

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS  
TA’LIM VAZIRLIGI



URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI  
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI  
”FUNKSIYALAR NAZARIYASI” KAFEDRASI  
5130100-MATEMATIKA TA’LIM YO‘NALISHI

302-GURUHI TALABASI

RO’ZMETOV HAVASNING

*Umumlashgan Koshi teoremasi*

mavzusida yozgan

**KURS ISHI**

Topshirdi:

Qabul qildi:

Urganch 2015 yil

## **Mavzu: Umumlashgan Koshi teoremasi**

**Reja:**

**I. Kirish**

**II. Asosiy qism**

1-§. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalardan olingan integral.

2-§. Golomorf funksiya xossalari Koshi teoremasi.

3-§. Koshi teoremasini umumlashmasi.

**III . Xulosa**

**IV . Foydalanilgan adabiyotlar**

## 1-§.Kompleks o'zgaruvchining funksiyasidan olingan integral

Integralning tarifi:

Kompleks tekislikdagi biror  $G$  sohada uzluksiz bir qiymatli

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1)$$

funksiya berilgan bo'lsin. U holda  $f(z)$  funksiya  $G$  soha ichidan olingan ixtiyoriy  $\Gamma$  silliq chiziqda ham bir qiymatli va uzluksiz bo'ladi. Bu chiziqning tenglamasi  $z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$  bo'lib, uning boshlang'ich nuqtasi  $z_0$  va oxirgi nuqtasi  $Z$  bo'lsin, yani  $z_0 = z(\alpha)$

va  $Z = z(\beta)$ .

$\Gamma$  chiziqda ikki yo'nalishni aniqlash mumkin ; bulardan bittasi  $t$  parametrning o'sishiga, ikkinchisi esa kamayishiga mos keladi. Odatda  $t$  ning o'sishiga mos yo'nalishni musbat yo'nalish deb  $+\Gamma$  yoki  $\Gamma^+$  orqali bunga qarama qarshi yo'nalishni esa manfiy yo'nalish deb  $-\Gamma$  yoki  $\Gamma^-$  bilan belgilanadi.

Masalan  $f(x)$  funksiyadan  $\Gamma$  chiziq bo'ylab olingan integralga ta'rif berishdan iboratdir. Uning uchun  $\Gamma$  chiziqni ushbu

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_{n-1}, z_n = Z \quad (2)$$

nuqtalar vositasi bilan ixtiyoriy ravishda  $n$  ta yoychalarga bo'lamiz va shu yoychalardan har birining istalgan joyidan bittadan nuqta olib, bu nuqtalarni mos ravishda

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k, \dots, \zeta_n \quad (3)$$

deb belgilaymiz. Yuqordagi shartimizga muvofiq  $\omega = f(z)$  funksiya  $\zeta_k$  nuqtakarning har birida aniq chekli qiymatga ega. Ushbu

$$f(\zeta_1), f(\zeta_2), \dots, f(\zeta_k), \dots, f(\zeta_n)$$

sonlar bilan quyidagi

$$\Delta z_1 = z_1 - z_0, \Delta z_2 = z_2 - z_1, \dots, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \dots, \Delta z_n = z_n - z_{n-1}$$

ayirmalarning mos ko'paytmalaridan tuzilgan ushbu

$$S_n = f(\zeta_1)\Delta z_1 + f(\zeta_2)\Delta z_2 + \dots + f(\zeta_k)\Delta z_k + \dots + f(\zeta_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k$$

yig'indini odatda *integral yig'indi* deyiladi . Bu yig'indining qiymati (2) va (3) nuqtalarga bog'liq . Agar biz o'sha nuqtalarni  $\Gamma$  bo'ylab bir marta siljitsak ( $z_0$  va  $Z$  larni qo'zg'atmasdan) yana bitta integral yig'indiga ega bo'lamiz . Umuman , mana shu usul bilan cheksiz ko'p

$$S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \dots, S_n^{(m)}, \dots$$

integral yig'indilar tuzish mumkin . Mana shulardan ixtiyoriy bittasi (4) dagi  $S_n$  yig'indidan iborat.

