BUL FUNKSIYALAR.
AHAMIYATI VA AHAMIYATSIZ O'ZGARUVCHILAR.
BUL FUNKSIYALARINING FORMULALAR ORQALI AMALGA OSHIRILISHI.
TENG KUCHLI FORMULALAR

2016 Nukus

Nasurlayeva Sabohat

3 z IOM

Reja:

1. Bul funksiyalar, ularning usullari. Bul funksiyalari soni. Bul algebrasi.
2. Ahamiyatli va ahamiyatsiz o'zgaruvchilar
3. Bul funksiyalarning formulalar orqali amalga oshirilishi
4. Ikkilamchi funksiyalar. Ikkilamchi prinsipi

1-savolga javob:

- Ma'lumki, mantiqiy amallar mulohazalar algebrasi nuqtai nazardan chinlik jadvallari bilan to'liq xarakterlanadi. Agarda funskiyaning jadval shaklda berilishini esga olsak, u vaqtda mulohazalar algebrasida ham funksiya tushunchasini aniqlashimiz mumkin.
- **Ta'rif**. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mulohazalar algerbasining $x_1, x_2, \ldots, x_n$ argumentli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyasi deb nol va bir qiymat qabul funksiyaga aytiladi va uning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ argumentlari ham nol va bir qiymatlar qabul qilinadi.
- **Ta'rif**. $F:\{0,1\}^n \to \{o,1\}$ funksiya mantiqiy algebraning funksiyasi yoki Bul funksiyasi to'plami P_n orqali belgilaymiz, ya'ni

Bir o'zgaruvchili funksiyalar 4 ta bo'lib, ular quyidagilar:

1. $f_0(x)=0$ – aynan nolga teng funksiya yoki aynan yolg'on funksiya
2. $f_1(x)=x$ – aynan funksiya
3. - inkor funksiya
4. $f_3(x)=1$ – aynan birga teng funksiya yoki aynan chin funksiya

Argument	Bul funksiyalar			
x	0	x	$\bar{x}, \neg x, x'$	1
	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	0	1	0	1
0	0	0	1	1

Barcha ikki o’zgaruvchili funksiyalarni sanab o’tamiz.

x	Y	0	$\wedge$			$\downarrow$	x	$\oplus$	$\bar{x}$	$\leftrightarrow$	y	$\bar{y}$	$\vee$	1	$\rightarrow$		1
		g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1

Hammasi bo’lib 16 ta har xil iki o’zgaruvchili funksiyalar mavjud. Ularning ko’pchiligi maxsus nomlanadi:

$g_1(x,y) = x \wedge y$ – konyunksiya

$g_4(x,y) = x \downarrow y$ - Pirs strelkasi

$g_6(x,y) = x \oplus y$ - 2 modul bo’yicha qo’shish yoki Jegalkin yig’indisi

Bul funksiyalarining qiymatlar jadvaliga chinlik jadvali deyiladi. Har qanday n o’lchovli $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Bul funksiyani chinlik jadvali orqali berish mumkin:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y}$$

$$1 \oplus 1 = 2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 \oplus 0 = 1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$0 \oplus 1 = 1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$0 \oplus 0 = 0 = 2 \cdot 0 + 0$$

$g_8(x, y) = x \leftrightarrow y$ – ekvivalentlik

$g_{11}(x, y) = x \vee y$ – dizyunksiya

$g_{12}(x, y) = x | y$ - Sheffer shtrixi

$g_{13}(x, y) = x \rightarrow y$ – implikatsiya

Bul funksiyalarining qiymatlar jadvaliga chinlik jadvali deyiladi. Har qanday n o'lchovli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Bul funksiyani chinlik jadvali orqali berish mumkin:

x_1	x_2	....	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	....	0	λ_1
1	0	....	0	λ_2
0	1	....	0	λ_3
....	....	....	....	....
1	1	....	1	λ_{2n}

bu yerda $\lambda_i \epsilon \{0,1\}, i=1,2,...,2^n$. Bu jadval 2^n ta satr bo'lib, ularga 2^{2^n} ta har xil ustunlar mos qo'yish mumkin. Lekin bunday har bir ustun biror n o'zgaruvchili Bul funksiyaga mos keladi. Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi:

Teorema. N o'zgaruvchili har xil Bul funksiyalarining soni 2^{2^n} ga teng, ya'ni $|P_n|=2^{2^n}$

Bul algebrasi

Teorema. Konyunksiya $(x \wedge y)$, dizyunksiya $(x \vee y)$, inkor $(\bar{x})$ amallari va $0,1 \epsilon M$ elementlari uchun quyidagi amallar:

$\bar{\bar{x}} = x$	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$	$x \vee y = y \vee x$	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$	$x \vee y = x$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee x)$
$x \wedge x = x$	$1 \wedge x = x$	$0 \vee x = x$

bajarilsa, bunday M to'plamga Bul algebrasi deyiladi.

