

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O`RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ANDIJON MASHINASOZLIK INSITITUTI

«ELEKTROTEXNIKA, ELEKTROMEXANIKA VA
ELEKTROTEXNOLOGIYALAR» kafedrası



NAZARIY MEHANIKA
FANIDAN

MA'RUZALAR KURSI
(STATIKA va KINIMATIKA)

Andijon – 2012 y

“TASDIQLAYMAN”

Andijon mashinasozlik insitituti o'quv-uslubiy
kengashida ko`rib chiqilgan va tasdiqlangan

Kengash raisi _____ Q.Ermatov

“ _____ ” _____ 2012 y. № _____

“MA'QULLANGAN”

“Mashinasozlik” fakulteti kengashida
muhokama qilingan va ma'qullangan

Kengash raisi _____ T.Almataev

“ _____ ” _____ 2012 y.

“TAVSIYA ETILGAN”

“Elektrotexnika,elektromexanika va elektrotexnologiyalar”
kafedrasida majlisida muhokama qilingan va
tavsiya etilgan

Kafedra mudiri _____ B.Mamadjanov

(Kafedra majlisining _____ -sonli bayonnomasi “ _____ ” _____ 2012 y.)

Taqrizchilar:

1. M.Xalilov, t.f.n, - AndMI,

« Elektrotexnika,elektromexanika va elektrotexnologiyalar »
kafedrasining dotsenti.

2. Q. Xolmirzayev-Andijon qishloq xo'jaligi instituti dotsenti,
texnika fanlari nomzodi.

Tuzuvchilar:

Texnika fanlari nomzodi, dotsent X.Sobirov, assistant
X.Ismoilov—«Nazariy mexanika» fanidan ma'ruzalar kursi.
A.: AndMI, 2012 y.

Ushbu Nazariy mehanika fanidan maruzalar kursi kafedra
qaroriga asosan AndMI o'quv uslubiy haya'ti tomonidan (2012
yil) qo'llanishga tavsiya etilgan.

Kirish

Mexanika fani matematika fani singari qadimiydir. Nazariy mexanikada izlanishning matematik usullari keng tatbiq qilinadi. Jismning holati boshqa qo'zg'almas deb olingan jismga birlashtirilgan koordinata o'qlariga nisbatan kuzatiladi. Harakat davomida jismning holati kuzatilayotgan sanoq sistemasiga nisbatan vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. Tabiatda harakatsiz jism mavjud emas, binobarin qo'zg'almas sanoq sistemi ham mavjud emasdir. Odatda ko'pgina muhandislik masalalarini hal qilishda (kosmik uchishlar masalasi bundan mustasnodir), yerni qo'zg'almas deb qaraladi. Shuning uchun, keyinchalik, agar alohida ta'kidlanmasa, yerga bog'langan sanoq sistemasini qo'zg'almas deb qabul qilamiz. Hozirgi zamon "Nazariy mexanika" fanining asosiy qonunlarini 1687 yilda mashhur donishmand olim Isaak Nyuton o'zining «Tabiiy fanlar falsafasining matematik asoslari» nomli asarida bayon qilib bergan. Shuni ta'kidlab o'tamizki, Nyuton qonunlari Arximed va Galiley singari va boshqa buyuk olimlarning kundalik kuzatishlari va izlanishlarining natijasidir. Nazariy mexanika fanining rivojlanishi davomida, undan ko'pgina muhandislik fanlari mustaqil fan bo'lib ajralib chiqdi. Masalan: materiallar qarshiligi, inshootlar nazariyasi, suyuq va gazsimon jismlar mexanikasi, mashina va mexanizmlar nazariyasi va boshqalar. Bu fanlar nazariy mexanika qonunlariga tayangani holda mustaqil fanlar tarzida shakllandi. Hozirgi zamon mexanikasining tez sur'atlar bilan taraqqiy etishi, texnikani rivojlantirishda ijodiy ishlashga qodir bo'lgan yuqori malakali muhandis xodimlarga muhtojlikni oshiradi. Hozirgi zamon muhandislari o'ta murakkab hisob ishlarini bajarishlari darkor, masalan: inshoot muvozanatlariga oid (imorat, ko'prik va boshqalar), mashina va mexanizmlar harakatiga oid hisob-kitob ishlari. Bunday masalalarni yechishga faqat "Nazariy mexanika" fani qonun-qoidalarini chuqur o'rgangan muhandislarga qodirdirlar.

"Nazariy mexanika" fani uch qismdan iborat: statika, kinematika va dinamika.

Statika moddiy jismlar muvozanatiga oid qonunlarni o'rganadi. Bu bo'limini o'rganish uchun barch yo'nalishlar bo'yicha 14-18 soat ajratilgan. Ushbu maruza matni 18 soat ma'ruzaga moslab tuzilgan.

