

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA MATEMATIKA FAKULTETI

5130100-MATEMATIKA YO'NALISHI

4-BOSQICH 402-GURUH TALABASI

QURBONOV SHAVKAT NOSIRJON O'G'LINING

«KO'PXILLIKLAR» MAVZUSIDAGI

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

NAMANGAN - 2015

MAVZU: KO`PXILLIKLAR

REJA:

I KIRISH.

II ASOSIY QISM.

1-§. Ko`pxillik tushunchasi.

2-§. Geometriyada ko`pxilliklar.

3-§. Grobner basisi.

4-§. Ideallar.

III XULOSA.

IV FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

Kirish.

Biz jahon sivilizatsiyasining bosh tafakkuri va yuksak ma'naviyati bilan ulkan hissa qo'shgan, insoniyat tarixida o'chmas iz qoldirgan buyuk ajdodlarimiz bilan haqli ravishda faxrlanamiz. Ularning madaniy-ma'naviy, ilmiy merosini o'rganish, asrab avaylash va yanada boyitish kelgusi avlodlar oldidagi burchimizdir.

I.A.Karimov

Prezidentimiz Islom Abdug'aniyevich Karimov rahnamoligida barcha sohalar qatori ma'naviy-ma'rifiy jabhalarda olib borilayotgan ishlar zahirida ham ana shu ezgu maqsad mujassam. Muqaddas qadamjolarni obodonlashtirish, buyuk bobolarimizning boy ma'naviy merosini chuqur o'rganish, yoshlarimizni shu asosda barkamol insonlar etib voyaga yetkazish ustuvor ahamiyat kasb etmoqda. O'zbekiston Respublikasi mustaqillika erishgandan so'ng ko'pgina sohalar bilan bir qatorda ta'lim sohasida ham katta o'zgarishlar yuz berdi. Bunda asosan rivojlangan davlatlarning ta'lim tizimlari namuna sifatida olinib, bizning xalqimiz imkoniyatlari va yutuqlariga mos holda yangi ta'lim tizimi ishlab chiqildi. O'zbekiston innovatsion rivojlanish turining hozirgi zamon modeliga o'tishi uchun hamma zarur sharoitlarga ega. Bu model vujudga keltirilgan ilmiy texnikaviy salohiyatdan keng va samarali foydalanishga fundamental va amaliy fanlarning yutuqlarini chuqur ilm talab qiladigan texnologiyalarni amaliyotga keng joriy etishga, yuqori malakali, iqtidorli ilmiy kadrlar sonini ko'paytirishga asoslanadi. Bu mamlakatimiz jahondagi iqtisodiyoti va sanoati rivojlangan davlatlar qatoriga kirib borishning zarur, zamonaviy sharti va mustahkam poydevori bo'lib xizmat qiladi.

Ma'lumki, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimovning Respublika Oliy Majlisi IX sessiyasida so'zlagan nutqida takrorlaganidek: "Ta'lim

tarbiya va kadrlar tayyorlash tizimini tubdan isloh qilish, barkamol avlodni voyaga etkazishda muhim ahamiyatga ega bo'ladi". Bu esa Oliy maktabda o'qitish sistemasini isloh qilishni taqozo etadi. Shuning uchun zamon talabiga mos o'quv qo'llanmalar yaratish milliy dasturni amalga oshirish vazifalaridan biridir. Matematika o'sib kelayotgan yosh avlodni kamol toptirishda o'quv fani sifatida keng imkoniyatlarga ega. U o'quv tafakkurini rivojlantirib, aqlni charxlaydi, fikrlashni tartibga soladi. Shu bilan bir qatorda teoremlarni isbotlash va mulohazalarning to'g'ri, go'zal tuzilganligi, talabalarning go'zallikga extiyojli qalb sifatida tarbiyalab boriladi.

Matematikaning imkoniyatlari juda keng va boy. U nafaqat fizika, astronomiya, ximiya, biologiya, geologiya, iqtisod fanlarida, balki tibbiyot, tilshunoslik, atrof-muhitni himoya qilish tabiatdagi turli-tuman hodisalarni o'rganishga ham dadillik bilan kirib boryapti va samarali natija beryapti. Mamlakatning ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyotini jadallashtirish yangi texnologiyalarni yaratish va ishga tushirishni, bu esa o'z navbatida juda murakkab matematik hisob-kitoblarni taqozo etadi. Shunday qilib, matematik kadrlar sifatini tubdan yaxshilash masalasi yuzaga kelmoqda. Mamlakatimizga ko'plab yuqori malakali matematiklar kerak. Ularni tayyorlash ishi maktabdan, hattoki, bog'chadan boshlanishi kerak.

Buni biz prezidentimiz Islom Abdug'anievich Karimovning «O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari» nomli kitoblarida keltirilgan quyidagi so'zlardan ham bilib olsak bo'ladi: «Respublikada quyidagi yo'nalishlar bo'yicha jahon darajasidagi ilmiy maktablar yaratilgan bo'lib, ularda tadqiqotlar muvafaqqiyatli olib borilmoqda. Jumladan, matematika, ehtimollar nazariyasi, tabiiy va ijtimoiy jarayonlarni matematik modellash, informatika va hisoblash texnikasi sohasidagi tadqiqotlar.

Matematika fanining ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, differentsial tenglama, algebra va sonlar nazariyasi, funktsional tahlil sohasidagi yutuqlari Respublikadan ancha uzoqda ham mashhur».

Milliy g'oya targ'iboti va ma'naviy ma'rifiy ishlar samaradorligini oshirish yo'lida ham prezident I.A.Karimov juda katta va ijobiy ishlar olib bormoqda. Bunday ishlar O'zbekiston respublikasi prezidenti I.A.Karimovning 451- qarorida o'z aksini topgan. Shu qarordan ilhomlangan holda biz o'z ilmiy izlanishlarimizni yanada rivojlantirmoqdamiz. Vatanimiz mustaqilligining ma'naviy asoslarini mustahkamlash, milliy qadriyatlarimiz, an'ana va urf odatlarimizni asrab avaylash xalqimiz, ayniqsa yosh avlod qalbi va ongiga ona yurtga muxabbat, istiqloлга sadoqat tuyg'ularini chuqur singdirish masalasi bugungi kunda tobora dolzarb ahamiyat kasb etmoqda.

O'zbekiston Respublikasi inson huquqlari va erkinliklariga rioya etilishini, jamiyatning ma'naviy yangilanishini, ijtimoiy yo'naltirilgan bozor iqtisodiyotini shakllantirishni, jahon hamjamiyatiga qo'shilishni ta'minlaydigan demokratik huquqiy davlat va ochiq fuqarolik jamiyati qurmoqda.

Xalqning boy intellektual merosi va umumbashariy qadriyatlar asosida, zamonaviy madaniyat, iqtisodiyot, fan, texnika va texnologiyalarning yutuqlari asosida kadrlar tayyorlashning mukammal tizimini shakllantirish O'zbekiston taraqqiyotining muhim shartidir.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturi "Ta'lim to'g'risidagi "gi O'zbekiston Respublikasi Qonunining qoidalariga muvofiq holda tayyorlangan bo'lib, milliy tajribaning tahlili va ta'lim tizimidagi jahon miqyosidagi yutuqlar asosida tayyorlangan hamda yuksak umumiy va kasb-hunar madaniyatiga, ijodiy va ijtimoiy faollikka, ijtimoiy-siyosiy hayotda mustaqil ravishda mo'ljalni to'g'ri ola bilish mahoratiga ega bo'lgan, istiqbol vazifalarini ilgari surish va hal etishga qodir kadrlarning yangi avlodini shakllantirishga yo'naltirilgandir.

O'zbekiston Respublikasi davlat mustaqilligiga erishib, iqtisodiy va ijtimoiy rivojlanishning o'ziga xos yo'lini tanlashi kadrlar tayyorlash tuzilmasi va mazmunini qayta tashkil etishni zarur qilib qo'ydi va chora-tadbirlar ko'rishni:

“Ta’lim to’g’risida” gi Qonunni joriy etishni (1997-yil); yangi o’quv rejalari, dasturlari, zamonaviy didaktik ta’minotni ishlab chiqishni; o’quv yurtlarini attestatsiyadan o’tkazishni va akkreditatsiyalashni, yangi tipdagi ta’lim muassasalarini tashkil etishni taqozo etdi.

Mazkur dasturning **maqsadi** – ta’lim sohasini tubdan isloh qilish, uni o’tmishdan qolgan mafkuraviy qarashlar va sarqitlardan to’la xalos etish, rivojlangan demokratik davlatlar darajasida, yuksak ma’naviy va axloqiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash Milliy tizimini yaratishdir.

Milliy dasturning maqsad va vazifalari bosqichma-bosqich ro’yobga chiqarilmoqda.

Birinchi bosqich (1997-2001 yillar)-mavjud kadrlar tayyorlash tizimining ijobiy salohiyatini saqlab qolish asosida ushbu tizimni isloh qilish va rivojlantirish uchun huquqiy, kadrlar jihatidan, ilmiy-uslubiy, moliyaviy-moddiy shart-sharoitlar yaratish.

Ushbu bosqichda quyidagilarni amalga amalga oshirish zarurligi ko’zda tutilgan:

- “Ta’lim to’g’risida” gi Qonunga muvofiq ta’lim tizimi mazmunitarkibiy qayta qurish va tubdan yangilash;
- Pedagog va ilmiy - pedagog kadrlar tayyorlash hamda ularning malakasini oshirishni zamon talablariga javob beradigan darajada tashkil etish;
- Ta’lim oluvchilarning yuksak tayyorgarlik darajasi, malakasi, madaniy va ma’naviy-axloqiy saviyasining sifatiga nisbatan qo’yiladigan zarur talablarni belgilab beruvchi davlat ta’lim standartlarini yaratish va joriy etish;
- Ta’lim muassasalari faoliyatiga baho berishning reyting tizimini, kadrlar tayyorlash sifati va ularga bo’lgan ehtiyojning monitoringini olib borish tizimini ishlab chiqish va joriy etish;

- Kadrlar tayyorlash milliy dasturini ro'yobga chiqarishning monitoringini olib borish.

Ushbu bosqichda bolalarni olti-yetti yoshdan maktabga qabul qilish ularning jismoniy va aqliy jihatdan rivojlanganligini e'tiborga olgan holda amalga oshiriladi. Taqozo etilayotgan o'quvchi o'rnlari zarur moddiy-texnika shart-sharoitlari va pedagog kadrlar bilan ta'minlangan holda izchil tayyorlanadi.

Birinchi bosqich bajarilishining monitoringi asosida Milliy dasturni ro'yobga chiqarish yo'nalishlariga aniqliklar kiritiladi.

Ikkinchi bosqich (2001-2005 yillar)-Milliy dasturni to'liq ro'yobga chiqarish, mehnat bozorining rivojlanishi va real ijtimoiy- iqtisodiy sharoitlarni hisobga olgan holda unga aniqliklar kiritish.

Majburiy umumiy o'rta va o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limiga, shuningdek o'quvchilarning qobiliyatlari va imkoniyatlariga qarab, tabaqalashtirilgan ta'limga o'tish to'liq amalga oshiriladi.

Ta'lim muassasalarini maxsus tayyorlangan malakali pedagog kadrlar bilan to'ldirish ta'minlanadi, ularning faoliyatida raqobatga asoslangan muhit vujudga keltiriladi.

Ta'lim muassasalarining moddiy-texnika va axborot bazasini mustahkamlash davom ettiriladi, o'quv-tarbiya jarayoni yuqori sifatli o'quv adabiyotlari va ilg'or pedagogik texnologiyalar bilan ta'minlanadi. Uzluksiz ta'lim tizimini axborotlashtirish amalga oshiriladi.

Ta'lim xizmati ko'rsatish bozorini shakllantirish mexanizmlari to'liq ishga solinadi.

Uchinchi bosqich (2005 va undan keying yillar)-to'plangan tajribani tahlil etish va umumlashtirish asosida, mamlakatni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish istiqbollari muvofiq kadrlar tayyorlash tizimini takomillashtirish va yanada

rivojlantirish. Ta'lim muassasalarining resurs, kadrlar va axborot bazalari yanada mustahkamlanadi, o'quv-tarbiya jarayoni yangi o'quv-uslubiy majmualar, ilg'or pedagogik texnologiyalar bilan to'liq ta'minlanadi.

Milliy (elita) oliy ta'lim muassasalarini qaror toptirish va rivojlantirish amalga oshiriladi. Kasb-hunar ta'limi muassasalarining mustaqil faoliyat yuritishi va o'zini o'zi boshqarishi shakllari mustahkamlanadi.