Agar biz (2) nuqtalarni ketma-ket to'g'ri chiziqlar orqali tutashtirsak ,  $\Gamma$  egri chiziq ichiga chizilgan siniq chiziq hosil bo'ladi . Bu siniq chiziq uzunliklari

$$|\Delta z_1|, |\Delta z_2|, \dots, |\Delta z_k|, \dots, |\Delta z_n|$$

lardan iboratdir . Shartimizga muvofiq ,  $\Gamma$  silliq chiziq bo'lgani uchun  $|\Delta z_k|$  zveno (vatar) nolga yaqinlashganda uning qarshisidagi yoy uzunligi ham nolga intiladi . Mana shu vatarlarning eng kattasi  $\delta$  bo'lsin , ya'ni:

$$|\Delta z_k| \leq \delta, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ravshanki ,  $\delta \rightarrow 0$  da ,  $n \rightarrow \infty$  di

Endi ,

$$z_k = x_k + iy_k, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) =$$

$$= \Delta x_k + i\Delta y_k$$

bo'lgani uchun (1) ga muvofiq

$$f(\zeta_k)\Delta z_k = [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) = [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] + \\ + i[v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k].$$

Shularga asosan,  $S_n$  integral yig'indini quyidagicha yozish mumkin:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] + \\ + i \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] \quad (4)$$

**Tarif.** Agat  $\delta \rightarrow 0$  (4) integral yig'indi  $z_1, \dots, z_n - 1$  va  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  nuqtalar  $\Gamma$  chiziqning qaysi joylaridan olinganiga bog'liq bo'lmay, aniq bir chekli limitga intilsa, shu limit  $f(z)$  funksiyadan  $\Gamma$  chiziq bo'ylab olingan integral deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k$$

$\Gamma$  chiziq integrallash yo'li yoki konturi deyiladi. Tarifda aytilgan limit haqiqatan ham mavjud, chunki  $f(x)$  funksiya  $\Gamma$  silliq chiziqda uzluksiz bo'lgani uchun (1) ga asosan  $u(x, y)$  va  $(x, y)$  funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi.

U holda matematik analiz kursidagi egri chizikli integrallar ta'rifga asosan quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] = \int_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] = \int_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy,$$

Mana shularga va (4) ga asosan (5) 1ni bunday yozish mumkin:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy \quad (6)$$

yoki qisqaroq qilib,

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (u + iv)(dx + idy)$$

ko'rinishda yozish qulaydir.(6) tenglikning o'ng tomoni haqiqiy argumentli funksiyalardan olingan egri chiziqli integrallardan iborat.

## 2-§. Golomorf fuksiya xossalari

Darajali qatorlar yig'indisining golomorfligi haqidagi teoremlarining bir nechta natijalarini ta'kidlab o'tamiz .

**Teorema :**

$f \in H(D)$  funksiya hosilasi  $D$  sohada golomorf .

**Isbot :**

Ixtiyoriy  $z_0 \in D$  nuqta uchun biz  $D$  da yotuvchi  $U = \{|z - z_0| < R\}$  doirani qurib olamiz . 1-teoremaga ko'ra  $f$  funksiyani bu doirada darajali qator yig'indisi tuziladi .

Avvalgi paragrifdagi 5-teoremaga ko'ra  $f' = \varphi$  hosila doiraning o'zida yaqinlashuvchi qatorlarda tasvirlanadi .

Shuning uchun  $\varphi$  ga yuqoridagi 5-teoremani qo'llash mumkin .

Demak , kompleks analizga ko'ra  $\varphi$   $U$  da differensiallanuvchi .

Bu teoremadan bevosita boshlang'ichlarning mavjudlik shartlari zarurligi kelib chiqadi .