1- Maruza: Qattiq jism statikasi va statikaning asosiy aksiomalari (4 soat)

Reja:

1. Asosiy tushunchalar va ta'riflar
2. Statikaning asosiy aksiomalari
3. Bog'lanish va bog'lanish reaksiya kuchlari
4. Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash
5. Kuchni tashkil etuvchilarga ajratish
6. Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash
7. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari
8. Uch kuch muvozanati haqida teorema

Jismga ta'sir etuvchi kuchlar turlari, ular ustida amallar, kuchlarning muvozanat shartlarini o'rganuvchi nazariy mexanikaning bo'limi statika deb ataladi. Statikani o'rganish uchun zarur bo'lgan asosiy tushuncha va ta'riflarni keltiramiz.

1. Moddiy nuqta. Ko'rilayotgan masalada geometrik o'lchamlarining ahamiyati bo'lmagan jism moddiy nuqta deb ataladi.

2. Mexanik sistema. Har birining holati va harakati boshqalarining holati va harakatiga bog'liq bo'lgan moddiy nuqtalar to'plami mexanik sistema deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinadiki mexanik sistema moddiy nuqtalar orasida o'zaro ta'sir mavjud bo'lishini taqozo qiladi.

3. Absolyut (mutlaq) qattiq va deformatsiyalanuvchi jism. Qattiq jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa har qanday holatda ham o'zgarmasdan qolsa, bunday jism absolyut (mutlaq) qattiq jism deb ataladi. Tabiatda mutlaq qattiq jism mavjud emas. Har qanday qattiq jism bo'lmasin, shunday sharoit mavjud qilish mumkinki, uning ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarishiga olib kelish mumkin. Bu jism shaklining o'zgarishiga olib keladi. Ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgaruvchi bo'lgan qattiq jism deformatsiyalanuvchi jism deb ataladi. Binobarin tabiatda faqat deformatsiyalanuvchi jism mavjuddir.

4. Erkin va erkin bo'lmagan jism. Fazoda ixtiyoriy vaziyatni egallashi mumkin bo'lgan jism erkin jism deb ataladi. Quyosh

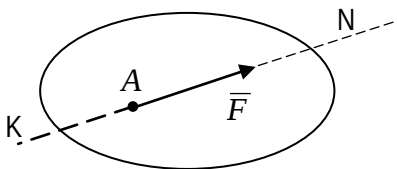
sistemasining sayyorolari bunga misol bo'la oladi. Agar jismning fazodagi vaziyati yoki harakatiga qandaydir chek qo'yilsa, bunday jism erkin bo'lmagan, ya'ni bog'lanishdagi jism deb ataladi.

5. Kuch. Moddiy jismlarning harakati yoki ichki holatining o'zgarishiga sabab bo'luvchi, o'zaro bir-birlariga ko'rsatgan ta'sirlarning miqdor o'lchovi kuch deb ataladi. Jismlarning o'zaro mexanik ta'siri ularni bir-biriga tegib yoki ma'lum masofada turganida ham mavjud bo'lishi mumkin.

Birinchi toifaga jismlarning o'zaro bir-birlariga bosimi, ikkinchi toifaga har xil tortishish kuchlari: sayyoralar orasidagi o'zaro tortishish, elektr, magnit va boshqalar kiradi. Jismga qo'yilgan kuch: miqdor, yo'nalish va qo'yilish nuqtasi bilan xarakterlanadi, ya'ni kuch vektor kattalikdir. SI xalqaro birliklar sistemasida kuch birligi – Nyuton.

Kuch yo'nalishi deb, tinch holatda turgan erkin moddiy nuqtaning qo'yilgan kuch ta'siridan olgan harakatining yo'nalishiga aytiladi. Kuch yo'налgan to'g'ri chiziq kuchning ta'sir chizig'i deb ataladi (1-shakl).

Jismning bevosita kuch qo'yilgan nuqtasi kuch qo'yilgan nuqta deb ataladi. Kuch yo'naltirilgan kesma orqali grafik tasvirlanadi. Tanlab olingan masshtabda kesma uzunligi kuch miqdorini ifodalaydi, kesmaning yo'nalishi kuch yo'nalishiga monand, uning boshlanishi yoki oxiri kuch qo'yilgan nuqtaga monand.



1-shakl

1-shaklda $\vec{F}$ kuch A nuqtaga qo'yilgan.

6. Kuchlar sistemasi. Jismga qo'yilgan bir necha kuchlardan iborat bo'lgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ to'plam kuchlar sistemasi deb ataladi.

7. Ekvivalent kuchlar sistemasi. Agar jismga qo'yilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sirini, uning tinch yoki harakat

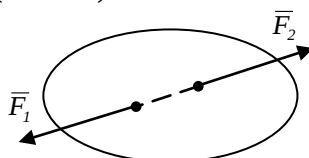
holatini o'zgartirmay, boshqa kuchlar sistemasi, ya'ni $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n)$, bera olsa, unday ikki kuch sistemasi ekvivalent kuchlar sistemasi deyiladi. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n)$.

8. Teng ta'sir etuvchi kuch. Berilgan kuchlar sistemasi biror kuchga ekvivalent bo'lsa, bunday kuch teng ta'sir etuvchi kuch deb ataladi. Shuni nazarda tutish kerakki, kuchlar sistemasining jismga bergan ta'sirini yolg'iz bir kuch bera olsa, bunday kuch mazkur kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisidir $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n) \Leftrightarrow \vec{R}$.

9. Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi. Erkin jism unga qo'yilgan kuchlar sistemasi ta'sirida tinch holatda qolsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasi yoki nolga ekvivalent sistema deyiladi. $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n) \Leftrightarrow 0$.

Statikaning asosida isbot talab etilmaydigan, aksioma deb ataluvchi boshlang'ich haqiqatlar to'plami yotadi. Bu aksiomalar tajriba va kuzatishlarning natijasidir. Aksiomalarga asoslanib, statikaning mazmunini tashkil etuvchi teoremlar isbot qilinadi.

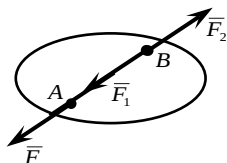
1-aksioma. Erkin qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch miqdor jihatdan bir-biriga teng $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ va bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lsa, kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi. Bu aksioma oddiy muvozanatlashgan kuchlar sistemasini aniqlaydi (2-shakl).



2-shakl

2-aksioma. Agar jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga, muvozanatlashgan kuchlar sistemasini qo'shsak, yoki undan ayirsak, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Yuqoridagi ikki aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi:



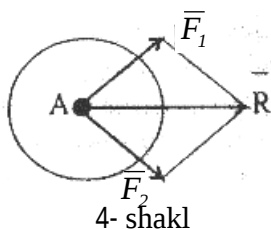
3-shakl

Bu aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uning qo'yilish nuqtasini ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirishimiz mumkin. Jismning A nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo'yilgan (3-shakl). Uning ta'sir chizig'ining, u bo'ylab ixtiyoriy B nuqtasiga muvozanatlashgan kuchlar sistemasini, ya'ni miqdor jihatidan F ga teng bo'lgan $F_1=F_2=F$ va F ning ta'sir chizig'i bo'ylab yo'nalgan, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow 0$ qo'yamiz.

Ikkinchi aksiomaga asosan bu kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $\vec{F}$ va $\vec{F}_2$ kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil qiladi. Bu muvozanatlashgan kuchlar sistemasini jismdan olib tashlaymiz. U holda jismning B nuqtasiga qo'yilgan $\vec{F}_1 = \vec{F}$ kuchigina qoladi. Demak, kuch o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin ekan. O'zining ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirish mumkin bo'lgan vektor sirpanuvchi vektor deb ataladi.

3-aksioma. Jismning biror nuqtasiga turli yo'nalishda qo'yilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi shu nuqtaga qo'yilgan bo'lib, ularning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Bu aksioma bir nuqtaga qo'yilgan ikki kuchning yig'indisi, shu nuqtaga qo'yilgan ikki vektorni qo'shish qonuniyatiga asoslanadi (4-shakl). $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini R bilan belgilab, 3-aksiomaga asosan quyidagini



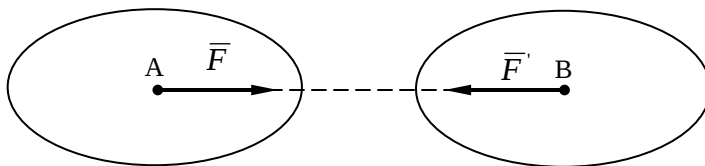
4- shakl

yo'zishimiz mumkin:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

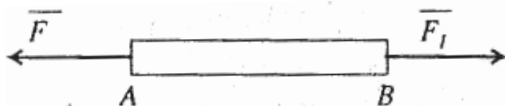
4-aksioma. Ikki jismning bir-biriga ko'rsatgan ta'sir kuchlari o'zaro teng va bir to'g'ri chiziqli bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. Bu aksioma ta'sir aks ta'sir tenglik aksiomasi deyiladi. Aksioma tabiatda bir tomonlama ta'sir mavjud emasligini ko'rsatadi. Birinchi jism ikkinchi jismga qanday kuch bilan ta'sir etsa (ta'sir), ikkinchi jism birinchi jismga shunday kuch bilan ta'sir etadi (aks ta'sir). Ta'sir va aks ta'sir kuchlarini ikkita jismga alohida-alohida qo'yilganligini osonlik bilan ko'rish mumkin. Shuning uchun bu ikki kuchni muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deb qarab bo'lmaydi.

Masalan: agar A jism B jismga $\vec{F}$ kuch bilan ta'sir qilsa, u holda bir vaqtning o'zida B jism ham A jismga shunday kuch bilan ta'sir qiladi: $\vec{F}' = -\vec{F}$ (5-shakl).



5-shakl

5-aksioma. Berilgan kuchlar ta'sirida deformatsiyalangan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi. Bu aksiomaga qotish prinsipi deyiladi. Aksiomadan ko'rinadiki, absolyut qattiq jismning muvozanat sharti zaruriydir, ammo ko'p hollarda deformatsiyalanuvchi jismning muvozanati uchun yetarli emas, haqiqatan ham, masalan AB sterjenning ikki $\vec{F}$ va $\vec{F}_1$ kuchlar ta'sirida muvozanatini ko'raylik (6-shakl). Bu kuchlar miqdor jihatidan AB to'g'ri chiziqli bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan.



