

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI**

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Fizika matematika fakulteti

**5130100 – matematika yo`nalishi bakalavriyat
bosqichini bituruvchisi**

USMONOVA FOTIMA IKROMJON QIZINING

**MATEMATIK ANALIZ NAZARIYASIGA OID
MUHIM MASALALAR**

Mavzusidagi

**BITIRUV
MALAKAVIY
ISHI**

Ilmiy rahbar: katta-ilmiy-hodim-izlanuvchi R. M. Xakimov

NAMANGAN – 2015

BIRITUV MALAKAVIY ISH REJASI

I. KIRISH

- I.1. Mamlakatimizda ta'lim sohasida olib borilayotgan islohotlar haqida.
- I.2. O'zbekiston-jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi sharoitida iqtisodiyotning asosiy ko'rsatkichlari va o'sish sur'atini barqaror saqlab qolgan davlat.
- I.3. Mavzuning dolzarbligi va uning ahamiyati.
- I.4. BMIning maqsadi va vazifalari.
- I.5. Tanlangan ob`yektlar va tadqiqot usullari.
- I.6. BMIning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati.
- I.7. BMIning tuzilishi va tarkibi.

II. ASOSIY QISM. MATEMATIK ANALIZ NAZARIYASIGA OID MUHIM MASALALAR.

- II.1. Haqiqiy sonlar sistemasi.
- II.2. Funktsiyalar va limitlar.
- II.3. Differensiallash.
- II.4. Riman integrali.
- II.5. Cheksiz qatorlar.

III. XULOSA.

IV. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI.

ILOVA. INTERNET MA'LUMOTLARI

KIRISH

1.1. Mamlakatimizda ta'lim sohasida olib borilayotgan islohotlar haqida

Milliy mentalitetimizga ko'ra, o'zbek oilalari azaldan ko'p bolalik bo'lib, har bir ota-ona farzandlarini sog'lom, barkamol, kasb-hunarli va oliy ma'lumotli, bilimli bo'lib voyaga yetishlari uchun tinmay harakat qilishgan.

Prezident I.Karimov O'zbekiston Respublika Oliy Majlisining 1997-yil 29 avgustdagi IX sessiyasidagi nutqida shunday degan edi:

«Bu muqaddas zaminda yashayotgan har qaysi inson o'z farzandining baxtu saodati, fazlu kamolini ko'rish uchun butun hayoti davomida kurashadi, mehnat qiladi, o'zini ayamaydi»

O'zbek millati sobiq sho'rolar davrida ham o'zining milliy o'zligini yo'qotgan emas.

Bugungi kunda milliy an'analarimizni qaytadan tiklash, millatimizga mos ta'lim-tarbiyani shakllantirish uchun qulay imkoniyatlar mavjud.

Prezident I.Karimov xalqning azaliy turmush tarzi, an'analari, urf-odatlarini va ko'nikmalarini yuksaltirish amalga oshirish mumkin bo'lib qoldi.

Mamlakatimiz mustaqillikka erishganidan keyin xalq xo'jaligini tubdan isloh qilishda ta'lim tizimiga alohida e'tibor bilan qarab kelinmoqda.

Sobiq mustabid tuzumda shakllangan ta'lim tizimi 4 yillik boshlang'ich ta'lim, 9 yillik to'liqsiz o'rta ta'lim va 2 yillik to'liq o'rta ta'limdan iborat bo'lib, bu tizim yosh avlodni kommunistik tuzum g'oyalari bilan tarbiyalagan va ushbu tuzilish ehtiyojlariga mos holda ta'lim-tarbiya berar edi.

Shu bilan birga ta'limning qaysi bosqichida o'quvchilarga nimani o'qitish maqsadga muvofiqligini ilmiy jihatdan asoslanmagan edi.

Tabiiyki, bunday ta'lim-tarbiya mutaql O'zbekistonimiz ravnaqiga mos kelmaydi.

Ajablanarli joyi shunda ediki, bolaning dunyoqarashi, didi, salohiyati shakllanadigan boshlang'ich sinflarga esa o'qituvchilar pedagogika texnikumlari va bilim yurtlarida tayyorlanar edi.

Agarda bola maktabga ilk qadam qo'ygan davrlarida etarli darajada ta'lim-tarbiya olsa, uning yuqori sinflardagi fanlarni o'zlashtirishi yanada sezilarli bo'ladi.

Buning uchun boshlang'ich sinflarida yuqori malakali mutaxassis kadrlar dars berishi kerak.

Hozirgi ta'lim bosqichlariga qo'yilgan talablarning aniq emasligi, o'quv jarayoni mazmuni o'qitiladigan 20 ga yaqin predmetlardagi darsliklarning mazmun- mohiyati davr talabiga javob bermaydi.

O'quv rejalardagi axloq-odob, ijtimoiy, iqtisodiy, huquqiy bilimlar asoslarini o'rgatadigan fanlarning umumta'lim predmetlari orasidagi o'rni noaniq.

«Umumiy ta'lim olish, kasbni va tegishli maxsus tayyorgarlikni o'tishni erkin tanlashda barchaga baravar huquq berilishi, yangi demokratik ta'lim konsepsiyasini ishlab chiqish va amalga oshirish lozim bo'ladi.

Bunda o'zbek xalqining va respublika xududida yashovchi boshqa xalqlarning milliy tarixiy va madaniy an'analari, ma'naviy tajribasi ta'lim va tarbiya tizimimizga uzviy ravishda kiritilishi zarur.

O'zbekistonning iqtisodiy omillari tashqi siyosatida muhim ahamiyatga ega. Xorijiy investitsiyalarning respublika iqtisodiyotiga keng jalb etilishi qo'shma korxonalarning tashkil etilishi, xorijiy sheriklar bilan to'g'ridan to'g'ri aloqalar o'rnatishi tovarlarni eksport va import qilishda xorijiy tillarni o'rganish va o'rgatishga katta zarurat tug'ilmoqda.

Bu masalani ijobiy hal etishda chet tillarida o'qitish samarasini ko'tarishga alohida e'tibor berish kerak.

Muhtaram Prezidentimiz aytganlaridek, bizga bitiruvchilar emas, maktab ta'lim - tarbiyasini ko'rgan va mustaqil fikrga ega bo'lgan shaxslar kerak.

Respublikamizda demokratik huquqiy jamiyat asoslarini faol ravishda vujudga keltirar ekanmiz, o'qituvchi va o'quvchi munosabatlarida majburiy itoatkorlik o'rniga ongli intizom egallashiga intilishimiz kerak.

Ma'lumki, ta'lim har bir jamiyatning ajralmas tarkibiy qismi bo'lib uning rivojlanish ko'rsatkichi hisoblanadi. Ijtimoiy tajribaning bog'lovchi bo'g'ini

sifatida u madaniy an'analar butunligi vorisiyligini hamda jamiyat taraqqiyotini ta'minlaydi.

Ta'lim sohasi O'zbekiston rahbariyati va hukumati siyosatining ustuvor yo'nalishidir.

Ta'lim to'g'risidagi qonun O'zbekiston Respublikasi Oliy majlisining 1997 yil 29 avgustdagi IX sessiyasida qabul qilingan.

“Ta'lim to'g'risida”gi qonun 5 bob, 34 moddadan iborat.

Har kimning bilim olish huquqiga ega ekanligi, bepul umumiy ta'lim olish davlat tomonidan kafolatlanishi, maktab ishlari davlat nazoratida ekanligi qonunning «Ushbu qonunning maqsadi» deb nomlangan 1- moddasida o'z ifodasini topgan.

O'zbekiston Respublikasidagi barcha fuqarolar bir xil huquq va erkinliklarga ega bo'lib jinsi, irqi, millati, dini, ijtimoiy kelib chiqishi, e'tiqodi shaxsiy va ijtimoiy mavqeidan qat'iy nazar qonun oldida tengdir. Ta'lim to'g'risidagi qonunning 4- moddasi yuqorida keltirilgan O'zbekiston Respublikasi Konstitusiyasining 18- moddasiga mos keladi.

Bu tamoyillarga ta'lim tizimining barcha bo'g'inlariga o'quvchilik va talabalikka o'qishga qabul qilishda amal qilib kelinmoqda.

O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 1993 yil 5 fevraldagi 60- sonli «O'zbekiston Respublikasi Oliy o'quv yurtlariga abituriyentlarni test sinovi asosida tanlab olish haqida» gi qaroriga ko'ra abituriyentlari Davlat test markazi test sinovida to'plagan ballariga asosan o'qishga qabul qilmoqda.

O'tgan yillar davomida mamlakat ta'lim tizimida hamdo'stlik davlatlari orasida birinchilardan bo'lib davlat ta'lim standartlari, o'quv dasturlari va darsliklarning yangi avlodi yaratiladi hamda bosqichma-bosqich amaliyotga joriy etish orqali ta'lim jarayonining mazmuni tubdan takomillashtirildi.

«Ta'lim to'g'risida»gi qonunning 7- moddasi (Davlat ta'lim standartlari)ga binoan O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi 1999 yil 16 avgustda «Umumiy o'rta ta'limning davlat ta'lim standartlarini tasdiqlash to'g'risida» qaror qabul qildi.

Ta'lim tizimining yagona va uzluksizligini ta'minlash maqsadida O'zbekiston Respublikasida maktabgacha ta'lim, umumiy o'rta ta'lim, o'rta maxsus, kasb- hunar ta'limi, oliy ta'lim, oliy o'quv yurtidan keyingi ta'lim kadrlar malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash hamda maktabdan tashqari ta'lim turlari faoliyat ko'rsatib kelmoqda.

O'qituvchilarning mas'uliyatli mehnati va ularga g'amxo'rlik ko'rsatish hamisha davlatning diqqat markazida turadi.

Keyingi yillarda xalq ta'lim xodimlarining ish haqi miqdorlari bir necha marta oshirildi.

Hozirgi kunda kadrlar tayyorlash milliy dasturi O'zbekiston Respublikasi «Ta'lim to'g'risida» gi qonuni asosida milliy tajriba tahlili va ta'lim tizimidagi umumjahon yutuqlarini e'tiborga olgan holda ishlab chiqarish, kadrlar tayyorlash milliy dasturi yuksak kasb- hunar madaniyati ijodiy va ijtimoiy faollikni o'zida mujassamlashtirilgan, ijtimoiy-siyosiy hayotda mo'ljallarni to'g'ri ola biladigan, istiqbol vazifalarni ilgari surish va hal etishga qodir kadrlarning yangi avlodini shakllantirishga yo'naltirilgan.

Milliy dasturning maqsadi va vazifasi ta'lim sohasini tubdan isloh qilish, uni o'tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to'la xalos etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida yuksak ma'naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlashdan iborat milliy tizimini yaratishdir.

2005 yildan keyingi yillarga rejalashtirilgan uchinchi bosqichda XXI asr raqobatbardosh kadrlarini tayyorlashning yangi tizimini taraqqiy ettirish va takomillashtirish nazarda tutilgan kadrlar tayyorlash tizimida shaxs bosh sub'ekt sifatida ko'riladi. U bir vaqtning o'zida ta'limiy xizmatlarning ham iste'molchisi, ham yaratuvchisi deb qaraladi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturining pirovard natijasi shaxsning o'qimishli va yaratuvchi bo'lib shakllanishidir.

Agarda insonda yaratuvchilik mahorati, malakasi bo'lmasa iqtisodiyotning raqobatbardoshligiga bardosh bera olmaydi, inson jamiyatning farovonligini ta'minlay olmaydi.

Inson omili mazmunida Milliy dastur quyidagi eng zarur vazifalarni hal etishni nazarda tutadi. Ta'limning har bir bosqichida inson omili bilan bog'liq bo'lgan dolzarb vazifalarni hal qilish nazarda tutilgan.

Mazkur model uch qutbdan iborat.

Shaxs uning birinchi qutbi bo'lib, uzluksiz ta'lim tizimida bilimlarini iste'mol qilish va yaratish borasidagi o'zining fuqarolik burchini amalga oshiruvchi inson.

Davlat va jamiyat shaxsning fuqarolik burchlarini samarali amalga oshirilishini va iqtisod tarmoqlarini malakali kadrlar bilan ta'minlash bo'yicha milliy vazifalarni hal etadi.

Iqtisodiyot esa davlat byudjeti yoki kontrakt asosida o'zi uchun zarur bo'lgan kadrlar yetishtirishni moddiy texnika bazasi va moliya bilan ta'minlaydi.

Shaxs kadrlarni tayyorlash O'zbekiston modeli, davlat va jamiyat iqtisodiyoti kadrlar tayyorlash tizimining ko'p qutbliligi «Kadrlar tayyorlash bo'yicha milliy dastur to'g'risida» qonunining umumqonun, barchaga taalluqli ekanligini namoyon etadi.

Uzluksiz ta'lim tizimining mazmuni va tuzilmasini isloh qilmay turib, milliy dasturni amalga oshirib bo'lmaydi. Dastlabki kunlardan boshlab yurtimizda jamiyatni isloh qilish va yangilash jarayonining eng muhim bo'g'ini jamiyatdagi demokratik o'zgarishlarning iqtisodiyotni barqaror rivojlantirishning zaruriy va majburiy sharti sifatida ta'lim sohasini isloh qilish masalasiga katta e'tibor bilan qaralmoqda.

So'nggi yillarda yangi tipdagi o'rta hunar o'quv muassasalari akademik litseylar va kasb-hunar kollejalri tarmog'i shakllandi.

«Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» yosh avlodga uzluksiz ta'lim berish va uni tarbiyalash jarayonini yaxlit qamrab oladigan yagona ta'lim majmuidir. Bunda ta'lim tizimining har bir bo'g'ini alohida o'rin va mas'uliyatga ega. Dasturni to'liq

amalga oshirish, qo'yilgan vazifalarga erishish na shu bo'g'inlarning holati va rivojlanish darajasiga ularning o'zaro uyg'unligiga bog'liqdir.

«Ta'lim to'g'risida» gi qonun qabul qilingunga qadar mamlakatimizda faoliyat ko'rsatib kelgan ta'lim tizimining umumta'lim maktablari bo'g'inida ham katta muammolar to'planib qolgan edi.

O'tgan yillar davomida mamlakat ta'limi tizimida hamdo'stlik davlatlari orasida birinchilardan bo'lib davlat ta'lim standartlari, o'quv dasturlari va darsliklarning yangi avlodi yaratildi hamda bosqichma- bosqich amaliyotga joriy etish orqali ta'lim jarayonining mazmuni tubdan takomillashtirilmoqda. O'zbekiston Respublikasi xalq ta'limi hamda oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining qo'shma xay'at yig'ilish qaroriga ko'ra 2010-2011 o'quv yilidan boshlab yangi o'quv reja va g'oya dasturlari asosida ish olib borilmoqda.

Yuqori malakali ish kuchi va yetuk mutaxassis yoshlarsiz buyuk kelajakni qurib bo'lmaydi. Bunday kadrlarni ta'lim tizimi xalq xo'jaligini etkazib beradi. Shuning uchun ta'limdagi davlat ta'lim standartlarini o'quv dasturlari va o'quv adabiyotlarni takomillashtirish o'quv jarayoniga yangi axborot va pedagogik texnologiyasi keng joriy etish, yoshlarni komil inson qilib tarbiyalash jonbozlik ko'rsatishdagi o'qituvchi va domlalariga e'tiborni yanada oshirish ta'lim-tarbiya tizimini safati jixatidan butunlay yangi bosqichga ko'tarish darkor.

Ta'lim sohasida zamonaviy axborot va kompyuter texnologiyalari, internet tizimlari keng qo'llanmoqda. Zamonaviy usullarini o'zlashtirish bugungi taraqqiyot darajasini belgilab beradigan bunday ilg'or yutuqlarni maktablarga keng kirib borishi zamon talabidir.

1.3. Mavzuning dolzarbligi va uning ahamiyati.

Ushbu bitiruv malakaviy ishda matematik tahlil, haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va shuningdek topologiya, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan kopgina misollar keltirilgan. Analizdagi kontrmisollarni o'rganish bilan ko'pgina matematiklar shug'ullanishgan, xususan, amerikalik matematiklar B. R. Gelbaum va Dj. M. Olmstedlar shular jumlasidandir. Misollarning ko'pi u yoki bu adabiyotlarda keltirilgan. Bitiruv malakaviy ishning

mohiyati mana shunday qiziqarli va kerakli misollarni bir joyga to'plashdan iborat. Mavzuning Matematik analiz nazariyasiga oid muhim masalalar deyilishiga sabab matematik tahlil va funksiyalar nazariyasini o'rganayotganlarni, agar ularning yetarlicha tajribasi bo'lmasa, ba'zi "xavfli" savollarga noto'g'ri javob berishdan yoki ularni noto'g'ri tasavvur qilishdan asrashdir. Shu sababli ham tanlangan mavzu dolzarb hisoblanadi.

" A sinfnining barcha elementlari B sinfga ham tegishli: $A \subset B$ " kabi S tasdiqning rost yoki yolg'onligini aniqlash matematiklar uchun odatda tipik savol hisoblanadi. Bu tasdiqning rostligini isbotlash degani $A \subset B$ ni isbotlash deganidir. Uning yolg'onligini isbotlash esa A sinfdan B sinfga yotmaydigan element topishdan iborat, ya'ni kontrmisol keltirishdan iborat. Masalan, agar S "Har qanday uzluksiz funksiya biror nuqtada differensiallanuvchi" tasdiqdan iborat bo'lsa, u holda A va B to'plamlar mos ravishda biror nuqtada uzluksiz va differensiallanuvchi barcha funksiyalardan iborat bo'ladi. Bundan tashqari, Veyershtassning birorta ham nuqtada differensiallanuvchi bo'lmagan uzluksiz f funksiyaga misoli $A \subset B$ ga kontrmisol bo'ladi, chunki f funksiya B da yotmaydigan A ning elementi bo'ladi. Shuni aytish mumkinki, matematika ikki qismdan – isbotlar va kontrmisollardan, matematik ishlar esa isbotlarni topish va kontrmisollar qurishdan iborat. Odatda ko'pgina matematik adabiyotlar rost tasdiqlarni isbotlashga bag'ishlanadi. Maskur bitiruv malakaviy ish esa yolg'on tasdiqlarga kontrmisollar keltirishga bag'ishlangan.

Umuman olganda matematikadagi misollar ikki turga bo'linadi – ko'rgazmali va kontrmisollar. Bulardan birinchisi berilgan u yoki bu tasdiq nima uchun ma'noga ega ekanligini ko'rsatsa, ikkinchisi nima uchun u yoki bu tasdiqning ma'noga ega emasligini ko'rsatadi. Shu bilan birga shuni aytish mumkinki, har qanday misol unga qo'llash mumkin bo'lmagan biror tasdiq uchun kontrmisol vazifasini o'taydi. Lekin biz aynan biror tasdiq yoki teoremaning u yoki bu shartini muhimligini ko'rsatish uchun xizmat qiladigan kontrmisollarni o'rganamiz. Masalan, uzluksiz funksiya misoliga ko'phad kontrmisol bo'la olmaydi, biroq ko'phad chegaralanmagan yoki nodavriy funksiya sifatida

kontrmisol bo`la oladi. Xuddi shunga o`xshash chegaralangan yopiq intervalda barcha monoton funksiyalar sinfi integrallanuvchi funksiyalar sinfi sifatida kontrmisol bo`la olmaydi, ammo bu sinf funksional fazo (vektor fazo bundan mustasno) misoli sifatida kontrmisol bo`ladi. Shularni hisobga olgan holda mavzuning dolzarbligiga yana bir bor amin bo`lamiz.

1.4. BMIning maqsadi va vazifalari:

1. Turli adabiyotlarda keltirilgan matematikaga oid kontrmisollarni o`zbek tilida bir joyga jamlash;
2. Matematik tahlil fanining ba`zi bo`limlarida berilgan tasdiqlarga kontrmisollar keltirish va ularni ba`zilarini izoxlash;
3. Kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasi faninig ba`zi bo`limlaridagi tasdiq-teoremalarga kontrmisollar keltirish va ularni izoxlash.

1.5. Tanlangan ob`yektlar va tadqiqot usullari:

O`rta maktab, akademik litsey, kasb-hunar kolledjlari uchun matematikadan va oliy o`quv yurtlari uchun esa matematik tahlil, kompleks analiz, topologiya, haqiqiy o`zgaruvchili funksiyalar nazaryasi fanlaridagi o`quv jarayonlarida va shu bilan birga matematika bilan shug`ullanayotganlar foydalanishlari mumkin.

1.6. BMIning ilmiy metodik yangiligi va amaliy ahamiyati:

1. Turli adabiyotlarda keltirilgan matematikaga oid kontrmisollar o`zbek tilida bir joyga jamlandi.
2. Matematik tahlil fanining ba`zi tasdiq(teorema)lariga kontrmisollar keltirildi va ularning ba`zilari o`rganib chiqilib, zamonaviy adabiyotlardan foydalanib kengaytirildi..
3. Kompleks analiz kursining ba`zi tasdiq(teorema)lariga kontrmisollar keltirildi va ularning ba`zilari o`rganib chiqildi.
4. Matematik tahlil, kompleks analiz, topologiya, haqiqiy o`zgaruvchili funksiyalar nazaryasi fanlariga oid keltirilgan kontrmisollardan oliy o`quv yurtlaridagi talabalar, magistrLAR, matematika o`qituvchilari yuqorida sanab

o`tilgan fan darslarida yoki mustaqil hamda o`rta ta`lim sohasidagi mutaxassislar fakul`tativ mashg`ulotlarda foydalanishlari mumkin.

1.7. BMIning tuzilishi va tarkibi:

Bitiruv malakaviy ishi Kirish, Asosiy qism va Xulosadan iborat. Bundan tashqari BMIda foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati va internet ma`lumotlari ilova qilingan.

II. ASOSIY QISM. MATEMATIK ANALIZ NAZARIYASIGA OID

MUHIM MASALALAR.

II.1. HAQIQIY SONLAR SISTEMASI.

Mazkur reja uchun muhim bo'lgan analizning belgilashlari va asosiy ta'riflarini kiritishdan boshlaymiz. Bu ta'rif va ifodalar qisqartirilgan ko'rinishda izohlab beriladi.

