkazish yo'li bilan yasalgan. Bunday holda sirtlarning kesishish egri chizig'i ikkita simmetrik bo'lakdan iborat bo'ladi. 1, 4, 7 xarakterli nuqtalarni yasash  $H_{1V}, H_{4V}$  va  $H_{7V}$  tekisliklar yordamida yasalgan. Kesishgan egri chiziqlarning gorizont proyeksiyasini ko'rinadigan va ko'rinmaydigan qismlari  $H_4$  simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.

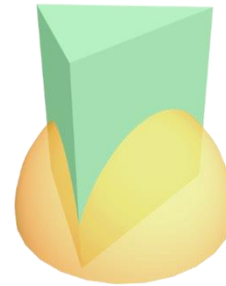
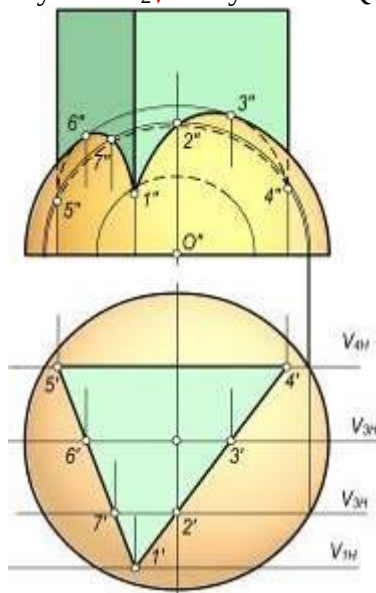
**Yarim sfera bilan uchburchakli to'g'ri prizmaning o'zaro kesishishi.** Sfera bilan prizma sirti fazoda siniq egri chiziq bo'yicha kesishadi. 17.13-rasmda yarim sfera va qirralari  $H$  tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchburchakli prizma tasvirlangan. Yordamchi kesuvchi tekisliklar frontal tekisliklardan iborat bo'ladi. Bu tekisliklar sferani parallellari bo'yicha, prizmani esa yon qirralariga parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi.

Rasmdan ko'rinib turibdiki, prizma sirti sharni to'la kesadi va uchta aylanalar hosil bo'ladi. Ularning  $V$  dagi proyeksiyalari ellipslar va aylana bo'lib proyeksiyalanadi. Shar va prizma sirti o'zaro kesishish chizig'ining xarakterli 1,4,5,6 va 3 nuqtalari frontal  $V_1(V_{1H}), V_4(V_{4H})$  va  $V_3(V_{3H})$  tekisliklar yordamida yasaladi. 1,4,5 nuqtalar kesishish chizig'ining sinish nuqtalari bo'lib, prizma qirrasining sfera bilan kesishgan nuqtalaridir.  $V_3$  tekislik sharning simmetriya tekisligidir, undagi 3 va 6 nuqtalar frontal proyeksiyada kesishish chizig'ining ko'rinadigan qismini ajratib turuvchi nuqtalardir. Kolgan yasashlar rasmdan ko'rinib turibdi. Bu misolda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklarni gorizont tekislik qilib olsa ham bo'ladi.



17.11-rasm.

O'qlari o'zaro parallel bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi. O'qlari parallel bo'lgan  $\Phi$  siqiq aylanma ellipsoid bilan  $\Gamma$  aylanish sirti 17.13–shaklda tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari  $H$  tekisligiga perpendikulyar joylashgan. Sirtlarning fazoda bunday berilishida yordamchi kesuvchi tekisliklarni berilgan sirtlarning o'qlariga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Dastlab kesishuv chizig'ining  $1(1',1'')$  va  $6(6',6'')$  xarakterli nuqtalari belgilanadi. Qolgan nuqtalar  $H_2(H_{2V})$ ,  $H_3(H_{3V})$  ... kesuvchi tekisliklar yordamida yasalanadi. Kesuvchi gorizontaal yordamchi tekisliklar berilgan ikkala aylanish sirtini aylanalar bo'yicha kesadi. Kesimlarda hosil bo'lgan bu aylanalar o'zaro kesishib, ikkala sirtlarga oid bo'lgan kesishish chizig'ining nuqtalarini beradi. Masalan, 17.13-rasmda  $2(2',2'')$ ,  $2_1(2'_1, 2''_1)$  nuqtalarni hosil qilishda  $H_{2V}$  tekisligi o'tkazilgan. Bu tekislik sirtlarning birini  $l(l',l'')$  ikkinchisini  $n(n',n'')$  aylanalar bo'yicha kesgan. Hosil bo'lgan  $l$  va  $n$  aylanalar o'zaro kesishib,  $2(2',2'')$  va  $2_1(2'_1, 2''_1)$  nuqtani hosil qiladi, ya'ni gorizontaal proyeksiyalar tekisligidagi  $l'$  va  $n'$  aylanalarning kesishidan  $2'$  va  $2'_1$  nuqtalar hosil bo'ladi so'ngra ularning  $V$  dagi proyeksiyalari  $H_{2V}$ –da yasalanadi. Qolgan barcha nuqtalar shu usulda aniqlanadi.