6- shakl

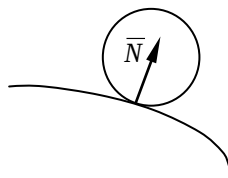
Agar sterjen absolyut qattiq bo'lsa, u holda $\vec{F}$ va $\vec{F}_1$ kuchlarning har qanday miqdorlarida sterjen muvozanatda bo'ladi. Agar sterjen absolyut qattiq bo'lmasa, kuchlarning miqdori ixtiyoriy bo'lmaydi, chunki sterjenni uzishi mumkin bo'lgan kuchlarning chegaraviy qiymatlari mavjuddir.

Jismning holati va harakatini cheklovchi sabab bog'lanish deb ataladi. Mexanikada bog'lanishlar qattiq yoki elastik jismlar vositasida bajariladi.

Bog'lanishni jismga bergan ta'sirini ekvivalent kuch bilan almashtirish mumkin, uni bog'lanish reaksiyasi deb aytiladi. Jismning bog'lanishga ta'siri bosim deb aytiladi.

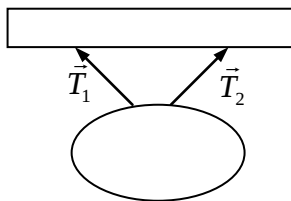
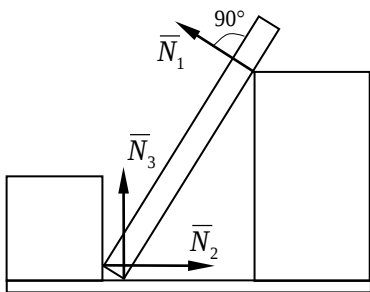
6-aksioma. Har qanday bog'lanishdagi jismni erkin jism deb qarash uchun bog'lanishlarni bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirish kerak. Bu aksioma bog'lanishdan qutulish prinsipi deyiladi. By aksiomaga asosan jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga bog'lanish reaksiya kuchlarini ham qo'shish kerak. Odatda ular noma'lum bo'lib, berilgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan topiladi. Bog'lanishdan qutulish uchun bog'lanish reaksiya kuchining yo'nalishini aniqlash ahamiyatlidir. Bog'lanish reaksiya kuchining yo'nalishini aniqlashda quyidagidan foydalanishimiz lozim. Bog'lanishdagi jismlarning harakati qaysi tomonga cheklangan bo'lsa, reaksiya kuchi shu yo'nalishga teskari yo'налgan bo'ladi. Bog'lanishning turlari va bog'lanish reaksiyalari ishqalanish mavjud bo'lmagan bir necha bog'lanishlarda reaksiyalarning yo'nalishlari qanday bo'lishini ko'ramiz.

1. Silliq sirt. Bunday sirt jismga silliq sirt bilan tegib turgan nuqtasidan sirtga o'tkazilgan normal yo'nalishi bo'ylab harakatiga halaqit beradi. Binobarin, reaksiya kuchi $\vec{N}$ silliq sirt bilan jismning tegib turgan nuqtasidan sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'налgan va shu nuqtaga qo'yilgan bo'ladi (7-shakl).

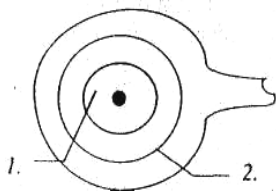


7- shakl.

Agar tegib turgan sirtlardan birortasi nuqta bo'lsa, u holda reaksiya kuchi ikkinchi sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'налgan bo'ladi (8-shakl).



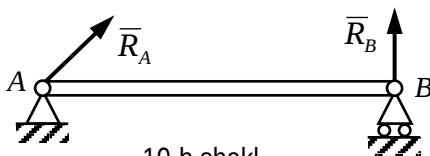
2. Ip (8-shakl) (sanjir, arqon, tros). Agar bog'lanish cho'zilmaydigan ipuani iborat bo'lsa, ip jismning osilish nuqtasidan ip bo'ylab harakatlanishiga chek qo'yadi. Ipnig taranglik kuchi ip bo'ylab osilish nuqtasiga tomon yo'naladi (9-shakl).



10-a shakl.

3. Silindrik sharnir (zoldirli g'ildirak-podshipnik).

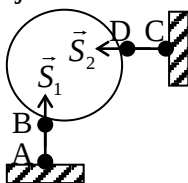
Bolt 1 va kiygizilgan vtulka 2 dan iborat qo'zg'almas silindrik sharnir jism bilan mahkam biriktirilgan vtulkaning ichki diametri bilan barobar (10-a shakl). Jism shakl tekisligiga perpendikulyar bo'lgan sharnir o'qi atrofida aylanishi mumkin. Ammo sharnir o'qiga perpendikulyar yo'nalish bo'yicha harakatlana olmaydi. Shuning uchun silindrik sharnirda reaksiya kuchi, sharnir o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotib, sharnir o'qini kesib o'tadi.



10-b shakl.