Agar A – ixtiyoriy to'plam bo'lsa, u holda “ a element A to'plamga tegishli” degan so'z $a \in A$ ko'rinishda belgilanadi. $a \notin A$ yozuv a element A to'plamga tegishli emasligini bildiradi. Agar A to'plamning har bir x elementi B to'plamga ham tegishli bo'lsa, u holda “ A to'plam B to'plamga qism to'plam” ($A \subset B$ belgilanadi) deyiladi, bunda $x \in A \Rightarrow x \in B$ teng kuchli implikasiya. Biz ba'zan *shunda va faqat shundaki* deyish o'rniga $\Leftrightarrow$ belgini ishlatamiz. Qulaylik uchun to'plamning elementlari *nuqta* deb ataladi. $\{a, b, c, \dots\}$ yozuv $a, b, c, \dots$ elementlardan tashkil topgan to'plamni ifodalaydi. To'plamlar nazariyasida to'plamlarni ifodalashda $\{ \dots | \dots \}$ belgi qo'llaniladi, buning ma'nosi shuki, birinchi figurali qavs va vertikal chiziq orasiga to'plamning umumiy elementi yoziladi, bu to'plamni tariflovchi xossa esa vertikal chiziq va ikkinchi figurali qavs orasiga yoziladi. Ikkita A va B to'plamlar birlashmasi va kesishmasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi

$$A \cup B \equiv \{x | x \in A \text{ yoki } x \in B\},$$

$$A \cap B \equiv \{x | x \in A, x \in B\},$$

bunda vergul “va” bog'lovchisi o'rnida keladi. A va B to'plamlarning ayirmasi deb

$$A \setminus B \equiv \{x | x \in A, x \notin B\}$$

ko'rinishdagi to'plamga aytiladi.

Agar qaralayotgan to'plamlarning barchasi qandaydir, universal S to'plamning qism to'plamlari bo'lsa, u holda $S \setminus A$ ayirma A to'plamning to'ldiruvchisi deyiladi va A^c belgi bilan ifodalanadi. $A \setminus B$ ayirma B to'plamning A ga nisbatan to'ldiruvchisi deyiladi.

Bo'sh to'plamni, ya'ni birorta ham elementi bo'lmagan to'plamni $\emptyset$ bilan belgilanadi. Agar A va B ikkita bo'sh bo'lmagan to'plamlar bo'lsa, u holda (a,b) ($a \in A, b \in B$) tartiblangan juftliklardan tuzilgan to'plam dekart ko'paytma deyiladi va $A \times B \equiv \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$ kabi yoziladi. Agar $(a,b) \in A \times B$ bo'lsa, u holda a (a,b) elementning birinchi koordinatasi, b esa ikkinchi koordinatasi deyiladi; birinchi va ikkinchi koordinatalar (a,b) proeksiyalar deyiladi. $A \times B$ ning ρ qism to'plami A va B to'plamlar orasidagi munosabat deyiladi. Agar f munosabatning ixtiyoriy ikkita elementining birinchi koordinatasi bir xil bo'lsa, u holda bunday f munosabatga funksiya deyiladi. "Mavjud" yoki "Mavjudlilik" sharti - $\exists$ mavjudlik kvantori, "shunday" so'zi - $\ni$ belgi bilan ifodalanadi. f funksiyaning $D=D_f$ aniqlanish sohasi (yoki to'plami) va $R=R_f$ qiymatlar sohasi (yoki to'plami) quyidagicha aniqlanadi:

$$D=D_f \equiv \{x \mid \exists y \ni (x,y) \in f\}$$

$$R=R_f \equiv \{y \mid \exists x \ni (x,y) \in f\}$$

Agar f funksiya aniqlangan to'plam A bo'lsa, u holda f, A da aniqlangan (yoki akslanadi) deyiladi; Agar f funksiya qiymatlari to'plami B bo'lsa, u holda f, B da o'zgaradi deyiladi. f - funksiya X da aniqlangan va qiymatlari Y da bo'lsin. Biz uni ikkita usul bilan yozamiz:

$$f: X \rightarrow Y,$$

$$X \xrightarrow{f} Y.$$

Berilgan $f: X \rightarrow Y$ funksiyada x elementga mos keluvchi y elementi uchun $y = f(x)$ belgilash ishlatiladi va uni x ning tasviri (obrazi) deyiladi.

X to'plamning biror P qismi berilgan bo'lsa, P to'plamning barcha elementlarini Y dagi tasvirlaridan iborat bo'lgan to'plam P to'plamning f aks ettirishdagi tasviri deyiladi va $f(P)$ bilan belgilanadi.

Y to'plamning ixtiyoriy y elementi berilgan bo'lsin. X to'plamning y ga akslanuvchi barcha elementlaridan iborat qismi y elementning asli (proobrazi) deyiladi. U - $f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi. Y ning Q qismi berilsa, X ning Q to'plamiga o'tuvchi qismi Q ning asli (proobrazi) deyiladi, $f^{-1}(Q)$ kabi yoziladi.

Agar Y to'plamdagi har bir elementning asli bo'sh to'plam bo'lmasa, u holda X to'plam Y to'plamning ustiga aks ettirgan deyiladi. Agar Y to'plamada shunday element mavjud bo'lsaki, bu elementning asli bo'sh to'plam bo'lsa, u holda X to'plam Y to'plamning ichiga aks ettirish deyiladi.

$f: X \rightarrow Y$ ustiga aks ettirish berilgan bo'lsin. Agar Y dagi har bir elementning asli yagona bir elementdan iborat bo'lsa, u holda bu aks ettirish o'zaro bir qiymatli aks ettirish deyiladi.

Qiymatlari to'plami bitta nuqtadan iborat funksiya o'zgarmas funksiya deyiladi.

f va g shunday funksiyalar bo'lsinki, bunda g ning qiymatlar to'plami f ning aniqlanish sohasiga qism to'plam bo'lsin. U holda f va g funksiyalar $f \circ g$ kompazitsiyalangan funksiyalar deyiladi, qisqacha, $f(u)$ va $u=g(x)$ funksiyalarning kompazitsiyasi $y=f(g(x))$ deyiladi. (Bundan korinadiki, f va g kompazitsiya g va f kompazitsiyaga mos kelmaydi; misol: $(x+1)^2 \neq x^2+1$.)

Agar A – bo'sh bo'lmagan to'plam bo'lsa, u holda $A \times A$ ning ichida (ustida) A ning qiymatlarini bilan aniqlangan har qanday funksiya A ning ichida (ustida) gi binar amal deyiladi. Klassik arifmetikada ikkita asosiy binar amal mavjud: qo'shish va ko'paytirish. Sal abstraktroq to'plamlardagi amallar ham shu arifmetik amallar ega bo'lgan xossalarga egadir, shuning uchun sal abstraktroq to'plamlardagi amallar ham shu nomni saqlab qolgan.

Agar binar amal F qo'shish deb atalsa va $z=F((x,y))$ bo'lsa, u holda odatdagi $z=x+y$ yozuvdan foydalaniladi. Agar binar amal G ko'paytirish deb atalsa va agar $z=G((x,y))$ bo'lsa, u holda, odatda, $z=xy$ yoki $z=x \cdot y$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif I. Agar bo'sh bo'lmagan F to'plamda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi, ikkita qo'shish va ko'paytirish deb ataluvchi, binar amallar aniqlangan bo'lsa, F to'plam maydon deyiladi:

A. qo'shish uchun:

(i) assotsiativlik qonuni

$$x, y, z \in F \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z,$$

(ii) F to'plamning $\exists 0$ elementi mavjudki,

$$x \in F \Rightarrow x+0=x,$$

$$(iii) x \in F \Rightarrow \exists (-x) \in F \ni x+(-x)=0,$$

(iv) kommutativlik qonuni

$$x, y \in F \Rightarrow x+y=y+x;$$

B. ko'paytirish uchun:

(i) assotsiativlik qonuni

$$x, y, z \in F \Rightarrow x(yz)=(xy)z,$$

(ii) F to'plamda $\exists 1 \neq 0$ element mavjudki,

$$x \in F \Rightarrow x \cdot 1 = x,$$

$$(iii) x \in F, x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in F \ni x \cdot x^{-1} = 1,$$

(iv) kommutativlik qonuni

$$x, y \in F \Rightarrow xy=yx;$$

C. qo'shish va ko'paytirish uchun:

distributivlik qonuni (aniqrog'i ko'paytirish qo'shishga nisbatan distributiv)

$$x, y, z \in F \Rightarrow x(y+z)=xy+xz.$$

A (ii) dagi F maydonning 0 elementi F maydonning noli (yoki additiv birligi) deyiladi. A (iii) dagi F maydonning $(-x)$ elementi x ga qarama – qarshi (yoki additiv teskari) element deyiladi. $x-y \equiv x+(-y)$ formula bilan aniqlangan $x-y$ binar amal ayirish deyiladi. B (ii) dagi 1 element F maydonning birlik (yoki multiplikativ birlik) elementi deyiladi. B (iii) dagi F maydonning x^{-1} elementi x ga teskari (yoki teskari multiplikativ) element deyiladi. $x/y \equiv xy^{-1}$ formula bilan aniqlanadigan x/y binar amal (bunda $y \neq 0$) bo'lish deyiladi. Biz “nolda bo'lish” ni qaraymiz, shuning uchun bo'lish amali F ning ichida binar amal va F ning ustida binar amal emas.

Agar bo'sh bo'lmagan G to'plamda binar amal aniqlanib, uni $+$ belgi bilan ifodallasak va qo'shish desak, bu amal A (i), (ii) va (iii) xossalarga ega bo'lsa G gruppasi deyiladi. Bundan tashqari A (iv) komutativlik qonuni to'g'ri bo'lsa, u holda G abel yoki komutativ gruppasi deyiladi. Har bir maydon qo'shishga nisbatan additiv abel gruppani tashkil qiladi. Maydondagi A to'plam elementi noldan farqli bo'lsa ko'paytirishga nisbatan multiplikativ abel gruppasi bo'ladi.

T a ` r i f II.  $P$  qism to`plamni o`z ichiga olgan F maydon tartiblangan maydon deyiladi, agar

(i) P qo`shishga nisbatan yopiq bo`lsa, ya`ni

$$x \in P, y \in P \Rightarrow x+y \in P;$$

(ii) P ko`paytirishga nisbatan yopiq bo`lsa, ya`ni

$$x \in P, y \in P \Rightarrow xy \in P;$$

(iii) $x \in F$ ekanligidan quyidagi uchta tasdiqlardan faqat bittasi o`rinli ekanligi kelib chiqsa:

$$x \in P; x=0; -x \in P.$$

Agar $x \in P$ bo`lsa,  $F$  maydonning  $x$  elementi musbat va agar  $-x \in P$  bo`lsa manfiy deyiladi.

Tartiblangan to`plamdagi tengsizliklar  $P$  ga tegishlilik tilida ham ta`riflanadi. Masalan,

$$x < y \text{ ó } y-x \in P;$$

$$x \geq y \text{ ó } x-y \in P \text{ yoki } x=y.$$

F - tartiblangan maydon bo`lib, f funksiya F da aniqlangan va F dagi qiymatlarni qabul qilsin. Agar

$$x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

bo`lsa, u holda  $f$  funksiya o`zi aniqlangan sohaning biror A qism to`plamida o`suvchi (yoki kamaymaydigan) funksiya deyiladi. Agar

$$x, y \in A, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

bo`lsa, u holda  $f$  funksiya  $A$  da qat`iy o`suvchi deyiladi.

Kamayuvchi (yoki o`smaydigan) va qat`iy kamayuvchi funksiya shunga o`xshash ta`riflanadi. Agar funksiya biror to`plamda o`suvchi yoki kamayuvchi bo`lsa, u holda bu funksiya shu to`plamda monoton funksiya deyiladi. Qat`iy monoton funksiyaning ham ta`rifini berish qiyin emas.

Agar F tartiblangan maydon bo`lsa, u holda $x \in F$ maydonning $|x|$ absolut qiymati $x \geq 0$ da x ga va $x < 0$ da $-x$ ga teng deb hisoblanadi.

Quyida absolut qiymatning bir necha standart xossalari keltiramiz ($x, y, \varepsilon \in F$ tartiblangan maydon elementlari):

- (i) $|x| \geq 0; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- (ii) $|xy| = |x| \cdot |y|;$
- (iii) agar $\varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon;$
- (iv) uchburchak tengsizligi

$$|x+y| \leq |x| + |y|;$$

(v) $|x| = \sqrt{x^2}$ ya'ni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ to'plamda birlik elementi bo'ladi, kvadrati x^2 ga teng.

(vi) $||x| - |y|| \leq |x - y|.$

Agar F – tartiblangan maydon va $a, b \in F$, $a < b$ bo'lsa, u holda quyidagi to'plamlar chekli yoki chegaralangan intervallar deyiladi:

ochiq: $(a, b) \equiv \{x | x \in F, a < x < b\},$

yopiq: $[a, b] \equiv \{x | x \in F, a \leq x \leq b\},$

yarim ochiq

(yoki yarim yopiq): $[a, b) \equiv \{x | x \in F, a \leq x < b\},$

yarim ochiq

(yoki yarim yopiq): $(a, b] \equiv \{x | x \in F, a < x \leq b\}.$

Cheksiz yoki chegaralanmagan intervallar quyidagicha aniqlanadi:

ochiq: $(a, +\infty) \equiv \{x | x > a\},$

ochiq: $(-\infty, a) \equiv \{x | x < a\},$

yopiq: $[a, +\infty) \equiv \{x | x \geq a\},$

ochiq va yopiq: $(-\infty, +\infty) \equiv F$

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ko'rinishidagi ochiq interval F tartiblangan maydon a nuqtasining atrofi deyiladi, bunda

ε – F maydonning musbat elementi. Bu atrofni absolyut qiymatlar tilida quyidagicha yozish mumkin:

$$N(a, \varepsilon) \equiv (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \equiv \{x | |x - a| < \varepsilon\}.$$

a nuqtani o'zidan tashqari atrofi a nuqtaning o'yilgan atrofi deyiladi. $\varepsilon > 0$ uchun a nuqtaning $D(a, \varepsilon)$ o'yilgan atrofi quyidagicha aniqlanadi:

$$D(a, \varepsilon) \equiv \{x | 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

F da max va min binar amallar quyidagicha aniqlanadi:

$$\max(x,y) \equiv \begin{cases} x, \text{ agar } & x \geq y \\ y, \text{ agar } & x < y; \end{cases}$$

$$\min(x,y) \equiv \begin{cases} y, \text{ agar } & x \geq y \\ x, \text{ agar } & x < y; \end{cases}$$

Agar F – tartiblangan maydon, $u \in F$ va F maydon nuqtalarining bo'sh bo'lmagan A to'plamining har qanaqa x elementi uchun $x \leq u$ bo'lsa, u holda u nuqta A ning yuqori chegarasi deyiladi. Agar F dagi bo'sh bo'lmagan to'plamning yuqori chegarasi bo'lgan element mavjud bo'lsa, bunday to'plam F da yuqoridan chegaralan deyiladi. Agar s , A ning yuqori chegarasi bo'lsa va s , A ning har qanday boshqa yuqori chegaralaridan kichik bo'lsa, u holda s , A ning aniq yuqori chegarasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $s = \sup(A) = \sup A$. Bo'sh bo'lmagan A to'plamning quyi chegarasi, quyidan chegaralanganligi va aniq quyi chegarasi ham shu kabi aniqlanadi. Bo'sh bo'lmagan A to'plamning aniq quyi chegarasi $i = \inf(A) = \inf(A)$ bilan belgilanadi.

T a ` r i f III. Har bir bo'sh bo'lmagan qism to'plam uchun, F da yuqori chegara, aniq yuqori chegara mavjud bo'lsa, F tartiblangan maydon to'liq tartiblangan maydon deyiladi.

Ikkita to'liq tartiblangan F va F' izomorf. Ya'ni, bu maydonlar orasida $x \leftrightarrow x'$ o'zaro bir qiymatli moslik mavjudki, bunda $x \in F$ va $x' \in F'$, binar amal va tartib saqlanadi, ya'ni:

$$(x+y)' = x'+y', (xy)' = x'y', x < y \text{ } \bullet \text{ } x' < y'.$$

T a ` r i f IV. Haqiqiy sonlar sistemasi R to'liq tartiblangan maydon deyiladi.

Agar $B \subset R$ bo'lsa, A ni B ga akslantiruvchi funksiya haqiqiy qiymatli deyiladi; agarda $A \subset R$ bo'lsa, u holda bu funksiya haqiqiy o'zgaruvchili deyiladi.

$\operatorname{sgn} x$ funksiya haqiqiy o'zgaruvchili haqiqiy qiymatli funksiya bo'ladi va quyidagicha aniqlanadi: agar $x > 0$ bo'lsa, $\operatorname{sgn} x \equiv 1$; agar $x < 0$ bo'lsa, $\operatorname{sgn} x \equiv -1$; $\operatorname{sgn} 0 \equiv 0$.

Agar S – ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plam, A – esa uning bo'sh bo'lmagan qism top'lami bo'lsa, u holda A to'plamning χ_A xarakteristik funksiyasi haqiqiy qiymatli funksiyasi bo'ladi va quyidagicha aniqlanadi: agar $x \in A$ bo'lsa, $\chi_A(x) \equiv 1$, va agar $x \in A' = S \setminus A$ bo'lsa, $\chi_A(x) \equiv 0$ bo'ladi.

T a ` r i f V. Quyidagi ikkita xossalarga ega bo'lgan A to'plam F tartiblangan to'plamdagi induktiv to'plam deyiladi:

(i) $1 \in A$;

(ii) $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$.

T a ` r i f VI. Agar n element F tartiblangan maydondagi har bir induktiv to'plamning elementi bo'lsa, bu n element natural son deyiladi. F maydondagi barcha natural sonlar to'plami N bilan ifodalanadi.

Induksiyaning asosiy teoremasi. Agar S to'plam natural sonlardan tuzilgan induktiv to'plam bo'lsa, u holda $S=N$.

Agar N va N^* - ikkita F va F^* tartiblangan maydondagi barcha natural sonlarning to'plamlari bo'lsa, u holda N va N^* izomorfdir.

T a ` r i f VII. Agar $x \in N$, $x=0$ yoki $-x=N$ bo'lsa, F tartiblangan maydonning x elementi butun son deyiladi. Agar shunday m va n , $n \neq 0$, butun sonlar mavjud bo'lib, $x=m/n$ bo'lsa, tartiblangan maydonning x elementi ratsional son deyiladi.

F tartiblangan maydondagi barcha ratsional sonlar to'plami ko'paytirish va qo'shish amallari hamda F maydon tartibi bilan birgalikda tartiblangan maydon hisoblanadi. Uni Q bilan ifodalanadi.

T a ` r i f VIII. Bo'sh bo'lmagan B to'plam qo'shish va ko'paytirish deb ataluvchi hamda 1-ta'rifdagi A (i), (ii), (iii), (iv), B (i), C punktlarning talablari va distributivlikning ikkinchi qonunini

$$C'. \quad x, y, z \in B \Rightarrow (x+y)z = xz + yz$$

qanoatlantiruvchi binar amallar bilan birgalikda halqa deyiladi.

T a ` r i f IX. I ta'rifdagi B (ii) va (iv) shartlar hamda

$$D. \quad x \in D, y \in D, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$$

shart bajarilsa D halqa butunlik sohasi deyiladi. I ta'rifdagi barcha shartlar bajarilib, $B(iii)$ chiqarilib yuboriladi va o'rniga D shart keladi.

D shart $B(iii)$ shartning sust shakli ekanligini quyidagicha isbotlash mumkin. Faraz qilaylik, $xy=0$ bo'lgan $x \neq 0$ va $y \neq 0$ mavjud bo'lsin. U holda $x^{-1}0=0$ bo'lgani holda, $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1y = y \neq 0$ bo'ladi. (Ziddiyat). Ixtiyoriy halqada D shart quyidagicha isbotlanadi:

D' . Qisqartirish qonuni. $xy=xz, x \neq 0 \Rightarrow y=z$. ($xy=xz \text{ o' } x(y-z)=0$ ekanligidan $D \Rightarrow D'$; aksincha, $D' \Rightarrow D$, $xy=0$ tenglikni $xy=x0$ ko'rinishda yozish mumkin).

F maydondagi barcha butun sonlar to'plami shu bilan birga qo'shish va ko'paytirish amallari bu maydonda butunlik sohasi bo'ladi va I bilan belgilanadi. Butun sondan iborat har qanday ikkita butunlik sohasi izomorfdir.

f funksiya F tartiblangan maydonda aniqlangan ba undagi qiymatlarni qabul qilsin va $a \in F$ bo'lsin. Agar a nuqta f funksiyaning D aniqlanish sohasiga tegishli va F maydonning ixtiyoriy musbat ε element uchun shu maydonning shunday musbat δ mavjud bo'lsaki, D sohadagi $|x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan har bir x element uchun $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, f funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi. Umumiylik kvantori deb ataluvchi va "barchasi uchun, ixtiyoriy uchun, har qanday uchun va har biri uchun" so'zlari o'rniga $\forall$ belgidan foydalanib, funksiyaning D sohadagi a nuqtaning atrofidagi uzluksizligini quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni f(D \cap N(a, \delta)) \subset N(f(a), \varepsilon).$$

F tartiblangan maydonning p nuqtasi berilgan bo'lsin. Agar p nuqtaning har qanday o'yib olingan atrofi A bo'sh bo'lmagan to'plamning kamida bitta elementini o'z ichiga olsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in D(p, \varepsilon) \cap A$$

bo'lsa p nuqta A to'plamning limit nuqtasi deyiladi.

f - aniqlanish sohasi va qiymatlari F da bo'lgan funksiya bo'lsin, a - uning D aniqlanish sohasining limit nuqtasi va $b \in F$ bo'lsin. Bunday holda, agar

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni f(D \cap D(a, \delta)) \subset N(f(a), \varepsilon)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning $x \rightarrow a$ ga intilgandagi limiti mavjud va b ga teng deyiladi va yoziladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

. Bir tomonlama limitlar ham shu kabi topiladi va mos ravishda $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ va $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ belgilanadi.

Agar

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

bo'lsa, aniqlanish va qiymatlar sohasi F tartiblangan maydonda bo'lgan f funksiya, uning D aniqlanish sohasidagi A qism to'plamda tekis uzluksiz deyiladi.

Agar f - aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi F tartiblangan maydonda bo'lgan funksiya, $a \in f$ funksiya D aniqlanish sohasidagi nuqta bo'lsa, u holda $f'(a)$ belgi F maydon elementini ifodalaydi, shartda

$$f'(a) \equiv \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

tenglikdan aniqlanadi, oxirgi limit mavjud bo'ladi. Agar $f'(x)$ funksiya D aniqlanish sohasidagi barcha x lar uchun ma'noga ega bo'lsa, f funksiya hosilasi deyiladi.

F tartiblangan to'plamda f funksiya berilgan bo'lib, I interval shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli biror interval bo'lsin. Agar

$$\forall a, b \in I, d \in F \ni a > b \text{ va yoki } f(a) < d < f(b), \text{ yoki } f(a) > d > f(b), \text{ u holda } \exists c \ni a < c < b, \\ f(c) = d.$$

bo'lsa, F tartiblangan maydondagi f funksiya I intervalda Koshi xossasiga ega deyiladi.