17.13-rasm.

### Nazorat savollari

1. Sferaning har qanday aylanma sirt bilan kesishuvidan nima hosil bo'ladi va u qanday aniqlanadi?
2. Monj teoremasi va undan kelib chiqadigan xususiy hollarni aytib bering.
3. Bitta sferaga tashqi chizilgan silindr va konusning o'zaro kesishishidan qanday chiziqlar hosil bo'ladi?
4. Yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usulining mohiyati nimadan iborat?
5. Silindr bilan prizmaning o'zaro kesishish chizig'ini yasashda yordamchi tekislik qanday vaziyatda o'tkaziladi?
6. O'qlari kesishmaydigan og'ma silindr va konuslarni kesish chizig'ini yasashda kesuvchi tekislik qanday o'tkaziladi?

## REJA

1. Konsentrik sferalar usuli.
2. Ekssentrik sferalar usuli.

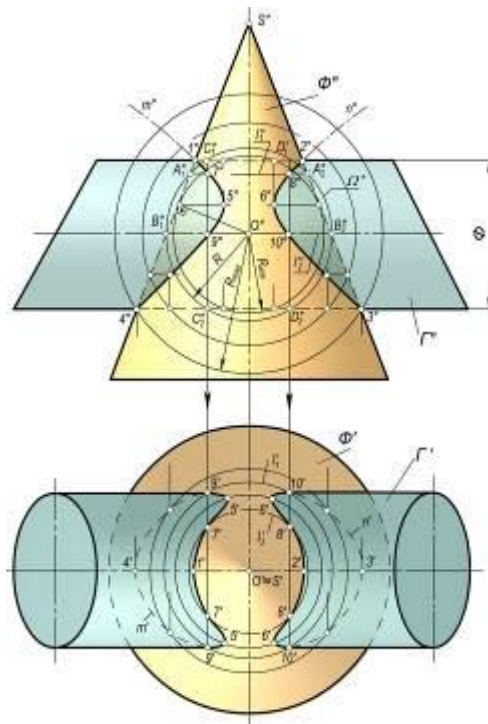
Markazi biror aylanish sirtining o'qida bo'lgan sfera bu sirtni chekli sondagi aylanalar bo'yicha kesadi. Bu aylanalar proyeksiyalar tekisliklarining biriga to'g'ri chiziq kesmasi shaklida, ikkinchisiga aylana yoki ellips ko'rinishida proyeksiyalash. Aylanish sirtlari bilan sferaning o'zaro kesishish chizig'i haqidagi bu muhim xulosa ikkita aylanish sirtining o'zaro kesishish chiziqlarini yasashga imkon beradi.

Yordamchi kesuvchi sferalar to'plami konsentrik yoki ekssentrik ko'rinishlarda bo'ladi. Kesishuvchi sirtlarning xarakteriga qarab, yordamchi kesuvchi sferalarning biror usuli ishlatiladi.

**18.1. Konsentrik sferalar usuli.** Ikki aylanish sirtining o'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu o'qlar bitta tekislikni tashkil qiladi. Bu tekislik har ikkala sirt uchun simmetriya tekisligi bo'ladi.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalar usulini quyidagi shartlar qanoatlantirgan hollardagina qo'llash mumkin:

- o'zaro kesishuvchi sirtlar aylanish sirtlari bo'lishi shart;
- aylanish sirtlarining o'qlari o'zaro kesishgan bo'lishi kerak;
- aylanish sirtlarining o'qlari (yoki simmetriya tekisligi) proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo'lishi yoki sirt o'qlarining biri proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel, ikkinchi o'q esa ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lishi kerak.



18.1-rasm.