Ko'pincha texnikada mustahkam va qo'zg'aluvchan sharnirli tayanchlar uchraydi. 10-b shaklda A mustahkam sharnirli tayanchdir. Bu tayanchda R_A reaksiya kuchi sharnir o'qidan o'tib va unga perpendikulyar tekislikda yotib, ixtiyoriy yo'nalishda bo'ladi. B tayanch sharnirli qo'zg'aluvchan tayanchdir. Bunda R_B reaksiya kuchi qo'zg'aluvchan tayanch tiralib turgan tekislikning normali bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

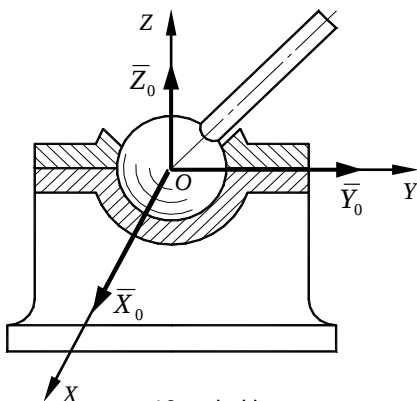
4. Sterjen. Bog'lanish uchlari sharnirlar bilan biriktirilgan AB va CD sterjenlar vositasida bajariladi.



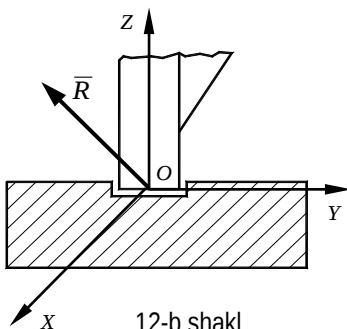
11-shakl

Sterjen og'irliklarini e'tiborga olmay, u sterjenning A va B (C va D) sharnirlariga qo'yilgan ikki kuch ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Binobarin reaksiya kuchlari sterjenlarning uchlaridagi, sharnirlardan o'tuvchi o'qlar bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (11-shakl).

5. Zoldirli sharnir va tagtovon (podpyatnik). Bu holda jism har qanday harakat qilishi mumkin, faqat sferik sharnirning markazi qo'zg'almas bo'lib qoladi (12- a shakl).



12-a shakl



12-b shakl

Xuddi shunday bog'lanishni siqib tiralib turgan podshipnik (zoldirli g'ildirak) vositasida bajarilganligini ko'rish mumkin, odatda bu tagtovon (podpyatnik) deyiladi (12-b shakl). Fotoapparatlarning shtatividagi zoldirli tutqich, inson va hayvonlarning ko'pgina suyaklarining birlashgan joylari zoldirli sharnirga misol bo'la oladi. Zoldirli (sferik) sharnir va tagtovon (podpyatnik)larda bog'lanish reaksiya kuchlarining yo'nalishi fazoda ixtiyoriy yo'nalishni olishi

mumkin.

Statika qismida quyidagi ikki masala hal qilinadi:

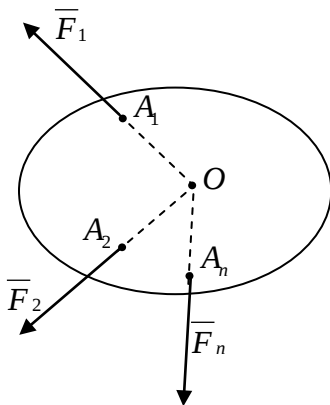
1. Jismga ta'sir qilayotgan kuchlar sistemasi unga ekvivalent bo'lgan soddaroq kuchlar sistemasi bilan almashtiriladi.
2. Kuchlar sistemasi ta'siridagi absolyut qattiq jismning muvozanat shartlarining zarur va yetarliligi tekshiriladi. Bog'lanishdagi jism bog'lanishdan xalos qilinganda erkin jism deb qaraladi. Jism unga ta'sir qilayotgan kuchlar sistemasi va reaksiya kuchlari ta'siridan muvozanatda bo'ladi. Muvozanat tenglamalaridan no'malum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Keyinchalik jismga har xil kuchlar sistemasi ta'sir etayotganda statikaning ikki asosiy masalasi yechiladi.

Jismning $A_1, A_2, \dots, A_n$ nuqtalariga $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar ta'sir etsin va ularning ta'sir chiziqlari O nuqtada kesishsin.

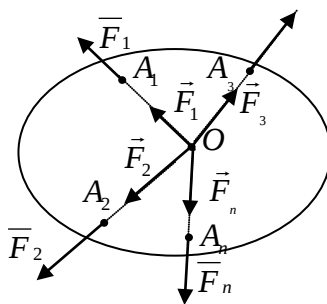
Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi kesishuvchi kuchlar sistemasi deb aytiladi (13-a shakl).

Kesishuvchi kuchlar sistemasi tekislik (fazo)dagi kesishuvchi kuchlar deyiladi, agar ularning ta'sir chiziqlari bir tekislikda joylashgan (joylashmagan) bo'lsa.

Ular ta'sir chiziqlari bo'ylab O nuqtaga ko'chirish mumkin bo'lganligi tufayli, kesishuvchi kuchlar sistemasini bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtiramiz (13- b shakl).