$\mathbb{N}$ natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiya ketma – ketlik deyiladi. Uning qiymatlari, yoki natural n uchun ketma – ketlik hadlari a_n orqali ifodalanadi, ketma – ketlikning o'zi $\{a_n\}$ bilan belgilanadi. $\{a_n\}$ ketma – ketlikning biror F tartiblangan maydonga tegishli bo'lsin. Agar

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{P} \exists N \in \mathbb{N} \ni n > N \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon,$$

bo'lsa, $\{a_n\}$ ketma – ketlik F maydonning b elementiga yaqinlashadi deyiladi, bunda $P – F$ maydon barcha musbat elementlari to'plami. Bu holda $\{a_n\}$ ketma – ketlik b limitga ega deyiladi. Agar ketma - ketlik limitga ega bo'lmasa, u uzoqlashuvchi deyiladi. Agar

$$\forall \varepsilon \in P \exists N \in N \ni m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon,$$

bo'lsa, hadlari F tartiblangan maydon elementi bo'lgan $\{a_n\}$ ketma – ketlik, fundamental yoki Koshi ketma – ketligi deyiladi. Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental bo'ladi, agar $F=R$ bo'lsa, har qanday fundamental ketma – ketlik yaqinlashuvchidir.

x va y haqiqiy sonlarning (x,y) tartiblangan juftligi kompleks son deyiladi. Kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish quyidagicha aniqlanadi:

$$(x, y) + (u, v) \equiv (x+u, y+v),$$

$$(x, y)(u, v) \equiv (xu-yv, xv-yu).$$

Kompleks sonlar $(0,0)$ nol va $(1,0)$ bir bilan birgalikda C maydonni tashkil etadi. Kelgusida (x,y) kompleks sonni yozish uchun $x+iy$ ifoda ishlatiladi.

1. Tartiblab bo'lmaydigan cheksiz maydon.

Agar F maydon P qism to'plamni qabul qilmay, II ta'rifdagi uchta xossaga ega bo'lgan P qism to'plamni o'z ichiga olmasa, u holda F maydonni tartiblash mumkin emas. Avvaldan ta'kidlaymizki, har qanday tartiblangan maydon cheksiz bo'lganligi uchun hech bir chekli maydon tartiblanishi mumkin emas.

C kompleks sonlar maydoni tartiblanmagan cheksiz maydonga misol bo'ladi. Haqiqatan ham, faraz qilaylik, C maydonning II ta'rifni qanoatlantiradigan P qism to'plami mavjud bo'lsin. $i \equiv (0,1)$ sonni qaraymiz. $i \neq (0,0)$ bo'lganligi uchun biri birini o'zaro inkor etuvchi ikkita imkoniyat bor. Ulardan birinchisi $i \in P$ ekanligi ma'lum. Bu holda $i^2 = (-1,0) \in P$ va, shunga ko'ra, $i^4 = (1,0) \in P$. Ammo i^2 va i^4 elementlar qarama – qarshi ishorali va bunday elementlar bir vaqtning o'zida P ga tegishli bo'lolmaydi, u holda ziddiyatga kelamiz, shu narsani ko'rasatish talab etilgan edi. Ikkinchi imkoniyat $-i = (0,-1) \in P$ dan iborat. Bu holda $(-i)^2 = (0,-1) \in P$

va shunga binoan, $(-i)^4 = (0, -1) \in P$ kelib chiqadi va biz yuqoridagi ziddiyatga keldik.

2. Ikkita har hil usulda tartiblanadigan maydon.

Barcha sonlari $r + s\sqrt{2}$ ko'rinishida bo'lgan F to'plamni qaraylik, bunda r va s ratsional sonlar, va F da qo'shish va ko'pattirish amallari R ratsional sonlar sistemasidagi kabi bo'lsin va F to'plam R ning qism to'plami bo'lsin. U holda agar II ta'rifdagi P qism to'plam sifatida F dagi barcha elementlarning to'plamini olsak (bu elementlar R da musbat sonlar, ya'ni musbat haqiqiy sonlar bo'ladi), F maydon tartiblangan maydon bo'ladi. Endi F maydonni tartiblashning boshqa usulini ko'ramiz. Buning uchun B to'plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$r + s\sqrt{2} \in B \iff r - s\sqrt{2} \in P.$$

Ko'rinib turibdiki, B to'plam II ta'rifning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

Q ratsional sonlar maydonni va R haqiqiy sonlar maydoni tartiblangan maydon bo'ladi, ulardan hech birini ikkita turli usullar bilan tartiblab bo'lmaydi.

3. To'liq bo'lmagan tartiblangan maydon.

Q ratsional sonlar maydoni to'la emas. Bunga quyidagicha ishonch hosil qilamiz: kvadrati ikkidan kichik bo'lgan barcha musbat ratsional sonlar to'plamini A bilan belgilaymiz

$$A \equiv \{r | r \in Q, r > 0, r^2 < 2\},$$

bu to'plam bo'sh emas ($1 \in A$) va yuqoridan 2 ratsional son bilan chegaralangan. Faraz qilaylik, Q to'la bo'lsin. U holda A to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lishi kerak bo'lgan c musbat ratsional son mavjud bo'lishi kerak. Ammo kvadrati 2 ga teng ratsional son mavjud emas, u holda $c^2 < 2$ yoki $c^2 > 2$. Avval $c^2 < 2$ deb faraz qilaylik va d musbat sonni quyidagicha aniqlaymiz:

$$d = \frac{1}{2} \min \left(\frac{2 - c^2}{(c + 1)^2}, 1 \right)$$

U holda $c + d$ kvadrati 2 dan kichik va c dan katta musbat ratsional son bo'ladi:

$$(c + d)^2 < c^2 + d(c + 1)^2 < 2.$$

Ammo bu $c+d \in A$ ekanligini anglatadi. Shu bilan bir vaqtda c soni A to'plamning yuqori chegarasi hamdir. (Ziddiyat). Endi $c^2 > 2$ deb faraz qilaylik va d musbat sonni quyidagicha aniqlaylik:

$$d = \frac{c^2 - 2}{2(c+1)^2}.$$

U holda $c-d$ son kvadrati 2 dan katta va c dan kichik musbat ratsional son bo'ladi:

$$(c-d)^2 > c^2 - d(c+1)^2 > 2.$$

Shunga binoan, $c-d$ son A to'plamning yuqori chegarasi, u c aniq yuqori chegaradan kichik va biz yana ziddiyatni hosil qildik.

4. Tartiblangan noarximed maydon.

Agar F maydonning N natural sonlar to'plami F da yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa (ya'ni $a, b \in F$, $a > 0$, $b > 0$, u holda shunday $na > b$ natural n son mavjud), F tartiblangan maydon arximed tartiblangan maydon deyiladi. R ni R ga akslantiruvchi f - ko'phad berilgan bo'lsin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in R, \quad k=0,1,\dots,n,$$

va g nol bo'lmagan ko'phad (bu ko'phad aynan nolga teng emas deganidir). So'ngra $h(x) = f(x)/g(x)$ formula bilan aniqlangan h funksiya ratsional funksiya bo'ladi; $g(x) \neq 0$ ni qanoatlantiradigan barcha x haqiqiy sonlar to'plami uning aniqlanish sohasini tashkil etadi. H – to'plam barcha qisqarmaydigan ratsional funksiyalardan tuzilgan to'plam bo'lsin. H da qo'shish va ko'paytirish quyidagi tenglik orqali aniqlanadi

$$\frac{f}{g} + \frac{r}{s} \equiv \frac{fs + gr}{gs}, \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{r}{s} \equiv \frac{fr}{gs},$$

ularning o'ng tomonlari qisqarmaydigan ratsional funksiyalarga keltiriladi. U holda H to'plam maydon bo'ladi. Agar H maydonning P qism to'plami sifatida barcha noldan farqli f/g ko'rinishdagi funksiyalarni olamiz, f va g ko'phadlarning katta ko'fisentlari oldidagi ishoralar bir xil bo'lsa, u holda P to'plam II ta'rifning barcha shartlarini qanoatlantiradi va H tartiblangan maydonga o'zgaradi. Ammo ixtiyoriy $f/1$ ratsional funksiya, bunda f – katta ko'fitsenti musbat bo'lgan

ko'phad, H maydondagi N natural sonlar to'plamining yuqori chegarasi bo'ladi (H maydonning natural sonlari $n/1$ ko'rinishda o'zgarmas ratsional funksiyalar, bunda n – aynan n natural songa teng bo'lgan ko'phad).

5. To'la bo'lmaygan tartiblangan maydon.

F tartiblangan maydon berilgan bo'lsin. Agar F maydonning qo'shish va ko'paytirish amallari va tartib munosabati bilan bir xil bo'lgan va F ni o'z ichiga olgan R maydon mavjud bo'lmasa, F tartiblangan maydonni to'la qilib bo'lmaydi. Oldingi misoldagi ratsional funksiyalarning H maydonini shu ma'noda to'la qilib bo'lmaydi, boshqacha aytganda, uni haqiqiy sonlar sistemasiga joylashtirib bo'lmaydi. Buning sababi, qisqa qilib aytganda, agar H ni R ga joylashtirib bo'lganda edi, u holda H maydonning natural sonlari R maydonning natural sonlari bilan ustma-ust tushgan bo'lar edi va biz ziddiyatga kelar edik.

6. Ratsional sonlar to'plamidagi zich bo'lmagan tartiblangan maydon.

4-misoldagi H tartiblangan maydonning “ratsional sonlar” to'plami H da zich emas. Bu shuni anglatadiki, H maydonning shunday ikkita elementi topiladiki, ular orasida birorta ham ratsional son yo'q. Haqiqatan ham, ratsional sonlar to'plami zich bo'lgan har qanday F tartiblangan maydon arximed maydoni bo'ladi.

Bunga ishonch hosil qilish uchun, a – F maydonning ixtiyoriy musbat elementi bo'lsin, m/n esa 0 va $1/a$ orasida joylashgan ratsional son bo'lsin deb faraz qilamiz. Faraz bo'yicha umumiylik yo'qoladi chunki m va n musbatdir. U holda

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} < \frac{1}{a},$$

bunda $n > a$. N ning yuqori chegarasi a bo'lmasligi kelib chiqadi va a ixtiyoriy, u holda N yuqoridan chegaralanmagan. Ammo Arximed aksiomasi H maydonda bajarilmaydi, bu H maydon ratsional sonlar to'plami H da zich bo'lishi mumkin

emas. Misolda H maydon ikkita har xil elementi orasida bitta ham ratsional son yo`q, doim o`xshash bo`lmaydi, katta ko'fisenti musbat.

7. Koshi ma`nosida to`la, to`liq tartiblanmagan maydon.

Agar ratsional funksiyalarning H tartiblangan maydoni fundamental ketma-ketliklarning ekvivalentlik sinflari yordamida kengaytirsak, u holda natijada shunday tartiblangan maydon hosil bo`ladiki, bu maydonda xar qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo`ladi. Ammo 5-misolga binoan, Koshi ma`nosidagi bu to`ldirish kirish berilgan aniq yuqori chegaralar tilidagi ta`rif ma`nosida to`la bo`lishi mumkin emas.

8. Har – xil ko`paytuvchilarga yoyish mumkin bo`lgan butunlik sohasi.

D butunlik sohasida mavjud v element uchun D dagi u element birlik element deyiladi, yani $uv=1$. (I butunlik sohasidagi -1 va 1 birlik elementlar butun sonlar bo`ladi).  $D$  da birlik elementdan farqli va nol bo`lmagan ikkita elementlarni olaylik. Shu ikkita elementlarning ko`paytmasiga teng bo`lgan D ning har bir elementi murakkab element (son) deyiladi. D dagi noldan birlik elementdan farqli bo`lgan, murakkab son bo`lmagan element tub element (son) deyiladi. Agar D dagi noldan yoki birlik elementdan farqli har qanday elementni D dagi chekli dona tub elementlarning ko`paytmasi ko`rinishida yagona tarzda yozib bo`lsa, D butunlik sohasi yagona faktorizassiyaga ega deyiladi.

R haqiqiy sonlar sistemasida barcha sonlari $a+b\sqrt{5}$, bunda $a,b \in I$ ko`rinishda bo`lgan Φ to`plam aniqlangan bo`lsin. U holda Φ butunlik sohasi bo`ladi. Buni quyidagicha osongina isbotlash mumkin.

(i). Barcha sonlari $a+b\sqrt{5}$ ko`rinishda bo`lgan Φ ning birligi $|a^2-5b^2|=1$.

(ii). Agar $a+b\sqrt{5} \neq 0$ va birlik element bilan ustma-ust tushmasa, u holda $|a^2-5b^2| \geq 4$. Agar $1 < |a^2-5b^2| < 16$ bo`lsa, u holda  $a+b\sqrt{5}$  son oddiy bo`lishi kelib chiqadi. Ayrim hollarda 2 , $1+\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$ Φ da oddiy sonlar bo`ladi, chunki hammasi uchun  $|a^2-5b^2|=4$  bo`ladi. Ikkita sonni ko`paytmada 4 ga yoyish quyidagicha:

$$2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})$$

mazmunan har –xil bo`ladi: chap tomondagi ko`paytmaning bittasi (birlik elementdagi ko`paytirishgacha aniqlikda) o`ng tomondagi ko`paytma bilan ustma – ust tushmaydi.

9. Eng katta umumiy bo`luvchira ega bo`lmagan ikkita sonlar.

Agar D butunlik sohasining p elementi mavjud bo`lib,  $mp=n$  bo`lsa, m element n elementning D butunlik sohasidagi bo`luvchisi (ramziy $m|n$) deyiladi.

Agar

(i). $d|a$ va $d|b$;

(ii). $c|a, c|b \Rightarrow c|d$

bo`lsa,  $D$  dagi  $d$  element,  $D$  dagi  $a$  va  $b$  elementlarning eng katta bo`luvchisi deyiladi.

Oldingi misolda Φ butunlik sohasidagi 4 va $2(1+\sqrt{5})$ sonlar eng katta umumiy bo`luvchiga ega emas.

10. Qisqarmaydigan kasr ko`rinishidagi yagona ko`rinishga keltirib bo`lmaydigan kasr.

8 – misoldagi Φ butunlik sohasi elementlari juftlaridan tuzilgan kasrlarni qaraymiz. Bu holda $2(1+\sqrt{5})/4$ kasrni quyidagi ikki usul bilan qisqarmaydigan kasr ko`rinishida ifodalash mumkin:

$$\frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}}$$

yuqorida ko`rsatilgan ma`noda bu ikkala tasvirlar turlichadir.

11. Sonli sistema to`liq bo`lmagan holda yopiq intervalda uzluksiz va zarur xossalarga ega bo`lmagan funksiya.

Biz bu rejani $[a,b] \subset \mathbb{Q}$ yopiq intervalda aniqlangan va $\mathbb{Q}$ ga tegishli qiymatlarini qabul qiluvchi funksiyalarga misollar bilan tugatamiz. Agar $\mathbb{Q}$ ratsional sonlarning to`liq bo`lmagan sistemasining o`rniga  $\mathbb{R}$  haqiqiy sonlarning to`liq sistemasini olsak, bunday misollarni keltirib bo`lmaydi. $\sqrt{2}$ kabi belgilardan

foydalanish imkoniyatiga ega bo'lish maqsadida Q tartiblangan maydonni R da joylashgan deb hisoblaymiz. x bilan ratsional sonni belgilaymiz.

(a) Yopiq intervalda uzluksiz, lekin unda chegaralanmagan (chunki interval chegaralangan, bu funksiya unda tekis uzluksiz emas) funksiya:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

(b) Yopiq intervalda uzluksiz va chegaralangan, lekin unda tekis uzluksiz bo'lmagan funksiya:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

(c) Yopiq intervalda tekis uzluksiz (va demakki, chegaralangan), lekin unda maksimumga ega bo'lmagan funksiya:

$$f(x) = x - x^3, \quad 0 \leq x \leq 1$$

(d) Yopiq intervalda uzluksiz, Koshi xossasiga ega bo'lmagan funksiya:

$[1, 2]$ da b misol yoki $f(x) = x^2$. Oxirgi funksiya 1 va 4 orasida joylashgan 2 qiymatni qabul qilmaydi.

(e) O'zgarmasdan farqli bo'lgan differensiallanuvchi funksiyaning hosilasi yopiq intervalning hamma joyida nolga teng.

Misol b.

(f) Roll teoremasi (va demakki, o'rta qiymat haqidagi teorema ham) o'rinli bo'lmaydigan differensiallanuvchi funksiya.

Misol c.

(g) O'zgarmasdan farqli va Koshi xossasiga ega bo'lgan, hosilasi esa intervalning hamma joyida nolga teng bo'lgan monoton tekis uzluksiz funksiya.

II.2. FUNKSIYALAR VA LIMITLAR.

Avvalo $A_1, A_2, \dots$ to'plamlar cheksiz sistemasining birlashmasi va ko'paytmasi tushunchasini kengaytiraylik:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \equiv \{x \mid x \in A_n \text{ hech bo'lmaganda bitta } n \text{ uchun.}\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \equiv \{x \mid x \in A_n \text{ har bir } n=1, 2, \dots \text{ uchun}\}.$$

Agar A to'plam o'zining barcha limit nuqtalarini o'z ichiga olsa, *yopiq* deyiladi; boshqacha aytganda, A' to'plamning bitta ham nuqtasi A to'plamning chegaraviy nuqtasi bo'lmaydi. Agar A to'plamning har bir nuqtasi A to'plamda yotuvchi atrofga ega bo'lsa, A to'plam *ochiq* deyiladi. Agar p nuqtaning har bir atrofi A to'plamning hech bo'lmaganda bitta nuqtasini va A' to'plamning hech bo'lmaganda bitta nuqtasini o'z ichiga olsa, p nuqta A to'plamning chegaraviy nuqtasi deyiladi. A to'plamning barcha chegaraviy nuqtalari to'plami A ning chegarasi deyiladi va $F(A)$ ifodalanadi. Agar p nuqtaning atrofi mavjud bo'lib, bu atrof A to'plamda yotsa, p nuqta A to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. A to'plamning barcha ichki nuqtalari to'plami A ning yadrosi deyiladi va $I(A)$ belgilanadi. Ixtiyoriy A yopiq to'plam o'zining yadro va chegarasi birlashmasi hisoblanadi:

$$A = I(A) \cup F(A)$$

A to'plamning barcha chegaraviy nuqtalari to'plami va A to'plam birlashmasi, A to'plamning yopilmasi $\bar{A}$ deyiladi. A to'plam o'z ichiga oluvchi, ixtiyoriy $\{U_\alpha\}$ oiladagi U_α ochiq to'plam, A ning ochiq to'ldiruvchisi deyiladi; bu holda $\{U_\alpha\}$ oila A ni to'ldiradi deyish mumkin. Agar A to'plamning ochiq to'ldiruvchisi A' ni to'ldiradigan chekli oilachani o'z ichiga olsa, A kompakt to'plam deyiladi. R fazoda to'plam kompakt hisoblanadi qachonki, bu to'plam yopiq va chegaralangan bo'lsa.

Agar A to'plam chekli bo'lsa yoki barcha N natural sonlar to'plami va A to'plam orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, A to'plam sanoqli deyiladi.

Haqiqiy sonlar sistemasining asosiy xususiyati shundaki, ixtiyoriy haqiqiy x son uchun shunday yagona butun n son mavjudki,

$$n \leq x < n+1 \text{ yoki } x-1 < n \leq x.$$

N x dan kichik eng katta butun son ekan, unda biz $[x]$ bilan belgilanadigan funksiyaga ega bo'lamiz. $f(x)=[x]$ funksiya quyidagi tengsizliklardan biri orqali aniqlanadi:

$$[x] \leq x < [x]+1 \text{ yoki } x-1 < [x] \leq x$$

bunda $[x]$ butun son. Keyinchalik agar mos tushuntirish keltirilgan bo'lsa, kvadrat qavs sonning butun qisimini anglatadi.

R ni R to'plamga akslantiruvchi f funksiya, barcha $x \in R$ uchun $f(x+p)=f(x)$ bo'lsa, p davrli davriy deyiladi.

a nuqta f funksiyaning D aniqlanish sohasidagi chegaraviy nuqtasi bo'lsin va $x \in D$ uchun a nuqta atrofi $f(x)$ cheklangan bo'lsin. a nuqtada f funksiya yuqori va quyi chegaralari mos ravishda $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ va $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ kabi belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi. $\delta > 0$ uchun

$$j(d) \equiv \sup\{f(x) \mid x \in D \cap D(a, d)\},$$

$$y(d) \equiv \inf\{f(x) \mid x \in D \cap D(a, d)\},$$

bo'ladi. U holda

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \equiv \lim_{d \rightarrow +0} j(d) = \inf\{j(d) \mid d > 0\},$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \equiv \lim_{d \rightarrow +0} y(d) = \sup\{y(d) \mid d > 0\}$$

bo'ladi.

Agar $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(a)$ bo'lsa, f funksiya $a \in D$ nuqtada yuqoridan yarim uzluksiz deyiladi; agar $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a)$ bo'lsa, f funksiya a nuqtada quyidan yarim uzluksiz deyiladi; so'ngra, agar f funksiya a nuqtada yuqoridan yoki quyidan yarim uzluksiz bo'lsa, a nuqtada f yarim uzluksiz deyiladi

Agar a nuqta atrofida f funksiya chegaralangan bo'lsa, a (f funksiyaning aniqlanish sohasidagi limit nuqtasi bo'ladi yoki tegishli) nuqtada f lokal chegaralangan deyiladi. Agar A to'plamning har bir nuqtasida f lokal chegaralangan bo'lsa, f ning aniqlanish sohasidagi A qism to'plamda f lokal chegaralangan funksiya deyiladi.

$\pm\infty$ cheksiz limit va $x \rightarrow \pm\infty$ da aniqlangan $f(x)$ limiti $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ da aniqlanadi, faqat cheksiz atrof sifatida

$$D(+\infty, N) \equiv (N, +\infty),$$

$$D(-\infty, N) \equiv (-\infty, N),$$

dan foydalaniladi.

Misol,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ agar } \forall K \exists \delta > 0 \ni f(D \cap D(a, \delta)) \subset D(+\infty, K),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \text{ agar } \forall \varepsilon > 0 \exists N \ni f(D \cap D(-\infty, N)) \subset N(b, \varepsilon).$$

Dastlabki oltita misollar faqat haqiqiy sonlar ketma – ketliklariga taluqlidir. Ta`kidlash kerakki, bu ketma – ketliklar uchun limit atamasi ba`zan cheksiz limitlarni belgilash uchun ham qo`llaniladi. Ammo yaqinlashuvchi ketma – ketlik daganda hamisha chekli limitga ega bo`lgan ketma – ketlik tushiniladi.

1. Absolyut qiymati barcha nuqtalarda uzluksiz bo`lgan, biroq o`zi hamma yerda uzilishga ega funkiya.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional} \\ -1, & \text{agar } x \text{ irratsional} \end{cases}$$

2. Hech bo`lmaganda bitta nuqtada uzluksiz bo`lgan funksiya.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{agar } x \text{ ratsional} \\ -x & \text{agar } x \text{ irratsional} \end{cases}$$

bu funksiya yagona 0 nuqtada uzluksiz bo`ladi.