**Natija.**

Agar  $f$  funksiya  $D$  sohada  $F$  boshlang'ichga ega bo'lsa u holda  $f$   $D$  da golomorf .

1-teoremadan takror foydalanamiz .

**Teorema:**

Ixtiyoriy  $f \in H(D)$  funksiya  $D$  da , shuningdek  $H(D)$  da yotuvchi barcha tartibdagi hosilalarga ega .

Quyidagi teoremda markazi bilan berilgan darajali qatorlarga funksiyani yoyish yagonaligi tasdiqlanadi .

**Teorema :**

Agar  $f$  funksiya  $\{|z - z_0| < R\}$  doirada

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n \quad (1)$$

darajali qator yig'indisi ko'rinishida tuzilsa, u holda bu qator koeffitsiyentlari

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

formula bo'yicha bir qiymatli aniqlanadi.

**Isbot:**

(1) da  $z = z_0$  deb almashtirib  $f(z_0) = C_0$  ni topamiz. (1) qatorni hadmahad differensiallab:

$$f'(z) = C_1 + 2C_2(z - z_0) + 3C_3(z - z_0)^2 + \dots$$

keyin  $z = z_0$  deb almashtirib  $f'(z_0) = C_1$  ni topamiz.

(1) ni n-marta differensiallaymiz:

$$f^{(n)}(z) = n!C_n + C_1'(z - z_0) + C_2'(z - z_0)^2 + \dots$$

va  $z = z_0$  deb o'rniga qo'yib  $n!C_n = f^{(n)}(z_0)$  ega bo'lamiz.

Ba'zan teorema shunday ifodalanadi, har bir yainlashuvchi darajali qator Teylor qatori yig'indisi ko'rinishida bo'ladi. (2) formula yordamida elementar funksiyalarni Teylor qatori ko'rinishida yozish mumkin.

Masalan, quyidagilarga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} e^x = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} \\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \end{cases} \quad (3)$$

bu (3) tasi  $\mathbb{C}$  ning hamma yerda o'rinli ularning radiusi  $R = \infty$  da yaqinlashuvchi.

Topilgan  $C_n$  qiymatni taqqoslab , ularning boshlang'ich qiymatlarini (3) formula bo'yicha hisoblab , golomorf funksiyalar hosilasi uchun quyidagi ifodalarni olamiz:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad (4)$$

Agar  $f$   $D$  sohada golomorf va  $G \subset D$  soha chekli sonda uzluksiz chegaralangan va  $\exists z_0 \in G$  mavjud bo'lsa , u holda gomotop deformatsiya konturda o'zgarmas integraldan foydalanib biz keyingi  $\gamma_r$  formulada  $\partial G$  oriintatsiya chegarasini o'zgartirishimiz mumkin . Golomorf funksiyalar hosilasi uchun integral formulalarga ega bo'lamiz:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (5)$$

$z_0$  o'rniga  $z$  ni yozamiz va faraz qilamiz ,  $z \in G$  . Koshi integral formulasidan bu formulaga ega bo'lamiz:

$$f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi .$$

Integral belgisi ostidagi  $z$  parametr bo'yicha differensiallaymiz:

**Teorema. (Morera)**

Agar  $f$  funksiya  $D$  sohada uzluksiz hamda ixtiyoriy  $\Delta \subset D$  uchburchak chegarasi bo'yicha olingan integral nolga teng bo'lsa , u holda

$$f \in H(D)$$

**Isbot:** Ixtiyoriy  $a \in D$  nuqta uchun  $U = \{|z - a| < r\} \subset D$  doirani tuzamiz.

Teoremaga ko'ra ,

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi) d\xi$$

funksiya  $U$  da golomorf va har bir  $z \in U$  nuqtada

$$F'(z) = f(z)$$

1-teoremaga ko'ra  $f$   $U$  da golomorfligi kelib chiqadi . Har bir  $a \in D$  nuqtada  $f$  golomorfligi isbotlangan.