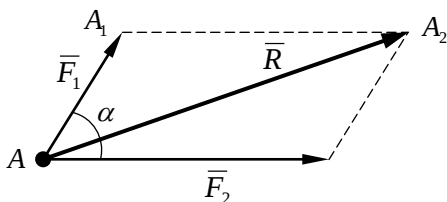


13-a shakl

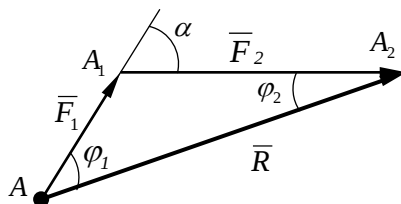


13-b shakl

Avvalambor shuni ta'kidlaymizki, parallelogramm aksiomasiga asosan, biror A nuqtaga qo'yilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi ularga qurilgan parallelogramm diagonaliga yoki parallelogrammning yarmini tashkil etuvchi kuch uchburchagining AA_2 tomoniga teng (14-b shakl). Bu holda $\vec{R}$ vektor ikki $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ vektorlarning geometrik yig'indisiga teng, ya'ni $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



14-a shakl



14-b shakl

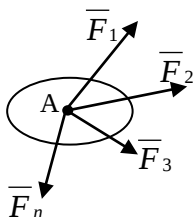
Teng ta'sir etuvchi $\vec{R}$ ni $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning yo'nalishlari bilan tashkil qilgan burchaklari φ_1 va φ_2 larni hamda uning miqdorini sinuslar va kosinuslar teoremlaridan foydalanib $\triangle AA_1A_2$ dan aniqlanadi

$$\frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1} = \frac{R}{\sin \alpha} \quad (1)$$

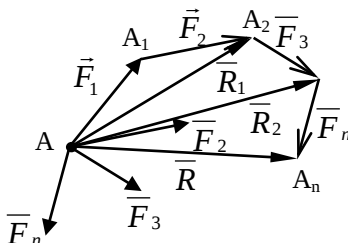
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2)$$

bu yerda, α – $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning yo'nalishlari orasidagi burchak.

Aytaylik, A nuqtada kesishuvchi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlarning sistemasi berilgan. Birinchi ikki aksiomaning natijasidan foydalanib, bu kuchlar sistemasini A nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtiramiz.



15-a shakl



15-b shakl

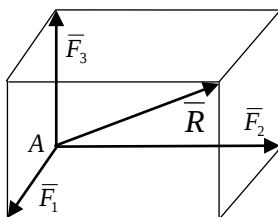
Endi quyidagini qurishni bajaramiz $\overline{F}_1$ kuchining oxiri A_1 dan $\overline{F}_2$ kuch vektoriga teng bo'lgan $\overline{A_1 A_2}$ vektorni o'tkazamiz, uning oxiridan vektor $\overline{A_2 A_3} = \overline{F}_3$, uning oxiridan vektor $\overline{A_3 A_n} = \overline{F}_n$ va hokazo. Hamma kuchlarni qo'ygandan keyin, birinchi kuchning boshi A dan oxirgi kuchining oxiri A_n ga $\overline{AA_n}$ kuch vektorini o'tkazamiz. $A_1 A_2 \dots A_n$ ko'pburchakni quramiz, u kuch ko'pburchagi deb ataladi. Kuch ko'pburchagida vektorlar oqimiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'lgan $\overline{AA_n}$ vektorga kuch ko'pburchagini yopuvchi tomon deyiladi. Kuch ko'pburchagida shtrixlangan vektor yordamida bo'lingan uchburchaklarni qaraymiz (15-b shakl). Kuch uchburchagini qurish usuliga asosan $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_1$, $\overline{AA_2}$ vektor vositasida tasvirlanadi, ya'ni $\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. $\overline{AA_3}$ vektor, $\overline{AA_2}$ va $\overline{F}_3$ kuchlarining teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_2$ ni tasvirleydi, binobarin, uchta $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ va $\overline{F}_3$ kuchlarining teng ta'sir etuvchisidir. Ya'ni, $\overline{R}_2 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ va hokazo. Hamma uchburchaklarni ko'rib chiqib, quyidagi xulosaga kelamiz. Kuch ko'pburchagini yopuvchi $\overline{AA_n}$ tomoni n-ta kuchning teng ta'sir etuvchisini tasvirleydi, ya'ni:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_1 + \dots + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_k \quad (3)$$

Shunday qilib kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi, bu kuchlar ustiga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchi tomoni sifatida geometrik aniqlanar ekan.

Demak, teng ta'sir etuvchi bu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan. Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasidan o'tadi.

Xususiyl holda bir tekislikda yotmagan uchta kesishuvchi kuchlar sistemasini ko'raylik (16-shakl). Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, kuchlar ustiga qurilgan parallelepipedning diagonalini orqali tasvirlanadi (parallelepiped). Da'voimizning haqligiga kuch ko'pburchagini qurish orqali ishonch hosil qilamiz.