3. Ixtiyoriy kompakt bo`lmagan to`plamda aniqlangan, uzluksiz va chegaralanmagan funksiya.

(a). Agar A – haqiqiy sonlarning chegaralanmagan to`plami bo`lsa, u holda

$$f(x) \equiv x, x \in A.$$

(b). Agar A – chegaralangan, ammo haqiqiy sonlar to`plami yopiq bo`lmasa, u holda

$$f(x) = \frac{1}{x-c}, \quad x \in A$$

o`rinli, bunda  $c - A$  ga tegishli bo`lmagan A to`plamning limit nuqtasi.

Agar f funksiya A kompakt to`plamda uzluksiz bo`lsa, u holda f A da chegaralangan deyiladi.

4. Ixtiyoriy nokompakt to`plamda aniqlangan chegaralanmagan va unda lokal chegaralangan funksiya.

3- misol.

Agar f kompakt to`plamda lokal chegaralangan bo`lsa, u holda f bu to`plamda chegaralangan bo`ladi.

5. Hamma yerda chekli va lokal chegaralanmagan funksiya.

x – ratsional son bo`lib, u  $m/n$  ga teng bo`lsin bunda m va n – butun sonlar , m/n qisqarmaydigan kasr va $n > 0$. U holda m va n bir qiymatli aniqlanadi va funksiya quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{agar } x \text{ ratsional, } x = m/n - \text{ qisqarmaydigan kasr, } n > 0 \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional} \end{cases}$$

Agar f $N(a, \varepsilon)$ da chegaralangan bo`lganda edi, u holda  $N(a, \varepsilon)$  dagi barcha  $m/n$  kasrlarning  $n$  mahrajleri chekli bo`lgan bo`lar edi, va surat m ning chekliligi kelib chiqar edi. Ammo bundan $N(a, \varepsilon)$ intervalda ratsional sonlarning soni atiga chekli ekanligi kelib chiqadi.

6. Ixtiyoriy nokompakt to`plamda aniqlangan va ekstremal qiymatga ega bo`lmagan uzluksiz chegaralangan funksiya.

(a). Agar A – haqiqiy sonlarning chegaralanmagan to`plami bo`lsa, u holda

$$f(x) \equiv \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in A$$

o`rinli.  $f(x)$  funksiya  $A$  to`plamda eng katta qiymatga ega emas. Agar $f(x)$

$$f(x) \equiv (-1)^{[|x|]} \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in A$$

formuladan aniqlansa, bunda $[|x|] - |x|$ sonning butun qismi, u holda $f(x)$ funksiya A to'plamda na eng katta va na eng kichik qiymatlarga ega bo'ladi.

(b). Agar chegaralangan, ammo haqiqiy sonlarning yopiq bo'lmagan to'plami bo'lsa, u holda

$$f(x) \equiv -|x-c|, \quad x \in A$$

o'rinli, bunda c – A to'plamga tegishli bo'lmagan A to'plaming limit nuqtasi, $f(x)$ funksiya A da eng katta qiymatga ega emas. Agar $f(x)$

$$f(x) = (-1)^{[1/|x-c|]} \{L - |x-c|\}$$

formuladan aniqlansa, bunda L – A to'plamni o'z ichiga oluvchi interval uzunligi, kvadrat qavs sonning butun qismi bo'lsa, u holda $f(x)$ A da na eng katta va na eng kichik qiymatlarga ega bo'ladi.

7. Kompakt to'plamda nisbiy ekstremumga ega bo'lmagan chegaralangan funksiya.

$[0,1]$ yopiq interval kompakt to'plami sifatida berilgan va $x \in [0,1]$ uchun

$$f(x) \equiv \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{n+1} & \text{agar } x \text{ ratsional, } x = m/n, \text{ bunda } m/n - \text{qisqarmaydigan kasr va } n > 0 \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional} \end{cases}$$

U holda $[0,1]$ dagi har qanday nuqtaning har bir atrofida f funksiya qiymatlari topiladi, bu qiymalar 1 va -1 sonlarga qanchalik yaqin bo'lmasin f funksiyaning barcha qiymatlari bu sonlar orasida qat'iy yotadi.

8. Bitta nuqtada ham yarim uzluksiz bo'lmaydigan chegaralangan funksiya.

7- misolda funksiya $[0,1]$ kesmaning birorta nuqtasida ham yuqoridan yarim uzluksiz bo'lmaydi, chunki $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ hamma yerda 1ga teng, $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(a)$ tengsizlik bironta ham a nuqtada bajarilmasligi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash holat o'rnatsak, bu funksiya bitta ham nuqtada quyidan yarim uzluksiz bo'lmaydi.

9. Eng kichik davrga ega bo'lmagan va o'zgarmas songa teng bo'lmagan davriy funksiya.

1 – misoldagi barcha ratsional sonlar davriy funksiya bo'ladi.

Ixtiyoriy haqiqiy R aniqlanish sohasiga ega bo'lgan funksiya davrlari additiv gruppaga (ya'ni ayrishga nisbatan yopiq davriy to'plam) hosil qiladi. Bu gruppaga barcha butun karrali va eng kichik elementga qarashli diskret va zichdir. Oxirgi holda har qanday davriy funksiya uchun R ning aniqlanish sohasida o'ringa ega bo'ladi, agar chetki bitta nuqtasi uzluksizlikka ega bo'lsa va o'zgaruvchan bo'lsa.

10. Irratsional funksiyalar.

$x < 0$ uchun $\sqrt{x}$ funksiya aniqlanmaganligi uchun, bu funksiya ratsional hisoblanmaydi.

$[x]$ funksiya ham ratsional hisoblanmaydi, chunki uning aniqlanish sohasidagi ba'zi nuqtalarda funksiya uzilishlarga ega.

$|x|$ funksiya irratsional bo'ladi, chunki uning aniqlanish sohasidagi nuqtada hosilaga ega emas.

$\sqrt{x^2 + 1}$ funksiya ham irratsional. Bunga quyidagi ko'rinishda ishonch hosil qilish mumkin. Agar barcha x uchun $\sqrt{x^2 + 1} = f(x)/g(x)$ bo'lsa, u holda $x \neq 0$ uchun $\sqrt{x^2 + 1}/x = f(x)/xg(x)$ va $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/xg(x) = 1$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan $f(x)$ va $xg(x)$ birinchi darajali ko'phad va $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/xg(x) = 1$ bo'lishi kelib chiqadi, u vaqtda $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = -1$ bo'ladi. (Ziddiyat).

11. Transendent funksiyalar.

Agar $\exists p(u) = \sum_{k=0}^n a_k(x)u^k$ ko'phad, koeffitsientlari haqiqiy bo'lgan $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ (yani barcha koeffitsientlari haqiqiy) f funksiya aniqlanish sohasida bir vaqtda nolda ayniyat bo'lmasa, $p(f(x))$ kompazitsiya nolda ayniyat bo'lsa, f funksiya algebraik deyiladi. Agar funksiya algebraik bo'lmasa uni transendent deyiladi.

Funksiya transcendent funksiyaga misol bo'lib, e^x funksiyasidan foydalanish mumkin, chunki $a_0 x \neq 0$ da

$$a_0(x) + a_1(x) e^x + \dots + a_n(x) e^{nx} \equiv 0$$

deb faraz qilsak, u holda $x \rightarrow -\infty$ da ayniyat limitga o'tsa va Lopital qoidasidan foydalanib $\lim_{x \rightarrow -\infty} a_0(x) = 0$ tenglikni hosil qilamiz.

Boshqa misol sifatida $\sin x$ funksiyani ko'rsatish mumkin, agar

$$b_0(x) + b_1(x) \sin x + \dots + b_n(x) \sin^n x \equiv 0$$

bunda $b_0(x) \neq 0$, u holda barcha butun k uchun $b_0(k\pi) = 0$ (Ziddiyat).

Transcendent funksiyaga keyingi misol $\ln x$ va qolgan trigonometrik funksiyalar bo'ladi.

Algebraik funksiyaga quyidagi irratsional funksiyalar misol bo'ladi. 10 – misol: $\sqrt{x}, |x|$ ($|x| = \sqrt{x^2}$) va $\sqrt{x^2 + 1}$.

12. $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = c, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \neq c$ shartlarni qanoatlantiruvchi va $y = f(g(x))$ kompozitsiyasi uzluksiz bo'lgan $y = f(u), u \in R$ va $u = g(x), x \in R$ funksiyalar.

Agar

$$f(u) \equiv \begin{cases} 0 & u \neq 0 \text{ da, } u \in R, \\ 1 & u = 0 \text{ da} \end{cases}$$

bo'lsa, u holda $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$. Agar barcha $x \in R$ uchun $g(x) \equiv 0$ bo'lsa, u holda x uchun $f(g(x)) = 1$ va $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar quyidagi shart qo'shilsa, bu kontrmisol bo'lishi mumkin emas: $x \neq a \Rightarrow g(x) \neq b$.

13. Ko'paytmasi tekis uzluksiz bo'lmaydigan ikkita tekis uzluksiz funksiya.

R da x va $\sin x$ funksiyalar tekis uzluksiz chunki ularning hosilalari chegaralangan, ammo ularning $x \sin x$ ko'paytmasi R da tekis uzluksiz funksiya bo'lmaydi.

Agar f va g funksiyalarning ikkisi umumiy D aniqlanish sohasida chegaralangan va unda tekis uzluksiz bo'lsa, u holda ularning fg ko'paytmasi ham D da tekis uzluksiz bo'ladi. Chegaralangan to'plamda tekis uzluksiz funksiya bu to'plamda chegaralangan bo'lganligi uchun, hozirigiga o'xshagan misol agar umumiy aniqlanish sohasi chegaralanmagan va hech bo'lmaganda funksiyalardan bittasi chegaralanmagan bo'lgan holda mumkin..

14. Teskarisi uzlukli bo'lgan qandaydir oraliqda uzluksiz va o'zaro bir qiymatli akslantirish.

Ushbu misol uchun, interval yopiq va chegaralangan bo'lmashligi va funksiya faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qilmasligi kerak. Misol sifatida x haqiqiy o'zgaruvchili $z=f(x)$ kompleks qiymatli funksiyadan foydalanamiz. Bunda nuqtada uzluksizlik aniqlangan shuningdek, haqiqiy o'zgaruvchili funksiya bo'lganda $z=(a, b)$ absolut qiymatini modulini faqat quyidagicha tushinamiz:

$$|z| = |(a, b)| = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$z=f(x)$ funksiya quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$z = f(x) \equiv (\cos x, \sin x), \quad 0 \leq x < 2\pi$$

U holda f $|z|=1$ birlik aylanada o'zaro bir qiymatli va $[0, 2\pi)$ yarim ochiq intervalda akslanadi. Ammo birlik aylana kompakt bo'lsa, u holda teskarisidan akslantirishda uzluksiz bo'lishi mumkin emas, chunki $(1, 0)$ nuqtada uzilishga ega.

15. Irratsional nuqtalarda uzluksiz, ratsional nuqtalarda uzilishga ega funksiya.

Agar x ratsional son ko'rinishi m/n bo'lsa, bunda m va n butun sonlar, m/n kasr qisqarmasa va $n > 0$ bo'lsa, $f(x) \equiv 0$ bo'ladi.

Barcha ratsional nuqtada uzluksiz va irratsionalda uzilishli funksiya mavjud emas.

16. Uzlilish nuqtalari zich to'plamiga ega yarim uzluksiz funksiya.

15 misoldagi funksiya har bir a nuqtada yuqoridan yarim uzluksiz, chunki:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \leq f(a).$$

17. Har biri chetlashuvchi uzilish nuqtalari zich to'plamiga ega uzilishli funksiya.

a - ratsional son bo'lsin. 15 – misolda aniqlangan funksiyaning $f(a)=0$ da qaytadan aniqlaymiz. U holda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a)$ yani a nuqtada f funksiya uzluksiz bo'lib qoladi.

18. Uzilish nuqtalari ixtiyoriy sanoqli to'plamni tashkil qiluvchi monoton funksiya.

A – ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan $a_1, a_2, a_3, \dots$, haqiqiy sonlar sanoqli to'plami va $\sum p_n$ - chekli yoki p yig'indiga cheksiz yaqinlashuvchi sonli qator bo'lsin. Agar A quyidan chegaralangan va $x \in A$ to'plamning ixtiyoriy elementidan kichik bo'lsa, unda $f(x) \equiv 0$ o'rinli. Qarama – qarshi holda $f(x) \equiv \sum_{a_n \leq x} p_n$, ya'ni $f(x)$ $a_m \leq x$ i lar uchun $\sum p_n$ qatorning p_m barcha hadlari yig'indisiga teng. U holda $\mathbb{R}$ da f o'suvchi, A ga tegishli bo'lmagan har bir nuqtada uzluksiz va har bir a_n nuqtada p_n ga teng masofada sakrab uziladi, yani $(\lim_{x \rightarrow a_n + 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_n - 0} f(x) = p_n)$.

19. Uzluksiz nuqtalar to'plami zich bo'lgan va birortasi ham bartaraf qilib bo'lmaydigan uzilish nuqtalar to'plami zich bo'lgan funksiya.

Bunga 18 – misolda A to'plam sifatida barcha $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar to'plamini olish yetarlidir.

20. Ikkita interval orasidagi hech qayerda monoton bo'lmagan o'zaro bir qiymatli moslik.

$0 \leq x \leq 1$ uchun $f(x)$ quyidagicha aniqlansin:

$$f(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{agar } x \text{ ratsional, bolsa} \\ 1-x, & \text{agar } x, \text{irrational, bo'lsa} \end{cases}$$

U holda $[0,1]$ da f monoton bo'ladigan qism interval mavjud emas. f ning qiymatlar to'plami yana $[0,1]$ da bo'ladi, chunki f o'zaro qiymatli akslantirish. Keyingi funksiya quyidagi xossalarga ega va $[c, d]$ interval $[a, b]$ intervalga akslanadi:

$$g(x) \equiv \begin{cases} c + (d-c) \frac{x-a}{b-a}, & \text{agar } \frac{x-a}{b-a} \text{ ratsional, bolsa} \\ d + (c-d) \frac{x-a}{b-a}, & \text{agar } \frac{x-a}{b-a}, \text{irrational, bo'lsa} \end{cases}$$

21. Hech qayerda monoton bo'lmagan uzluksiz funksiya.

$|x| \leq \frac{1}{2}$ uchun $f_1(x) \equiv |x|$ bo'lsin, 1 davr bilan davriy davom etamiz, ya'ni barcha x haqiqiy son va n butun sonlar uchun $f_1(x+n) = f_1(x)$ bo'lsin. Keyin $n > 1$ uchun $f_n(x) \equiv 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x)$ bo'lsin. Shunday qilib, barcha n natural sonlar uchun $f_n - 4^{-n+1}$ davrli davriy va $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$ maksimal qiymatli funksiya. Va nihoyat, $\mathbb{R}$ da f funksiya shunday aniqlaymiz:

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$$

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$ bo'lganligi uchun Veyersshtrass a'lomati bo'yicha bu qator $\mathbb{R}$ da tekis yaqinlashuvchi va f funksiya hamma yerda uzluksiz bo'ladi. Agar a nuqta $a = k \cdot 4^{-m}$ ko'rinishga ega bo'lsa, bunda k – butun, m esa natural son, u holda $n > m$ uchun $f_n(a) = 0$. $f(a) = f_1(a) + \dots + f_m(a)$ kelib chiqadi. $h_m = 4^{-2m-1}$ bo'lsin, bunda m - ixtiyoriy natural son. U holda $n > 2m+1$ da $f_n(a+h_m) = 0$ va

$$\begin{aligned} f(a+h_m) - f(a) &= [f_1(a+h_m) - f_1(a)] + \dots + [f_m(a+h_m) - \\ &f_m(a)] + f_{m+1}(a+h_m) + \dots + f_{2m+1}(a+h_m) \geq \\ &\geq -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0 \end{aligned}$$

kelib chiqadi. Unga o'xshash

$$f(a-h_m) - f(a) \geq -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

Ammo $\mathbb{R}$ da hamma yerda zich nuqta $a = k \cdot 4^{-m}$ ko'rinishda bo'ladi, u holda monoton f da ochiq interval mavjud emasligi kelib chiqadi.

22. Uzilish nuqtalari ixtiyoriy yopiq to'plamni tashkil etuvchi funksiya.

A – yopiq to'plam bo'lsin. B – to'plamni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\text{agar } x \in F(A) \text{ yoki } x \in I(A) \cap Q \text{ bo'lsa, } x \in B$$

so'ngra

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in B \\ 0, & \text{agar } x \notin B \end{cases}$$

deb olamiz. Agar $c \in A$ bo'lsa, u holda f shu nuqtada uzilishga ega. Haqiqatan ham agar $c \in F(A)$ bo'lsa, u holda $f(c)=1$, shu bilan bir vaqtda c nuqta $\mathbb{R} \setminus A$ to'lamning limit nuqtasidir, bu to'plamda f funksiya aynan 0 ga teng; agar $c \in I(A) \cap Q$ bo'lsa, u holda $f(c)=1$, bunda c nuqta $I(A) \setminus Q$ to'plamning limit nuqtasi, bu to'plamda f funksiya 0 ga teng; oxir – oqibat, agar $c \in I(A) \setminus Q$ bo'lsa, u holda $f(c)=0$, bu vaqtda c nuqta $I(A) \cap Q$ to'plamning limit nuqtasidir, bu to'plamda f funksiya aynan 1 ga teng. $\mathbb{R} \setminus A$ to'plamda f funksiya uzluksiz, chunki bu to'plam ochiq va f funksiya unda o'zgarmasdir.

23. Uzilish nuqtasi F_σ tipda ixtiyoriy berilgan to'plamni tashkil etadigan funksiya.

Agar A to'plam sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi bo'lsa, bu A to'plam F_σ tipdagi to'plam ya'ni $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ to'plam F_σ tipida berilgan to'plam bo'lsin, bunda $A_1, A_2 \dots$ yopiq va $n = 1, 2, \dots$ da $A_n \subset A_{n+1}$. A_0 bilan $\emptyset$ bo'sh to'plamni belgilab, o'zaro kesishmaydigan B_n ($n=1, 2, \dots$) to'plamlar ketma – ketligini quyidagicha aniqlanaymiz:

$$, \text{ agar } \begin{cases} x \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1}), \\ \text{va} & x \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q \end{cases}$$

bo'lsa $x \in B_n$.

Va oxir – oqibat, izlanayotgan f funksiya aniqlaymiz. Buning uchun

$$f(x) \equiv \begin{cases} 2^{-n}, & \text{agar } x \in B_n \\ 0, & \text{agar } x \notin B_1 \cup B_2 \cup \dots \end{cases}$$

deb olamiz.

Agar $c \in A$ bo'lsa, f funksiya c nuqtada uzilishga ega ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, agar $c \in (A_n \setminus A_{n-1}) \cap I(A_n \setminus A_{n-1})$ bo'lsa, u holda $f(c) = 2^{-n}$, bunda c shunday bir to'plamning limit nuqtasiki, bu to'plamda f funksiya 2^{-n} dan kamida 2^{-n-1} ga farq qiladigan qiymatlarni qabul qiladi; agar $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q$ bo'lsa, u holda $f(c) = 2^{-n}$, bunda c nuqta agar $I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q$ to'plamning limit nuqtasi bo'ladi, bu to'plamda f funksiya aynan 0 ga teng; oxir – oqibat agar $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q$ bo'lsa, u holda $f(c) = 0$ huddi shu bilan bir paytda c nuqta $I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q$ to'plamning limit nuqtasidir, bu to'plamda f funksiya aynan 2^{-n} ga teng. Agar $c \notin A$ bo'lsa, f funksiya c da uzluksiz ekanligini ko'rsatgan holda holos. $\varepsilon > 0$ berilgan bo'lsin. Shunday N ni olamizki, $2^{-N} < \varepsilon$ bo'ladi, so'ngra c nuqtaning $A_1, A_2, \dots, A_N$ to'plamlar bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmagan atrofni tanlaymiz. U holda bu nuqtada $f(x) < 2^{-N} < \varepsilon$, va f funksiyaning c nuqtada uzluksizligi isbotlanadi.

$\mathbb{R}$ ni $\mathbb{R}$ ga akslantiruvchi har qanday f funksiya uchun, uzilish nuqtalarining to'plami F_σ tipidagi to'plam bo'ladi.

24. Uzluksiz funksiyalar ketma-ketligining limiti bo'lmagan funksiya.

1 –misoldagi f funksiya shunday xossaga ega: barcha haqiqiy x lar son uchun $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ bo'lsin, uzluksiz funksiyalarning $\{f_n\}$ ketma –ketligi mavjud emas. Ammo buni isbotlash oson emas. Isbotning g'oyasini aytib o'tamiz. f funksiya hamma yerda uzilishli, shu bilan bir vaqtda uzluksiz funksiyalar ketma – ketligining limiti sifatida uzluksizlik nuqtalarining zich to'plamiga ega bo'lishi yetarli.

Ammo barcha ratsional sonlar Q to'plamining xarakteristik funksiyasi, $\{g_n\}$ ketma – ketligi limiti ekanligi, $\{g_n\}$ larning har biri esa uzluksiz $\{h_n\}$ ketma – ketlikning limiti ekanini ko'satamiz. Haqiqatan ham, $\{r_n\}$ barcha ratsional sonlar ketma – ketligi bo'lsin.

$$g(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{agar } x = r_1, r_2, \dots, \text{va } r_n \\ 0, & \text{qarqama - qarshi bo'lgan, holda} \end{cases}$$

deb olamiz. Har qanday g_n funksiya uzluksiz funksiya ketma – ketligi limiti hisoblanadi, bu uzluksiz funksiyalarning har birini siniq chiziq ko`rinishida tanlash mumkin. Bu siniq chiziqlar quyidagicha ko`rinadi. Bu siniq chiziqlarning har biri $g_n(x)=1$ joylarda 1 ga teng, $g_n(x)=1$ bo`lgan ikkita qo`shni nuqtalar tashkil etgan intervallar uchunichki bo`lgan yopiq qism intervallarda nolga teng va qolgan intervalda chiziqli bo`ladi.

Har bir x da $\{g_n(x)\}$ ketma – ketlik o`svuchi, huddi shu paytda $g_n(x)$ ga yaqinlashuvchi ketma – ketlik sifatida kamayuvchi qilib tanlanishi mumkin.

25. $[0, 1]$ intervalda aniqlangan va har bir aynimagan qism intervalda qiymatlari to`plami $[0, 1]$ bilan ustma – ust tushadigan funksiya.

Bunday xossaga ega bo`lgan funksiya birinchi bo`lib A. Lebeg tomonidan qurilgan.