### **Eslatama:**

Morera teoremasi integralni hisoblashning asosiy lemmasiga teskari  $D$  sohadagi golomorf funksiyasi integrali ixtiyoriy  $\Delta \subset D$  uchburchak chegarasi bo'yicha nolga teng.

Bu teoremani Koshi teoremasiga teskari ravishda tekshirish mumkin . Morera teoremasida uzluksiz  $f$  funksiyaning qo'shimcha shartlari kiritiladi. Bu shart mavjud : Masalan funksiyalar uchun bitta nuqtaning boshqa  $\mathbb{C}$  ning hamma yerida nolga teng . Ixtiyoriy uchburchak chegarasi bo'yicha integrali nolga teng ammo bu funksiyalar golomorf ham uzluksiz ham emas.

Xulosa qilib , nuqtada golomorf funksiyalarni turli ekvivalent ta'riflarni keltiramiz .

### **Teorema :**

Quyidagi uchta tasdiq ekvivalent

(R)  $f$  funksiya kompleks analiz ma'nosida  $a$  nuqtaning qandaydir ,  $U$  atrofi  $f'(z)$  hosilaga ega :

(C)  $f$  funksiya  $a$  nuqtaning qandaydir  $U$  atrofida uzluksiz va uni integrali ixtiyoriy  $\Delta \subset U$  uchburchak chegarasi bo'yicha nolga teng .

(W)  $f$  funksiya  $a$  nuqtaning  $U$  atrofida yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyiladi .

Bu uchta tasdiq golomorf funksiyalar nazariyasini tuzishda uchta konsepsiyada aks ettiriladi . Odatda (R) shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar - Riman ma'nosida golomorf.

(C) shart - Koshi ma'nosida golomorf va (W) shart - Veyershtrass ma'nosida golomorf deyiladi .

(R)  $\Rightarrow$  (C) implikasiya Koshi teoremasida , (C) $\Rightarrow$ (R) -Morera teoremasida , (R) $\Rightarrow$ (W) -Teylor teoremasida , (W) $\Rightarrow$ (R) - darajali qator yig'indisining golomorfligi haqidagi teoremda isbotlangan .

**Eslatma :**

$f$  funksiyani  $\{|z - a| < R\}$  doirada yaqinlashuvchi darajali qatorlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash uni bu doirada golomorflik shartlari zarur va yetarli bo'lishiga ishonch hosil qilamiz .

Ammo yaqinlashuvchi darajali qatorlar doira chegarasidagi nuqtalarda yaqinlashuvchi , bu nuqtada qator yig'indisining golomorfligi bilan bog'liq emas . Buni oddiy misollarda ko'rishimiz mumkin . Boshqacha aytganda ,  $\{|z| < 1\}$  doirada yaqinlashuvchi

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (6)$$

geometrik progresiyaga yoyib yozamiz .  $\{|z| = 1\}$  aylananing barcha nuqtasida uzoqlashuvchi , uning umumiy hadi nolga yaqinlashmaydi . Ammo bu qator yig'indisi boshqa  $z = 1$  aylananing barcha nuqtalarida golomorf .

Boshqa tomondan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = f(z) \quad (7)$$

qator yaqinlashuvchi  $\{|z| = 1\}$  aylananing barcha nuqtalarida yaqinlashuvchi u  $\sum \frac{1}{n^2}$  yaqinlashuvchi sonli qatorga majorantlanadi . Ammo uni yig'indi  $f$   $z = 1$  nuqtada golomorf bo'lishi mumkin emas .

Shunday qilib ,  $f'(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$  birga intilganda , haqiqiy o'qlar bo'yicha cheksiz o'sadi .

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida fundamental teoremlaridan biri Koshining integral teoremasidir.