Mulohazalar to'plami uchun konyunksiya $(\wedge)$, dizyunksiya$(\vee)$, inkor$(\neg, -)$ amallari va $\{0,1\}$ elementlari aniqlangani uchun, bu to'plam Bul algebrasi bo'ladi.

2-savolga javob:

Ta'rif. Agar o'zgaruvchining shunday a_1, $a\text{-}_2,\ldots,a_{i-1},a_i,\ldots,a_n$ qiymatlar majmuasi mavjud bo'lib,

$f(a_1, a\text{-}_2,\ldots,a_{i-1},1,a_i,\ldots,a_n)=f(a_1, a\text{-}_2,\ldots,a_{i-1},0,a_i,\ldots,a_n)$ munosabat bajarilsa, u vaqtda x_i o'zgaruvchiga $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyaning nomuhim (sohta) o'zgaruvchisi, agar

$f(a_1, a\text{-}_2,\ldots,a_{i-1},1,a_i,\ldots,a_n)\neq f(a_1, a\text{-}_2,\ldots,a_{i-1},0,a_i,\ldots,a_n)$ munosabat bajarilsa, u vaqtda x_i o'zgaruvchiga $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyaning muhim (sohta emas) o'zgaruvchisi deb ataladi.

Misol. $f(x,y) = x\vee(x\wedge y)$ funksiyada y o'zgaruvchi sohta bo'ladi. Haqiqatdan,

$x = 1, y = 0\ da\ f(1,0) = 1\vee(1\wedge 0) = 1$

$x = 1, y = 1\ da\ f(1,0) = 1\vee(1\wedge 0) = 1$

$ya'ni\ \ f(1,0) = f(1,1)$

Misol. f_1,f_2 va f_3 funksiyalar quyidagi chinlik jadvali orqali berilgan bo'lsin:

x	y	f_1	f_2	f_3
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

Ko'rinib turibdiki, f_1 funksiya uchun x o'zgaruvchi muhim o'zgaruvchi, u esa nomuhim, f_2 uchun ikkala o'zgaruvchi ham nomuhim, f_3 uchun ikkala o'zgaruvchi ham muhim.

3-savolga javob

$Ф=\{f_1,f_2,...,f_n\}$ Bul funksiyalar to'plami berilgan bo'lsin.

<u>Ta'rif</u> Ф to'plam ustida aniqlangan formula deb, $F(Ф)=f(t_1,t_2,...,t_n)$ ifodaga aytiladi, bu yerda $f \in Ф$ va t_i Ф ustidagi yoki o'zgaruvchi, yoki formula.

Ф to'plam bazis, f tashqi funksiya, t_i lar esa qism formulalar deyiladi. Har qanday F formulaga bir qiymatli biror f Bul funksiyasi mos keladi. Bu holda F formula f funksiyani ifodalaydi deyiladi va f=funcF ko'rinishida belgilanadi.

Bazis funksiyalarini chinlik jadvalini bilgan holda, bu formula ifodalaydigan funksiyaning chinlik jadvalini hisoblashimiz mumkin.

Misol. $\Phi = \{\wedge, \rightarrow\}$ va $F = (x \wedge y) \rightarrow x$

x	y	$x \wedge y$	$F = (x \wedge y) \rightarrow x$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

F formulaga mos keluvchi f funksiyani Φ dan olingan funksiyalarning superpozitsiyasi, f funksiyani Φ dan hosil qilinish jarayonini superpozitsiya amali deb ataymiz.

Misol. $f(x_1, x_2, x_3) = \left((x_1 \wedge x_2) \vee x_1\right) \to x_3$ formula berilgan bo'lsin. $\left((x_1 \wedge x_2) \vee x_1\right) \to x_3$ formula uchta qadamda ko'riladi. Haqiqatdan, biz quyidagi uchta qism formulalarga ega bo'lamiz:

$(x_1 \wedge x_2)$, $((x_1 \wedge x_2) \vee x_1)$, $((x_1 \wedge x_2) \vee x_1) \to x_3$

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge x_2) \vee x_1$	$((x_1 \wedge x_2) \vee x_1) \to x_3$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

Biz yuqorida ko'rdikki, Φ to'plamdan hosil qilingan har bir formulaga mantiq algebrasining formulasi mos keladi, biroq har xil formulalarga teng funksiyalar mos kelishi mumkin.