$x \in [0, 1]$ dagi ixtiyoriy son bo`lsin va

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

uning o`nli yoyilmasi. Agar  $x$  ikkita har hil yoyilmaga ega bo`lib, ulardan bittasi chekli o`nli kasr bo`lsa va boshqa davrda 9 ga ega bo`lsa, u holda bu yoyilmalardan ixtiyoriy bittasini olish mumkin.  $f(x)$  funksiyaning qiymatlari  $0, a_1 a_3 a_5 \dots$  kasr davriy yoki davriy emasligiga bog`liq, yani $0, a_1 a_3 a_5 \dots$ bu ratsional yoki ratsional emasligiga bog`liq:

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{agar } 0, a_1 a_3 a_5 \dots \text{ irratsoional} \\ 0, a_{2n} a_{2n+2} a_{2n+4} \dots & \text{agar } 0, a_1 a_3 a_5 \dots \text{ ratsional} \\ & \text{va barcha sonlari qaytarilish davri } a_{2n-1} \text{ da boshlansa} \end{cases}$$

$I = [0, 1]$ dagi ixtiyoriy qism interval bo`lsin.  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-2}$  raqamlarni shunday tanlaymizki,  $0, a_1, a_2, \dots, a_{2n-2} 0$  va  $0 a_1, a_2, \dots, a_{2n-1} 1$   $I$  ga tegishli bo`lsin, a_{2n-3} raqamlar esa 0 va 1 dan farqli bo`lsin. So`ngra $a_{2n-1} = a_{2n+1} = \dots, a_{4n-5} = 0$ deb olamiz. So`ngra bu n ta raqamlarni ularni toq indeksli joylarga joylashtirib, davriy

takrorlaymiz. Shu tarzda hamma a_{2k-1} larni aniqlaymiz. Agar endi $y=0, b_1 b_2 b_3 \dots$ – $[0, 1]$ dagi ixtiyoroy nuqta bo`lsa, u holda

$$x = 0 a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n-1} b_1 a_{2n+1} b_2 a_{2n+3} \dots$$

deb olamiz. x son I ga tegishli va

$$0 a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n-3} a_{2n-1} a_{2n+1} \dots$$

yoyilma birinchi davri a_{2n-1} dan boshlanadigan davriy o`nli kasr bo`ladi. Shunday qilib

$$f(x) = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

ekanligi kelib chiqadi.

$\{x\} \times [0, 1]$ vertikal kesama grafikni bitta nuqtadagina kesadi f funksiya grafigini nuqtalari $[0, 1] \times [0, 1]$ birlik kvadratda zich joylashgan.

$[0, 1]$ interval $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ o`zaro kesishmaydigan cheksiz ko`p ochiq intervalni

o`z ichiga olganligi uchun shu misoldagi  $f$  funksiya o`zining har bir qiymatini cheksiz ko`p marta qabul qiladi.

26. Uzilishga ega chiziqli funksiya.

Agar barcha $x, y \in R$ da $f(x+y) = f(x) + f(y)$ bo`lsa,  $R$  ni  $R$ ga akslantiruvchi  $f$  funksiya chiziqli deyiladi. Uzluksiz bo`lmagan chiziqli funksiya “juda kuchli” uzilishli bo`lishi lozim. Uning grafigi  $R \times R$  tekislikning hamma yerida zich bo`lishi kerak. Agar f funksiya uzluksiz va chiziqli bo`lsa, u  $f(x) = cx$  ko`rinishga bo`lishi kerak. **N, I, Q, R** sonlar sinflarini ketma – ket ko`rib chiqib, bunga ishonch hosil qilish mumkin.

Uzilishli chiziqli funksiyaning ko`rish uchun ratsional sonlarni  $Q$  maydoni ustidagi  $R$  haqiqiy sonlar chiziqli fazosida Xamel bazisini qo`llash kerak. G`oya quyidagicha: bu jarayon  $r_a$  haqiqiy sonlarning shunday  $S = r_{a_1}$  to`plamiga olib keladiki, har qanday x haqiqiy son S da chekli sondagi p_{a_1} ratsional koefitsientli elementlarning yagona chiziqli kombinatsiyasidir: $p_a : x = p_{a_1} r_{a_1} + \dots + p_{a_k} r_{a_k} \cdot f$ funksiyaning quyidagicha topamiz:

$$f(x) \equiv p_{a_1} + \dots + p_{a_k}$$

chunki x sonning chiziqli kombinatsiya ko'rinishidagi tasviri yagona. f funksiyaning chiziqliligi uning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi, f funksiyaning uzluksiz emasligini esa uning barcha qiymatlari ratsional, ammo barchasi bir hil bo'lmasligi kelib chiqadi.

27. Kolmogorov Teoremasi: har bir $n \in N$ da $n(2n+1)$ ta $j_{ij}(x_j)$ ($j=1,2,3,\dots,n, i=1,2,\dots, 2n+1$) funksiyalar mavjudki,

(a) barcha $j_{ij}(x_j)$ funksiyalar $[0, 1]$ da uzluksiz;

(b) $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$ da uzluksiz bo'lgan har qanday $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya uchun shunday $2n+1$ ta ψ_i $i=1, 2, \dots, 2n+1$ funksiyalar mavjudki, ularning har biri R da uzluksiz va

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i \left(\sum_{j=1}^n j_{ij}(x_j) \right).$$

Bu teorema A.N. Kolmogorovga tegishli. U D. Gilbertning mashxur 7 ta muammosini hal etib berdi: n ta haqiqiy o'zgaruvchili har qanday uzluksiz $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$, funksiya bitta o'zgaruvchi uzluksiz funksiyalar yig'indisining supperpozitsiyalari ko'rinishida ifodalash mumkin.

Bu teorema uzundan uzoq induktiv mulohazalar yordamida amalga oshiriladi.

Shuni takidlash kerakki, j_{ij} funksiyalar universal, yani ular f ga bo'g'liq emas. ψ_i funksiyalar aksincha f funksiya yordamida bir qiymatli aniqlangan.

28. Chegaralangan uzoqlashuvchi ketma- ketliklar.

Chegaralangan uzoqlashuvchi ketma- ketlikka eng sodda misol

$$0, 1, 0, 1, \dots,$$

ketma – ketlikdir, bu ketma – ketlikni quyidagicha $\{a_n\}$ ko'rinishida yozish mumkin: agar n toq bo'lsa, $a_n = 0$ va agar n juft bo'lsa, $a_n = 1$, ya'ni $a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$.

Yana bir murakkabroq misol: $[0, 1]$ intervaldagi barcha ratsional sonlaridan iborat $\{r_n\}$ ketma – ketlikni ko`raylik, ya`ni $\{r_n\}$ bu N va Q $\cap [0, 1]$ to`plamlar orasidagi o`zaro bir qiymatli moslikdir.

29. Limit nuqtalari to`plami ixtiyoriy berilgan yopiq to`plam bo`ladigan ketma – ketlik.

$\{a_n\}$ ketma – ketlik biror qism ketma – ketligining limiti bo`lgan har qanday nuqta,  $\{a_n\}$  ketma – ketlikning limit nuqtasi yoki hususiy limiti deyiladi. Ketma – ketlik qiymatlari to`plamining har qanday limit nuqtasi shu ketma – ketlikning limit nuqtasi bo`ladi, ammo teskari umuman aytganda o`rinli emas. Kontrmisol: $0, 1, 0, 1, \dots$ ketma – ketlik ikkita 0 va 1 limit nuqtaga ega, ammo uning qiymatlar to`plami birorta ham limit nuqtaga ega emas.

Ixtiyoriy $\{a_n\}$ ketma – ketlik barcha limit nuqtalarining to`plami hamisha yopiq, zero bu to`plam $\{a_n\}$ ketma – ketlik qiymatlari to`plamining yopilmasidir. Quyidagi misol shunday har qanday yopiq  $A$  to`plamni hosil qilish mumkinligini ko`rsatadi, yani haqiqatan ham  $A$  to`plam turli nuqtlardan tuzilgan biror $\{a_n\}$ ketma – ketlik limit nuqtalari to`plami bo`ladi. Bundan kelib chiqadiki, A – to`plam nafaqat  $\{a_n\}$  ketma – ketlik limit nuqtalarining to`plami, balki uning qiymatlar to`plamining limit nuqtalari to`plami hamdir.

Agar A – bo`sh to`plam bo`lsa, u holda  $n=1, 2, \dots$  da  $a_n=n$  deb olamiz.  $A$  – ixtiyoriy bo`sh bo`lmagan (haqiqiy sonlar) to`plam bo`lsin va  $\{r_n\}$  – barcha ratsional sonlar to`plami bo`lib, uning elementlari orasida bir – biriga tenglari yo`q ($\{r_n\}$ – N ni Q ga o`zaro bir qiymatli akslantirishi). Limit nuqtalari to`plami A bo`lgan  $\{a_n\}$  ketma – ketlikni rekurent usulda topamiz. Avvalo  $R$  to`plamni kesishmaydigan 4 ta: $(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$ va $[1, +\infty)$ intervallarga ajratamiz. Agar $A \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$ bo`lsa, u holda  $a_1$  sifatida  $\{r_n\}$  ketma – ketlikni  $(-\infty, -1)$  ga tegishli birinchi hadini (yani eng kichik  $n$  nomerli hadini) olamiz, agar  $A \cap (-\infty, -1) = \emptyset$ , bo`lib, $A \cap [-1, 0) \neq \emptyset$ bo`lsa, u holda  $a_1$  sifatida ketma – ketlikning  $[-1, 0)$  ga tegishli birinchi hadini olamiz; agar  $A \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$ , ammo  $A \cap [0, 1) \neq \emptyset$  bo`lsa, u holda a_1 sifatida ketma – ketlikning $[0, 1)$ ga tegishli birinchi hadini olamiz;

natijada, agar $A \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$ bo'lsa, u holda a_1 sifatida ketma – ketlikning $[1, +\infty)$ ga tegishli birinchi hadini olamiz. a_1 element tanlangan bo'sin. Agar $A \cap [-1, +\infty) \neq \emptyset$ bo'lsa, $[-1, 0)$, $[0, 1)$ intervallarni ketma – ket qarab huddi shu nuqtada $a_2 \neq a_1$ topamiz. Agar $A \cap [-1, +\infty) \neq \emptyset$ bo'lsa u holda bu bosqichda boshqa hadlar tanlanmaydi. Shunday qilib, birinchi bosqichda $\{a_n\}$ ketma – ketlikning kamida bitta a_1 hadi, ammo to'rtta a_1, a_2, a_3, a_4 hadlaridan ko'p emas. Ikkinchi bosqichda $R \cdot 2 \cdot 2^2 + 2 = 10$ ta $(-\infty, -2)$, $[-2, -3/2)$, $\dots$, $[3/2, 2)$, $[2, \infty)$ intervallarga ajratiladi. $a_1, a_2, \dots, a_n$ tanlangandan keyin har bir qadamda a_{n+1} element biror I intervaldan tanlab olinadi, agar $A \cap I \neq \emptyset$ bo'lsa, u holda a_{n+1} element $\{r_n\}$ ning tanlangan elementlaridan farqli va I ga tegishli birinchi elementidir. k – bosqichda, $R \cdot k \cdot 2^k + 2$ ta intervallarga ajratiladi: $(-\infty, -k)$, $[-k, -k+2^{-k+1})$, $\dots$, $[k+2^{-k+1}, k)$, $[k, +\infty)$. Shu tarzda topilgan $\{a_n\}$ ketma – ketlik rekurent va talab qilingan xossalarga ega ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Agar $A=R$ bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ ketma – ketlik N va Q o'rtasidagi o'zaro bir qiymatli moslik bo'ladi, $\{r_n\}$ dan farqli bo'lsa ehtimol.

30. Ixtiyoroy natural p son uchun $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ shart bajariladigan

$\{a_n\}$ uzoqlashuvchi ketma – ketlik.

a_n garmonik qatorning n – xususiy yig'indisi bo'lsin:

$$a_n \equiv 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Bu holda $\{a_n\}$ ketma – ketlik uzoqlashadi, ammo $p > 0$ da

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \leq \frac{p}{n+p} \rightarrow 0.$$

Shuni ta'kidlash kerakki, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ limit munosabat p ga nisbatan notekis bajariladi haqiqatan ham, limit munosabat p ga nisbatan tekis bajariladi degan tasdiq ketma – ketlikning yaqinlashishi haqidagi Koshi kriterisiga teng kuchli.

Bu yerdagi asosiy g'oyani quyidagicha ifodalash mumkin: agar $\{a_n\}$ uzoqlashsa, u holda natural sonlarning qat'iy o'suvchi shunday $\{p_n\}$ ketma – ketligi

mavjudki, $a_{n+p_m} - a_n \xrightarrow{!} 0$ bo`ladi. Garmonik qatorning hususiy yig`indilari uchun $\{p_n\}$ sifatida $\{n\}$ ketma – ketlikni olish mumkin:

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

31. $\{a_n\}$ uzoqlashuvchi ketma – ketlik shundayki natural sonlarning berilgan qat'iy o`suvchi $\{\varphi_n\} = \{\varphi(n)\}$ ketma – ketlik uchun $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\varphi(n)} - a_n) = 0$.

Induksiyadan foydalanib, barcha $n=1, 2, \dots$ larda $\varphi(n) \geq n$ ekanligini ko`rsatish qiyin emas; bundan tashqari barcha  $n$  va  $k=1, 2, \dots$  larda  $\varphi(n+k) \geq n + \varphi(k)$ . Shunga binoan  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$ . Bu yerda ikkita hol bo`ladi.

Agar $\varphi(n)$ ketma – ketlik chegaralangan bo`lsa, masalan barcha  $n=1, 2, \dots$  larda  $\varphi(n) - n < K$  bo`lsa, u holda $\{a_n\}$ ketma – ketlik sifatida garmonik qator hususiy yig`indilarini ketma – ketligini olish mumkin, chunki

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{K}{n+1} \rightarrow 0.$$

Agar $\varphi(n) - n$ ketma – ketlik chegaralangan bo`lmasa, u holda quyidagicha ish tutamiz.  $k$  – soni  $\varphi(k) > k$  bo`lgan eng kichik natural son bo`lsin. Agar  $n=k$ ,  $\varphi(k)$ ,  $\varphi(\varphi(k))$ ,  $\dots$   $\{\varphi(n)\}$  bo`lsa, $a_n = 1$ deb, aks holda esa $a_n = 0$ deb olamiz. $\varphi(n) - n$ chegaralanmagan bo`lganligi uchun  $\{a_n\}$  ketma – ketlikning nollardan iborat qism ketma – ketlikgi mavjud. Shunga binoan,  $\{a_n\}$  uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi. Bo`shqa tomondan har bir $n=1, 2, \dots$ uchun $a_{\varphi(n)} = a_n$ va shuning uchun $a_{\varphi(n)} - a_n \rightarrow 0$.

32. $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma – ketliklar shundayki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ lar – to`rtta raqamlarning davrlaridan tuzilgan ketma – ketlik bo`lsin:

$$\{a_n\}: 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots$$

$$\{b_n\}: 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots$$

Bu holda tegishli tengsizliklar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4$$

33. $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}$ ketma – ketliklar shundayki,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_{1n} + a_{2n} + \dots) > \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{1n} + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} + \dots$$

Agar $m=n$ bo'lsa, $a_{mn}=1$ va $n \neq m$ bo'lsa, $a_{mn}=0$ deb olamiz, $m, n=1, 2, \dots$

Bunda ikkala qatorlar yaqinlashadi va tegishli tengsizlik $1 > 0$ ko'rinishni oladi.

Ta'kidlash kerakki, bu misolda ko'rsatilgan tengsizlik ketma – ketliklar soni cheklita bo'lgan holdagina o'rinli emas. Masalan,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

tengsizlik har doim o'rinli.

34. Ko'paytmasi tekis yaqinlashuvchi bo'lmagan ikkita tekis yaqinlashuvchi funksiyalar ketma – ketligi.

f funksiya D to'plamda aniqlangan va chegaralanmagan bo'lsin. $\{f_n\}$ va $\{g_n\}$ ketma – ketliklarni quyidagicha aniqlaymiz.

$$f_n(x) \equiv f(x), g_n(x) \equiv 1/n$$

bu holda $f_n \rightarrow f$ va $g_n \rightarrow 0$ yaqinlashishlar D da tekis, ammo $f_n g_n \rightarrow 0$ yaqinlashish D da notekis. Xususan, bu misolda $D=\mathbb{R}$, $f(x)=x$ deb olish mumkin.

Ta'kidlash kerakki, agar ikkita ketma – ketlik chegaralangan va D da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi ham D da tekis yaqinlashuvchi.

35. To'plamlarning uzoqlashuvchi ketma – ketligi.

$\{A_n\}$ to'plamlar ketma – ketligining yuqori limiti $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$ va quyi limiti

$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \right], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \right]$$

Agar $\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ bo'lsa, $\{A_n\}$ ketma –ketlik yaqinlashuvchi deyiladi. Bu holda, ketma - ketlik yuqori va quyi limitlarning umumiy limitiga yaqinlashadi. Agar to'plamlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi bo'lmasa, u holda u uzoqlashuvchi deyiladi. $\overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n} = \{x | x \in \text{cheksiz ko'p } A_n \text{ larga}\}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \{x | x \in \text{barcha } A_n \text{ larga ularning chekli sonligisini istesno qiladi}\}$ bo'lgani sababli, $A, B, A, B, A, B, \dots$ tebranuvchi ketma –ketlik yuqori limiti $A \cup B$ ga teng, uning quyi limiti esa $A \cap B$ teng, shunga binoan, bunday ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $A=B$ bo'lishi zarur va yetarli.

36. $\{A_n\}$ to'plamlar ketma –ketligi bo'sh to'plamga yaqinlashsin, bu to'plamlarning koordinal sonlari esa $+\infty$ ga yaqinlashadi.

A_n – natural sonlar to'plami bo'lib, ularning hech biri n dan katta yoki kichik, lekin $2n$ dan kichik:

$$A_n \equiv \{m | m \in N, n \leq m < 2n\} \quad n=1, 2, \dots$$

Bu holda, hech bir natural son $\{A_n\}$ ketma – ketlikning hadlari cheksiz to'plamiga tegishli bo'lmagani uchun uning yuqori va quyi limitlari bo'ladi.

II.3. DIFFRANSIALLASH.

Bu rejadagi ayrim misollarda hosila atmasi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\infty$$

cheksiz limitlarga nisbatan ham qo'llaniladi. Ammo agar funksiya o'z aniqlanish sohasining har bir nuqtasida chekli hosilaga ega bo'lsagina differensiallanuvchi funksiya atamasi qo'llaniladi. Agar funksiya o'z aniqlanish sohasining har bir nuqtasida ixtiyoriy tartibli (chekli) hosilaga ega bo'lsa, bunda funksiya cheksiz differensiallanuvchi deyiladi. Agar funksiya o'zining aniqlanish sohasining har bir nuqtasida ixtiyoriy tartibli (chekli) hosilaga ega bo'lsa, funksiya cheksiz differensiallanuvchi deyiladi.

e asosli ko'rsatkichli funksiya e^x yoki $\exp(x)$ bilan ifodalanadi.

Faraz qilaylik barcha to'plamlar, funksiyaning qiymatlar to'lamini va aniqlanish sohasini o'z ichiga olsin, R ga qism to'plam bo'lsin. teskari holda aniqlash uchun akslantirish o'rnatiladi.

1. Hech qanday funksiyaning hosilasi bo'lmaydigan funksiya.

$\sin x$ funksiya va umuman sakrash ko'rinishidagi uzilishga ega bo'lgan funksiya o'z asli (boshlang'ichi)ga ega emas, ya'ni u hech qanday funksiyaning hosilasi emas, chunki hamma oraliq qiymatlarini qabul qilish haqidagi Koshi xossasiga ega emas, bu xossa nafaqat uzluksiz funksyalarga, balki hosilalarga ham xosdir.

2. Hosilasi uzulishga ega bo'lgan differensiallanuvchi funksiya.

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Uning hosilasi

$$f'(x) \equiv \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

$x=0$ nuqtada uzilishga ega.

3. Hamma joyda hosilaga ega bo'lgan (chekli bo'lishi shart emas) uzilishga ega funksiya.

Bunday misolni ko'rsata olishimiz uchun hosilani ta'rifini shunday o'zgartirish kerakki, bu ta'rif $\pm\infty$ qiymatlarni ham o'z ichiga olsin. U holda uzilishli *sgn* x funksiyaning hosilasi

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

bo'ladi.

4. Hosilasi ekstremal nuqtaning bir tomonlama atrofining birortasida ham ishorasini saqlamaydigan diffrensiallanuvchi funksiya.

Ushbu

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^4(2 + \sin \frac{1}{x}), & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiya $x=0$ nuqtada absalut minimumga ega. Uning hosilasi

$$f'(x) \equiv \begin{cases} x^2[4x(2 + \sin \frac{1}{x}) - \cos \frac{1}{x}], & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

0 ning ixtiyoriy bir tomonli atrofida musbat qiymatlarni ham, manfiy qiymatlarni ham qabul qiladi. f funksiya $x=0$ nuqtaning hech bir bir tomonlama atrofida monoton emas.

5. Hosilasi biror nuqtada musbat, ammo o'zi shu nuqtaning hech bir atrofida monoton bo'lmagan diffrensiallanuvchi funksiya.

Ushbu

$$f(x) \equiv \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiyaning hosilasi

$$f'(x) \equiv \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 1, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

0 ning har qanday atrofida $f'(x)$ hosila musbat va manfiy qiymatlarga ega.

6. Hosilasi chekli, ammo yopiq intervalda chegaralanmagan funksiya.

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Uning hosilasi

$$f'(x) \equiv \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

$[-1, 1]$ da chegaralanmagan.

7. Hosilasi mavjud va chagaralanmagan, lekin yopiq intervalda (absolut) extrimumga ega bo'lmagan funksiya.

Ushbu

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^4 e^{-\frac{1}{4}x^2} \sin \frac{8}{x^3}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiya hosilasi

$$f'(x) \equiv \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[(4x^3 - \frac{x^5}{2}) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right], & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

0 ning ixtiyoriy atrofida bu hosila 24 va -24 ga yaqin qiymatlarni qabul qiladi. Boshqa tomondan $0 < h \equiv |x| \leq 1$ da topamiz:

$$0 < e^{-\frac{x^2}{4}} < 1 - \frac{1}{4} h^2 e^{-\frac{h^2}{4}} < 1 - \frac{3}{16} h^2,$$

va

$$\left| \left(4x^3 - \frac{x^5}{2}\right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right| \leq 24 + \frac{9}{2} h^3$$

Shuning uchun $0 < h \leq 1$ tengsizlikdan

$$|f'(x)| < \left(1 - \frac{3}{16} h^2\right) \left(24 + \frac{9}{2} h^3\right) < 24 - \frac{9}{2} h^2 (1-h) \leq 24$$

kelib chiqadi. Shunga binoan, $[-1, 1]$ da f' funksiyaning qiymatlar to'plami aniq yuqori chegara 24 va aniq quyi chegara -24 ga teng va u bu chegaralardan hech biriga erisha olmaydi.