Prezidentimiz I.Karimov "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" to'g'risida joriy etgan qonunlari biz yoshlarga katta yutuq bo'ldi va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" xaqida quyidagi gaplarni aytib o'tganlar. I.Karimov nutqidan olingan quyidagi gaplarini ko'rib o'taylik "Kadrlarni puxtaroq qilib tayyorlamasdan, ularni qadriga etmasdan, ularga ishonmasdan va qullab-generatorlamasdan, o'ylaymanki biron bir sohada axvolni hech qanaqa tarzda o'zgartirib bo'lmaydi". (1989 yil 28 oktyabr)

Shuni alohida ta'kidlash joizki bugungi kunda odamlarimiz ularning ijtimoiy ongi hayotga munosabati toboro o'zgarmoqda. Bu esa mamlakatimizning taraqqiyot va farovonlik yo'lidagi izchil rivojlanib borishini, yangi marralarni qo'lga kiritishimizni ta'minlayotgan qudratli harakatlantiruvchi kuch bo'lib hizmat qilmoqda. Prezidentimiz I.A. Karimov "Mamakatimizni modernizatsiya qilish yo'lini izchil davom ettirish – taraqqiyotimizning muhim omilidir", bu to'g'risida juda chiroyli nutq so'zlaganlar. Bosib o'tgan yo'limizni va mamlakatimizning dunyoda sodir bo'layotgan tub o'zgarishlar jarayonida tutgan o'rnini holis va tanqidiy baholar ekanmiz erishgan yutuqlarimizga mahliyo bo'lib qolmasligimiz, ortiqcha havolanish va hotirjamlik tuyg'usida berilmasligimiz zarur. Bugun biz erishayotgan globallashuv va tobora kuchayib borayotgan raqobat asrida faqat chuqur islohot va modernizatsiya yo'lidan tinimsiz va qattiyat bilan rivojlanib borish natijasida o'z oldimizga qo'ygan istiqbolli maqsadlarga – taraqqiy topgan, farovon yashayotgan demokratik davlatlar qatoriga kirish, xalqimiz uchun munosib hayot darajasini ta'minlashga erisha olamiz va bunda quyidagi masalalar bizning

eng muhim ustuvor yo'nalishlarimizga aylanishi darkor:

Xalq ta'limi rivojlanishidagi xozirgi davr – muhim davrlardan bo'lib, bu “Ta'lim to'g'risida”gi qonun va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” Vazirlar Maxkamasining 1998 yil 13 may “Umumiy o'rta ta'limni tashkil etish va singdirishdan iboratdir”. Bu xujjatlar ta'lim sohasida jamiyat ehtiyojini to'la qondirishni nazarda tutadi. Bu vazifalarni amalga oshirish uchun mo'ljallangan tadbirlar tizimida matematika ta'limining davlat standartlarini joriy etish katta ahamiyat kasb etadi.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimov Oliy Majlis palatalarining 2010 yil 12 noyabr kuni bo'lib o'tgan qo'shma majlisida takdim etgan Konsepsiyada axborot sohasini isloh qilish, axborot va so'z erkinligini ta'minlash borasidagi qonunchilik tashabbuslari ushbu sohaga bosqichma-bosqich amalga oshirilayotgan tadrijiy islohotlarning uzviy davomi bo'lib, axborot olishning erkin va teng huquqliligini ta'minlash, davlat hokimiyati va boshqaruvi organlari faoliyatiniig ochiqqligi prinstiplarini amalga oshirish, sohada bozor mexanizmlarini yanada takomillashtirish va axborot texnologiyalarini keng joriy etish, fuqarolik jamiyati institutlari tizimida OAVning rolini yanada kuchaytirishga qaratilgan samarali mexanizmlarni yaratishni nazarda tutadi.

Prezidentimiz I.A.Karimovning “Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch” asarida shunday deydilar: “Bugun biz tarixiy bir davrda — xalqimiz o'z oldiga ezgu va ulug' maqsadlar qo'yib, tinch-osoyishta hayot kechirayotgan, avvalambor o'z kuch va imkoniyatlariga tayanib, demokratik davlat va fuqarolik jamiyati qurish yo'lida ulkan natijalarni qo'lga kiritayotgan bir zamonda yashamoqdamiz.

Zaminimizda yashab o'tgan buyuk allomalarimiz, mutafakkir bobolarimizning ibratli hayoti va faoliyati, bemisl ilmiy-ijodiy kashfiyotlari bugun ham jahon ahlini hayratga solayotganini g'urur bilan ta'kidlash lozim.

O'zbek xalqi dunyo maydonida kuni kecha tasodifan paydo bo'lib qolgani yo'q. Biz — boy tarix, yuksak madaniyat, buyuk ma'naviyat vorislarimiz. Qadimiy tariximizni har tomonlama o'rganib, shunday xulosaga kelish mumkinki, eng qaltis va taxlikali davrlarda millatimizga umid va ishonch bergan, uni yovlarga qarshi kurashga undagan, ajdodlarimizni ilmiy kashfiyotlar, harbiy zafarlarga, ma'rifat mash'alini baland ko'tarib jaholatga qarshi chiqishga chorlagan beqiyos kuch ham aynan ma'naviy jasorat tuyg'usidir.

Manaviyatning hayotimizdagi o'rni va ahamiyati haqidagi fikr-mulohazalarimizga yakun yasar ekanmiz, avvalambor, shuni chuqur anglab olishimiz darkorki, ma'naviy yuksalishga erishish — bu bir yillik yoki besh-o'n yillik ish emas. Xalq, millat o'z milliy ma'naviyatini yillar, asrlar davomida kjsaltirib, boyitib boradi. Chunki ma'naviyat qotib qolgan aqidalar yig'indisi emas, aksincha, doimiy harakatdagi uzluksiz jarayon bo'lib, taraqqiyot davom etar ekan, uning shiddatli yurishi tufayli ma'naviy hayot oldiga qo'yiladigan talablar ham muttasil paydo bo'laveradi.

Ya'ni, mamlakatimiz taraqqiyot pillapoyasidan yangi-yangi cho'qqilar sari qadam qo'yar ekan, biz yashayotgan zamon sur'atlari shildat bilan tezlashib, oldimizda yana qancha muammo va mashaqqatlar paydo bo'lar ekan, tabiiyki, ma'naviy hayotimiz ham ana shu sinovlarda toblanib, yuksalib, jamiyatimiz, millatimizning yorug' va sog'lom kelajagini har qanday taxdid va to'fonlardan — davr o'zgarishi bilan ularning ko'rinishi va shakli o'zgarishiga qaramasdan — bezavol saqlash va asrab qolishga qodir bo'lishi darkor.

Ana shu fikr va xulosalardan kelib chiqqan holda, «Biz kimmiz?» degan savolga javob bermasdan turib, eng muhimi, ma'naviy boylikni, ma'naviyatni yuksaltirishga doimiy intilmasdan turib biz o'z oldimizga qo'ygan ezgu maqsadlarga erishish mumkin emas, desam, qalbimdan chuqur joy olgan fikrni aytgan bo'laman.

Bugungi kunda ma'naviyat dunyosiga nisbatan mavjud bo'lgan xavf-xatarlardan albatta ko'z yumib bo'lmaydi, lekin bizning ishonchimiz komilki, xalqimiz tarixning murakkab jarayonlarida irodasi chiniqib, har qanday hujum va tazyiqlarga qaramasdan, ma'naviy olami kuchayib va yuksalib borayotgani, bizni ko'rolmaydigan kuchlar ham bu haqiqatni tan olayotganini mamnuniyat bilan qayd etamiz.

Chunki xalq — bamisoli ulug' va sharaflı yo'ldan ilgarilab borayotgan ulkan karvon. Uni yo'ldan chalg'itishga urinuvchilar, payt poylab orqasidan hamla qiluvchilar hamisha bo'lgan, bundan keyin ham bo'lishi mumkin. Karvon bexatar bo'lmas, degan gap bejiz aytilmagan. Ammo xalq karvonini hech qanday kuch ortga qaytarolmaydi. Nega deganda, xalqning qalbida ne-ne avlodlardan meros yengilmas kuch — ma'naviyat bor.

Barchamizga g'urur va iftixor bag'ishlaydigan tomoni shundaki, bizning ezgu intilishlarimiz zamirida ham ana shunday pok niyat, buyuk ishonch mujassam. Aniq maqsad yo'lidagi bunyodkorlik ishlarimiz amaliy natijalar bera boshlagan, ko'zlagan rejalarimiz bosqichma-bosqich ro'yobga chiqib, dunyo hamjamiyatidan o'zimizga munosib o'rin egallab borayotgan hozirgi kunda xalqimiz, millatimiz qalbidagi ana shu ishonch yanada mustahkamlanmoqda.

Shu bois men shonli tarixiga sadoqat bilan qarab, bugungi ozod hayotini qadrlab, o'z kelajagiga katta umid bilan intilayotgan xalqimizning donishmandligi va matonati, uning iymon-e'tiqodi, mustahkam irodasi va yuksak ma'naviy ruhi doimo barqaror yashaydi, deb ishonaman.

Aholi bandligini ta'minlash va yangi ish o'rinlarini tashkil qilish muammosini hal etish 2011 yil va yaqin istiqbolda mamlakatimizni muvaffaqiyatli va barqaror rivojlantirishni alohida ustuvor yo'nalishi hech mubolag'asiz eng muhim shartidir.

Bilamizki o'tgan yilga O'zbekiston Respublikasi mustaqilligining 20 – yilligini nishonladik. Prezidentimiz I.A.Karimovning 2011 yil 6 apreldagi “O'zbekiston Respublikasining 20 – yilligiga bag'ishlangan” qarorida ham mamlakatimizning 20 yilligini munosib ravishda kutib olishda vatanimiz yoshlarini o'rni beqiyosligini, ularni aqlan va jismonan rivojlanishi uchun sharoitlar yaratib berish kerakligini aytib o'tganlar. Bunga misol qilib “Barkamol avlod” sport o'yinlarini, mamlakatimiz yoshlari ishtirokida “Biz – yigirma yoshdamiz” forumini, mehnat va o'quv jamoalari o'rtasida sport turlari bo'yicha “Mustaqillik kubogi” musobaqalari, an'anaviy “Sharq taronalari” xalqaro musiqa festivalini, yosh ijrochilar o'rtasida “Nihol”, iste'dodli yoshlar o'rtasida “Kelajak ovozi”, jurnalistika sohasida “Eng ulug', eng aziz”, “Oltin qalam”, “Ozod yurt to'lqinlari”, shuningdek, yangitdan tashkil etilayotgan “Istiqlol tarix ko'zgusida” (mustaqillik tarixini yoritishga bag'ishlangan eng yaxshi ilmiy va ilmiy – ommabop ishlar uchun). “Istiqlol solnomasi” (kino san'ati sohasidagi eng yaxshi asarlar uchun) kabi tanlovlarini yuqori darajada o'tkazish, tashkillashtirishni ta'kidlab o'tganlar.

2015 yil “Qariyalarni ezozlash ”yilida bajarilgan ishlar ko'lami ham juda katta bo'lib, rejalashtirilgan vazifalarni amalga oshirishda ilm – fan yutuqlaridan foydalanish bosh vazifa bo'lib qoladi, bunday ulkan ishlarni muvaffaqiyat bilan uddalash uchun aniq hisob – kitoblar, xullas matematika faning yutuqlaridan ustalik, izchillik bilan foydalanish lozim bo'ladi.

Ma'lumki, matematika moddiy dunyoning ob'ektlarini o'rganadi. Lekin boshqa fanlardan farqli ravishda uning miqdoriy munosabatlari va fazoviy shakllari asosiy ob'ekt sifatida qoraladi. Matematika o'sib kelayotgan yosh avlodni kamol toptirishda o'quv fani sifatida keng imkoniyatlarga ega. U o'quv tafakkurini rivojlantirib, ularning aqlini charxlaydi, uni tartibga soladi. O'quvchilarga maqsadga yo'nalganlik, mantiqiy fikrlash, topqirlik xislatlarini shakllantiradi. Shu bilan bir qatorda teoremani isbotlash va mulohazalarning to'g'ri, go'zal tuzilganligi o'quvchilarni didi, go'zallikka ehtiyotli qilib tarbiyalab boradi.

Mavzuning dolzarbligi

Algebrada Ko'pxilliklar juda ko'p uchraydi va shu bilan bir qatorda ularni hayotga talqinini ham kuzatishimiz mumkin. Misol tariqasida kompyuter tizimlarini matematika faniga kirib kelganiga uncha ko'p bo'lmasada, olimlar tomonidan unga bo'lgan qiziqish, talab va ehtiyoj tez suratlarda o'smoqda. Hozirgi vaqtda matematikada erishilayotgan asosiy natijalar ko'pxilliklar sohasiga oid bo'lib qolmoqda. Matematikaning asosiy masalalarini ko'pxilliklar tilida ifodalash, ularni parametrizatsiyasini amalga oshirish va bu masalalarni kompyuter tiliga o'girish zamon talabi bo'lib qolmoqda. Ushbu bakalavirlik ishi ko'pxilliklarga bag'ishlangan.

Ular ko'plab tatbiqlarga ega. Misol sifatida Affine ko'pxilliklarini keltirishimiz mumkin. Affine ko'pxilliklari ko'pxad tenglamalari yordamida tushuntiriladi. Bu esa o'z navbatida algebrani rivojlanishida muhim ro'l o'ynaydi. Bunday masala dolzarb masaladir. Men o'ylayman kelajakda bular o'z yechimini topadi.

Ishning ilmiy tadqiqot metodlari:

Vazifamiz bunday masalalarni yechish uchun kerakli ma'lumotlarni yig'ish va o'rganishdan iborat. Mening vazifam bitiruv malakaviy ishimda o'rgangan saboqlarimni yoshlarimizga o'rgatish va yana ma'lumotlar bilan to'ldirish, yoshlarimizga bu sohada ilmiy ishlar olib borish kerakligini doim esatib turishdir.

Muammoning ishlab chiqqanlik darajasi.

Bunday masalalar Belousov B.D., Belyavskaya B.G, Pflugfelder H.O. va boshqa bir qator olimlar tomonidan o'rganilgan.

Tadqiqotni ilmiy yangiligi.

Bitiruv malakaviy ishi referativ xarakterga ega bo'lib, masalalar izchil, ketma-ketlikda bayon qilingan.