**Teorema-1** (Koshi teoremasi). Faraz qilaylik  $f(z)$  funksiya kompleks tekislik  $C$  dagi bir bog‘lamli  $D$ , sohada golomorf bo‘lsin. U holda  $D$ -ga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy to‘g‘rilanuvchi yopiq egri chiziq  $y$  bo‘yicha olingan integral nolga teng bo‘ladi.

$$\oint f(z)dz = 0, \quad f(z) = \frac{1}{z-a}$$

funksiyadan  $y|z-a| = \rho$  aylana bo‘yicha olingan integral  $2i\pi$  ga teng bu misolda  $f(z)$  funksiya  $C \setminus \{a\}$  da golomorf bo‘lib bu soha bir bog‘lamli emas. Shuning uchun ham

$$\oint_y f(z)dz \neq 0$$

bo‘ladi.

**Teorema-2:** Faraz qilaylik  $D \subset C$  bir bog‘lamli chegarasi to‘g‘rilanuvchi yopiq chiziqdan tashkil topgan, soha bo‘lsin. Agar  $f(z)$  funksiyasi  $D$ -sohaning yopig‘i biror atrofida golomorf bo‘lsa u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

bo‘ladi. Bu teoremani  $f(z)$  funksiya faqat  $D$ -da golomorf bo‘lgan hol uchun ham isbotlash mumkin.

**Teorema-3** (Ko‘p bog‘lamli soha uchun): Faraz qilaylik  $D \subset C$  chegarasi

chiziqlardan tashkil topgan ko‘p bog‘lamli soha bo‘lsin. Agar  $f(z)$   $D$ -da golomorf  $\bar{D}$  da uzluksiz bo‘lsa u holda

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \int_{\Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m} f(z)dz = 0$$

tenglik o‘rinlidir.

Tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

**Natija:** Faraz qilaylik  $D(D \subset C)$  bir bog‘lamli soha bo‘lib  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  chiziqlarning har biri boshi  $z_0$  va oxiri  $z$  nuqtada bo‘lgan chiziqlar bo‘lsin.

Agar  $f(z)$  bo‘lsa u holda  $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$  bo‘ladi.

**Misol-2.1.** Ushbu  $\oint_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz$  integralni hisoblang.

Bunda  $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$ . Agar  $D(D \subset C)$  soha deb quyidagicha

$$D = \{z \in C : |z| < \frac{3}{2}\}$$

soha olinsa unda birinchidan  $f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$  funksiya golomorf bo‘ladi. Ikkinchidan qaralayotgan yopiq chiziq  $\gamma$  shu sohaga tegishli bo‘ladi.  $\gamma \subset D$ .  $2i \notin D$  unda 1-teoremaga ko‘ra  $\oint_{\gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} \frac{z^2}{z-2i} dz = 0$  bo‘ladi.

**Misol-2.2:** Agar  $f(z)$  funksiya ushbu  $D = \{z \in C : 2 < |z - a| < R\}$  sohada golomorf bo‘lsa u holda  $\oint_{|z-a|=\rho} f(z)dz$  ( $2 < \rho < R$ ) integralning qiymati  $\rho$ -ga bog‘liq emasligini ko‘rsating.

Ixtiyoriy  $\rho_1, \rho_2$  sonlarni ( $2 < \rho_1 < R$ ,  $\rho_1 < \rho_2 < R$ ) olaylik ular uchun

$\rho_1 < \rho_2$  bo‘lsin deb ushbu  $\gamma_1 = \{z \notin C : |z - a| = \rho_1\}$ ,

$\gamma_2 = \{z \notin C : |z - a| = \rho_2\}$

yopiq chiziqlarni qaraylik.

Ravshanki,

$$G = \{z \notin C : \rho_1 < |z - a| < \rho_2\}$$

soha uchun  $\{z \in C : 2 < |z - a| < R\}$  bo‘ladi. Unda 3- teoremadan

$$\oint_{\gamma_2} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz$$

bo‘lishi kelib chiqadi, demak  $\oint_{|z-a|=\rho_1} f(z)dz = \oint_{|z-a|=\rho_2} f(z)dz$

Kompleks tekislik  $C$  da chegarasi to'g'rilanuvchi chiziq bo'lgan chegaralangan  $D$  sohani ( $D \subset C$ ) qaraylik kuzatuvchi bu soha chegarasi  $\partial D$  bo'ylab harakat qilganda soha har doim chap tomondan qolsin.