8. Hamma joyda uzluksiz, ammo hech qayerda differensiallanuvchi bo'lmaydigan funksiya.

$|x|$ funksiya hamma joyda uzlisiz, lekin $x=0$ nuqtada differensiallanmaydi. Siljitish yo'li bilan shunday uzluksiz funksiya qurish mumkinki bu funksiya ixtiyoriy berilgan chekli to'plamning hamma joyida differensiallanuvchi bo'lmaydi. $|x|$ funksiya siljishlarining cheksiz to'plamini qo'llashga doir misol keltiramiz.

a - ixtiyoriy haqiqiy son va har qanday natural n uchun 4^{-n} yoki -4^{-n} ga teng bo'lgan h_n soni shunday tanlanganki, $|f_n(a+h_n) - f_n(a)| = |h_n|$ bo'ladi. U holda $|f_m(a+h_n) - f_m(a)|$ miqdor barcha $m \leq n$ larda bir hil $|h_n|$ qiymatiga ega va $m > n$ da 0 ga teng. Bu holda $\frac{(f(a+h_n) - f(a))}{h_n}$ ayrimasi musbat butun son bo'ladi, bu musbat n juft bo'lganda juft va n toq bo'lganda toq bo'ladi. Bu yerdan kelib chiqadiki,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f(a+h_n) - f(a))}{h_n}$$

limit mavjud emas, shuning uchun ham $f'(a)$ mavjud emas.

Hech qayerda differensiallanmaydigan funksiya misolini birinchi bo'lib, K.V.T. Veyershtas (nemis matematigi, 1815-1897y) tuzgan:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n p x)$$

bu yerda a - butun toq son, b esa $0 < b < 1$ va $ab > 1 + \frac{3}{2}p^2$. Hozirgi kunda hech bir nuqtada hatto bir tomonli chekli yoki chekli hosilaga ega bo'lmagan uzluksiz funksiyalarga ham misol tuzilgan.

9. O`rta qiymat haqidagi teorema o`rinli bo'lmaydigan diffrensiallanuvchi funksiya.

Bu misolda biz yana kompleks qiymatli funksiyaga murojat qilishga majburmiz. x haqiqiy o`zgaruvchining

$$f(x) \equiv \cos x + i \sin x$$

funksiyasi hamma joyda uzluksiz va diffrensiallanuvchi. Ammo biror $\xi \in (a, b)$

$$(\cos b + i \sin b) - (\cos a + i \sin a) = (-\sin \xi + i \cos \xi)(b - a),$$

tenglik o`rinli bo`ladigan $[a, b]$, $a < b$ interval mavjud emas.

Agar bu tenglik bajariladi deb faraz qilsak, u holda ikkala qismlar (absolut qiymatlarning) modullarini tenglashtiramiz

$$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = (b - a)^2,$$

bu tenglik bir nechta elementar almashtirishlardan so`ng

$$\sin^2 \frac{b-a}{2} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

ko`rinishga keladi. Ammo  $\sin h = h$  bo`ladiga musbat h soni mavjud bo'lmaganligi uchun biz ziddiyatga keldik.

10. Musbat x larda musbat va manfiy x larda 0 ga teng bo`lgan cheksiz diffrensiallanuvchi $f(x)$ funksiya.

Ushbu

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{agar } x > 0 \\ 0, & \text{agar } x \leq 0 \end{cases}$$

funksiya cheksiz diffrensiallanuvchi, uning $x=0$ nuqtadagi barcha hosilasi 0 ga teng.

11. Birlik intervalda musbat va undan tashqarida cheksiz differensiallanuvchi funksiya.

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2(1-x)^2}}, & \text{agar } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{qarama-qarshi bo'lgan holda} \end{cases}$$

12. $[1, +\infty)$ da 1 ga teng, $(-\infty, 0]$ da 0 ga teng va $[0, 1]$ da qattiy manoton bo'lgan cheksiz diffirensiallanuvchi funksiya.

$$f(x) \equiv \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right], & \text{agar } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{agar } x \leq 0, \\ 1, & \text{agar } x \geq 1. \end{cases}$$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$ bo'lgan cheksiz diffirensiallanuvchi manoton funksiya.

Agar manotonlikni talab etmasak, bunday funksiya masalan $\frac{(\sin x^2)}{x}$ misol bo'ladi. Ko'rsatilgan xossaga ega bo'lgan monoton funksiya ko'ramiz. $f(x)$ funksiya $x \leq 1$ da 1 ga teng va $n = 1, 2, \dots$ da $[2n-1, 2n]$ yopiq intervallarda $\frac{1}{n}$ ga teng deb olamiz. Qolgan $(2n, 2n+1)$ ko'rinishdagi orliq intervallarda $f(x)$ funksiya yordamida gorizantal va vertikal siljishlarni va mos manfiy ko'paytuvchilarga ko'paytirishni qo'llaymiz.

II.4. RIMAN INTEGRALI.

$[a,b]$ yopiq intervalda berilgan f funksiyani Riman integralinining taʼrifi, bu integral elementar xossalari maʼlum deb hisoblaymiz. Bu rejadagi baʼzi bir misollarda nol oʻlchovli toʻplam tushunchasi muhimdir. $A \subset \mathbb{R}$ toʻplam berilgan boʻlsin. Har birining uzunligi ε dan kichik va uzunliklarining yigʻindisi cheksiz yaqinlashuvchi qatorni tashkil etgan ochiq intervallarni qaraymiz. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun A toʻplamning ochiq intervallar sanoqli toʻplami bilan ochiq qoplamasi mavjud boʻlsa, $A \subset \mathbb{R}$ toʻplam nol oʻlchovli toʻplam deyiladi.

1. Chekli yopiq intervalda Riman maʼnosida integrallanmaydigan chegaralangan funksiya.

Barcha Q ratsional sonlarning $[0,1]$ yopiq intervalda qarayotgan xarakteristik funksiyasi Riman maʼnosida integrallanuvchi emas.

2. Riman maʼnosida integrallanuvchi va primitivga ega boʻlmagan funksiya.

$\operatorname{sgn} x$ funksiya $[-1,1]$ intervalda integrallanuvchi, ammo primitivga ega emas.

3. Riman maʼnosida integrallanuvchi va hech bir intervalda primitivga ega boʻlmagan funksiya.

Agar 2-rejaning 18- misolida $A = Q \cap [0,1]$ deb olsak, u holda f funksiya $[0,1]$ da monoton boʻlganligi uchun bu funksiya shu intervalda integrallanuvchi boʻladi. Ammo funksiya $[0,1]$ ning hech bir qism intervalida primitivga ega emas, chunki uning sakrashlari toʻplami $[0,1]$ intervalning hamma joyida zich.

4. Yopiq intervalda primitivga ega, ammo unda Riman maʼnosida integrallanmaydigan funksiya.

3-rejaning 6- misolidagi f funksiya biror yopiq I intervalning har bir x nuqtasida (chekli) $g(x)$ hosilaga ega. Ammo g funksiya chegaralanmagan, shuning uchun Riman ma`nosida integrallanuvchi emas.

Bundan oldingi ikkita (3- va 4- misol) misolni integral hisobining asosiy teoremasi munosabati bilan alohida ahamiyatga egadir. Bu teoremaning birinchi varianti shunday: agar $f(x)$ funksiya (i) $[a,b]$ intervalda integrallanuvchi bo`lsa (ii) shu intervalda  $F(x)$  primitivga ega ( $F'(x) = f(x)$ ) bo`lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning Riman integralini

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula bilan hisoblash mumkin. Ikkinchi variant: agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ intervalda uzluksiz bo`lsa, u holda (i) va (ii) tasdiqlar primitiv sifatida

$$G(x) \equiv \int_a^x f(t)dt$$

bilan urinishi bunda har qanday $F'(x)$ primitive uchun

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula o`rinli. Natijada, bu teoremaning uchinchi variantini shunday yozish mumkin: agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da integrallanuvchi bo`lib, $F(x)$ funksiya esa $[a, b]$ da integrallanuvchi bo`lsa,  $[a, b]$  intervalning barcha nuqtalarida  $f(x)$  ga teng  $F'(x)$  hosilaga ega bo`lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning Riman integralini

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

formula bilan hisoblash mumkin.

5. Uzilish nuqtalarining to`plami hamma joyda zich bo`lgan Riman ma`nosida integrallanuvchi funksiya.

3 – misoldagi funksiya shunday xossaga ega, bu funksiya shu bilan bir vaqtda monoton bo`ladi.

2- rejaning 15 – misolidagi funksiya ham shunday xossaga ega, ammo u hech qayerda monoton emas. Bu funksiya uchun barcha a va b larda

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

bo`ladi.

6. $g(x) \equiv \int_0^x f(t)dt$ tenglik o`rinli bo`ladigan f funksiya hamma joyda diffrensiallanuvchi, ammo hamma joyda zich to`plamda $g'(x) \neq f(x)$.

Agar f – 2-rejaning 15- misolidagi funksiya bo`lsa, u holda  $g(x) \equiv \int_0^x f(t)dt$  aynan nol bo`ladi va shunga binoan, barcha x larda $g'(x) = 0$ bo`ladi. Shining uchun  $g'(x) = f(x)$  tenglik irratsional  $x$  lardagina o`rinli.

7. Orasidagi “masofa” nolga teng, ikkita har xil yarim uzluksiz funksiya.

$[a, b]$ da integrallanuvchi f va g funksiyalar ayrimasining absolut qiymatidan olingan integral $d \equiv \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Bu holda d f va g orasidagi masofa.

Agar f – oldingi (16 - misol) misolda yarim uzluksiz funksiya, g funksiya esa – aynan nol bo`lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ x nuqtadagi barcha ratsional sonlarga teng emas, u vaqtda bu funksiyalar orasidagi masofa d nolga tengligi aniqlanadi.

8. F_σ tipida berilgan ixtiyoriy to`plam bilan ustma - ust tushivchi to`plamlarda uzilish nuqtasiga ega va nol o`lchovli, Riman bo`yicha integrallanuvchi funksiya.

A - F_σ tipida berilgan top`lam va nol o`lchovli bo`lsin:  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$  bunda  $A_1, A_2, \dots$  -  $[a, b]$  da yopiq qism toplam,  $n = 1, 2, \dots$  uchun  $A_n \subset A_{n+1}$ . Yana  $A_0$  ni  $\emptyset$  bo`sh to`plam orqali ifodalanadi.  $f$  funksiya quyidagi ko`rinishda ifodalanadi:

$$f(x) \equiv \begin{cases} 2^{-n}, & \text{agar } x \in A_n \setminus A_{n-1}, \\ 0, & \text{agar } x \notin A. \end{cases}$$

Agar $c \in A$ bo'lsa, u holda $c \in A_n/A_{n-1}$ haqiqiy bo'lganda f shu nuqtada uzilishga ega. Bir nechta A_n/A_{n-1} nol o'lchovli to'plam bo'ladi, u holda uning ichki nuqtasi yo'q va 2^{-n-1} da chekli o'lchova bo'ylab 2^{-n} dan farqli qiymatlarni qabul qiluvchi f da, to'plamining limit nuqta bo'lishi kelib chiqadi. Agar $c \notin A$ bo'lsa, u holda f bu nuqtada uzluksizdir. $\varepsilon > 0$ berilgan bo'lsin. shunday N tanlanganda, $2^{-N} < \varepsilon$ bo'ldi. So'ngra bu, c nuqta ayrofi $A_1, A_2, \dots, A_N$ to'plamning bitta nuqtasi o'z ichiga olmasligini beradi. U holda bu atrof $f(x) < 2^{-N} < \varepsilon$ bo'ladi.

9. Kompozitsiyasi Riman bo'yicha integrallanmaydigan, lekin o'zlari Riman bo'yicha integrallanuvchi ikki funksiya.

$0 < x \leq 1$ uchun $f(x) \equiv 1$ va $f(0) \equiv 0$ bo'lsin. Yana $[0, 1]$ yopiq intervalda 15 – misolda $g - f$ funksiyaning toraygani bo'lsin. U holda Q ratsional sonlar to'plamining xarakteristik funksiya $[0, 1]$ da toraygan $f(g(x))$ bo'ladi. Agar x ratsional va o'ga teng bo'lsa, agar x irratsional bo'lsa, bu funksiyalarga teng.

10. Riman bo'yicha integrallanmaydigan chegaralangan funksiya, Riman bo'yicha integrallanuvchi o'suvchi ketma – ketlik limiti bo'ladigan funksiya.

24 – misolda aniqlangan funksiyaning $\{g_n\}$ ketma - ketligini qaraylik. Agar $[0, 1]$ yopiq intervalda chegaralangan bo'lsa, u holda bu ketma – ketlik Riman bo'yicha integrallanuv funksiya o'suvchi ketma – ketlik bo'ladi, yani har bir $x \in [0, 1]$ uchun $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$, $n=1, 2, \dots$ $x \in [0, 1]$ uchun $g(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ o'rinli. U holda g barcha Q ratsional sonlar top'lmidagi xarakteristik funksiya $[0, 1]$ da toraygani bo'ladi va g $[0,1]$ da Riman bo'yicha integrallanmaydi.

11. Koshi bo'yicha asosiy qiymatlari chekli bo'lgan, uzoqlashuvchi hasmas integral.

$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ hosmas integral uzoqlashuvchi, ammo asosiy qiymati Koshi ma`nosida

nolga teng:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

12. Integral ostidagi funksiya musbat, uzluksiz bo`lgan va $x \rightarrow \infty$ da nolga intilmaydigan yaqinlashuvchi $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ xosmas integral.

Har bir butun $n > 1$ uchun $g(n) \equiv 1$ o`rinli,  $[n \cdot n^{-2}, n]$  va  $[n, n + n^{-2}]$  yopiq intervalda  $g$  funksiya chiziqli aniqlangan va oxirgi butun bo`lmagan nuqtalarda nolga teng. Natijada $x \geq 1$ nuqtalarda, $g(x)$ yana aniqlanmagan, $g(x) \equiv 0$ o`rinli. U holda funksiya

$$f(x) \equiv g(x) + \frac{1}{x^2}$$

$x \geq 1$ uchun uzluksiz va o`rinlidir, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ga teng,

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

hosmas integral esa yaqinlashuvchi.

Agar musbat funksiya talablarini tashlab yuborsak u holda oddiy misol,

$$\int_1^{+\infty} \cos x^2 dx$$

tashlab yuborilgandan qolganlarini qanoatlantiruvchi bo`ladi.

13. $[0, +\infty)$ intervalda yaqinlashuvchi xosmas integral, $a > 0$ da $[a, +\infty)$ ko`rinishidagi ixtiyoriy intervalda chegaralanmagan funksiya qism integrali.

Bu shart

$$\int_0^{+\infty} x \cos x^4 dx$$

hosmas integralni qanoatlantiradi.

Funksiyaning musbat va hamma yerda uzluksiz qism integraliga misol qilish mumkin. $[n-n^{-3}, n]$ va $[n, n+n^{-3}]$ yopiq intervalda qarasak va $g(n) \equiv n$ da shu usuldan foydalanish mumkin.

14. f va g funksiyalar, $[a, c]$ da mavjud bo'lmagan, $[a, b]$ va $[b, c]$ da mavjud g ga nisbatan f dan olinadigan Riman – Stiltesa integrali.

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{agar } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{agar } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{agar } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{agar } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

o'rinli va $a=0$, $b=1$ va $c=2$ bo'lsin. U holda

$$\int_0^1 f(x)dg(x) = 0, \quad \int_0^2 f(x)dg(x) = 1,$$

bo'ladi. Ammo f va g $x=1$ umumiy uzulish nuqtaga ega, u holda integral

$$\int_0^2 f(x)dg(x),$$

mavjud emas.

II.5. CHEKSIZ QATORLAR.

Bu rejada biz qaraydigan qatorlarning hammasini haqiqiy deb hisoblaymiz. $[s_n]$ – ushbu $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ cheksiz qatorning yig'indilari ketma – ketligi bo'lsin, yani $n=1, 2, \dots$ da $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ mavjud va chekli bo'lsa, u holda $\sum a_n$ qator yaqinlashuvchi deyiladi. Bu s limit $\sum a_n$ qator yig'indisi deyiladi va

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$$

deb yoziladi. Agar $\sum a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lmasa, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, u holda qator uzoqlashuvchi deyiladi. $\sum a_n = +\infty$ tasdiq $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ ekanligini anglatadi. Agar ixtiyoriy n uchun $a_n \geq 0$ (mos ravishda $a_n > 0$) bo'lsa, $\sum a_n$ qator manfiy bo'lmagan (musbat) deyiladi. $\{a_n\}$ ketma – ketlik uchun ham shunga o'xshash ta'riflarni berish mumkin. Manfiy bo'lmagan $\sum a_n$ qator uchun $\sum a_n < +\infty$ tasdiq qator yaqinlashuvchi ekanligini anglatadi, $\sum a_n = +\infty$ tasdiq esa bu qatorning uzoqlashuvchi ekanligini bildiradi.

Ba'zida qatorning a_0 haddan boshlanishi qulay bo'ladi. Bu holda $\sum a_n$ yozuv $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ qatorni yoki shu qator yig'indisini ifodalaydi. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ darajali qator uchun xatto $x=0$ bo'lganda ham $a_0 x^0$ had a_0 teng deb hisoblanadi, yani bu yerda $0^0 \equiv 1$ deb olamiz.

Ushbu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Makleron qatori uchun $n=0$ ga mos had $f(0)$ ga teng deb hisoblanadi; boshqacha aytganda $f^{(0)}(x) = f(x)$.

1. Umumiy hadi nolga intiluvchi uzoqlashuvchi qator.

Garmonik qator $\sum 1/n$.

2. Hadlari $a_n \geq b_n$, $n=1, 2, \dots$ bo'lgan yaqinlashuvchi $\sum a_n$ qator va uzoqlashuvchi $\sum b_n$ qator.

$$a_n \equiv 0 \text{ va } b_n \equiv -1/n \text{ o'rinli, } n=1, 2, \dots$$

3. Hadlari $|a_n| \geq |b_n|$, $n=1, 2, \dots$ bo'lgan yaqinlashuvchi $\sum a_n$ qator va uzoqlashuvchi $\sum b_n$ qator.

$\sum a_n$ sifatida shartli yaqinlashuvchi $\sum (-1)^{n+1}/n$ garmomik qatorni, $\sum b_n$ sifatida esa uzoqlashuvchi $\sum 1/n$ garmonik qatorni olish mumkin.

4. Ixtiyoriy berilgan musbat hadli qator uchun u majoranta bo'lib xizmat qiluvchi uzoqlashuvchi qator yoki uning uchun majoranta vazifasini o'tovchi yaqinlashuvchi qator mavjud.

Agar $a_n \geq |b_n|$, $n=1, 2, \dots$ bo'lsa, manfiy bo'lmagan $\sum a_n$ qator $\sum b_n$ qatorni majorantalaydi deyiladi. $n=1, 2, \dots$ da $a_n \equiv b_n$ bo'lsin. U holda agar $\sum b_n$ qator uzoqlashsa, u holda u $\sum a_n$ uzoqlashuvchi qatorni majorantalaydi; agar $\sum b_n$ qator yaqinlashsa, u holda u $\sum a_n$ qator bilan majorantalanadi. Bunda 2 va 1/2 ko'paytuvchilardan foydalanib majorantalovchi qatorning ta'rifiga hamma tengsizliklarning qat'iy bo'lishiga erishish mumkin.

Bu oddiy natijani quyidagicha yozish mumkin: taqqoslash alomati yordamida qatorlarning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini ko'rsatishda bir vaqtda yaraydigan musbat qator mavjud emas.

5. Shartli yaqinlashuvchi qatorlar haqida.

Har qanday shartli yaqinlashuvchi $\sum a_n$ qatorda, masalan, ishora almashinuvchi $\sum (-1)^{n+1}/n$ garmonik qatorda hadlar o'rinlarini almashtirish hisobiga yangi hosil bo'lgan qatorni uzoqlashuvchi ham, yaqinlashuvchi ham qilish mumkin. Shu yo'l bilan hosil qilingan uzoqlashuvchi qatorlar orasida shundaylari ham borki, ularning $\{s_n\}$ hususiy yig'indilari ketma – ketligi $+\infty$, $-\infty$ limitga ega

yoki umuman limitga ega emas. Buning ustiga, $\{s_n\}$ ketma – ketlikni shunday aniqlash mumkinki, uning limit nuqtalari to'plami ixtiyoriy berilgan yopiq chegarlangan yoki chegaralanmagan interval bilan ustma – ust tushadi. Buning sababi shuki, $\sum a_n$ qatorning musbat hadlaridan va manfiy hadlaridan tuzilgan qator uzoqlashadi.

Misol sifatida $\sum (-1)^{n+1}/n$ qatorni hadlari o'rinlarini almashtiramiz. Hususiy yig'indilarning $\{s_n\}$ ketma – ketligining limit nuqtalari ketma - ketligi $[a, b]$ yopiq interval bo'lsin. Dastlabki hadni 1 dan boshlaymiz va unga manfiy hadlarni qo'shamiz:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2j}$$

va manfiy hadlarni qo'shib borishni $<a$ yig'indini olguncha davom ettiramiz. So'ngra bu yig'indiga foydalanilmagan musbat hadlarni qo'shamiz va bu jarayonni $>b$ bo'lguncha davom ettiramiz

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2j} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k+1}$$

Bu jarayonni davom ettirib, hosil bo'lgan yig'indiga $<a$ bo'lguncha foydalanilmagan manfiy hadlarni qo'shamiz, so'ngra $>b$ bo'lguncha foydalanilmagan musbat hadlarni qo'shamiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, s_n hususiy yig'indilardan tuzilgan qandaydir qatorni hosil qilamiz. $(-1)^{n+1}/n$ umumiy hadning $1/n$ absalut qiymati nolga intilganligi uchun $[a, b]$ yopiq intervaldagi har bir son qandaydir yetarlicha katta n larda s_n hususiy yig'indilar bilan yetarlicha katta aniqlikda yaqinlashadi. Buning ustiga $[a, b]$ intervaldan tashqaridagi hech bir son bunday xossaga ega emas.

Agar hozirgina bayon etilgan qurishni shunday o'zgartirsakki, yig'indilar avval 1 dan katta, so'ngra -2 dan kichik, keyingi qadamda 3 dan katta, so'ngra -4 dan kichik va hakoza bo'lsa, u holda shu tarzda olingan hususiy yig'indilar ketma – ketligi o'zining limit nuqtalari to'plami sifatida butun haqiqiy sonlar sistemasiga ega bo'ladi.