Amaliy ahamiyati.

Algebra va sonlar nazariyasi fanini o'rganuvchilar uchun uslubiy qo'llanma hisoblanadi.

1. Ilmiy ommabop ish sifatida ishlatish mumkin.
2. Talaba va o'quvchilar foydalansa bo'ladi.

Ishni tuzilishi.

Bitiruv malakaviy ish kirish, asosiy qism, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar

II ASOSIY QISM.

1-§. Ko`pxillik tushunchasi.

Affin ko`pxilliklar geometriya bilan aloqador bo`lib u ko`pxadli tengliklar orqali aniqlanadi. Bu ko`pxadli tengliklar, masalan, egri chiziq va sirtlarini ifodalashi mumkin.

**Ta`rif:**  $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$  ko`paytma, bunda $a_1, \dots, a_n$ lar musbat butun sonlar, $x_1, \dots, x_n$ larga nisbatan birxad (birhad) deb nomlanadi. $a_1 + \dots + a_n$ yig`indi birxadning umumiy darajasi deb nomlanadi.

$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ birxad bo`lsin. Biz  $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$  ning o`rniga soddaroq qilib x^a deb yozimiz mumkin, bunda $a = (a_1, \dots, a_n)$ deb hisob qilamiz. Agar $a=0$ bo`lsa  $x^a = 1$  dir. Biz ba`zan $a_1 + \dots + a_n$ ning o`rniga $|a|$ deb yozamiz.

**Ta`rif:**  $f = \sum_a a_a x^a \in K[x_1, \dots, x_n]$  bo`lsin. U holda $a^a \neq 0$ bo`lsa  $a^a$  ifoda  $x^a$  birxadning ko`ffitsienti, $a_a x^a$ ifoda esa f ning termi deb nomlanadi. f ning umumiy darajasi $\deg(f)$ kabi belgilanadi

**Ta`rif:**  $n$  butun musbat son bo`lsin.

$$K^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in K, i=1, \dots, n\}$$

to`plam K maydon ustida affin fazo deyiladi.

$f \in K[x_1, \dots, x_n]$ uchun f ni barcha $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ larda

$$f((a_1, \dots, a_n)) = \sum_a a_a (a_1^{a_1} \cdots a_n^{a_n})$$

kabi aniqlanadigan, K^n ni K ga akslantiruvchi akslantirish deb hisoblashimiz mumkin, bunda $f = \sum_a a_a (x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n})$.

1-Teorema: K maydon cheksiz bo'lsin. $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ deylik. $K[x_1, \dots, x_n]$ da $f=0$ bo'lishi uchun $f: K^n \rightarrow K$ funktsiya nol funktsiya bo'lishi zarur va etarli.

Isboti:

Agar $f=0$ bo'lsa, aniqki $f: K^n \rightarrow K$ funktsiya nol funktsiya bo'ladi. Aksincha funktsiya nol funktsiya bo'lsin deylik. Isbotni o'zgaruvchilar soniga nisbatan induksiya yordamida olib boriladi. Aytaylik $n=1$ bo'lsin. U holda malumki f ko'pi bilan o'zining darajasi m teng sondagi ildizga egadir. Shunday qilib barcha $a \in K$ lar uchun $f(a)=0$ dan hamda K maydon cheksizligidan $f=0$ ga kelimiz.

$n-1$ uchun tasdiq to'g'ri deb hisob qilamiz.

$f \in K[x_1, \dots, x_n]$ barcha $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ lar uchun $f(a_1, \dots, a_n)=0$ bo'ladigan biz f -funktsiyani

$$f = \sum_{i=0}^q g_i(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^i$$

shaklda yoza olamiz, bunda $g_i \in K[x_1, \dots, x_n]$, $i=0, 1, \dots, q$.

Biror fiksirlangan $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in K^{n-1}$ ni ko'rib chiqamiz. $(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ nomalum ko'pxaddir. $n=1$ holga asosan $(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ ko'pxad $K[x_n]$ da nolga tengdir.

Natijada, $i=0, \dots, q$ uchun $g_i(a_1, \dots, a_{n-1})=0$ dir.

$a_1, \dots, a_{n-1}$ ixtiyoriy tanlangaligidan, bu induktiv farazga asosan $K[x_1, \dots, x_n]$ dan olingan ixtiyoriy g_i nolga teng ko'pxad bo'ladi. Shu sababli f -funktsiya $K[x_1, \dots, x_n]$ da nolga teng ko'pxad bo'ladi.

Tasdiq: K maydon cheksiz bo'lsin. $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ deylik. $K[x_1, \dots, x_n]$ da $f=g$ bo'lishi uchun $f: K^n \rightarrow K$, $g: K^n \rightarrow K$ akslantirishlar bir xil

bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti:

Yuqoridagi 1-teoremadan f -g ni muhoka qilish bilan isbotlanadi.

Ta'rif: $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin.

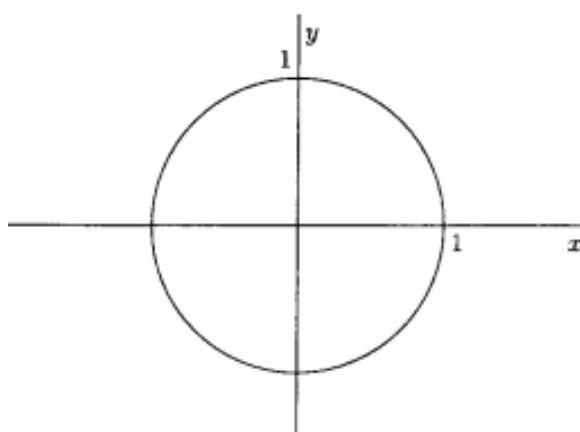
$$V(f_1, \dots, f_m) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ barcha } i = 1, \dots, m \text{ uchun}\}$$

to'plam $f_1, \dots, f_m$ lar tomonidan aniqlangan affin ko'pxilligi deb nomlanadi.

Biz bazan $V(f_1, \dots, f_m)$ ko'pxillik uchun $V(\{f_i \mid i=1, 2, \dots, m\})$ shakldan ham foydalanamiz.

Affin ko'pxillik - $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$ tenglamalar sistemalari yechimlar to'plamidan iborat. V, W va boshqa harflardan affin ko'pxilliklarni belgilash uchun foydalanamiz. $k = R$ bo'lgan holni qaraymiz, bu bizga kompyuter algebrasi tizimlarida ko'pxilliklarning grafiklarini tasvirlash imkonini beradi.

Markazi koordinata boshida bo'lgan radiusi 1 ga teng aylanadan iborat R^2 tekislikdagi $V(x^2 + y^2 - 1)$ ko'pxillikdan boshlaymiz:



Analitik geometriya kursida o'rganiladigan konik kesimlar (aylana, ellips, parabola, va giperbola) affin ko'pxilliklar hisoblanadi.

Shunga o'xshash, ko'phadlar grafiklari ham affin ko'pxilliklar bo'ladi. ($y = f(x)$ funksiya grafigi $V(y - f(x))$ affin ko'pxillikdan iborat).

2-Lemma. Agar $V, W \subseteq K^n$ affin ko'pxilliklar bo'lsa, u holda $V \cup W$ va $V \cap W$ ham affin ko'pxilliklar bo'ladi.

Isbot. $V = V(f_1, \dots, f_s)$ va $W = V(g_1, \dots, g_t)$ bo'lsin. Biz

$$\begin{aligned} V \cap W &= V(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t), \\ V \cup W &= V(f_i g_j : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t) \end{aligned}$$

ekanligini tasdiqlaymiz. Birinchi tasdiq trivial: agar nuqta $V \cap W$ ga tegishli bo'lsa, u holda $f_1, \dots, f_s$ funksiyalar $g_1, \dots, g_t$ kabi bu nuqtada nolga aylanadi. Bu esa $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t$ funksiyalar jamlanmasining nolga aylanishidan iborat.

2-tasdiqning isboti ko'p kuch-harakat talab etadi. Agar $(a_1, \dots, a_n) \in V$ bo'lsa, u holda barcha f_i lar bu nuqtada nolga aylanadi va barcha $f_i g_j$ funksiyalar $(a_1, \dots, a_n)$ da nolga aylanadi. Shunday qilib, $V \subset V(f_i g_j)$ va shunga o'xshash $W \subset V(f_i g_j)$. Demak, $V \cup W \subset V(f_i g_j)$. Ikkinchi tomondan, $(a_1, \dots, a_n) \in V(f_i g_j)$ bo'lsin. Agar bu nuqta V ga tegishli bo'lsa, barchasi isbotlanadi, agar bunday bo'lmasa, u holda $f_{i_0}(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ biror i_0 uchun $f_{i_0} g_j$ funksiyalar barcha j larda $(a_1, \dots, a_n)$ da nolga aylangani uchun, u holda barcha g_j lar bu nuqtada nolga teng. Demak $(a_1, \dots, a_n) \in W$ va $V(f_i g_j) \subset V \cup W$.

Bu lemmadan ko'rinadiki, affin ko'pxilliklarning chekli birlashmalari va kesishmalari affin ko'pxilliklar bo'ladi. Haqiqatda, biz birlashmalar va kesishmalarga duch kelganmiz. Masalan, (x, y) tekislik va z o'qining R^3 dagi birlashmasini qaraymiz. 2-lemma isbotidagi formula bo'yicha

$$V(z) \cup V(x, y) = V(xz, yz)$$

Bu tabiiyki oldin qaralgan misollardan biri. Kesishmalarga kelsak, aylanma kubik ikkita sirt kesishishi sifatida berilgan edi.

Ikkita misol tahlili affin ko'pxilliklar haqida qiziqarli masalalar qo'yilishiga olib keladi. U holda quyidagi muammolarni bayon etish mumkin:

- (Birgalikdalik) $V(f_1, \dots, f_s)$ bo'sh bo'lmashligini ya'ni $f_1 = \dots = f_s = 0$ tenglamalar umumiy yechimga ega bo'lishini aniqlash mumkinmi?

- (Cheklilik) $V(f_1, \dots, f_s)$ to'plam chekli bo'lishini aniqlashimiz mumkinmi, agar shunday bo'lsa barcha yechimlarini oshkora ko'rinishda qanday topish mumkin?

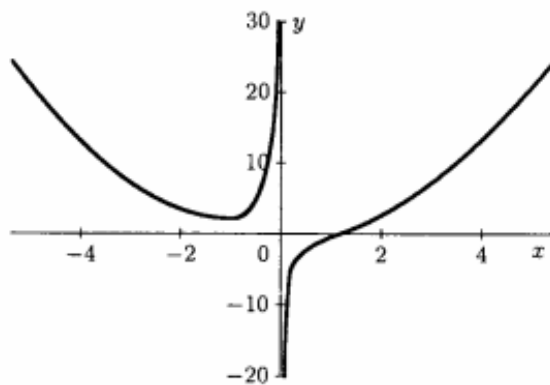
- (O'lchovlilik) $V(f_1, \dots, f_s)$ ko'pxillik "o'lchovini" topishimiz mumkinmi?

Bu savollarga javoblar ijobiy, vaholanki biz ehtiyotlik bilan ko'pxilliklar aniqlanadigan k maydonning tanlanishiga qarashimiz kerak. Eng qiyin masala-o'lchov haqida, chunki uni yechish uchun unchalik oddiy bo'lmagan teorema zarur bo'ladi.

2-§. Geometriyada ko'pxilliklar.

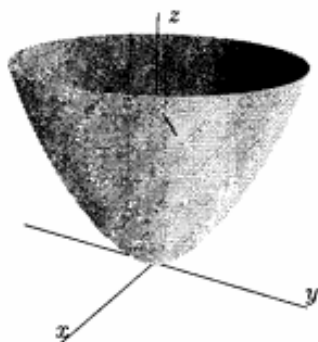
Geometrik ko'pxilliklar deganda ko'phadlar bilan beriladigan egri chiziqlar va sirtlardan (hamda yuqori o'lchamdagi obektlardan) iborat affin ko'pxilliklarni tushunamiz.

Ratsional funksiyalar grafiklari ham affin ko'pxilliklardan iborat. Masalan, $y = \frac{x^3 - 1}{x}$ funksiya grafigini qaraymiz.

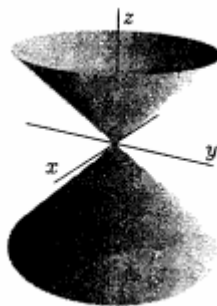


Osongina ko'rish mumkinki, bu $V(xy - x^3 + 1)$ affin ko'pxillikdan iborat.

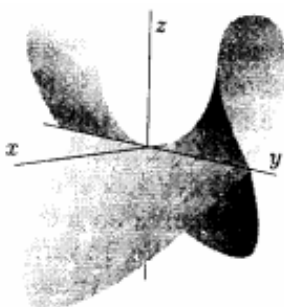
Endi uch o'lchovli R^3 fazoga o'tamiz. $V(z - x^2 - y^2)$ aylanish paraboloidi affin ko'pxillikdan iborat, u z o'qi atrofida $z = x^2$ parabolaning aylanishidan hosil bo'ladi (bu fakt qutb kordinatalarga o'tish yordamida isbotlanadi). Bu ko'pxillik quyidagi ko'rinishda bo'ladi.



$V(z^2 - x^2 - y^2)$ konusdan iborat.



$V(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ ko'pxillik esa murakkabroq sirt hisoblanadi.