**Teorema-1:** Agar  $f(z)$  funksiya  $D$  sohada golomorf bo'lib da esa uzluksiz bo'lsa u holda

$$\frac{l}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} f(z), \text{ agar } z \in D \text{ bo'lsa} \\ 0, \text{ agar } z \in D \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

tenlik o'rinli bo'ladi.

Odatda formula Koshining integral formulasi deyiladi. Bu formula  $f(z)$  ning  $z \in D$  nuqtadagi qiymatini chegaradagi qiymatlar bilan bog'laydigan formuladir .

**Teorema-2:** Koshi tipidagi integral  $\Gamma$  sohada  $F(z)$  funksiyasini aniqlab , bu funksiya ushbu xossalarga egadir.

- a)  $F(z)$  funksiyasi  $C \setminus \Gamma$  da golomorf
- b)  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$
- v)  $F(z)$  funksiyaning istalgan tartibli hosilasi  $F^{(n)}(z)$  mavjud va

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

**Natija .** Golomorf funksiya istalgan tartibli hosilaga egadir .

Haqiqatan ham , golomorf funksiyaning Koshi integrali yordamida ifodalash mumkin . Koshi integralining istalgan tartibli hosilasi mavjudligidan berilgan funksiya ham istalgan tartibli hosilaga ega:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi. \quad (1)$$

### Misol - 2.3

Ushbu

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z+2)^4}$$

integralni hisoblang , bunda  $\gamma$  chiziq  $\mathbb{C}$  tekisligidagi  $z = -2$  nuqtani o'z ichiga oladigan ixtiyoriy yopiq kontur .

$\gamma$  kontur bilan chegaralangan sohani  $D$  deb belgilaymiz .

Ravshanki ,  $f(z) = e^z$  uchun  $f'''(z) = e^z$  bo'ladi . Bu funksiya va  $D$  soha uchun yuqoridagi teoremaning shartlari bajariladi . Unda (1) formuladan foydalanib topamiz :

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z+2)^4} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(-2) = \frac{2\pi i}{6} e^{-2} = \frac{\pi i}{3e^2}$$

### 3-§.Koshi teoremasi va uning umumlashmasi .

$$\int_{\gamma} p(z) dz = 0$$

Biz bilamizki istalgan  $P_n(z)$  ko'pxaddan yopiq kontur bo'yicha olingan integral nolga teng .

Savol , Golomorf funksiya olingan integral ham nolga teng bo'lami .

$$\int f(z) dz = 0$$

Javob . Agar integral ostidagi funksiya faqatgina sohaning chegarasida golomorf bo'lsa , javob salbiy .

**Misol-3.1** .  $\int_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \neq 0$

bu savolga quyidagi koshi teoremasi javob beradi .

**Teorema.(Koshi).**

Agar  $f(z)$  funksiya bir bog‘lamli  $D$  sohada golomorf bo‘lsa u holda bu funksiya shu  $D$  da yotuvchi ixtiyoriy silliq yoki bo‘lakli silliq yopiq sistema bo‘yicha olingan integral

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$$

ga teng bo‘ladi .