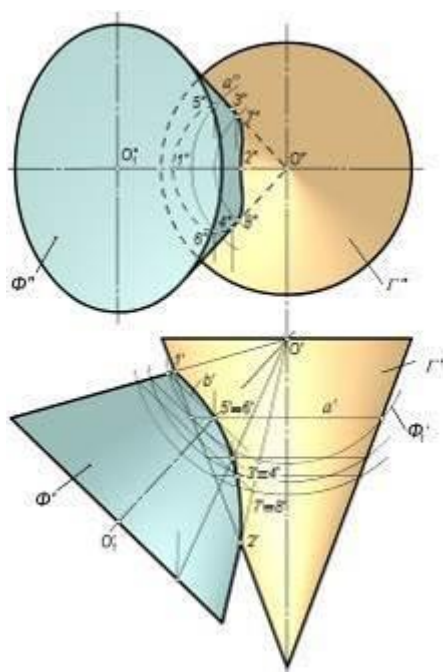
Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalarning markazi sirtlarning o'qlari kesishgan nuqtasida bo'ladi. 18.1-rasmda o'qlari umumiy  $O(O', O'')$  nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi  $V$  ga parallel bo'lgan  $\Phi(\Phi', \Phi'')$  aylanma konus va  $\Gamma(\Gamma', \Gamma'')$  silindr sirtlari berilgan.

Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun  $O''$  nuqtani markaz qilib,  $R$  radiusli  $\Omega(\Omega'')$  sfera chiziladi.  $\Omega$  sfera  $\Phi$  sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun ular  $l_1(l_1', l_1'')$  va  $l_2(l_2', l_2'')$  aylanalar bo'yicha kesishadi. Shaklda bu aylanalarning  $V$  tekislikdagi proyeksiyalari  $A_1''$   $A_2''$  va  $B_1''$   $B_2''$  kesmalar tarzida tasvirlangan. Shuningdek, bu sfera  $\Gamma$  sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun  $C_1' C_2''$  va  $D_1'' D_2''$  kesmalar ko'rinishidagi aylanalar bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning o'zaro kesishish 7'', 8'', 9'' va 10'' nuqtalari har ikkala  $\Phi$  va  $\Gamma$  sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning frontal proyeksiyalari bo'ladi. Xuddi shuningdek,  $O''$  nuqtani markaz qilib, konsentrik sferalar chiziladi, ular yordamida  $\Phi$  va  $\Gamma$  sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarini yasash mumkin. Bu nuqtalarning geometrik o'rni bo'lgan  $m''$  va  $n''$  egri chiziqlar  $\Phi$  va  $\Gamma$  sirtlarning kesishish chiziq bo'ladi.  $\Phi$  va  $\Gamma$  sirtlarning frontal ocherklarining 1'', 2'', 3'', 4'' kesishish nuqtalari bu sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan hisoblanadi.  $O''$  nuqtadan eng uzoqda joylashgan 4'' xarakterli nuqtadan o'tuvchi sferaning radiusi  $R_{max}$  bo'ladi. Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan yana bir juftini  $\Phi$  va  $\Gamma$  sirtlarining birortasiga  $R_{min}$  radiusli urinma sfera o'tkazish bilan aniqlanadi. Eng kichik sferaning  $R_{min}$  radiusi quyidagicha aniqlanadi (18.1-rasm):  $O''$  nuqtadan berilgan sirtlarning birini chekka yasovchisiga  $O''E''$  va  $O''F''$  perpendikulyarlar o'tkaziladi. Bunda  $O''E'' > O''F''$  bo'lsa  $R_{min} = O''E''$  bo'ladi. Agar  $O''E'' < O''F''$  bo'lsa,  $R_{min} = O''F''$  bo'ladi,  $O''E'' = O''F'' = R_{min}$  bo'lgan holda eng kichik sfera ikkala sirtga urinib, kesishish chizig'i ikkita tekis egri chiziqqa ajraladi. Shunday qilib, urinma sferani shunday o'tkazish kerakki, u sirtlarning biriga urinsin va ikkinchisini kesib o'tsin. 18.1-rasmda  $\Gamma$  sirtga urinma bo'lgan  $R_{min}$  radiusli sfera o'tkazish bilan yasalgan egri chiziqning 5, 6 xarakterli nuqtalari aniqlangan. Bu nuqtalarda egrilik buriladi yoki yo'nalishini o'zgartiradi. Kesishish chizig'ining boshqa nuqtalari  $R_{max}$  va  $R_{min}$  radiusli sferalar orasida ixtiyoriy sferalar o'tkazish bilan aniqlanadi. Konus va silindrlarning o'zaro kesishish chizig'i  $m(m'')$  va  $n$  larga tegishli nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan parallel kesuvchi gorizontal tekisliklar orqali aniqlanadi. Shunday qilib, konsentrik sferalar usuli bilan ikki aylanish sirtining kesishish chiziqlarini yasash quyidagi sxema bo'yicha bajariladi:

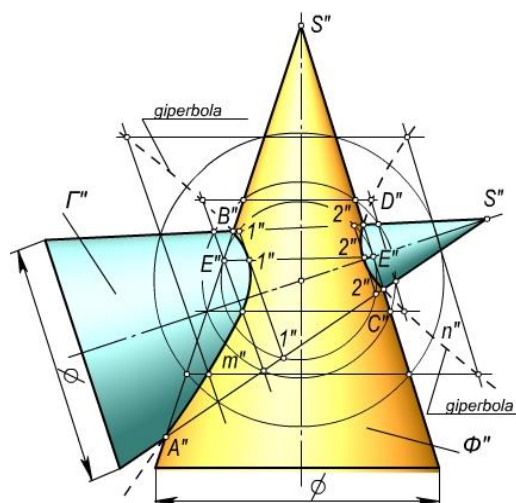
- ikki aylanish sirti o'qlarining kesishish nuqtasi konsentrik sferalar markazi sifatida qabul qilinadi;
- sirtlarning frontal (yoki gorizontal) ocherklarining kesishish nuqtalari xarakterli nuqtalar sifatida belgilanadi va  $R_{max}$  radiusli sfera aniqlanadi;
- eng kichik  $R_{min}$  radiusli sfera chiziladi. Natijada yana bir juft xarakterli nuqtalar aniqlanadi;
- $R_{max}$  va  $R_{min}$  lar orasida sferalar o'tkazilib, oraliq nuqtalar topiladi.

18.2-rasmda o'qlar  $O(O', O'')$  nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi  $H$  proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan ikki doiraviy konusning kesishish chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan yasalgan. Bunda avvalo kesishish chizig'ining xarakterli 1(1', 1'') va 2(2', 2'') nuqtalari aniqlanadi. So'ngra  $O'$  nuqtani markaz qilib olib, ikkala konusni kesadigan qilib  $\Phi_1'$  sfera o'tkaziladi.  $\Phi_1'$  sfera  $\Gamma'$  konus bilan  $a'$  aylana bo'yicha,  $\Phi'$  konus bilan  $b'$  aylana bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning kesishish nuqtalari 5'=6' ikki konusning kesishish chizig'iga tegishli bo'ladi.  $a$  aylananing  $a''$  proyeksiyasi yasilib, uning ustida 5'' va 6'' nuqtalar yasaladi. Kesishish chizig'ining qolgan nuqtalari ham yuqoridagidek yasaladi va ular o'zaro tutashtiriladi.

18.3-rasmda simmetriya tekisligi proyeksiyalar tekisligi  $V$  ga parallel bo'lgan ikki aylanma konusning kesishish chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan frontal proyeksiyalar tekisligida tasvirlangan.