Oxirgi ikkita misoldagi sirtlar hamma joyda silliq emas: konus koordinata boshida uchga ega, oxirgi misolda esa y o'qi sirtning o'z-o'zini kesish chizig'i bo'ladi.

R^3 da egri chiziqqa qiziqarli misol bo'lib o'ralgan kubik- $V(y - x^2, z - x^3)$ ko'pxillik hisoblanadi.

Misol uchun quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini ko'raylik.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \text{1-tenglamadan 2-tenglamani ayiramiz va quydagiga}$$

ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{2-tenglamani } (-1) \text{ ga ko'paytib 2-tenglamani}$$

1-tenglamaga 2-marta qo'shish orqali quydagiga erishamiz

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ -y - 2z = -1 \end{cases}$$

Natija,

$V(x+2y+z-2=0, x+y-z-1=0) = \{(3t, 1-2t, t) \mid t \in K\}$ ko'rinishda bo'ladi.

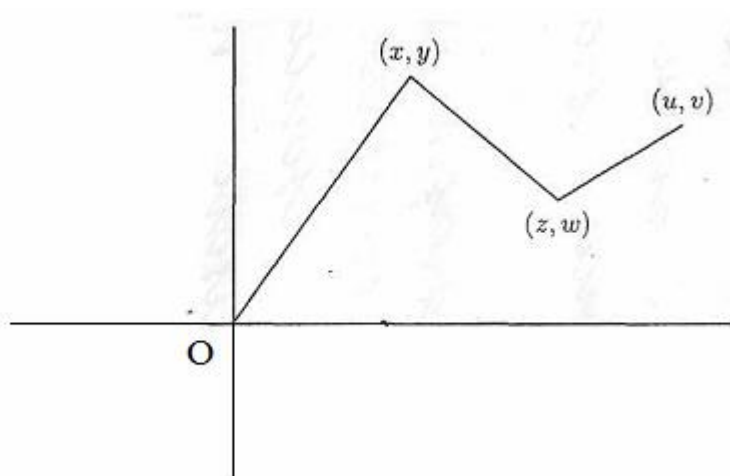
Bu metod yuqoridagi tenglamalar sistemani yechish uchun foydali.

Tenglamalar $x+2y+z-2=0$ va $x+y-z-1=0$ shakli ko'pxillikning yashirin tasviri

deb nomlanadi.

Ko`pxad tenglamalarining tadbiqi sifatida biz ko'plab misollarni keltirishimiz mumkin.

Biz uzunliklar mos ravishda 6, 4, 2 kesmalarni grafikda ko`raylik.



va quydagilarga ega bo`lamiz.

$$x^2 + y^2 = 36$$

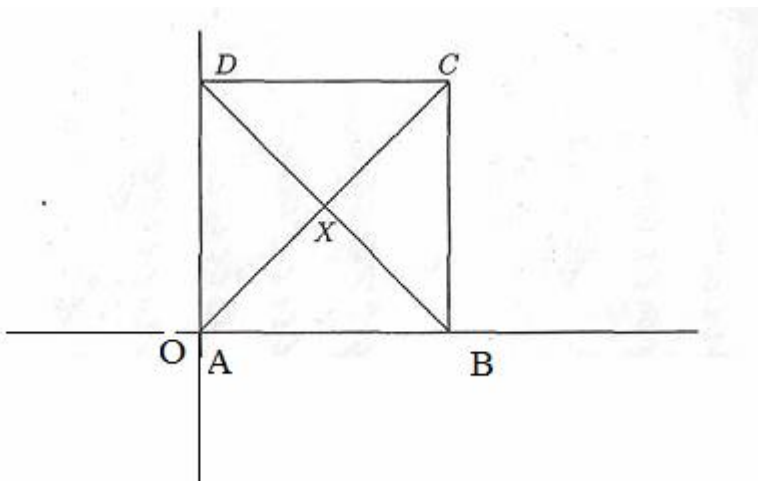
$$(z - x)^2 + (w - y)^2 = 16$$

$$(u - z)^2 + (v - w)^2 = 4$$

Biz dekart koordinatalarini Evklid fazosida tushuntiramiz.

Maydon tenglamalari kvadratning diagnallariga bog`liq yechimni ko`raylik. Kvadratning tomonlarini mos ravishda A, B, C, D deb belgilaymiz.

A, B, C, D kvadratning ko`pxilliklari bo`ladi.



X AC va BD diagonallarining kesishish nuqtasi bo'lsin.

X o'q asosida AB tomonni joylashtiramiz. Undan keyin A va B ning dekart koordinatalari $A=(0,0)$ $B=(a,0)$ ko'rinishda kiritamiz.

Bu yerdagi a -o'zgarmasdir. C va D ning dekart koordinatalarini B orqali kiritamiz. C va D nuqtalarning dekart koordinatalari mos ravishda (x_1, y_1) (x_2, y_2) kabi belgilaymiz.

Biz kvadrat ko'pxad tenglamalarni tushuntirish uchun chiziqli segment xossasidan foydalanamiz.

$$AB \mid AD: x_2=0$$

$$AB \mid \mid CD: 0=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$$

$$|AB|=|DC|: a^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$|AB|=|AD|: y_2=\pm a$$

Natijada biz ko'pxad tenglamalariga erishamiz .

$$y_2-y_1=0$$

$$x_1^2+(y_2-y_1)^2-a^2= \text{Natija } (x_1=\pm a, y_1=\pm a)$$

Biz shuningdek bilamiz A, X, C va D, X, B kollinear.

X ning dekart koordinatasini (x_3, y_3) orqali belgilab quydagi tenglamalarga ega bo'lamiz.

$$A, X, C\text{-kollinear} : y_3/x_3 = (y_3 - y_1)/(x_3 - x_1)$$

$$D, X, B\text{-kollinear} : (y_3 - y_1)/(x_3 - x_1) = (y_3 - 0)/(x_3 - a)$$

Natijada ko'pxad tenglamalariga ega bo'lamiz.

$$x_1 y_3 - x_3 y_1 = 0$$

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 - ay_3 + ay_2 = 0$$

$$(\text{Natija, } x_3 = a/2 = y_3)$$

Kvadrat diagonallarining kesishish xossasidan ko'rinadiki

$$\begin{aligned} (AX)^2 + (XD)^2 &= (AD)^2 : (0 - x_3)^2 + (0 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 \\ &= (0 - x_3)^2 + (0 - y_2)^2 \end{aligned}$$

yoki

$$x_3^2 + y_3^2 - x_2 x_3 - x_3 y_2 = 0.$$

va yana shuni takidlash lozimki ko'plab natijalar olish mumkin.

Lemma: $V, W \subseteq K^n$ affin ko'pxilliklari bo'ladi. $V \cup W$ va $V \cap W$ lar affin ko'pxilligidir.

Isboti:

$$V = V(f_1, \dots, f_m) \text{ va } W = (g_1, \dots, g_n) \text{ berilgan bo'lsin } g_1, \dots, g_n,$$

$$f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$$

$$\text{uchun } (a_1, \dots, a_n) \in V \cup W \text{ agar } f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ va } g_j(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ bo'lsa}$$

$$\text{barcha } i=1, \dots, m \text{ va } j=1, \dots, q \text{ uchun } (a_1, \dots, a_n) \in V(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_q) \text{ o'rinli}$$

bo`ladi.

Natijada $V \cap W = V(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_q) \quad (a_1, \dots, a_n) \in V \quad f_i(a_1, \dots, a_n) g_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ ligidan

barcha $i=1, \dots, m$ va $j=1, \dots, q$ uchun o`rinli bo`ladi, $V \subseteq V(\{f_i g_i \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, q\})$.

Shuningdek $W \subseteq V(\{f_i g_i \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, q\})$ shu sababli $V \cup W \subseteq V(\{f_i g_i \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, q\}) \quad (a_1, \dots, a_n) \in V(\{f_i g_i \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, q\})$.

$f_i(a_1, \dots, a_n) g_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ tenglik uchun $f_i(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ deb faraz qilamiz, natijada

$g_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ ga ega bo`lamiz barcha $j=1, \dots, q$ uchun shu sababli $(a_1, \dots, a_n) \in W$

$f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ deb faraz qilamiz $i=1 \dots m$ uchun. Natijada $(a_1, \dots, a_n) \in V$,

$V(\{f_i g_i \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, q\}) \subseteq V \cup W$ ligidan $V(\{f_i g_i \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, q\}) = V \cup W$ kelib chiqadi.

Biz endi affin ko`pxilligining nuqta jihatidan ko`rib chiqamiz.

Bu safar ko`pxilligining parametrlari orqali misollar ko`ramiz.

Egri chiziq va sirtlarning parametga bog`liqlig grafiginini chizishda komptuyerdan foydalanamiz.

Quyidagi misolni ko`raylik.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$x=3t, \quad y=1-2t, \quad z=t \quad (2)$$

(2) tenglama parametrik ko`rinishi tenglama deyiladi.

Boshqa misolni ko`raylik.

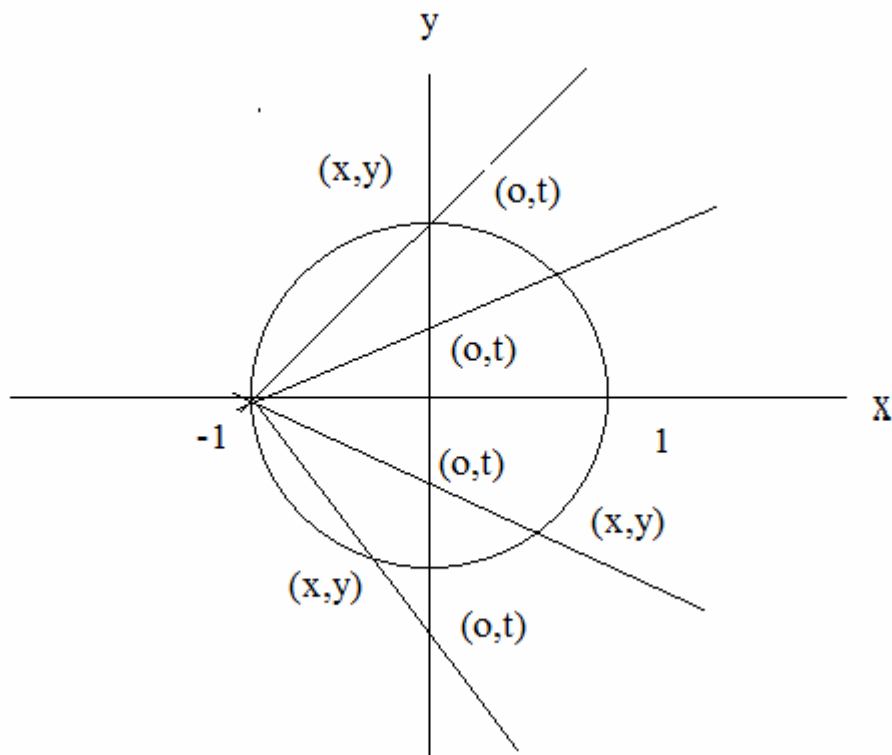
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$(-1,0)$ nuqta uchun tenglik bajarilmaydi.

$$x = (1-t^2)/(1+t^2)$$

$$y = 2t/(1+t^2)$$

bu parametrni chizmada ko`ramiz mumkin.



Har bir tik bo`lmagan chiziq  $(-1,0)$  nuqtadan boshqa yagona nuqtada aylanani kesib o`tadi.

t - parametr $-\infty$ dan $+\infty$ gacha shu nuqta aylananing barcha joyda $(-1,0)$ nuqtadan tashqari xar birining o`rni tik bo`lmagan chiziq o`qali berilgan

$$(t-0)/(0+1)=(y-t)/(x-0)$$

$$t/1=(y-t)/x$$

$$y=tx+t=t(x+1)$$

$$x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + t^2 (x+1)^2 = 1$$

$$x^2 + t^2 (x^2 + 2x + 1) = 1$$

$$x^2 (1 + t^2) + 2t^2 x + t^2 - 1 = 0$$

bu ohirgi tenglamani yechimi t ning parametriga bog'liq.

Biz $x^2 + y^2 = 1$ to'g'ri chiziq kesishishlarining x koordinatalarini olamiz.

Yechim $x = -1$ bo'lganligi uchun ko'phadni $x+1$ ga bo'lamiz va quydagi bo'linmani hosil qilamiz.

$$(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = (x+1) x^2 (1+t^2) + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$(1+t^2)x - (1-t^2) = 0$$

bundan biz quydagilarga erishamiz

$$x = (1-t^2)/(1+t^2)$$

$$y = 2t/(1+t^2)$$

Ta'rif: $V \subseteq K^n$ Affin ko'pxilligi deyiladi.

$$I(V) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ barcha } (a_1, \dots, a_n) \in V \text{ uchun} \}$$

1-Lemma: Agar $V \subseteq K^n$ affin ko'pxilligi bo'lsa, u holda $I(V) \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ning ideali bo'ladi.

Isboti:

Aniq holda barcha $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ uchun $0(a_1, \dots, a_n) = 0$ ligidan $I(V)$ nol

ko'pxatdir.

$$(f+g)(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n) + g(a_1, \dots, a_n) = 0 + 0 = 0$$

Shu sababdan $f+g \in I(V)$ bo'ladi $h \in K[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin $hf(a_1, \dots, a_n) =$

$$h(a_1, \dots, a_n)f(a_1, \dots, a_n) = h(a_1, \dots, a_n)0 = 0 \text{ kelib chiqadi va } hf \in I(V) \text{ bo'lsin}$$

$I(V) \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ning ideali bo'ladi.