Ta'rif Bitta Bul funksiyasini ifodalovchi formulalar ekvivalent deyiladi, ya'ni

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow funcF_1 = funcF_2$$

Teorema. Ixtiyoriy f,g,h Bul funksiyalar uchun quyidagi ekvivalentliklar o'rinli:

1. $\bar{\bar{f}} = f$
2. Konyunksiya, dizyunksiya va ikki modul bo'yicha qo'shishning idempotentligi:
   $f \wedge f = f, \quad f \vee f = f, \quad f \oplus f = f$
3. Konyunksiya, dizyunksiyava ikki modul bo'yicha qo'shishning kommunikativligi:
   $f \wedge g = g \wedge f, \quad f \vee g = g \vee f, \quad f \oplus g = g \oplus f$
4. Konyunksiya, dizyunksiya va ikki modul bo'yicha qo'shishning assotsiativligi:
   $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h, \quad f \vee (g \vee h) = (f \vee g) \vee h, \quad f \oplus (g \oplus h) = (f \oplus g) \oplus h$

5. Distributivlik qonunlari:

$f\wedge(g\wedge h) = (f\wedge g)\vee(f\wedge h), \quad f\vee(g\wedge h) = (f\vee g)\wedge(f\vee h), \qquad (f\wedge g)\oplus(f\wedge h)$

6. Yutish qonuni:

$f\wedge(f\vee g) = g, \quad f\vee(f\wedge g) = f$

7. De Morgan qonuni:

8. $\overline{f\vee g} = \bar{f}\wedge\bar{g}, \quad \overline{f\wedge g} = \bar{f}\vee\bar{g},$

9. $f\vee\bar{f} = 1, \; f\wedge\bar{f} = 0$

10. $f \rightarrow g = \bar{g} \rightarrow \bar{f}$

11. Implikatsiyani yo'qotish qonuni:

$f \leftrightarrow g = \bar{f}\vee g$

12. Ekvivalentlikni yo'qotish qoidasi:

$f \leftrightarrow g = (f \rightarrow g)\wedge(g \rightarrow f)$

13. $\bar{f} = f|f = f\downarrow f = f\oplus 1$

14. $f|g = \overline{(f\wedge g)}, \quad f\downarrow g = \overline{f\vee g}$

15. $f\vee g = (f|f)|(g|g), \; f\wedge g = (f\downarrow f)\downarrow(g\downarrow g), \; f\rightarrow g = f|(g|g)$

16. $f\oplus g = \overline{f \leftrightarrow g}$

4-savolga javob:

Ta'rif. $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\epsilon P_n$ bul funksiya bo'lsin, unda $f^*(x_1,x_2,\dots,x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})}$ funksiya, f bul funksiyaga ikkilamchi bo'lgan funksiya deyiladi.

Bu ta'rifdan bevosita, ixtiyoriy f bul funksiyasi uchun f**=f ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan,

$$f^{**} = (f^*)^* = (\overline{f^*(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})})^* = \overline{\overline{f^*(\overline{\overline{x_1}},\overline{\overline{x_2}},\dots,\overline{\overline{x_n}})}} = f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f.$$

Misol. a) $f = x \vee g,\ f^* = ?$ $\quad b)\ g = x, g^* = ?$ $\quad c)\ h = \bar{x},\ \ h^* = ?$

Yechish.

$a)\ f^* = \overline{\bar{x} \vee \bar{g}} = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{g}} = x \wedge g;$

$b)\ g^* = \overline{(\bar{x})} = x = g, \qquad g^* = g$

$c)\ h^* = \overline{(\bar{\bar{x}})} = \bar{x} = h$

Ta'rif. Agar f*=f bo'lsa, f funksiya o'z-o'ziga ikkilamchi deyiladi.

Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, inkor va aynan funksiya o'z-o'ziga ikkilamchi, dizyunksiya funksiya o'z-o'ziga ikkilamchi emas.

Teorema. Agar $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ bul funksiya $f(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n))$ formula ko'rinishida ifodalangan bo'lsa, bu yerda $f_1,f_2,\ldots,f_n$ lar bul funksiyalar, unda $f^*(f^*_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),f^*_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,f^*_n(x_1,x_2,\ldots,x_n))$ formula $\varphi^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiyani ifodalaydi.

Isbot.

$$\varphi^*(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bar{\varphi}(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})=$$

$$func\bar{f}\left(f_1(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n}),\ldots,f_n(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})\right)=$$

$$func\bar{f}\left(\bar{\bar{f}}_1(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n}),\ldots\bar{\bar{f}}_n(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})\right)=$$

$$func\bar{f}\left(\overline{f_1^*}(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n}),\ldots\overline{f_n^*}(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})\right)=$$

$$funcf^*\left(f_1^*(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n}),\ldots f_n^*(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})\right).$$

Teorema isbotlandi.

Keyingi teorema "ikkilamchi prinsipli" deb nomlanadi va matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi. Bunda induksiya o'tishlar yuqoridagi isbotlangan teorema asosida amalga oshiriladi.

Teorema. (Ikkilamchi prinsipli)

$\Phi=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ va $\Phi^* = \{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*\}$ - bazislar bo'lsin. U holda, agar F formula Φ bazisda f funksiyani ifodalasa, unda F formuladan f_i ni uni ikkilamchi f_i^* funksiyaga almashtirish natijasida hosil qilingan F* formula Φ bazisda f* funksiyani ifodalaydi, ya'ni

$$f = func[\Phi]u \Rightarrow f^* = funcF^*[\Phi^*], bu\ yerda\ F^*[\Phi^*] = F[\Phi]\{f_i^* | f_i\}_{i=1}^{m}$$