18.2-rasm

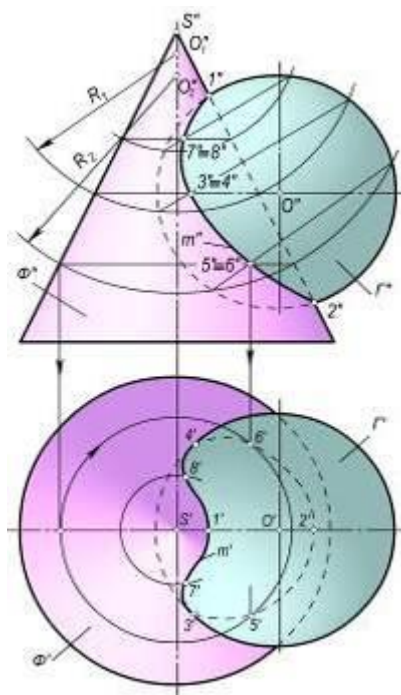


18.3-rasm

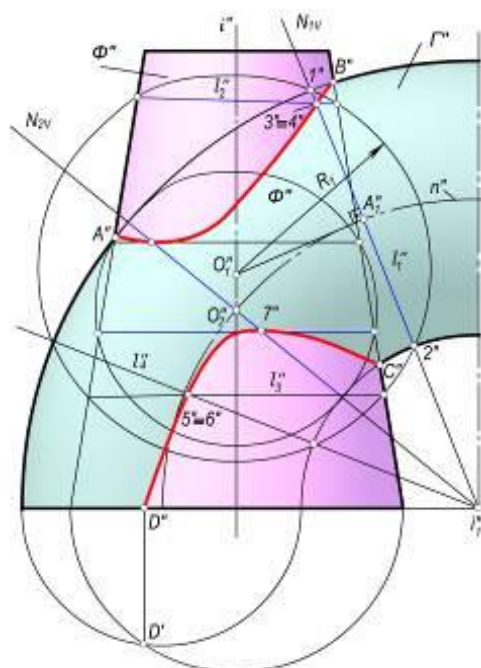
18.2. Ekssentrik sferalar usuli. Markazlari biror aylanma sirt o'qini turli nuqtalarida joylashgan sferalar ekssentrik sferalar deb yuritiladi. 18.4-rasmda konus o'qi va sfera markazi  $O(O', O'')$  bitta frontal simmetriya tekisligida joylashgan.

Bu ikki sirtning kesishish chizig'ini yasash uchun avvalo ularning frontal ocherklarning kesishishdagi xarakterli nuqtalari  $1''$  va  $2''$  belgilanadi. Ma'lumki, har qanday ikki sfera aylana bo'yicha kesishadi. Markazi konus o'qida bo'lgan sfera ham konus bilan aylana bo'yicha kesishadi. Shuning uchun konus o'qining biror nuqtasini markaz qilib olib, ixtiyoriy radius bilan yordamchi sferalar yasash yo'li bilan bu ikki sirtning kesishish chizig'i yasaladi. Konus o'qidagi  $O_1''$  nuqtani markaz qilib olib,  $R_1$  radiusli sfera yordamida kesishish chizig'ining  $3(3', 3'') \equiv 4(4', 4'')$  nuqtalari yasalgan. Shuningdek, konus o'qidagi  $O_2''$  nuqtani markaz qilib olib,  $R_2$  radiusli sfera yordamida  $5(5', 5'') \equiv 6(6', 6'')$  nuqtalarning vaziyati aniqlangan. Xuddi shu tarzda konus o'qidagi ixtiyoriy nuqtalarni markaz qilib olib, ixtiyoriy radiuslar bilan sferalar chizish yordamida ikkala sirtning kesishish chizig'i  $m(m'')$  yasalgan.  $m$  ning gorizonttal  $m'$  proyeksiyasi konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan pallel kesuvchi gorizonttal tekisliklar orqali aniqlanadi.

Aylanma kesik konus va tor sirtlarning kesishish chizig'ini yasash frontal proyeksiya tekisligida ko'rsatilgan (18.5-rasm). Konusning o'qi  $i''$  va tor yasovchilarining markazlari yotuvchi  $n''$  chiziq bitta frontal tekislikda joylashgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun torning frontal proyeksiya tekisligidagi  $i_1''$  o'qi orqali  $N_{IV}$  frontal proyeksiyalovchi tekislikning izi o'tkaziladi. Bu tekislik torni  $n''$  markazlar chizig'ini ixtiyoriy  $A_1''$  nuqtada kesadi. Bunda  $N_{IV}$  tekislik torni  $l_1''$  aylana bo'yicha kesadi.  $l_1''$  aylananing markazi  $A_1''$  nuqtadan aylana tekisligiga perpendikulyar chiqariladi. Uning aylanma konus o'qi  $i''$  bilan kesishish nuqtasi  $O_1''$  belgilanadi.  $O_1''$  nuqtani markaz qilib olib, torning  $l_1''$  aylanasi bilan o'tuvchi  $R_1$  radiusli sfera chiziladi. Bu yordamchi sfera konus bilan  $l_2''$  va  $l_3''$  aylanalar bo'yicha va tor sirti bilan  $l_1''$  va  $l_4''$  aylanalar bo'yicha kesishadi.  $l_1''$  va  $l_2''$  aylanalarning kesishish nuqtalari  $3'' \equiv 4''$  hamda  $l_3''$  va  $l_4''$  aylanalarning kesishish nuqtalari  $5'' \equiv 6''$  izlanayotgan egri chiziqning nuqtalari bo'ladi. Chunki  $3'' \equiv 4''$  va  $5'' \equiv 6''$  nuqtalar konus va tor sirtlari uchun umumiy nuqtalardir.