$I(V)$ ideal 1-Lemmada ko'pxillikning ideali deb nomlanadi.

Misol: $V = \{(0,0)\} \subseteq K^2$ bu misolda biz $I(V) = \langle x, y \rangle$ ni ko'ramiz .

$$f(x,y)x + g(x,y)y \in \langle x, y \rangle \text{ ligidan}$$

$$f(0,0)0 + g(0,0)0 = 0 \text{ ni yoza olamiz.}$$

$$\text{natijada } f(x,y)x + g(x,y)y \in I(V) \text{ bo'ladi.}$$

$$\text{Shu sababli } \langle x, y \rangle \subseteq I(V). \quad f(x,y) \in I(V) \quad f(0,0)=0$$

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m a_{i,j} x^i y^j$$

bazi $a_{i,j} \in K$ uchun shuningdek,

$$0 = a_{00} + a_{10}0 + a_{01}0 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^m a_{ij} 0^i 0^j .$$

Bu yerda $a_{00}=0$ ligini nazarda tutib

$$f(x,y) = a_{10}x + a_{01}y + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{i,j} x^i y^j \text{ ni yoza olamiz.}$$

$$I(V) \subseteq \langle x, y \rangle \text{ ligidan } I(V) = \langle x, y \rangle \text{ ekanligi kelib chiqadi.}$$

Xossa: V va $W \subseteq K^n$ da affin ko'pxilliklari bo'ladi.

(i) $v \subseteq w$ faqat $I(V) \supseteq I(W)$ bo'lganda

(ii) $V=W$ faqat $I(V)=I(W)$ bo'lganda

Isboti:

(i) ni faraz qilamiz $V \subseteq W$. $f \in I(W)$. barcha $(a_1, \dots, a_n) \in W$ va $(a_1, \dots, a_n) \in V$ uchun $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ $f \in I(V)$ bo'lganda $I(W) \subseteq I(V)$ bo'ladi.

Faraz qilamiz $I(W) \subseteq I(V)$ bo'lsin. U holda W affin ko'pxilligi bo'ladi.

$g_1, \dots, g_n \in K[x_1, \dots, x_n]$ shuningdek $W = V(g_1, \dots, g_n)$ shu sababdan

$$g_1, \dots, g_n \in I(W) \subseteq I(V)$$

$g_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = g_n(a_1, \dots, a_n) = 0$ barcha $(a_1, \dots, a_n) \in W$ va $(a_1, \dots, a_n) \in V$ lar uchun $V \subseteq W$ bo'ladi.

(ii) agar $V=W$ bo'lsa u holda $I(V)=I(W)$ faraz qilamiz (i) orqali $V \supseteq W$ va $V \subseteq W$ ligidan $V=W$ kelib chiqadi.

Ko'pxad tenglamalari bilan bog'liq bo'ladigan ko'pxad xalqasidagi idealning generatorlarini ko'rganmiz.

Idealga ega bo'lishi mumkin generatorlarning o'rnatishlar farqini oldingi misollarda ko'rishimiz mumkin.

Misol: $V = V(y-x) \subseteq R^2$ bo'lsin. $I(V) = \langle y-x \rangle$ ni ko'ramiz.

Yechish:

Aniq holda $(y-x) \in I(V)$ shu sababli $\langle y-x \rangle \subseteq I(V)$ o'rinli.

$x^a y^b \in R[x, y]$ da birxat bo'ladi. a, b lar butun musbat sonlardir.

Binomial teoremasi orqali yechamiz.

$$\begin{aligned} x^a y^b &= x^a (x + (y-x))^b \\ &= x^a (x^b + (\sum_{i=1}^b (b, i) x^{b-i} (y-x)^{i-1}) (y-x)) \\ &= h_{ab} (y-x) + x^{a+b} \end{aligned}$$

$h_{ab} \in R[x, y]$ uchun natija barcha $f \in R[x, y]$

$$f = \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^n r_{ab} x^a y^b \quad (r_{ab} \in R)$$

$$= \sum_{a=0}^m \sum_{b=0}^n r_{ab} (h_{ab} (y-x) + x^{a+b})$$

$$= h(y-x) + r$$

bazi $h \in R[x, y], r \in R[x]$ uchun

$f = h(y-x) + r$ quydagiga erishamiz.

$$0 = f(t, t) = 0 + r(t)$$

t -biror haqiqiy son. Shu bois $r=0$ va $f = h(y-x) \in \langle y-x \rangle$ o'rinli bo'ladi.

Natijada $I(V) \subseteq \langle y-x \rangle$ ligidan $I(V) = \langle y-x \rangle$ tenglik kelib chiqadi.

3-§.Grobner Bazislar

Grobner bazis tushunchasi matematikadagi muammolarni yechish komputersohasi, injinerlik sohasi va fan uchun amaliy tushunchalarni mujassam etgan.

Bruno Buchberger Voffgang Grobner yordami bilan Grobner bazisini 1965-yilda fanga olib kelgan. Uning algoritimi komputerdan foydalanish shuningdek bazis nazariyasiga asoslangan.

Biz bu yerda uning algoritimini ochiq yani aniq holatda bermaymiz.

Qiziqqan o`quvchilar uchun Adams va Loustau yoki Bekker va Veispenning yoki Kox, Little va O`shee asarlaridan qo`shimcha bilim olib o`rganish mumkin. Quyida biz V barcha sonlarni biror ma`no anglatishini ko`raylik.

**1-Ta`rif:**  $f$   $W^n = \{(a_1 \dots a_n) / a_i \in W, i = 1 \dots n\}$  ga bog`liq bo`ladi va $a \mathbf{f} b$, $x^a > x^b$ orqali

belgilangan bo`lsa  $K[x_1, \dots, x_n]$  birxad o`rnatishga bog`liq deyiladi.

(i), (ii), (iii) lar birxad tartiblanishi deb nomlanadi.

(i) f W^n da chiziqli tartiblangandir.

(ii) barcha a, b, g uchun, $a + g \mathbf{f} b + g$ nazarda tutiladi.

(iii) W^n ning bo`sh bo`lmagan har bir qism to`plami  $f$  ga aloqador bo`gan eng kichik elementga egadir.

**Ta`rif:** Agar  $a - b \in Z^n$  da chapdan kirish nol bo`lsa musbat deyiladi.

Bu yerdagi barcha $a, b \in W^n$ uchun W^n da f_i ga bog`liq tushuntiriladi

Agar $a \mathbf{f}_i b$ bo`lsa,  $x^a \mathbf{f}_i x^b$  orqali  $K[x_1, \dots, x_n]$  ning birxadini o`rnatish $>_i$ ga bog`liq tushuntiriladi

$\mathbf{f}_l$ va $>_l$ lar leksikik tartiblar deyiladi.

Ta'rif: Agar $a \mathbf{f}_{grl} b$ bo'lsa, barcha $a, b \in W^n$ uchun

W^n ga $\mathbf{f}_{grl}$ bog'liq tushuntiriladi $|a| > |b|$, yoki $|a| = |b|$ va $a \mathbf{f}_l b$.

Agar $a \mathbf{f}_{grl} b$ bo'lsa, $x^a >_{grl} x^b$ orqali $K[x_1 \dots x_n]$ ning birxadni o'rnatishda $>_{grl}$ ga bog'liq tushuntiriladi.

$\mathbf{f}_{grl}$ va $>_{grl}$ lar leksik darajali tartiblar deb nomlanadi.

Ta'rif: Agar har ikalasi $|a| > |b|$, yoki $|a| = |b|$ bo'lsa, $a \mathbf{f}_{grl} b$ uchun barcha $a, b \in W^n$

W^n da $\mathbf{f}_{grl}$ aloqador tushuntiriladi va $a - b \in Z^n$ o'ngdan nolga kirish manfiy deyiladi.

Agar $a \mathbf{f}_{grl} b$ uchun $x^a \mathbf{f}_{grl} x^b$ bo'lsa $K[x_1 \dots x_n]$ ning birxad o'rnatishda $>_{grl}$ ga bog'liq deyiladi.

$\mathbf{f}_{grl}$ va $>_{grl}$ lar teskari darajali leksikik tartiblar deb nomlanadi.

$(1,2,3) \mathbf{f}_l (1,1,4)$ dan $(1,2,3) - (1,1,4) = (0,1,-1)$ va

$$1 > 0$$

$(1,2,3) \mathbf{f}_{grl} (1,1,4)$ dan $|(1,2,3)| = 6 = |(1,1,4)|$ va

$$(1,2,3) \mathbf{f}_l (1,1,4)$$

$(1,2,3) \mathbf{f}_{grl} (1,1,4)$ dan $|(1,2,3)| = 6 = |(1,1,4)|$ ammo

$(1,2,3) - (1,1,4) = (0,1,-1)$ va

$$-1 < 0$$

$(1,2,3) \prec_{grl} (1,3,1)$ va $(1,2,3) \prec_{grl} (1,3,1)$ dan $|(1,2,3)|=6>5=|(1,3,1)|$

Teorema: W^n da leksik tartiblanish birxad tartiblanish bo`ladi.

Ta'rif: $f = \sum_a a x^a \in K[x_1 \dots x_n]$, $f \neq 0$ va $>$ birxad tartiblanish deyiladi.

- (i) f ning ko`paytma darajasi $\text{multideg}(f)$ kabi yoziladi.
 - (ii) f ning yetakchi koeffisientidir va $\text{LC}(f)$ kabi yoziladi.
 - (iii) $a_m \in K$ $m = \text{multideg}(f)$;
 - (iv) f ning yetakchi birxad va $\text{LM}(f)$ kabi yoziladi.
 - (v) f ning yetakchi terminidir va $\text{LT}(f)$ kabi yoziladi.
- $\text{LT}(f) = \text{LC}(f) \text{LM}(f)$.

Misol: $f = 2x^4z^2 - 3x^4y^2z^2 + 5xy^3 + 5y^3z^2$ uchun $x > y > z$.

Biz leksik tartiblanishga egamiz.

$\text{Multideg}(f)$ yani ko`paytma darajasi $(4,2,2)$

$\text{LC}(f) = -3$

$\text{LM}(f) = x^4y^2z^2$

$\text{LT}(f) = -3x^4y^2z^2$.

Quyidagi teorema oldingi paragrafdagi teoremaning umumlashmasi.

Teorema: $f, g \in K[x_1 \dots x_n]$ ko`pxad nolga teng va quyidagi xossalari o`rinli bo`ladi.

- (i) $\text{multideg}(fg) = \text{multideg}(f) + \text{multideg}(g)$
- (ii) agar $f+g \neq 0$ bo`lsa, unda
 $\text{multideg}(f+g) \leq \max\{\text{multideg}(f), \text{multideg}(g)\}$ bo`ladi
 $\text{multideg}(f) \neq \text{multideg}(g)$.

Biz endi bir qancha o'zgaruvchili ko'pxadlar uchun algoritim tuzishni ko'rib chiqaylik.

$f_1 \dots f_t \in K[x_1 \dots x_n]$ ko'pxad f ko'pxadga bo'linadi.

$f = q_1 f_1 + \dots + q_t f_t + r$ ko'rinish $r \in K[x_1 \dots x_n]$ qoldiq va $q_1 \dots q_t$ ni o'z ichiga oladi. Biz yuqoridagi misollardan foydalanib bazi misollarni bajarilish tartibini keltiramiz.

Misol: $f = x^2 y^2 + y + 1$, $f_1 = xy + 1$ va $f_2 = y + 1$ $x > y$ uchun leksikik tartiblanishdan foydalanamiz.

$LT(f_1) > LT(f_2)$ ligidan 1- f_1 ni ro'yxatini tuzamiz.

$$\begin{array}{r|l} & q_1: \\ & q_2: \\ xy+1 & x^2 y^2 + y + 1 \\ -y+1 & x^2 y^2 + xy \end{array}$$

Ifodalarni $LT(f_1) = xy$ va $LT(f_2) = y$ har ikkalasi $LT(f)$ ga bo'linadi.

Shu sababdan biz 1- f_1 ni f ga bo'lamiz va quydagiga erishamiz.

$$\begin{array}{r|l} & q_1: xy - 1 \\ & q_2: \\ xy+1 & x^2 y^2 + y + 1 \\ -y+1 & x^2 y^2 + xy \\ \hline & -xy + y + 1 \end{array} .$$

$LT(f_1) = -xy$ ga bo'linadi.

Shu sababdan biz $-xy+y+1$ ni $LT(f_1)$ ga bo'lamiz va quydagiga erishamiz

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} xy+1 \\ y+1 \end{array} \overline{) \begin{array}{l} x^2y^2+y+1 \\ x^2y^2+xy \end{array} } \\
 \hline
 \begin{array}{r} -xy+y+1 \\ -xy-1 \end{array} \\
 \hline
 y+2
 \end{array}$$

Bu safar y $LT(f_1)$ ga bo'linmaydi, lekin $LT(f_2)$ ga bo'linadi.

Shu sababdan biz $y+2$ ni $LT(f_2)$ ga bo'lamiz.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} xy+1 \\ y+1 \end{array} \overline{) \begin{array}{l} x^2y^2+y+1 \\ x^2y^2+xy \end{array} } \\
 \hline
 \begin{array}{r} -xy+y+1 \\ -xy-1 \end{array} \\
 \hline
 y+2 \\
 y+1 \\
 \hline
 1.
 \end{array}$$

Natijada biz quydagi tenglikka ega bo'lamiz.

$$x^2y^2 + y + 1 = (xy-1)(xy+1) + 1(y+1) + 1$$

Quydagi misolda biz bu bajariladigan ishlarning unchalik murakkab bo'lmaganiga misol keltiramiz.