### Isbot

**1-hol:**  $D$  sohaning chegarasi uchburchakdan iborat bo‘lgan soha uchburchakning perimetri  $p$  bo‘lsin .

Teskarisini faraz qilaylik teorema shartlari bajarilsa

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| = M \neq 0$$

bo‘lsin . Funksiyaning additivlik xossasiga ko‘ra

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz + \int_{\partial\Delta_4} f(z)dz$$

$$M = \left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \leq \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta_3} f(z)dz \right| + \left| \int_{\partial\Delta_4} f(z)dz \right|$$

bu uchburchaklar ichida shunday bir uchburchak topiladiki , biz uni  $\Delta_1$  bo‘lsin

ya‘ni

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{4}$$

$\Delta_1$  uchburchakning perimetri  $\frac{P}{2}$  ga teng .

$$\Delta_2 \text{ esa } \left| \int_{\partial\Delta} f(z)dz \right| \geq \frac{M}{2} \quad \Delta_2 = \frac{p}{4}$$

$$1) \Delta_1 > \Delta_2 > \dots > \Delta_n = 0$$

$$2) \frac{P}{2^n} \rightarrow 0$$

u holda shunday bir  $z_0$  radiusli aylana topiladiki  $\Delta_n$  shu aylanaga tegishli bo'ladi

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad \Delta_n \subset |z - z_0| = \varepsilon$$

$$f(z) \in V(D) \quad z_0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad |z - z_0| < \delta$$

$$\left( \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) < \varepsilon$$

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$$

$$\int_{\partial\Delta_n} dz = 0, \quad \int_{\Delta_n} z dz = 0$$

$n$  ning yetarli katta qiymatlarida

$$\Delta_n \subset |z - z_0| < \delta$$

Demak

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z - z_0))dz \right| < \varepsilon \int_{\partial\Delta_n} |z - z_0| |dz| < \varepsilon \cdot \frac{p^2}{4^n}$$

$$M \leq \left| 4^n \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| < \varepsilon p^2$$

$$M < \varepsilon p^2 \quad M = 0$$

oxirgi xulosa

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

kelib chiqadi .

### **2-hol:**

Soha ko'pburchak bo'lsin uni uchburchaklarga bo'lib chiqamiz , u holda bu yerda ham

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

bo'ladi .

### **3-hol:**

$\gamma$  sohamiz ixtiyoriy silliq soha bo'lsin . Bu silliq sohani ko'pburchaklarga bo'lamiz va bu ko'pburchakni ham uchburchaklarga bo'lamiz u holda bu yerda ham

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

bo'ladi .

### **Natija.**

Agar  $f(z)$  funksiya bir bog'lamli  $D \subset C$  sohada holomorf bo'lsa u holda  $f(z)$  funksiyaning integrali integrallash egri chizig'iga bog'liq oxirgi nuqtalari umumiy hamda  $D$  sohada yotuvchi

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

o'rinli bo'ladi

## Koshi teoremasini umumlashmasi .

$D \subset \mathbb{C}$  bir bog'lamli soha bo'lib uning chegarasi silliq yoki bo'lakli silliq chiziqdan iborat bo'lsin .

**Teorema** Agar  $f(z)$   $D$  da holomorf uning yopig'ida uzluksiz bo'lsa

$$f(z) \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(D)$$

u holda

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

**Teorema**

Agar  $f(z)$  funksiya  $D$  sohada holomorf

$$f(z) \in \mathcal{H}(D) \cap \mathcal{C}(D)$$

bo'lsa u holda

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

bo'ladi.

Bu yerda  $D$  ko'p bog'lamli soha hamda integral chegarani orentirlangan yo'nalishda olyapti .

Orentirlangan degani soha har doim chap tomonda ya'ni musbat yo'nalishda qoladi .

## **Xulosa.**

Men ushbu "Umumlashgan Koshi teoremasi" mavzusidagi kurs ishimni yozish mobaynida kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning integrali qanday

hisoblanishini bilib oldim .

Golomorf funktsiyaning xossalari  $f \in H(D)$  funktsiya hosilasi  $D$  sohada golomorfligi haqidagi teorema va uning natijalarini o'rgandim .

Koshi teoremasining umumlashmasini Morera teoremasini isbotlanishini o'rgandim . Koshining integral formulasi haqidagi teoremalarni bilib oldim .