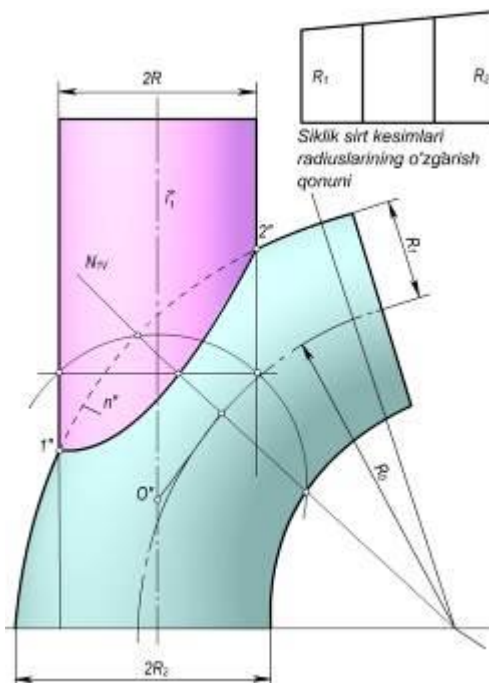
18.4-rasm.



18.5-rasm

Aylanma konus va tor sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli  $A''$ ,  $B''$  va  $C''$  nuqtalari bu sirtlarni frontal ocherklarining kesishish nuqtalari yordamida aniqlangan. Sirtlar o'qlarining kesishish nuqtasi  $O_2''$  orqali tor sirtga urinma qilib o'tkazilgan  $\Phi''$  sfera sirti orqali  $A''$  va  $7''$  xarakterli nuqtalar aniqlangan. Bu nuqtalar egrilikning burilish nuqtalari bo'ladi.

Torning  $i_1''$  aylanish o'qi orqali bir necha frontal proyeksiyalovchi tekisliklar izlarini o'tkazib va bu tekisliklarda hosil bo'lgan aylanalar orqali markazi konus o'qida turlicha joylashgan yordamchi sferalar o'tkazib, egri chiziqning qolgan oraliq nuqtalari yasaladi.



18.6-rasm

18.6-rasmda siklik va silindrik sirtlardan tashkil topgan truboprovodning bir qismi frontal proyeksiyada tasvirlangan. Bunda aylanish silindri bilan naysimon siklik sirtning  $n''$  kesishish chizig'ini yasash eksentrik sferalar usuli bilan ko'rsatilgan. Har ikkala sirt uchun umumiy bo'lgan  $n''$  egri chiziqning barcha nuqtalarini yasash yuqorida keltirilgan misolga asosan bajarilgan

## **Nazorat savollari**

1. Ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
2. Ikki sirtning kesishish chizig‘ini yasashda qanday yordamchi sirtlardan foydalaniladi?
3. Sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘ida qanday nuqtalari xarakterli deyiladi?
4. Umumiy o‘qqa ega bo‘lgan aylanish sirtlarining o‘zaro kesishish chizig‘ini qanday egri chiziqlar bo‘ladi?
5. Konsentrik va eksentrik sferalardan qanday hollarda foydalaniladi

## **Asosiy darsliklar va o‘quv qo‘llanmalar**

1. Sh.K. Murodov va boshqalar. Chizma geometriya. Toshkent, «Iqtisod-moliya», 2006, 2008.
2. B.B.Qulnazarov. Chizma geometriya. Toshkent, «O‘zbekiston», 2006.
3. A.N. Valiyev. Perspektiva. Toshkent, «TDPU rizografi», 2006.

## **Qo‘shimcha adabiyotlar**

1. Sh.K. Murodov va boshqalar. Chizma geometriya kursi. Toshkent, «O‘qituvchi», 1988.
2. R.Q. Ismatullaev. Chizma geometriya. Toshkent, 2005.
3. I. Raxmonov. Perspektiva. Toshkent, «O‘qituvchi», 1993.
4. R.X. Xorunov. Chizma geometriya kursi. Toshkent, «O‘qtuvchi», 4-nashri, 1997.
5. R.X. Xorunov, A. Akbarov. Chizma geometriyadan masalalar va ularni echish usullari. 2-nashri, «O‘qituvchi», 1995.