Misol: $f = x^2y + xy + y$, $f_1 = x^2 + y$, $f_2 = y^2 + 1$. $x > y$ bo'lgani uchun leksik

tartiblanishdan foydalanamiz.

$LT(f_1) > LT(f_2)$ ligidan, 1- f_1 ni ro'yxatini tuzamiz.

$$\begin{array}{r} q_1 : y \\ q_2 : \\ x^2 + y \overline{) x^2 y + xy + y} \\ y^2 + 1 \overline{) x^2 y + y^2} \\ \hline xy - y^2 + y. \end{array}$$

$LT(f_2)$ xy ga bo'linadi va xy qoldiqga ega bo'lamiz.

$$\begin{array}{r} q_1 : y \\ q_2 : \\ x^2 + y \overline{) x^2 y + xy + y} \\ y^2 + 1 \overline{) x^2 y + y^2} \\ \hline -y^2 + y \quad r : xy. \end{array}$$

$LT(f_1) - y^2$ ga bo'linmaydi, lekin $LT(f_2)$ ga bo'linadi.

Shu boisdan

$$\begin{array}{r} q_1 : y \\ q_2 : -1 \\ x^2 + y \overline{) x^2 y + xy + y} \\ y^2 + 1 \overline{) x^2 y + y^2} \\ \hline -y^2 + y \\ -y^2 - 1 \\ \hline y + 1 \quad r : xy. \end{array}$$

ligidan $LT(f_1)$ yoki $LT(f_2)$ y ga bo`linadi.

Shu sababli

$y+1$ qoldiqga ega bo`lamiz.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} q_1 : y \\ q_2 : -1 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} x^2 + y \\ y^2 + 1 \end{array} \left| \begin{array}{r} x^2 y + xy + y \\ x^2 y + y^2 \end{array} \right. \\
 \hline
 \begin{array}{r} -y^2 + y \\ -y^2 - 1 \end{array} \\
 \hline
 r : xy + y + 1.
 \end{array}$$

Natijada: $x^2 y + xy + y = y(x^2 + y) - (y^2 + 1) + xy + y + 1$ ga bo`lamiz.

Teorema: (Bo`lish algoritimi)

$> K[x_1 \dots x_n]$ ning birxadlarini o`rnatish birxad tartiblanish bo`ladi.

$$f_1 \dots f_t \in K[x_1 \dots x_n],$$

$$LT(f)_1 > LT(f)_2 > \dots > LT(f)_t$$

$q_1 \dots q_t, r \in K[x_1 \dots x_n]$ $f = q_1 f_1 + \dots + q_t f_t + r$ har ikisi $r=0$ yoki r birxadlarning

har biri $LT(f)_1, \dots, LT(f)_t$ ning birortasiga bo`linadi.

K - chiziqli kombinatsiyasidir. Shuningdek $\text{multidegri}(f) \geq \text{multidegri}(q_i f_i)$ uchun $q_i f_i \neq 0$

Ta'rif: Agar $A \subseteq W^n$ $I = \langle \{x^a / a \in A\}$ bo`lsa, Ideal $I \subseteq K[x_1 \dots x_n]$ birxad ideali deb nomlanadi.

Agar $I = \langle \{x^a / a \in A\}$ bo'lsa, birxad ideal deyiladi.

I ning har bir elementi $\sum_{a \in A}$ yig'indi shaklida chegaralangandir.

$$h_a \in K[x_1, \dots, x_n]$$

2-Lemma: Agar $x^a \mid x^b$ bo'lsa, bazi $a \in A$ uchun $I = \langle \{x^a / a \in A\}$ birxad ideal va $x^b \in I$ o'rinli bo'ladi.

Isboti:

Agar $x^a \mid x^b$ bo'lsa, $h_a \in K[x_1, \dots, x_n]$ shuningdek $x^b = h_a x^a \in I$ bo'lgani uchun

faraz qilamiz $x^b \in I$ bo'lsin. $x^b = \sum_{i=1}^q h_i x^{a(i)}$, $h_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ va $a(i) \in A$.

$$h_i = \sum_{j=1}^m k_{ij} x^{b_j}, \text{ barcha } k_{ij} \in K \text{ lar uchun}$$

$$x^b = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{j=1}^m k_{ij} x^{b_j} \right) x^{a(i)} \text{ o'rinli va shuningdek}$$

$$x^b = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m k_{ij} x^{b_j + a(i)} \text{ bo'lsin.}$$

Shu sababali $b = b_j + a(i)$, va $x^{a(i)} \mid x^{b_j + a(i)}$ lar uchun $j=1, \dots, m$, $i=1, \dots, n$ o'rinli bo'ladi.

$a + W^n = \{a + g / g \in W^n\}$ x^a orqali bo'lish barcha birxadlarning exponentialaridan tashkil topgan.

$$I = \langle x^4 y^2, x^3 y^4, x^2 y^5 \rangle,$$

bu I birxad ko'rinishdagi exponentialar.

$$((4,2) + W^n) \cup ((3,4) + W^n) \cup ((2,5) + W^n).$$

Lemma: I birxad ideali va $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ bo'ladi.

U holda quydgi ekvivalentliklar o'rinlidir.

(i) $\in I$

(ii) I ga tegishli funksiyaning terminidir.

(iii) $f = \sum_{a=0}^t a_a x^a$ $a_a \in I$ va $x^a \in I$ uchun $0 \leq a \leq t$.

Isboti:

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) zarurdir. (i) $\Rightarrow$ (iii):

$f \in I$ ligidan, $f = \sum_{i=1}^q h_i x^{a(i)}$ bazi $h_i \in K[x_1, \dots, x_n]$ va $a(i) \in A$ uchun

$I = \langle \{x^a / a \in A\} \rangle$ bo'ladi. $h_i = \sum_{j=1}^{n_i} k_{ij} x^{b(ij)}$, $i=1, \dots, q$ barcha i, j lar uchun $k_{ij} \in K$

natijada

$$f = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} x^{b(ij)} x^{a(i)}$$

I da (iii) birxad bo'ladi.

1-Tasdiq: I va J lar birxad ideallari bo'ladi. Agar I va J lar bir xil birxadlarga ega bo'lsa.

Isboti:

$I = \langle \{x^a / a \in A\} \rangle$ va $J = \langle \{x^b / b \in B\} \rangle$. Faraz qilamiz I va J bir xil birxadlarga ega bo'lsin. U holda $x^b \in \langle \{x^a / a \in A\} \rangle$ va $x^a \in \langle \{x^b / b \in B\} \rangle$ ligidan

natijada

$\langle \{x^a / a \in A\} \rangle$ va $J = \langle \{x^b / b \in B\} \rangle$ ko'rinishda bo'ladi.

Teorema: (Diksonning lemmasi)

$I = \langle \{x^a / a \in A\} \rangle \subseteq K[x_1 \dots x_n]$ birxad ideali bo'ladi.

$a(1), \dots, a(s) \in A$ shuningdek $I = \langle x^{a(1)}, \dots, x^{a(s)} \rangle$.

Isboti:

Agar $n=1$ bo'lsa, u holda $I = \langle x_1^a / a \in A \rangle$ $a \in A \subseteq w$.

b A ning eng kichik elementi bo'ladi.

U holda x_1^b / x_1^a barcha $a \in A$ va $I = \langle x_1^b \rangle$ o'rinli. Endi faraz qilamiz $n > 1$

va $K[x_1, \dots, x_{n-1}]$ ko'pxad uchun o'rinli deb.

$a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in W^{n-1}$ va $m \in W$. Farz qilamiz $I \subseteq K[x_1, \dots, x_{n-1}, y]$ birxad ideal $I = \langle \{x^a / x^a y^m \in I\} \rangle$ bo'ladi.

gipotesis belgilash orqali $x^{a(1)}, \dots, x^{a(s)}$ ($x^{a(i)} \in \{x^a / x^a y^m \in I\}$) ga erishamiz $K[x_1, \dots, x_{n-1}]$ da $I = \langle x^{a(1)}, \dots, x^{a(s)} \rangle$.

J ning ta'rifi orqali $x^{a(i)} y^{m_i} \in I$ bazi $m_i > 0$ uchun $i=1, \dots, s$. $m = \max\{m_1, \dots, m_s\}$

$J_k = \langle \{x^b / x^b y^k \in I\} \rangle$ $K[x_1, \dots, x_{n-1}]$ da, $k=0, \dots, m-1$ gipotesiz belgilash orqali

$x^{a_k(1)}, \dots, x^{a_k(k)}$ shuningdek $K[x_1, \dots, x_{n-1}]$ da

$$J_k = \langle x^{a_k(1)}, \dots, x^{a_k(k)} \rangle \quad x^{a_k(i)} = \{x^b / x^b y^k \in I\}.$$

Biz hozir birxadlar ro'yxayini quydagi shakilda tuzamiz.

J ning shakli $x^{a(1)} y^m, \dots, x^{a(s)} y^m$

J_0 ning shakli $x^{a_0(1)}, \dots, x^{a_0(s_0)}$

J_1 ning shakli $x^{a_1(1)}, \dots, x^{a_1(s_1)}$

.

.

.

$$J_{m-1} = x^{a_{m-1}(1)}y^{m-1}, \dots, x^{a_{m-1}(s_{m-1})}y^{m-1}.$$

Agar $p \geq m$ bo'lsa, $x^a y^p$ yuqoridagi 2-lemma va J ning tuzilishi orqali $x^{a(i)}y^m$ ga bo'linadi. Agar $p \leq m-1$ bo'lsa, u holda $x^a y^p$ yuqoridagi 2-lemma va J_p ning tuzilishi orqali $x^{a_p(i)}y^p$ ga bo'linadi.

Bir xil bixadga ega bo'lgan idealni yuqoridagi 2-lemmadan ko'rishimiz mumkin.

1-Tasdiq orqali bu ideallar bixildir.

Endi $x^{a_k(i)}y^k \in I$, ammo biz bilmaymiz $x^{a_k(i)}y^k \in \{x^a / a \in A\} \subseteq K[x_1 \dots x_n]$, $x_n = y$ ligini. Biz yoza olamiz $I = \langle x^{b(1)}, \dots, x^{b(s)} \rangle$, $x^{b(i)} \in I$, $i=1, \dots, s$.

2-Lemma da har bir $x^{b(i)} = x^{a(1)} \in A$ va $I = \langle \{x_1^a / a \in A\} \rangle$ orqali bo'linadi.

Shu sababli,

$$I \supseteq \langle x^{a(1)}, \dots, x^{a(s)} \rangle \supseteq \langle x^{b(1)}, \dots, x^{b(s)} \rangle = I$$

natijada,

$$I = \langle x^{a(1)}, \dots, x^{a(s)} \rangle \text{ kelib chiqadi.}$$

Quyidagi misolda I ideal chekli bazisga ega. Bu misolda biz Diksonnig lemmasini yanada qulayroq tushunamiz.

Misol: Faras qilamiz $K[x]$ maydonda $I = \langle x^5 y^2, x^2 y^3, x^2 y^5 \rangle$ bo'lsin.

$$J = \langle x^5, x^2, x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle \text{ aniq holatda } m=5.$$

$$J_0 = \langle \{x^\beta | x^\beta \in I\} \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

$$J_1 = \langle \{x^\beta | x^\beta y \in I\} \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

$$J_2 = \langle \{x^\beta | x^\beta y^2 \in I\} \rangle = \langle x^5 \rangle$$

$$I_3 = \langle \{x^\beta | x^\beta y^3 \in I\} \rangle = \langle x^2 \rangle$$

$$I_4 = \langle \{x^\beta | x^\beta y^4 \in I\} \rangle = \langle x^2 \rangle$$

Shu sababli

$$I = \langle x^5 y^2, x^2 y^3, x^2 y^5, x^2 y^4 \rangle$$

Tasdiq: $\succ$ quydagi xossalar o`rinli va  $W^n$  ga bog`liq bo`ladi.

(i) $\succ$ W^n da umumiy tartiblanishdir. (ii) agar $\alpha > \beta$ va $\gamma \in W^n$ bo`lsa, u holda barcha  $\alpha \in W^n$  uchun  $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$  o`rinli bo`ladi.

Agar $\alpha > 0$ bo`lsa, barcha  $\alpha \in W^n$  uchun eng yaxshi tartiblanish bo`ladi.

Isboti:

Aytaylik $\succ$ belgi eng yaxshi tartiblanishdir. a_0 W^n ning eng kichik elementi bo`ladi deb taxmin qilamiz. Bu  $0 > a_0$  har ikki tomonga  $n a_0$  ni qo`shib quydagini hosil qilamiz. $0 + n a_0 > (n+1) a_0$ bu yerda n -butun musbat sonidir.

Shu sababli, $0 > a_0 > 2a_0 > \dots > n a_0 > (n+1)a_0, \dots$, cheksiz zidiyat kamaygandir.

(1) $\alpha(2) < \dots < \alpha(s)$ ni taxmin qilishni umumiy holati yo`q.

$\alpha \in W^n$ $x^\alpha \in I$ va $x^{\alpha(i)}$ x^α ga bo`linadi bazi $\alpha(i)$ uchun shu sababli $\alpha = \alpha(i) + \gamma$

bazi $\gamma \in W^n$ uchun $\gamma > 0$ va (ii) orqali, $\alpha = \alpha(i) + \alpha \geq \alpha(i) + 0 = \alpha(i) > \alpha(1)$ natijada $\alpha(1)$ A ning eng kichik elementligi kelib chiqadi.