Agar $\sum a_n$ – yig'indisi S bo'lgan shartli yaqinlashuvchi qator bo'lsa, u holda faqat musbat hadlarnigina o'rinlarini almashtirish hisobiga (manfiy hadlar

o`zlarining dastlabki joylarida qoladi),  $S'$  yig`indiga yaqinlashadigan qatorni hosil qilish mumkin ekanligini V. Serpinski ko`rsatgan. Shunday tasdiq  $S'' > S$  sonlar va faqat manfiy hadlarning o`rinlarini almashtirish uchun ham to`g`ri. Bu fikrlar mashxur “Rimanning o`rin almashtirish teoremasi”ning umumlashmasidir. Bu teoremani boshqa yo`nalishda ham umumlashtirish mumkin. $\sum a_n$ – kompleks hadli shartli shartli yaqinlashuvchi qator bo`lsin. U holda  $\sum a_n$  qatordan uning hadlari o`rinlarini mumkin bo`lgan hamma almashtirishlarda hosil qilingan yaqinlashuvchi (yoki  $\infty$  ga uzoqlashuvchi) hamma qatorlar yig`indilarining to`plami yo kompleks tekislikda to`g`ri chiziq yo butun kompleks tekislikdan iborat bo`ladi. Buning ustiga, agar $\sum v_n$ – chekli o`lchovli fazoda vektorlarning shartli yaqinlashuvchi qatori bo`lsa, u holda mumkin bo`lgan o`rin almashtirishlar bilan hosil qilingan yig`indilar tashkil etgan shu fazodagi chiziqli ko`phillik bo`ladi.

6. Har qanday shartli yaqinlashuvchi $\sum a_n$ qator va ixtiyoriy x haqiqiy son uchun shunday $\{\varepsilon_n\}$ (bunda $|\varepsilon_n| = 1, n=1, 2, \dots$) ketma – ketlik topiladiki, $\sum \varepsilon_n a_n = x$ bo`ladi.

$\sum a_n = +\infty$ bo`lganligi uchun absulut qiymatni 1 ga teng bo`lgan ε_n ko`paytuvchilarni shunday tanlash mumkinki,  $\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n = |a_1| + \dots + |a_n| > x$  bo`ladi. n nomerlar ichida shu tengsizlik o`rinli bo`ladigan eng kichik nomer n_1 bo`lsin. So`ngra absulut qiymati 1 ga teng bo`lgan  $\varepsilon_n$  ko`paytuvchilarni shunday tanlaymizki

$$\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{n_2} a_{n_2} = |a_1| + \dots + |a_{n_1}| - |a_{n_1+1}| - \dots - |a_{n_2}| < x$$

shart bajarilsin (bunda n_2 – mumkin bo`lgan  $n$  lardan eng kichigi). Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, shunday  $\sum \varepsilon_n a_n$  qatorni olamizki, bu qatorning hususiy yig`indilari gohida x dan katta, gohida x dan kichik bo`ladi.  $n \rightarrow +\infty$  da  $a_n \rightarrow 0$  bo`lganligi uchun bu qator x ga intiladi.

7. Ishora almashuvchi qatorlar uchun Leybnis teoremasining shartlari haqida.

Ishora almashuvchi qatorlar haqidagi Leybnis teoremasiga binoan agar

(i) $\varepsilon_n = (-1)^{n+1}$, $n=1, 2, \dots$,

(ii) $c_{n+1} \leq c_n$, $n=1, 2, \dots$,

(iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

bo'lsa $\sum \varepsilon_n c_n$, $|\varepsilon_n| = 1$ va $c_n > 0$, $n=1, 2, \dots$ qator yaqinlashadi. Ushbu uchta shartdan hech qanaqa ikkitasi yaqinlashishini ta'minlamaydi, yani bu uchta shartdan birontasini ham tushirib qoldirib bo'lmaydi. Buni quyidagi uchta misollar ham tasdiqlaydi:

(i) $\varepsilon_n \equiv 1$, $c_n \equiv 1/n$, $n=1, 2, \dots$ deb olaylik. Boshqa tomondan aynan qator hadlari oldidagi ishoralarning o'zgarishi muhimdir. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots$$

sonlardan iborat qatorni olish kerak.

(ii) agar n toq bo'lsa, $c_n \equiv 1/n$ va n juft bo'lsa, $c_n \equiv 1/n^2$ deb olamiz.

(iii) $c_n \equiv (n+1)/n$ (yoki yanayam soddarog'i $c_n \equiv 1$), $n=1, 2, \dots$ deb olamiz.

8. Umumiy hadi nolga intiluvchi uzoqlashuvchi qator qavslar o'rnini tegishli tarzda tanlagan oldindan berilgan songa yaqinlashadi.

Cheksiz qatorda qavslar qo'yish - bu uning ketma - ket hadlarini chekli gruppalariga guruxlash (har bir chekli gruppada kamida bitta haddan iborat) va yangi qatorni hosil qilish demakdir. Yangi hosil bo'lgan qatorning hususiy yig'indilari ketma - ketligi, shunday qilib dastlabki qator hususiy yig'indilarining qism ketma - ketligi bo'ladi. Masalan, ishora almashuvchi garmonik qatorda qavslarni quyidagicha qo'yish mumkin:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \dots$$

Yaqinlashuvchi qatordan qavslarni qo'yish hisobiga hosil qilingan har qanday yangi qatoryaqinlashadi va yig'indisi dastlabki qatorning yig'indisiga teng bo'ladi.

5 – misolda keltirilgan misollardan oxirgisi shunday xossaga ega, chunki qavslarni tegishli tartibda qo'yish oldindan berilgan haqiqiy songa intiluvchi qatorni beradi.

9. Ixtiyoriy berilgan musbat va quyi limiti nolga teng bo'lgan $\{b_n\}$ ketma – ketlik uchun umumiy hadi nolga intiluvchi uzoqlashuvchi $\sum a_n$ qator mavjudki, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n / b_n = 0$ bo'ladi .

$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = 0$ bo'lgan $\{b_{n_k}\}$ qism ketma – ketlikni olamiz, bunda $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k}, \dots$ lar $\{b_n\}$ ketma – ketlikning hadlari emas va $a_{n_k} \equiv b_{n_k}^2, k=1, 2, \dots$ deb olamiz. n boshqa qiymatlari uchun: $n=m_1, m_2, m_3, \dots, m_j, \dots, a_{m_j} \equiv 1/j$ deb olamiz. U holda $n \rightarrow +\infty$ da $a_n \rightarrow 0$, $\sum a_n$ qator uzoqlashuvchi va $k \rightarrow +\infty$ da $a_{n_k} / b_{n_k} = b_{n_k} \rightarrow 0$ bo'ladi.

Bu misoldan ko'rinadiki, xususan, musbat $\{b_n\}$ ketma – ketlik nolga qanchalik tez intilmasin har doim shunday $\{a_n\}$ musbat ketma – ketlik mavjud bo'lib, bu ketma – ketlik nolga shunchalik sekin intiladiki, $\sum a_n$ qator uzoqlashadi va har holda $\{a_n\}$ ketma – ketlik shunday qism ketma – ketlikka egaki, bu qism ketma – ketlik $\{b_n\}$ ketma – ketlikning mos qism ketma – ketligidan ko'ra tezroq nolga intiladi.

10. Har qanday musbat va quyi limiti nol bo'lgan $\{b_n\}$ ketma ketlik uchun, shunday yaqinlashuvchi musbat $\sum a_n$ qator mavjudki $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n / b_n = +\infty$ bo'ladi.

$\{b_n\}$ ketma – ketlikdan shunday $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k}, \dots$ qism ketma ketlikni tanlab olamizki, shunday ixtiyoriy natural k soni uchun $b_{n_k} < k^{-3}$ bo'ladi va $k=1, 2, \dots$ da $a_{n_k} \equiv k^{-2}$ deb olamiz. n ning boshqa qiymatlari uchun $a_n = n^{-2}$ deb olamiz. U holda $a_{n_k} / b_{n_k} = k \rightarrow +\infty$ bo'lgani holda $\sum a_n < +\infty$ bo'ladi.

Bu misoldan ko`rinadiki, xususan, musbat $\{b_n\}$ ketma – ketlik nolga qanchalik sekin intilmasin, har doim shunday musbat $\{a_n\}$ ketma – ketlik mavjudki, $\{a_n\}$ nolga shunchalik tez intiladiki, $\sum a_n$ qator yaqinlashadi va har holda $\{a_n\}$ shunday qism ketma – ketlikka egaki, qism ketma – ketlik $\{b_n\}$ ketma – ketlikning mos qism ketma – ketligidan ko`ra nolga sekinroq intiladi.

11. Har qanday musbat va quyi chegarasi nol bo`lgan  $\{c_n\}$  ketma – ketlik uchun, shunday musbat yaqinlashuvchi  $\sum a_n$  qator va musbat  $\sum b_n$  uzoqlashuvchi qator mavjudki  $a_n/b_n = c_n$ ,  $n=1,2,\dots$  bo`ladi.

$\{c_n\}$ ketma – ketlikdan shunday $c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nk}, \dots$ ketma ketlikni tanlaymizki, har qanday natural k uchun $c_{nk} < k^2$ va $a_{nk} = c_{nk}$, $b_{nk} \equiv 1$, $k=1,2,\dots$ deb olamiz. n ning boshqa qiymatlari uchun $a_n = n^{-2}$, $b_n \equiv (n^2 c_n)^{-1}$ deb olamiz. U holda $\sum a_n$ qator yaqinlashuvchi, $b_n \rightarrow 0$ bo`lganligi uchun  $\sum b_n$  qator uzoqlashuvchi va  $n=1,2,\dots$  da  $a_n/b_n = c_n$  bo`ladi.

Bu misoldan ko`rinadiki, xususan,  $\{c_n\}$  musbat ketma – ketlik nolga qanchalik sekin intilmasin, har doim shunday ikkita musbat qatorlar topiladiki, ulardan bittasi yaqinlashuvchi, boshqasi esa uzoqlashuvchi bo`ladi, ularning n – hadlarining nisbati c_n ga teng.

12. $x \geq 1$ da musbat uzluksiz funksiya shundayki $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashadi, $\sum f(n)$ qator esa uzoqlashadi.

$$f(x) \equiv \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right], & \text{agar } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{agar } x \leq 0, \\ 1, & \text{agar } x \geq 1. \end{cases}$$

13. $x \geq 1$ da musbat uzluksiz funksiya shundayki $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ integral uzoqlashadi, $\sum f(n)$ qator yaqinlashadi.

Har bir $n > 1$ da $g(n) \equiv 0$ deb olamiz, yopiq $[n^{-1}, n]$ va $[n + n^{-1}, n]$ intervallarda esa g funksiyaning chiziqli funksiya va chetki nuqtalarda 1 ga teng bo'lgan funksiya sifatida aniqlaymiz. Oxir - oqibat $g(x)$ funksiya aniqlanmagan $x \geq 1$ nuqtalarda uni 1 ga teng deb olamiz. U holda

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$$

funksiya $x \geq 1$ da musbat va uzluksiz,

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < +\infty$$

14. Dalamber alomatini qo'llab bo'lmaydigan qatorlar.

Agar

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

limit chekli yoki cheksiz bo'lsa, u holda musbat $\sum a_n$ qator Dalamber alomatiga ko'ra

(i) $0 \leq r < 1$ da, yaqinlashuvchi

va

(ii) $1 < r \leq +\infty$ da, uzoqlashuvchi

$r = 1$ bo'lganda bu alomat qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi haqidagi savolga javob bera olmaydi. Aniqroq aytganda, $r = 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi bo'lishi ham, uzoqlashuvchi bo'lishi ham mumkin. Shunga misollar:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{va} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

r limit mavjud bo'lmaganda ham Dalamber alomati yaqinlashishi masalasini hal qila olmaydi. Bu holda musbat qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo'lishi mumkin. Masalan,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

bu yerda

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}$$

qator yaqinlashadi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n - (-1)^n} = 2^2 + 2^1 + 2^4 + 2^3 + 2^6 + 2^5 + \dots$$

bu yerda

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

qator esa uzoqlashadi.

Dalamber alomatini quyidagicha kuchaytirish mumkin:

(iii) agar $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, bo'lsa, u holda $\sum a_n$ qator yaqinlashuvchi.

(iv) agar , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ bo'lsa, u holda $\sum a_n$ qator uzoqlashuvchi.

Agar

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

tengsizliklar bajarilsa, Dalamber alomati bu tarzda yaqinlashish masalasini hal qilib bera olmaydi.

15. Koshi alomatini qo'llab bo'lmaydigan qatorlar.

Agar chekli yoki cheksiz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = s \quad 0 \leq s \leq +\infty$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $\sum a_n$ nomanfiy qator, Koshi alomati binoan

(i). $0 \leq s < 1$ bo'lganda yaqinlashsa

va

$1 \leq s \leq +\infty$ bo'lganda uzoqlashsa.

Dalamber va Koshi alomatlari o'zaro bir - biriga bog'liq: agar chekli yoki cheksiz $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ limit mavjud va shu limitga teng. Shunga binoan, agar Dalamber alomatini (i) yoki (ii) shaklda (14 - misol) qo'llash mumkin bo'lsa, u holda Koshi alomatidan ham foydalanish mumkin. bundan ham ko'ra dastlabki ikkita misollarga (14 - misol) Dalamber alomatini qaysi sababdan qo'llab bo'lmagan bo'lsa, shu sababdan ularga Koshi alomatini ham qo'llab bo'lmaydi.

Koshi alomatini yuqorida bayon qilingan shaklda ushbu yaqinlashuvchi qatorga qo'llab bo'lmaydi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5 + (-1)^n}{2} \right)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \dots$$

chunki $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/3$. Bu alomatni ushbu uzoqlashuvchi qatorga ham qo'llab bo'lmaydi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5 + (-1)^n}{2} \right)^{-n}$$

chunki $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$.

Koshi alomati quyidagicha kuchaytirilishi mumkin

(iii) agar $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ bo'lsa, u holda $\sum a_n$ qator yaqinlashuvchi,

(iv) agar $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ bo'lsa, u holda $\sum a_n$ qator uzoqlashuvchi.

Bu ko'rinishda Koshi alomati kuchaytirilgan Dalamber alomatidan kuchsiz emas, chunki

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Kuchaytirilgan Koshi alomati bundan oldingi ikkita qatorning uzoqlashuvchi yoki yaqinlashuvchilgini bilish imkonini beradi.

16. Dalamber alomatidan ko`ra Koshi alomati effektivliroq bo`lgan qatorlar.

Ushbu $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n}$ yaqinlashuvchi qator uchun Dalamber alomati effektivli emas, ammo bu qator uchun Koshi alomati effektivlidir. Haqiqatdan ham

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} \rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1$$

Huddi shunga o`xshash 14 - misoldan uzoqlashuvchi $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n - (-1)^n}$ qator uchun

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{n - (-1)^n}{n}} \rightarrow 2^1 = 2 > 1$$

bo`ladi.

17. Ko`paytmasi uzoqlashadigan ikkita yaqinlashuvchi qatorlar.

Ikkita $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ va $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ qatorlarning Koshi bo`yicha ko`paytmasi deb $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ qatorga aytiladi, bunda

$$c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Mertens teoremasiga asosan, agar $\sum a_n$ qator A ga yaqinlashsa, $\sum b_n$ qator esa B ga yaqinlashsa, bunda bu qatorlardan kamida bittasi absolut yaqinlashsa, u holda ularning ko`paytmasi $\sum c_n$ qator AB ga yaqinlashadi.

$\sum a_n$ va $\sum b_n$ qatorlar ustma – ust tushsin, bunda

$$a_n = b_n = (-1)^n (n+1)^{-1/2}, n=0, 1, \dots$$

U holda Leybnis alomatiga asosan $\sum a_n$ va $\sum b_n$ qatorlar yaqinlashadi, ammo $\sum c_n$ qator uzoqlashadi. Haqiqtan ham, $[0, n]$ yopiq intervalda $\sqrt{(1+x)(n+1-x)}$ funksiya $x=n/2$ da maksimumga erishishidan foydalanib topamiz

$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \geq \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1$$

$n=0, 1, \dots$

18. Ikkita uzoqlashuvchi qatorlarning ko'paytmasi absolut yaqinlashishi.

Quyidagi ikkita

$$2+2+2^2+2^3+\dots+2^n+\dots \quad n=1, 2, \dots$$

$$-1+1+1+1+\dots+1^n+\dots \quad n=1, 2, \dots$$

qatorlarning Koshi bo'yicha ko'paytmasi

$$-2+0+0+0+0+\dots+0^n+\dots \quad n=1, 2, \dots$$

bo'ladi.

Umumiyroq ko'rinishda, agar $n \geq 1$ da $a_n=a^n$ va $b_n=b^n$ bo'lib, $a \neq b$ bo'lsa, u holda $\sum a_n$ va $\sum b_n$ qatorlar ko'paytmasi bo'lgan qatorning c_n hadi ($n \geq 1$).

$$c_n = a_0 b^n + b_0 a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + a^{n-3} b^3 + \dots + a b^{n-1} = a_0 b^n + b_0 a^n - a^n - b^n + (a^{n+1} - b^{n+1})/(a-b) = \\ = \{a^n[a + (b_0 - 1)(a-b)] - b^n[b + (1 - a_0)(a-b)]\}/(a-b)$$

Shunga asosan, agar $a=(1-b_0)(a-b)$ va $b=(a_0-1)(a-b)$ bo'lsa, $c_n=0$ bo'ladi. Agar bu a va b lar $a-b=1$ tenglik bilan bir – biriga bog'langan bo'lsa, u holda a_0 va b_0 larni $a_0=b+1=a$, $b_0=1-a=-b$ formulalar bilan hisoblab topiladi.

19. Musbat yaqinlashuvchi qatorlarning ixtiyoriy $\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\right\} \quad n=1, 2, \dots$

ketma – ketligi uchun $\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\right\}$ qatorlarning hech biri bilan taqqoslab

bo'lmaydigan musbat yaqinlashuvchi $\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_m\right\}$ qator mavjud.

$$\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_m\right\} \text{ qatorni } \left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\right\} \text{ qator bilan biror tayin natural } n \text{ da taqqoslash}$$

mumkin degan tasdiq

$$\exists M \in \mathbb{N} \exists m > M \Rightarrow a_m \leq a_{mn}$$

ni bildiradi va shuning uchunbunday taqqoslash mumkin emas degan tasdiq

$$\forall M \in \mathbb{N} \exists m > M \exists a_m > a_{mn}$$

ko'rinishda yoziladi.

Barcha mumkin bo'lgan natural M va n lar uchun

$$S_n \equiv \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}, \quad S_{Mn} \equiv \sum_{m=1}^M a_{mn}, \quad R_{Mn} \equiv \sum_{m=M+1}^{+\infty} a_{mn}$$

deb olamiz. U holda S_n , S_{Mn} , va R_{Mn} sonlar musbat. So`ngra har bir $n \in N$ uchun $M(n)$ ni shunday tanlanlaymizki,

$$1 \leq M(1) < M(2) < \dots$$

va

$$\begin{aligned} R_{M(1),1} &< 2^{-1}, \\ \max(R_{M(2),1}, R_{M(2),2}) &< 2^{-2}, \\ &\dots \\ \max(R_{M(n),1}, R_{M(n),2}) &< 2^{-2}, \end{aligned}$$

bo`lsin.

Endi har qanday natural m uchun

$$a_m = \begin{cases} 2a_{m1}, & \text{agar } 1 \leq m \leq M(2) \\ (k+1) \max(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mk}), & \text{agar } M(k) < m \leq M(k+1) \quad k > 1 \quad \text{uchun} \end{cases}$$

deb olamiz.

$\sum a_m$ qatorning yaqinlashishini isbotlash uchun, avval shu qatorning $M(k) < m \leq M(k+1), k > 1$ bo`lgandagi hadlari (chekli) yig`indilari uchun quyidagi tengsizlikni isbotlaymiz:

$$\sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m \leq \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} [(k+1) \sum_{n=1}^k a_{mn}] = (k+1) \sum_{n=1}^k [\sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_{mn}] \leq (k+1) \sum_{n=1}^k R_{M(k),n} \leq (k+1) \sum_{n=1}^k 2^{-k} < (k+1)^2 2^{-k}$$

shunga binoan,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m = \sum_{m=1}^{M(2)} a_m + \sum_{m=M(2)+1}^{M(3)} a_m + \dots \leq 2 \sum_{m=1}^{M(2)} a_{m1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m < 2S_{M(2),1} + \sum_{k=2}^{+\infty} (k+1)^2 2^{-k} < +\infty.$$

Boshqa tomondan, har – qanday tayin n uchun $k \geq n$ va $n > M(k)$ da $a_m/a_{mn} \geq k+1$ ga ega bo`lamiz, bu yerdan  $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m/a_{mn} = +\infty$ . Shunday qilib,  $\sum a_m$  qatorni  $\sum a_{mn}$  qator bilan taqqoslab bo`lmaydi. Aslida ham $\sum a_m$ qatorni $\sum a_{mn}$ qator bilan hattoki

$$\exists M \text{ va } K \in N \ni m > M \Rightarrow a_m \leq K a_{mn}$$

bo`gan holda ham taqqoslab bo`lmaydi. Bu holda taqqoslash imkonini inkor etish quyidagicha:

$$\forall M \text{ va } K \in N \ni m > M \ni a_m > K a_{mn}$$

Agar musbat qatorni shu ketma – ketlikdagi qatorlardan kamida kamida bittasi bilan taqqoslash mumkin bo`lganda va faqat shundagina yaqinlashsa, musbat yaqinlashuvchi qatorlar ketma – ketlikni taqqoslashning universal ketma – ketligi deb ataymiz.

20. Teplissa T matrissasi va T matrissa yo`rdamida yaqinlashuvchi ketma – ketlikka aylantiriluvchi uzoqlashuvchi ketma –ketlik.

Aniqlanish sohasi $N \times N$ bo`lib, haqiqiy yoki kompleks qiymatlarni qabul qiladigan va  $T=(t_{ij})$  belgilangan bunda  $i$  va  $j \in N$  funksiya cheksiz matrissa deyiladi.  $\{a_j\}$  –sonlarning berilan ketma – ketligi bo`lsin. Agar $\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} a_j$ cheksiz qator har bir $i \in N$ da yaqinlashuvchi bo`lsa, u holda

$$b_i \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} a_j ,$$

tengliklar bilan aniqlanadigan $\{b_i\}$ ketma – ketlik $\{a_j\}$ ketma – ketlikni T matrissa vositasida almashtirish deyiladi. Agar har qanday yaqinlashuvchi $\{a_j\}$ ketma – ketlik uchun $\{b_i\}$ ketma – ketlik ma`noga ega bo`lib, $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_i$ mavjud va $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j$ ga teng bo`lsa cheksiz  $T$  matrissani Teplissa matrissasi deyiladi. Teplissa matrissalari nazaryasining muhim teoremasi quyidagicha:  $T=(t_{ij})$  Teplissa matrissa bo`lishi uchun, quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$(1) \exists M \in R \exists \forall i \in N, \sum_{j=1}^{+\infty} |t_{ij}| \leq M,$$

$$(2) \lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1,$$

$$(3) \forall j \in N, \lim_{i \rightarrow +\infty} t_{ij} = 0$$

$T - (t_{ij})$ teplissa matrissasi bo`sin, bu yerda  $1 \leq j \leq i$  bo`ganda $t_{ij} \equiv 1/i$ va $i < j$ bo`lganda $t_{ij} \equiv 0$,

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

$\{a_j\}=1, -1, 1, -1, \dots(-1)^{n+1} \dots$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi emas, ammo uning T matrissa yordamidagi almashtirilishi

$$\{b_i\}=1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots, \frac{1+(-1)^{i+1}}{2i} \dots$$

ketma – ketlikni beradi, bu ketma - ketlik yaqinlashuvchi.