Shu sababli 1-Ta`rifda (iii) barcha  $\alpha \in W^n$  uchun  $\alpha \geq 0$  ligi aniq bo`ldi.

4-§. Ideallar

Ta`rif: Agarda quyidagi shartlar bajarilsa, $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ga ideal deyiladi:

$$(i) \quad 0 \in I$$

$$(ii) \quad f, g \in I \text{ dan, } f + g \in I \text{ bo'lsa}$$

$$(iii) \quad \text{agar } f \in I \text{ va } h \in k[x_1, \dots, x_n] \text{ dan, } hf \in I \text{ bo'lsa}$$

Bu paragrafning maqsadi ideal tushunchasining tabiiy tushuncha ekanligini, ideallarning affin ko'pxilliklar bilan qanday bog'liq ekanligi, ideallar tilida affin geometruyasining hisoblash masalalarini qanday ifodalanishini ko'rsatishdir.

Idealga eng sodda misol – chekli sondagi ko'phadlar yordamida hosil qilingan idealdir.

2-ta'rif. $f_1, f_2, \dots, f_s$ lar $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ko'phadlar bo'lsin.

$$\langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^s h_i f_i : h_1, h_2, \dots, k[x_1, \dots, x_n] \right\}$$

deb belgilaymiz.

Ko'rsatish mumkinki, $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ to'plam ideal bo'ladi.

3-lemma. $f_1, \dots, f_s$ ko'phadlar $k[x_1, \dots, x_n]$ halqaga tegishli bo'lsin, u holda $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ to'plam $k[x_1, \dots, x_n]$ dagi ideal bo'ladi. Bu ideal $f_1, f_2, \dots, f_s$ ko'phadlar yordamida hosil qilingan ideal deb, $f_1, \dots, f_s$ ko'phadlar esa bu idealni tashkil etuvchilari yoki hosil qiluvchi elementlari deyiladi.

$$\text{Isbot.} \quad 0 \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle, \quad \text{chunki} \quad 0 = \sum_{i=1}^s 0 \cdot f_i, \quad f = \sum_{i=1}^s p_i f_i, \quad g = \sum_{i=1}^s g_i \cdot f_i \quad \text{va}$$

$h \in k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin. U holda

$$f + g = \sum_{i=1}^s (p_i + g_i) f_i$$

$$hf = \sum_{i=1}^s (hp_i) f_i$$

tengliklardan $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ning ideal ekanligi kelib chiqadi.

$\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ideal ko'phadli tenglamalar tilida "chiroyli" izohlanadi.
 $f_1, \dots, f_s = k[x_1, \dots, x_n]$ bo'lsin.

$$\begin{array}{c} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_s = 0 \end{array}$$

tenglamalar sistemasini qaraymiz. Bu tenglamalardan odatdagi algebraik almashtirishlar bajarib boshqalarni keltirib chiqarishimiz mumkin. Masalan, birinchi tenglamani $h_1 \in k[x_1, \dots, x_n]$, ikkinchisini - $h_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$ va h. k. ko'paytirsak, va ko'paytmalarni qo'shsak, boshlang'ich sistemaning natijasidan iborat bo'lgan

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \dots + h_s f_s = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning chap tomoni $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealga tegishli bo'ladi, ya'ni $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealni $f_1 = f_2 = \dots = f_s = 0$ sistemani barcha "ko'phadli natijalar" to'plami ko'rinishda qarash mumkin.

Ta'rif: $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ning ideali deyiladi, $I \neq \langle 0 \rangle$. $LT(I) = \{cx^a \mid LT(f) = cx^a, f \in I \text{ uchun}\}$.

1-Misol: $y > x$ bo'lsin. $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ bo'lsin, $f_1 = y^3 - yf(x)$ va $f_2 = y^2x - xf(x)$ berilgan. $f \in [x, y]$ x-yakka xolda nol maydondir.

$K[x, y]$ da grl tartiblanishdan foydalanamiz.

U holda $y^2 = y(y^2x - xf(x) + y) - x(y^3 - yf(x)) \in I$.

Shu sababli $y^2 = LT(y^2) \in \langle LT(I) \rangle$ bo'ladi.

$y^2 \notin \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$, $LT(f_1)$ va $LT(f_2)$ y^2 ga bo'linmaydi 2-lemma orqali.

$\langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle \subsetneq \langle LT(I) \rangle$ ga erishamiz.

2-Teorema: $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ ning ideali bo'ladi. U holda

(i) $\langle LT(I) \rangle$ birxad idealdir.

(ii) $g_1, \dots, g_t \in I$ ligidan $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$ bo'ladi.

Isboti:

(i) $g \in I \setminus \{0\}$ bo'lsin, $LM(g) = x^m$ ligini eslatamiz, $m = \text{multideg}(g) = \max\{\alpha \in W^n \mid \alpha_\alpha \neq 0\}$, $G = \sum_{\alpha} \alpha_{\alpha} x^{\alpha}$.

Shuningdek $LT(g) = \alpha_{\alpha} LM(g)$ ligini eslaymiz α g ning ko'paytmadagi darajasidir.

$LM(g)$ va $LT(g)$ lar o'zgarmasdir ya'ni 0 bilan farq qiladi.

$\langle \{LM(g) \mid g \in I \setminus \{0\}\} \rangle = \langle LT(I) \rangle$, shu sababli $\langle LT(I) \rangle$ birxad ideali bo'ladi.

$\langle LT(I) \rangle$ uchun (ii) $g \in I \setminus \{0\}$, $LM(g)$ birxadlar orqali tuzilgandir.

Diksonning lemmasi orqali chekli $g_1, \dots, g_t \in I$ $LM(g_i)$ $LT(g_i)$ dan o'zgarmas nol orqali farq qiladi.

$$\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle.$$

3-Teorema: (Hilbert basis teoremasi)

I $K[x_1, \dots, x_n]$ ning ideali bo'ladi. U holda $g_1, \dots, g_t \in I$ shuningdek $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$, I chekli generator o'rnatishga ega.

Isboti:

Agar $I = \{0\}$ bo'lsa, u holda $I = \langle 0 \rangle$ bo'ladi. Faras qilamiz I o'zgarmas nol maydon deb.

2-Teorema orqali $g_1, \dots, g_t \in I$ shuningdek $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots,$

$\langle LT(g_t) \rangle$ aniq holatda $\langle g_1, \dots, g_t \rangle \subseteq I$, $f \in I$. $g_1, \dots, g_t$ orqali f bo'linadi.

f ning ifodasi quydagicha $f = a_1 g_1 + \dots + a_t g_t + r$ ko'rinishga ega, r dagi har bir termin $LT(g_1), \dots, LT(g_t)$ ning har biri orqali bo'linadi.

Endi $r = f - (a_1 g_1 + \dots + a_t g_t) \in I$. Agar $r \neq 0$ bo'lsa,

unda $LT(r) \in \langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, \langle LT(g_t) \rangle$ $LT(r)$ $LT(g_i)$ orqali bo'linadi.

Bu zidiyat u qanday qoldiq bo'lishligini bildiradi. Shu sababdan. $r = 0$ ligidan

$f = a_1 g_1 + \dots + a_t g_t \in \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ bo'ladi. Natija $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ bo'ladi.

Teoremani isbotlashda foydalanilgan Teorema ajoyib xossaga ega.

Bu $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$.

Fix birxad tartibdir. Ideal I ning chekli qism to'plami

$G = \{g_1, \dots, g_t\}$ va $\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ bo'lsa, Grobner basis yoki standart basis deyiladi.

Tasdiq: Fix birxad tartibdir. I $K[x_1, \dots, x_n]$ ning nol ideali bo'ladi.

I Grobner basisga ega, yani I uchun biror Grobner basis I uchun basisdir.

Misol: $x > y > z$ $R[x, y, z]$ da ideal $J = \langle x - z^i, y - z^j \rangle$ ni ko'raylik. i va j lar butun musbat sonlardir.

$\{x - z^i, y - z^j\}$ ko'rinish J uchun Grobner basisdir.

$\langle LT(x - z^i), LT(y - z^j) \rangle = \langle x, y \rangle$ da yotadi $f = A g_1 + B g_2 \in J$ ni ko'raylik,

$g_1(x, y, z) = x - z^i$ va $g_2(x, y, z) = y - z^j$.

Faras qilamiz $f \neq 0$ va x bilan y $LT(f)$ ga bo'linmaydi. Leksikik tartibning ta'rifi orqali f Z maydonda yagona bo'lishi kerak.

$V = V(x - z^i, y - z^j) \subseteq R^3$ da f yoqoladi $f \in J$. Aniqroq aytganda biror haqiqiy

nomer t uchun $(t^i, t^j, t) \in V$

barcha nuqtalarning yo'qligi Z maydonda yagona nol maydonligidir.

Shu sababli $\{g_1, g_2\}$ J uchun Grobner basisdir.

4-Teorema: I $K[x_1, \dots, x_n]$ ning ideali va $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ I uchun

Grobner bazis bo'ladi $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ uchun.

Bu Teorema orqali biz G ning elementlar ro'yxatini tuza olamiz.

Tasdiq: I $K[x_1, \dots, x_n]$ va $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ ning ideali bo'ladi. I Grobner basis bo'ladi. $f \in I$ dan f ni G orqali bo'lgandagi qoldiq nolga teng.

Isboti:

Agar $r=0$ bo'lsa, u holda $f=a_1g_1+\dots,a_tg_t\in I$ taxmin qilamiz $f\in I$ bo'lsin.

$f=f+0$ 4-Teorema (i) va (ii) lar uchun o'rinli.

Natijada $r=0$ ning yagonaligi kelib chiqadi.

Misol:

$$F=(x^2y-xy, x^4y^3)$$

va

$$f(x,y)=x^5y^2.$$

$x>y$ uchun leksikik tartiblanishdan foydalanmiz.

$$\begin{array}{r}
 q_1 : 0 \\
 q_2 : x^3y + x^2y + xy + y \\
 \hline
 x^4y^3 - xy \quad x^5y^2 \\
 x^2y - xy \quad x^5y^2 - x^4y^2 \\
 \hline
 x^4y^2 \\
 x^4y^2 - x^3y^2 \\
 \hline
 x^3y^2 \\
 x^3y^2 - x^2y^2 \\
 \hline
 x^2y^2 \\
 x^2y^2 - xy^2 \\
 \hline
 xy^2.
 \end{array}$$

2-Misol: $y>x$ bo'lsin. 2-misolning I idealini ko'ramiz.

$I=\langle f_1, f_2 \rangle$ $f_1=y^3-xf(x)$ va $f_2=y^2x-xf(x)+y$ grl tartiblanishdan foydalanamiz.

$y(y^2x-xf(x)+y)-x(y^3-xf(x))=y^2$ $y^2\in I$ shu sababli $LT(f_1)xy^2$ va $LT(f_2)xy^2$

ligidan $LT(y^2)=y^2\notin\langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$ kelib chiqadi.

Biz $xLT(f_1) - yLT(f_2) = 0$ ni ko'ramiz. $\{f_1, f_2\}$ Grobner basis emas, chunki $\langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle \neq \langle LT(I) \rangle$.

Eslatma:

$LT(y^2) \notin LT(I)$ va $LT(y^2) \notin \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$.

Ta'rif: $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ da nol maydon deyiladi.

$\text{multideg}(f) = \alpha$, $\text{multideg}(g) = \beta$ va $\gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$ $i=1, 2, \dots, n$. $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ bo'lsin. x^γ $LM(f)$ va $LM(g)$ ning eng kichik oddiy ko'paytmasi deb nomlanadi va quydagicha yoziladi

$$L = x^\gamma = \text{LCM}(LM(f), LM(g)).$$

$$S(f, g) = (x^\gamma / LT(f))f - (x^\gamma / LT(g))g$$

$S(f, g)$ va g ning maydoni deb nomlanadi.

Misol: $y > x$ bo'lsin. 2-misoldan $f(x) = x$ shuningdek $f_1 = y^3 - yx$ va $f_2 = y^2x - x^2 + y$ grl tartiblanish uchun $R[x, y]$ da $\text{multideg}(f_1) = (3, 0)$ va $\text{multideg}(f_2) = (2, 1)$ shu sababli $L = y^3x$ va

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \frac{y^3x}{y^3} f_1 - \frac{y^3x}{y^2x} f_2 \\ &= x f_1 - y f_2 \\ &= -yx^2 + y^2x - y^2 \\ &= -y^2. \end{aligned}$$

$S(f, g)$ maydonning vazifasi oldidagi terminlarni yo'qotishdir.

Lemma:

$$\sum_{i=1}^t c_i x^{\alpha(i)} g_i$$

yig'indini ko'ramiz $c_1, \dots, c_t$ lar o'zgarmaslardir va $\alpha(i) + \text{multideg}(g_i) = \bar{\alpha} \in w^n$ $c_i \neq 0$. Agar $\text{multideg}(\sum_{i=1}^t c_i x^{\alpha(i)} g_i) < \bar{\alpha}$ o'zgarmas bo'lsa $\sum_{i=1}^t c_i x^{\alpha(i)} g_i = \sum_{j,k} c_{j,k} x^{\bar{\alpha} - \gamma_{jk}} S(g_j, g_k)$, $x^{\gamma_{jk}} = \text{LCM}(LM(g_j), LM(g_k))$ qo'shimcha ravishda har bir $x^{\bar{\alpha} - \gamma_{jk}} S(g_j, g_k)$ $\text{multideg} < \bar{\alpha}$ bo'ladi.

Misol: $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ idealni ko'ramiz.

Bu misolni yechishda yuqoridagi 4-teoremaga murojat qilamiz .

$C = \{y - x^2, z - x^3\}$ $y > z > x$ shart bolgani uchun leksik tartiblanish Grobner basisi bo`ladi.

$S(y - x^2, z - x^3)$ ni ko`ramiz.

$$S(y - x^2, z - x^3) = \frac{yz}{z}(y - x^2) - \frac{yz}{z}(z - x^3) = -zx^2 + yx^3.$$

$$\begin{array}{r|l} q_1 : x^3 & \\ q_2 : -x^2 & \\ \hline y - x^2 & yx^3 - zx^2 \\ z - x^3 & yx^3 - x^5 \\ \hline & -zx^2 + x^5 \\ & -zx^2 + x^5 \\ \hline & 0. \end{array}$$

Shu bois $-zx^2 + yx^3 = x^3(y - x^2) + (-x^2)(z - x^3) + 0$

Natijada $S(y - x^2, z - x^3)^G = 0$

Shu sababli G uchun Grobner basis bo`ladi.

Endi $x > y > z$ leksik tartiblanish uchun G ni ko`ramiz. .

$g_1(x, y, z) = -x^2 + y$ va $g_2(x, y, z) = -x^3 + z$ $\text{multideg}(g_1) = (2, 0, 0)$

va $\text{multideg}(g_2) = (3, 0, 0)$ shu sababli $\gamma = (3, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} S(-x^2 + y, -x^3 + z) &= \frac{-x^3}{-x^2}(-x^2 + y) - \frac{-x^3}{x^3}(-x^3 + z) \\ &= x^3 - xy - x^3 + z \\ &= -xy + z. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} q_1 : 0 & \\ q_2 : 0 & \\ \hline -x^3 + z & -xy + z \\ -x^2 + y & 0 \\ \hline & -xy + z \end{array}$$

$$-xy + z = 0(-x^3 + z) + 0(-x^2 + y) + (-xy) + z = -x^2 + y \neq 0.$$

Shu sababdan, $\{-x^2+y, -x^3+z\}$ $x>y>z$ leksik tartiblanish uchun Grobner basis bo'lmaydi. Har bir ideal $K[x_1, \dots, x_n]$ maydonda Grobner basisga ega bo'ladi, ammo bu natija amaliy emas. Biz endi Grobner basisni ko'ramiz.

Misol: $y>x$ bolsin. grl tartiblanish uchun $K[x,y]$ maydoni ko'ramiz va $I=\langle f_1, f_2 \rangle$ bo'lsin, $f_1=y^3-yx$ va $f_2=y^2x-x^2+y$ $\{f_1, f_2\}$ $LT(S(f_1, f_2))=-y^2 \notin \langle LT(f_1), LT(f_2) \rangle$ ligidan Grobner basis bo'la olmaydi.

2-misoldan foydalanib

$$S(f_1, f_2) = -y^2.$$

$$\begin{array}{r|l} & q_1 : 0 \\ & q_2 : 0 \\ y^3 - yx & -y^2 \\ y^2x - x^2 + y & 0 \\ \hline & -y^2 \end{array}$$

Bundan ko'rinib turinibdi f_1, f_2 ni bo'lgandagi $S(f_1, f_2)$ maydonning qoldig'i nol emas. Shu sababli, generator o'rnatishdagi qoldiqni qo'shamiz.

$F=\{f_1, f_2, f_3\}$, $f_3=-y^2$ bo'lsa, $S(f_1, f_2)=f_3$ ni yoza olamiz. Natijada $S(f_1, f_2)^F = 0$. f_1, f_3 ni ko'raylik $\text{multideg}(f_3)=(2,0)$. Shu sababdan, $L=y^3$.

Natija $S(f_1, f_3) = (y^3/y^3)(y^3-yx) - (y^3/(-y^2))(-y^2) = -xy$

Ammo

$$S(f_1, f_3)^F = -xy \neq 0$$

Shu sababdan generator o'rnatishga $f_4=-yx$ ni qo'shishimiz kerak.

$F=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. U holda $S(f_1, f_2)^F = S(f_1, f_3)^F = 0$ f_1 va f_4 ni ko'raylik. Unda $\text{multideg}(f_1)=(3,0)$ va $\text{multideg}(f_4)=(1,1)$. Shu sababli, $L=y^3x$ natija, $S(f_1, f_4) = x(y^3-yx) - (-y^2)(-yx) = -y^2x = xf_4$ va $S(f_1, f_4)^F = 0$ bo'ladi.

f_2 va f_3 ni ko'raylik u holda $\text{multideg}(f_2)=(2,1)$ va $\text{multideg}(f_3)=(2,0)$ o'rinli

Shu sababli $L=y^3x$

Natija,

$$S(f_2, f_3) = (y^2x - x^2 + y) - (-x)(-y^2)(-yx) = -y^2x = xf_4$$

ammo $S(f_2, f_3)^F = -x^2 + y \neq 0$ Shunday qilib biz generator o'rnatish uchun

$f_5 = -x^2 + y$ ni qo'shishimiz kerak.

$F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ bo'lsin barcha $1 \leq i < j \leq 5$ uchun. $S(f_i, f_j)^F = 0$ ligini ko'ra olamiz. Natijada 4-Teorema orqali $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ I uchun Grobner bazisi bo'ladi.

2-Lemma: I $K[x_1, \dots, x_n]$ da ideal bo'ladi. $g \in G$ maydonga tegishli bo'ladi.

$$LT(g) \in \langle LT(G \setminus \{g\}) \rangle$$

shuningdek $G \setminus \{g\}$ I uchun Grobner bazisi bo'ladi.

Isboti:

Biz $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(G) \rangle$ tenglikga egamiz. Faraz qilamiz $LT(g) \notin \langle LT(G \setminus \{g\}) \rangle$.

Bundan $\langle LT(G \setminus \{g\}) \rangle = \langle LT(G) \rangle$ kelib chiqadi. Shu sababli $\langle LT(G \setminus \{g\}) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ va $G \setminus \{g\}$ I uchun Grobner bazisi bo'ladi.

Ta'rif: I $K[x_1, \dots, x_n]$ da ideal bo'lsin va G I uchun Grobner bazisi deyiladi. U holda G I uchun eng kichik Grobner bazisi bo'ladi agar quydagi shartlar bajarilsa:

(i) $LC(g) = 1$ barcha $g \in G$ uchun

va

(ii) barcha $g \in G$ uchun, $LT(g) \in \langle LT(G \setminus \{g\}) \rangle$.

Misol: $y > x$ bo'lsin. Biz 2-misoldan foydalanib Grobner basisni tuzamiz.

$$f_1 = y^3 - yx$$

$$f_2 = y^2x - x^2 + y$$

$$f_3 = -y^2$$

$$f_4 = -yx$$

$$f_5 = -x^2 + y$$

Biz generatorlarning yetakchi ko'fsentlarini yaratish uchun f_3, f_4 va f_5 ga ko'paytiramiz. 2-Lemma orqali f_1 ni yo'qota olamiz.

Shuningdek, $LT(f_2) = y^2x = -yLT(f_4)$ dan biz f_2 ni yo'qota olamiz.

$$y^2 \rightarrow yx, y^2 \rightarrow x^2, yx \rightarrow y^2, yx \rightarrow x^2, x^2 \rightarrow y^2, x^2 \rightarrow yx$$

shu sababli

$$g_3 = y^2, \quad g_4 = yx, \quad g_5 = x^2 - y$$

I uchun Grobner bazis bo'ladi. $a \in K$ nolga teng bo'lmagan o'zgarmasdir.

Shuning uchun Grobner bazis ideal uchun har doim yagona emas.

Ta'rif: Agar quydagi shartlar bajarilsa, $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ da ideal va G I uchun Grobner bazisi deyiladi u holda kamaygan Grobner bazis bo'ladi.

(i) $LC(g) = 1$ barcha $g \in G$

(ii) barcha $g \in G$ uchun $\langle LT(G \setminus \{g\}) \rangle$ da g birxad emas.

Yuqoridagi misolda $y^2, yx, x^2 - y$. I uchun kamaygan Grobner bazis bo'ladi.

$$I: y^2 \in \langle y^2, yx \rangle, yx \in \langle y^2, x^2 \rangle, x^2 \in \langle y^2, yx \rangle, y \in \langle y^2, yx \rangle.$$

Teorema: $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ning ideali bo'ladi. Berilgan birxad tartiblanish uchun.

I yagona kamaygan Grobner bazis bo'ladi.

5-Teorema: $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ning ideali bo'ladi. $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$ bo'lsin.

Shuningdek $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ o'rirliligidan $V(I) = V(\{f_1, f_2, \dots, f_m\})$ kelib chiqadi.

Misol: Maydon tenglamalari.

$$x^3 + y + z^2 = 0$$

$$x^2+z^2=y$$

$$x=z$$

$I=(x^3+y+z^2, x^2+z^2-y, x-y) \subseteq C[x,y,z]$ bo'lsin. 5-Teorema orqali I ning biror bazisidan foydalanib $V(I)$ ni tuza olamiz. $x>y>z$ bo'lgani uchun leksik tartiblanishdan foydalanamiz.

$$g_1=x-z$$

$$g_2=y-2z^2$$

$$g_3=z^3+3z^2$$

g_3 maydon faqat z ga bog'liq bo'ladi va unig ildizlari $z=0,-3$

z ning qiymatini o'rniga qo'yish orqali mos ravishda x va y uchun $g_1=0$ va $g_2=0$ tenglamalarni tuza olamiz.

Natijada $g_1=g_2=g_3=0$ yechimlari $(0,0,0)$ va $(-3,18,-3)$ ko'rinishda bo'ladi.

$V(I)=V(g_1,g_2,g_3)$ dan tenglamalarni barchasini yechimini topa olamiz.

Xulosa

Bu bobda $V(f_1, \dots, f_s)$ affin ko'pxillik nuqtalarini tavsiflash masalasini qaralgan. Bu masalani $f_1 = \dots = f_s = 0$ ko'pxad tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini tavsiflash masalasi deb qayta bayon etish mumkin. Agar yechimlar chekli bo'lsa, u holda bizning maqsadimiz-ularni sanab o'tishdan iborat. Agar ular cheksiz ko'p bo'lsa, nima qilish kerak? Bu bobda biz affin ko'pxillikni parametrlash tushunchasini kiritildi va parametrlashga doir ko'plab misollar qarab chiqildi.

Bu bobning maqsadi ideal tushunchasining tabiiy tushuncha ekanligini, ideallarning affin ko'pxilliklar bilan qanday bog'liq ekanligi, ideallar tilida affin geometruyasining hisoblash masalalarini qanday ifodalanishini ko'rsatildi.

Biz bu bobda bir o'zgaruvchili ko'phadlarni bo'lish algoritmini qaradik. Bu oddiy algoritmnini qo'llash kuchli natijalar beradi. Masalan, uning yordamida $k[x]$ dagi ideallar strukturasini aniqlaymiz va eng katta umumiy bo'luvchi tushunchasini tadqiq etamiz. Bu yerda qarayotgan usullar yuqoridagi paragraflarda bayon etilgan ko'pgina masalalarni yechishga yordam beradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Karimov I.A. "Kadrlar tayyorlashning milliy dasturi", T. "O'zbekiston", 1997yil.
2. Karimov. I.A. Jahon moliyaviy-iqtisodiy inqirozi, O'zbekiston sharoitida uni bartaraf etishning yo'llari va choralari. - T.: O'zbekiston, 2009.
3. Karimov.I.A. Asosiy vazifamiz - Vatanimiz taraqqiyoti va xalqimiz farovonligini yanada yuksaltirishdir. 29 yanvar,2010y.)- T.: O'zbekiston, 2010.
- 4.Karimov I.A. Mamlakatimizda demokratik islohotlarni yanada chuqurlashtirish va fuqarolik jamiyatini rivojlantirish kontseptsiyasi . (2010 yil 12 noyabr') T. "O'zbekiston", 2010 yil.
- 5.Karimov I.A. Mamlakatimizni modernizatsiya qilish va kuchli fuqarolik jamiyati barpo etish - ustuvor maqsadimizdir.(27 yanvar,2010y.)T. "O'zbekiston", 2010 yil.
6. Karimov I.A. Barcha reja va dasturlarimiz Vatanimiz taraqqiyotini yuksaltirish, xalqimiz farovonligini oshirishga xizmat qiladi.(21 yanvar,2011y.)T. "O'zbekiston",2011 yil.
7. А.И.Кострикин. Введение в алгебру. Москва, «Наука» - 1977.
8. М.И.Каргаполов, Ю.И.Мерзляков. Основы теории групп. Москва, «Наука» - 1982.
9. В.Б.Алексеев. Теорема Абеля в задачах и решениях. Москва, «Наука» - 1976.
10. Б.Л.ван дер Варден. Алгебра. Москва, «Наука» - 1979.
11. Л.А.Калужнин. Введение в общую алгебру. Москва, «Наука» - 1973.
12. X.S. Rasulov. Algebradan ma`ruzalar. Namangan, 2004

Mundarija

Kirish.....	1
1-§.Ko'pxillik tushunchasi.....	14
2-§.Geometriyada kopxilliklar.....	18

3-§.Grobner basisi.....	31
4-§.Ideallar.....	42
Xulosa.....	54
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	55