Agar $\{a_n\}$ – har bir hadi 1 yoki -1 bo`lgan uzoqlashuvchi ketma – ketlik bo`lsa, u holda $\{a_n\}$ ni yaqinlashuvchi ketma – ketlikka almashtiruvchi T Teplissa matrissasi mavjud. Haqiqatan ham, bu holda T matrissani shunday tanlash mumkinki, $\{a_n\}$ ketma – ketlik faqat noldan iborat ketma – ketlikka almashadi. Bunday $T=(t_{ij})$ matrissani quyidagicha tuzish mumkin: $\{n_i\}$ – musbat butun sonlarning qat`iy o`svuvchi ketma – ketligi bo`lib, a_{n_i} va a_{n_i+1} , $i=1, 2, 3 \dots$ da qarama – qarshi ishoralarga ega.

$$t_{ij} = \begin{cases} 1/2 & \text{agar } j = n_i \text{ yoki } j = n_i + 1 \\ 0 & \text{qarama – qarshi holda} \end{cases}$$

deb olamiz. Bu holda T matrissa $\{a_n\}$ ketma – ketlikni 0, 0, . . . ketma- ketlikka almashtiruvchi Teplissa matrissasi bo`ladi.

21. Har qanday $T=(t_{ij})$ matrissa uchun har bir hadi 1 yoki -1 bo`lgan $\{a_j\}$ ketma – ketlik topiladiki, $\{a_j\}$ ketma – ketlikni T matrissa yordamida $\{b_i\}$ almashtirishi uzoqlashadi.

20 – misoldagi (1) va (3) shartlardan foydalanib, ikkita $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$ va $j_1 < j_2 < j_3 < \dots$ ketma – ketliklarni quyidagicha aniqlaymiz. i_1 nomer shunday bo`lsinki, $i \geq i_1$ da

$$\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{1i}, \quad |e_{1i}| < 0.05$$

bo'lsin. Bu (2) shartga ko'ra bajariladi. So'ngra, (1) va (2) shartlar asosida j_1 nomerni shunday tanlanaymizki

$$\sum_{j=1}^{j_1} t_{i_j} = 1 + d_1 \quad \text{va} \quad \sum_{j=j_1+1}^{+\infty} |t_{i_j}| < 0.05$$

bunda $|d_1| < 0.1$.

Shundan so'ng, (2) va (3) shartlardan foydalanib, $i_2 > i_1$ shunday tanlaymizki $i \geq i_2$ da

$$\sum_{j=1}^{j_1} |t_{i_j}| < 0.05 \quad \text{va} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{2i} \quad |e_{2i}| < (0.05)^2$$

so'ngra yana (1) va (2) shartlardan foydalaniladi va $j_2 > j_1$ tanlanadiki

$$\sum_{j=1}^{j_1} t_{i_2 j} = 1 + d_2 \quad \text{va} \quad \sum_{j=j_2+1}^{+\infty} |t_{i_2 j}| < (0.05)^2$$

bunda $|d_2| < 2 \cdot (0.05)^2$.

Agar $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ va $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ tanlab bo'lingan bo'lsa, u holda (2) va (3) shartlarga asoslanib, $i_{k+1} > i_k$ tanlanadiki $i \geq i_{k+1}$ da

$$\sum_{j=1}^{j_k} |t_{i_j}| < (0.05)^k \quad \text{va} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{k+1,i}, \quad |e_{k+1,i}| < (0.05)^{k+1}$$

bo'lsin. So'ngra (1) va (2) shartlardan foydalanib, $j_{k+1} > j_k$ ni shunday tanlaymizki,

$$\sum_{j=1}^{j_{k+1}} t_{i_{k+1} j} = 1 + d_{k+1} \quad \text{va} \quad \sum_{j=j_{k+1}+1}^{+\infty} |t_{i_{k+1} j}| < (0.05)^{k+1}$$

bunda $|d_{k+1}| < 2 \cdot (0.05)^{k+1}$.

Endi $\{a_j\}$ ketma – ketlikni aniqlaymiz:

$$a_j \equiv \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq j_1, \quad j_2 < j \leq j_3 \quad \dots \quad \text{uchun} \\ -1, & j_1 < j \leq j_2, \quad j_3 < j \leq j_4 \quad \dots \quad \text{uchun} \end{cases}$$

Agar k toq va $k > 1$ bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} b_{i_k} &= \sum_{j=1}^{j_1} t_{i_k j} - \sum_{j=j_1+1}^{j_2} t_{i_k j} + \sum_{j=j_2+1}^{j_3} t_{i_k j} - \dots + \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} t_{i_k j} + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{i_k j} a_j = \sum_{j=1}^{j_1} t_{i_k j} - \left(\sum_{j=1}^{j_2} t_{i_k j} - \sum_{j=1}^{j_1} t_{i_k j} \right) + \left(\sum_{j=1}^{j_3} t_{i_k j} - \sum_{j=1}^{j_2} t_{i_k j} \right) - \dots \\ &\dots + \left(\sum_{j=1}^{j_k} t_{i_k j} - \sum_{j=1}^{j_{k-1}} t_{i_k j} \right) + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{i_k j} a_j \\ \sum_{j=1}^{j_k} t_{i_k j} &= 1 + d_k \quad \text{dan boshqa barcha} \quad \sum_{j=1}^{j_r} t_{i_k j} \quad \text{yig'indilar absulut qiymati jihatidan} \quad (0.05)^{k-1} \end{aligned}$$

dan kichik. Shunga binoan

$$\left| \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{i_k j} a_j \right| \leq \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} |t_{i_k j}| < (0.05)^k,$$

ekanligini hisobga olib

$$b_{i_k} > 1 - 2(0.05)^{k-1} - 2(k-1)(0.05)^{k-1} - (0.05)^k = 1 - [2(k-1) + 2,05](0.05)^{k-1}$$

ni topamiz. Oxirgi tengsizlikdan $\overline{\lim_{i \rightarrow \infty} b_i} \geq \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} b_{i_k}} \geq 1$ ekanligi kelib chiqadi. k juft qiymatlarini qarab, $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i \leq \lim_{k \rightarrow \infty} b_{i_k} \leq -1$ ni olamiz va shunga ko'ra $\{b_i\}$ ketma – ketlik uzoqlashadi.

20 va 21 misollardan ko'rinadiki, ba'zi Teplissa matrissalar hadlari ± 1 bo'lgan ba'zi ketma – ketliklarni yaqinlashuvchi ketma – ketlikka o'tkazgan holda barcha shunday ketma – ketliklarni yaqinlashuvchi ketma – ketlikka o'tkazadigan Teplissa matrissasi mavjud emas.

Yuqorida foydalanilgan usulga qarab shunday xulosaga kelamiz: agar $\{T_m\}$ – Teplissa matrissalari ketma – ket bo'lsa, u holda shunday $\{a_n\}$ ketma – ketlik topiladiki, $n=1, 2, \dots$ da $|a_n|=1$ bo'ladi, bunda har bir m da $\{a_n\}$ ketma – ketlikni T_m matritsa yordamida almashtirish uzoqlashuvchi bo'ladi. Natural sonlarning qat'iy o'suvchi $\{i_k\}$ va $\{j_k\}$ tanlash chog'ida yuqoridagilardan boshqacharoq yo'l tutamiz. Avval i_1 va j_1 ni tanlanaymizki T_1 matritsa uchun tegishli shartlar bajarilsin; keyin i_2 va j_2 larni shunday tanlaymizki, tegishli shartlar T_1 va T_2 lar uchun bajarilsin va hakoza. $\{a_n\}$ ketma – ketlikni yuqoridagi kabitopamiz. Har qanda tayin m uchun $\{a_n\}$ ketma – ketlik qandaydir $\{b_{mn}\}$ qism ketma – ketlikka o'tadi. Ammo i_k va j_k lar $k > m$ da shunday ketma – ketlikni hosil qiladiki, bu ketma – ketlik uchun bundan oldingi T_m matrissaga doir shartlar bajarilgani uchun bu yerdan kelib chiqadiki hech bir m da $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{mn}$ mavjud emas.

22. Faqat bitta nuqtada yaqinlashuvchi darajali qator.

$\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ qator $x=0$ da yaqinlashadi va $x \neq 0$ da uzoqlashadi.

23. Maklaron qatori barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi bo`lgan, ammo faqat bitta nuqtada funktsiyani ifodalovchi funktsiya.

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funktsiya cheksiz diffrensiallanuvchi, uning $x=0$ dagi hosilasi 0 ga teng. Uning Maklaron qatori

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0$$

funktsiyaga barcha x da yaqinlashadi, 0 ga teng, faqat $x=0$ bitta nuqtada funktsiya bo`ladi.

24. Maklaron qatori faqat bitta nuqtada yaqinlashuvchi bo`lgan funktsiya.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos n^2 x$$

funktsiya hamma yerda cheksiz diffrensiallanuvchi, e^{-n} kopaytuvchi hamma qatorlarda mavjud bo`lgani uchun, ketma – ket diffrensiallash natijasida bu qatorlarning tekis yaqinlashishini ta`minlaydi. Bu funktsiyaning Maklaron qatori faqat juft darajalarni o`z ichiga oladi.  $2k$  tartibli hadning absolut miqdori uchun quyidagi tengsizlik o`rinlidir:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2k} e^{-n} n^{4k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2 x}{2k} \right)^{2k} e^{-n} \quad (x \neq 0)$$

ixtiyoriy $n=1, 2, \dots$ va hususiy $n=2k$ uchun. Ixtiyoriy $x \neq 0$ da uning qiymati uchun quyidagiga ega bo`lamiz

$$\left(\frac{n^2 x}{2k} \right)^{2k} e^{-n} = \left(\frac{2kx}{e} \right)^{2k} > 1$$

agar faqat $k > |e/2x|$ bo`lsa. Bunday Maklaron qatori f funktsiyasi $x \neq 0$ da uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

22 – misolda $x=0$ nuqtada yaqinlashuvchi $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ qator ko`rsatilgan.

Biz haqiqatdan ham Maklerson qatori bo'lishi uchun, $f(x)$ cheksiz diffrensiallanuvchi funksiyani ko'rsatamiz. Bu $\varphi_{n0}(x)$ butun aniqlangan funksiya uchun quyidagicha bo'ladi. $n=1, 2, \dots$ uchun

$$j_{n0}(x) \equiv \begin{cases} ((n-1)!)^2, & \text{agar } 0 \leq x \leq 2^{-n}/(n!)^2, \\ 0, & \text{agar } |x| \geq 2^{-n+1}/(n!)^2 \end{cases}$$

o'rinlidir. Endi $\varphi_{n0}(x)$ qolgan intervallarda aniqlanadi, chunki u hamma yerda cheksiz diffrensiallanadi. 12 – misoldagi funksiya yordamida buni olish mumkin.

$f_1(x) \equiv \varphi_{10}(x)$ bo'lsin; $n=2, 3, \dots$ uchun

$$j_{n1}(x) \equiv \int_0^x j_{n0}(t) dt$$

$$j_{n2}(x) \equiv \int_0^x j_{n1}(t) dt$$

.....

$$f_n(x) \equiv j_{n,n-1}(x) \equiv \int_0^x j_{n,n-2}(t) dt$$

o'rinli.

III. XULOSA

Men bu bitiruv malakaviy ishini yozishda kontrmisollar bilan tanishib chiqdim. Bitiruv malakaviy ishda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazaryasi va matematik analiz asoslaridan ko'pgina misollar keltirilgan va yana ayrim kontrmisollarga doir javob topish qiyin bo'lgan savollarga tushunarli tarzda yetarli ko'rsatma va javoblarni berishga harakat qildim.

Ushbu bitiruv malakaviy ishdagi kontrmisollarni hisoblash davomida Koshi alomatidan, Kolmogorov teoremasidan, Riman integralidan, Dalamber alomatidan, Teplissa matrissasidan, Makleron qatoridan foydalanib borildi.

Bu bitiruv malakaviy ishda ko'rib chiqilgan kontrmisollar bu mavzuga qiziquvchi talabalarga muammali bo'lgan misollarni ular uchun tushunarli tarzda yortib berilgan deb o'ylayman.

Bu mavzu menda juda katta ta'assurot qoldirdi. Agar mavzuda berilgan barcha misollarni o'rganib, tahlil qilib chiqilsa, maqsadga muvofiq bo'lar edi. Men ularning ba'zilarini tahlil qilib o'rganib chiqa oldim, sababi bu keltirilgan misollarni o'rganib chiqish uchun matematikaning ko'pgina bo'limlaridan yaxshigina bazaviy bilimga ega bo'lish kerakligini tushunib yetdim. Kelajakda mana shu bitiruv malakaviy ishdagi misollarni o'rganib chiqishni o'z oldimga maqsad qilib qo'ydim.

“Ta'lim – tarbiya tizimini o'zgartirmasdan turib, ongni o'zgartirib bo'lmaydi. Ongni, tafakkurni o'zgartirmasdan turib esa biz ko'zlagan oliy maqsad – ozod va obod jamiyatni barpo etib bo'lmaydi” - deydi I.A.Karimov. Men ham Prezidentimizning ushbu gaplariga amal qilgan holda kelajakda vatanim uchun kerakli kadrlardan biri bo'lib, kelajak avlodni yetuk, bilimli, tarbiyali, el yurtga sodiq farzandlar bo'lib yetishishida o'z hissamni qo'shaman.

IV. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг “Таълим тўғрисида”ги ва
“Кадрлар тайёрлаш дастури тўғрисида” ги қонуни 1997 – йил, 29 – август.
1. Каримов И.А. “Баркамол авлод орзуси” Тошкент – 2000 йил.
2. Karimov I.A. “Inson baxt uchun tug’iladi”, “Sharq” – T. 2001
3. Karimov I.A. “Yuksak ma’naviyat – yengilmas kuch”. Toshkent “Ma’naviyat” 2005.
4. Karimov I.A. “Jahon moliyaviy – iqtisodiy inqirozi, O’zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo’llari va choralari” – T: O’zbekiston, 2009 yil.
5. Karimov I.A. “Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqorolik jamiyatini rivojlantirish konsepsiyasi” – T: O’zbekiston, 2010 yil.
6. Karimov I.A. “Mamlakatimizni modernizatsiya qilish va kuchli fuqorolik jamiyati barpo etish-ustuvor maqsadimiz”. “Xalq so’zi” gazetasi 2010 yil. 27 yanvar.
7. Karimov I.A. “Mamlakatimizni modernizatsiya qilish yo’lini izchil davomi – taraqqiyotimizning muhim omilidir”, “Ishonch” gazetasi; 2010 yil 8 – dekabr.
8. Karimov I.A. “Barcha reja va dasturlarimiz vatanimiz taraqqiyotini yuksaltirish, xalqimiz farovonligini oshirishga xizmat qiladi”, “Xalq so’zi” gazetasi, 2011 yil 22 – yanvar.
9. Karimov I.A. “O’zbekiston Respublikasi mustaqilligining 20-yilligiga bag’ishlangan”. “Xalq so’zi” gazetasi, 2011 yil 7 aprel.
10. Karimov I.A. “Axborot va kommunikatsiya texnologiyalarini yanada taraqqiy ettirishning tashkiliy – huquqiy jihatlarini”, “Xalq so’zi” gazetasi, 2011 yil 15 – aprel.
12. Б. Галбаум. Дж. Олмстед. Контрпримеры в анализе. Москва 1967.

13. Xudayberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T. Kompleks analiz. T. Universitet 1998.
14. Битсадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., Наука. 1972.
15. Hakimov R.M. Kompleks o`zgaruvchili funksiyalar nazariyasi. Ma`ruzalar matni. Namangan. Universitet, 2006.
16. Зорич В.А. Математический анализ 1,2 т. М.»Наука» 1981.
17. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа 1,2 т. М.»Высшая школа» 1981.
18. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления 1,2,3 т.М. «Наука» 1970
19. Ильин В.А., Позняк Е.Г., Основы математического анализа. 1,2.М. «Наука» 1980.
20. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т. 1, М. Наука, 1985

http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_mathematics/4823/РИМАНА

РИМАНА ИНТЕГРАЛ

РИМАНА ИНТЕГРАЛ

- обобщение понятия *Коши интеграла* на нек-рый класс разрывных функций, введенное Б. Риманом (B. Riemann, 1853). Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Сумму вида

$$\sigma = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}), \quad (1)$$

где $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, наз. интегральной суммой, отвечающей данному разбиению отрезка $[a, b]$ точками x_i и выбору точек ξ_i . Число I наз. пределом интегральных сумм (1) при $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $\max_i \Delta x_i < \delta$ справедливо неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$. Если существует конечный предел I интегральных сумм при $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, то функцию $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Римана на отрезке $[a, b]$ при $a < b$, а указанный предел - определенным интегралом Римана от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ обозначают

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (2) \text{ При } a = b, \text{ по определению, полагают}$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0,$$

а при $a > b$ определяют интеграл (2) с помощью равенства

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Необходимым и достаточным условием интегрируемости $f(x)$ на $[a, b]$ в смысле Римана являются ограниченность $f(x)$ на этом отрезке и равенство нулю *Лебега меры* множества всех точек разрыва $f(x)$, содержащихся на $[a, b]$.

С в о й с т в а Р. и. 1) Всякая интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке (обратное неверно: примером ограниченной и неинтегрируемой на $[a, b]$ функции служит *Дирхле функция*).

2) Л и н е й н о е с в о й с т в о: для любых постоянных α и β из интегрируемости на $[a, b]$ каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$ следуют интегрируемость на этом отрезке функции $[\alpha f(x) + \beta g(x)]$ и равенство

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

3) Из интегрируемости на отрезке $[a, b]$ каждой из функций $f(x)$ и $g(x)$ следует интегрируемость на этом отрезке произведения $f(x)g(x)$.

4) А д д и т и в н о с т ь: из интегрируемости функции $f(x)$ на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ следуют интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

5) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и если $f(x) \geq g(x)$ всюду на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

6) Из интегрируемости на $[a, b]$ функции $f(x)$ следуют интегрируемость на этом отрезке функции $|f(x)|$ и справедливость оценки

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

7) Ф о р м у л а с р е д н е г о з н а ч е н и я: если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, функция $g(x)$ неотрицательна или неположительна всюду на этом отрезке, а m и M — точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на $[a, b]$, то найдется число μ из отрезка $m \leq \mu \leq M$ такое, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx. \quad (3)$$

Если, кроме того, функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на этом отрезке найдется точка ξ такая, что в формуле (3)

$$\mu = f(\xi).$$

8) В т о р а я ф о р м у л а с р е д н е г о з н а ч е н и я (ф о р м у л а Б о н н е): если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, а функция $g(x)$ монотонна на этом отрезке, то найдется точка ξ на $[a, b]$ такая, что справедлива формула

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx.$$

Лит.: [1] Р и е м а н В., "Gottinger Akad. Abhandl.", 1868, Bd 13; [2] И л ь и н В. А., П о з н я к Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971, 2 изд., ч. 2, М., 1980; [3] К у д р я в ц е в Л. Д., Курс математического анализа, т. 1-2, М., 1981; [4] Н и к о л ь с к и й С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1-2, М., 1975. В. А. Ильин.

Опубликовать

Теорема Колмогорова

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Перейти к: [навигация](#), [поиск](#)

Теоре́ма Колмого́рова в [математической статистике](#) уточняет скорость сходимости [выборочной функции распределения](#) к её теоретическому аналогу.

Содержание

- [1 Формулировка](#)
 - [1.1 Замечание](#)
- [2 Определение границ доверительной зоны](#)
- [3 См. также](#)

[править] Формулировка

Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — бесконечная [выборка](#) из [распределения](#), задаваемого непрерывной функцией распределения F . Пусть $\hat{F}$ — [выборочная функция распределения](#), построенная на первых n элементах выборки. Тогда

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{по распределению}} K \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где K — [случайная величина](#), имеющая [распределение Колмогорова](#).

[править] Замечание

Неформально говорят, что скорость сходимости выборочной функции распределения к её теоретическому аналогу имеет порядок $1/\sqrt{n}$.

[править] Определение границ доверительной зоны

Теорема [Колмогорова](#) очень часто применяется, чтобы определить границы, в которые с заданной вероятностью попадает теоретическая функция $F(x)$:

$$P(\sqrt{n}D_n \leq k_\gamma) = P\left(\frac{F_n(x) - k_\gamma}{\sqrt{n}} \leq F(x) \leq \frac{F_n(x) + k_\gamma}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K(k_\gamma) =$$

где k_γ — квантиль уровня γ закона распределения Колмогорова.

Таким образом с вероятностью γ при $n \rightarrow \infty$ $F(x)$ находится в указанном интервале.

Вероятность γ называют *уровнем значимости*.

Область, определяемую этими границами, называют *асимптотической γ -доверительной зоной* для теоретической функции распределения.

[править] См. также

- Критерий согласия Колмогорова
- Распределение Колмогорова
- Теорема Гливенко — Кантелли.

Источник —

[illegible]

Категории: [Выборочный метод](#) | [Теоремы](#)

Mundarija

I. KIRISH

- I.1. Mamlakatimizda ta'lim sohasida olib borilayotgan islohotlar haqida...
- I.2. O'zbekiston-jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi sharoitida
iqtisodiyotning asosiy ko'rsatkichlari va o'sish sur'atini barqaror
saqlab qolgan davlat.....
- I.3. Mavzuning dolzarbligi va uning ahamiyati.....
- I.4. BMIning maqsadi va vazifalari.....
- I.5. Tanlangan ob`yektlar va tadqiqot usullari.....
- I.6. BMIning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati.....
- I.7. BMIning tuzilishi va tarkibi.

II. ASOSIY QISM. MATEMATIK ANALIZ NAZARIYASIGA OID MUHIM MASALALAR.

- II.1. Haqiqiy sonlar sistemasi.....
- II.2. Funktsiyalar va limitlar.....
- II.3. Differensiallash.....
- II.4. Riman integrali.....
- II.5. Cheksiz qatorlar.....

III. XULOSA.....

IV. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI.....

ILOVA. INTERNET MA'LUMOTLARI.....