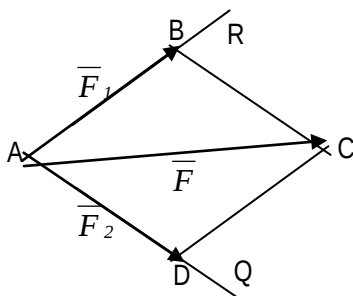


16-shakl

Kuchni kesishuvchi tashkil etuvchi kuchlar sistemasiga ajratish deb, shunday kesishuvchi kuchlar sistemasini topishga aytiladiki, uning teng ta'sir etuvchisi berilgan kuchga teng bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, shunday kuchlar sistemasini topish kerakki, bu kuchlar ustiga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchi tomoni berilgan kuchga teng bo'ladi. Bir xil yopuvchi tomonga ega bo'lgan har xil kuch ko'pburchaklarini qurish mumkin. Shuning uchun kuchni ta'sir etuvchilarga ajratish masalasini bir qimmatli hal qilish uchun, mumkin bo'lgan tashkil etuvchilar sonini cheklovchi qo'shimcha shartlar berilishi kerak. Tez-tez uchrab turadigan quyidagi ikki holni ko'ramiz:

1. Berilgan $\vec{F}$ kuchni ikkita tashkil etuvchilarga ajratish

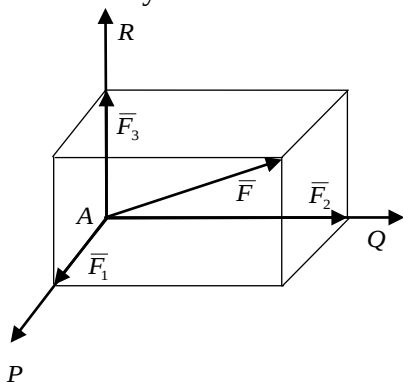
Ularning ta'sir chiziqlarining yo'nalishlari berilgan, AR va AQ $\vec{F}$ kuchi bilan bir tekislikda yotadi. (17-shakl). Buning uchun $\vec{F}$ kuchning oxiridan izlanuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Diagonali berilgan $\vec{F}$ kuchi bo'lgan ABCD parallelogramm hosil qilamiz. Uning AB va AD tomonlari izlanuvchi tashkil etuvchi $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlaridir.



17-shakl

2. Berilgan $\vec{F}$ kuchni uchta kesishuvchi tashkil etuvchilarga

ajratish Kuchlarning ta'sir chiziqlarining yo'nalishlari fazoda AP, AQ, AR bo'lgan va $\vec{F}$ kuchi bilan bir tekislikda yotmaydi (18-shakl). Buning uchun shunday parallelepiped qurish yetarliki, uning qirralari, ta'sir yo'nalishlari berilgan izlanuvchi kuchlardir. Diagonali esa berilgan kuchdir, u holda parallelepiped qonuniga asosan $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ kuchlar parallelepiped qirralariga monand bo'lib, kuchning berilgan uchiga yo'nalish bo'yicha tashkil etuvchilaridir.



18-shakl

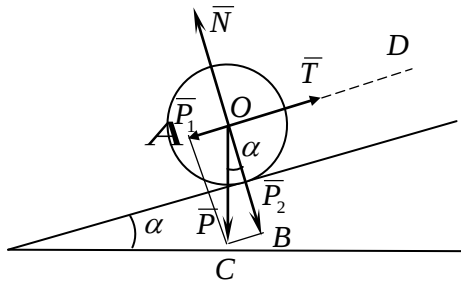
1-masala Gorizont bilan α burchak tashkil qilgan silliq qiya tekislikda og'irligi $\vec{P}$ bo'lgan jism qiya tekislikka parallel bo'lgan OD ip yordamida muvozanatda tortib turibdi (19-shakl). Ipning taranglik $\vec{T}$ kuchi va jismning qiya tekislikka bo'lgan bosimi aniqlansin.

Yechish: Berilgan $\vec{P}$ kuchni qiya tekislikka parallel va unga perpendikulyar bo'lgan yo'nalishlar bo'yicha $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. Buning uchun diagonali $\vec{P}$ kuchiga teng bo'lgan, OA va OB tomonlari tanlab olingan yo'nalishlarga parallel bo'lgan OABC parallelogrammni quramiz. To'g'ri burchakli OBC uchburchakdan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$P_1 = P \sin \alpha, \quad P_2 = P \cos \alpha$$

OD ip bo'ylab yo'nalgan $\vec{P}_1$ tashkil etuvchi ip reaksiya kuchi bilan muvozanatlashadi, ya'ni

$$T = P_1 = P \sin \alpha$$



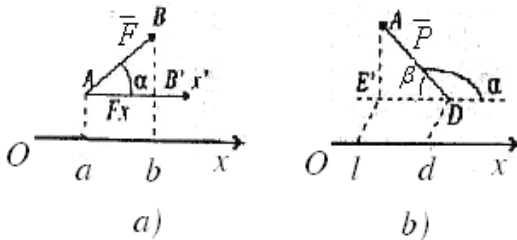
19-shakl

Qiya tekislikka perpendikulyar bo'lgan $\vec{P}_2$ tashkil etuvchi, izlanayotgan shu tekislikka bo'lgan bosimni ifodalaydi. Shuni ta'kidlaymizki, jismga qo'yilgan qiya tekislikning $\vec{N}$ reaksiya kuchi miqdor jihatidan jismning qiya tekisligiga bo'lgan bosimga teng, ya'ni:

$$N = P_2 = P \cos \alpha.$$

Shuning uchun, tayanchga bo'lgan bosimni aniqlasak, unga teng bo'lgan tayanch reaksiya kuchini aniqlagan bo'lamiz.

1. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi Kuchning boshi hamda oxirini biror o'qdagi proyeksiyalari orasiga joylashgan, tegishli ishora bilan olingan, kesma uzunligiga teng bo'lgan skalyar miqdorga kuchning o'qdagi proyeksiyasi deb ataladi (20-shakl).



20-shakl

Kuchning o'qdagi proyeksiyasi musbat deb qabul qilinadi, agar proyeksiya boshlanish nuqtasidan oxirga qarab ko'chishi o'qning musbat yo'nalishi bilan hamohang bo'lsa (20-a shakl) va manfiy, agar qarama-qarshi bo'lsa (20-b shakl). Berilgan $\vec{F}$ kuchini Ox o'qidagi proyeksiyasini F_x simvol bilan belgilab olamiz. Vektorning yo'nalishlari bir xil bo'lgan ikki parallel o'qlardagi proyeksiyalari

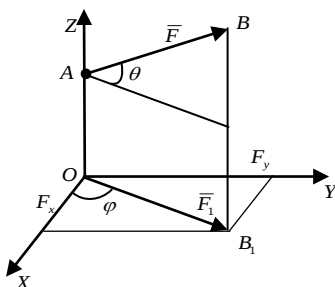
o'zaro teng bo'ladi. Agar vektor bilan o'q bir tekislikda yotmasa, undan foydalanish qulaylik tug'diradi (20-b shakl) 20-shakldan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$F_x = ab = AB' = F \cos \alpha$$

$$P_x = -dl = -DE' = -P \cos \beta = P \cos \alpha$$

Demak, kuchning o'qdagi proyeksiyasi, kuch miqdori bilan kuchning o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchak kosinusining ko'paytmasiga tengdir. O'qning musbat yo'nalishi bilan (masalan Ox) va $\vec{F}$ kuchi yo'nalishi orasidagi burchakni $(\vec{F}, \hat{ox})$ deb belgilaymiz. Burchak $(\vec{F}, \hat{ox})$ ning kosinusi, yo'naltiruvchi kosinus deb ataladi. Masalalarni yechishda kuchning proyeksiyasining absolyut qiymatini, kuch miqdorini kuchning ta'sir chizig'i bilan o'q yo'nalishi orasidagi o'tkir burchak kosinusiga ko'paytma shaklida olish tavsiya etiladi. Proyeksiyaning ishorasi to'g'ridan-to'g'ri shakldan olinadi. Berilgan $\vec{F}$ kuchning tekislikdagi proyeksiyasi deb (21-shaklda OXY tekisligi) $\vec{F}$ kuchning boshi va oxirini shu tekislikdagi proyeksiyalari orasidagi $\vec{F}_1 = \vec{OB}_1$ vektorga aytiladi.

Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi kuchning o'qdagi proyeksiyasidan farq qiladi, chunki u tekislikda miqdor va yo'nalishga ega bo'lgan vektorli miqdordir. Uning miqdori quyidagiga teng: $F_1 = F \cos \theta$



21-shakl

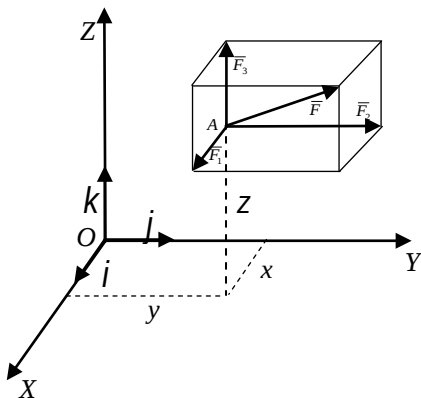
Bu yerda θ — $\vec{F}$ vektor yo'nalishi bilan uning $\vec{F}_1$ proyeksiyasining yo'nalishi orasidagi burchak. Ko'pgina hollarda kuch bilan bir tekislikda yotmagan o'qdagi proyeksiyasini aniqlash uchun avvalo kuchni o'q yotgan tekislikka proyeksiyalab, proyeksiyani shu o'qqa proyeksiyalash kerak (ikki qaytalab

proyeksiyalash usuli) masalan, shaklda ko'rsatilgan hol uchun quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} F_x &= F_1 \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi \\ F_y &= F_1 \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (4)$$

2. Kuchning miqdor va yo'nalishini koordinata o'qlardagi proyeksiyalari orqali aniqlash. Agar $\vec{F}$ kuchning to'g'ri burchakli koordinata o'qlardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsa, u holda kuchning miqdori, qirralari kuch proyeksiyalarning absolyut miqdorlariga teng bo'lgan to'g'ri burchakli paralelepipedning diagonali uzunligini hisoblash tariqasida bo'ladi, ya'ni:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (5)$$



22-shakl

Kuchning yo'nalishi yo'naltiruvchi kosinuslar orqali quyidagicha aniqlanadi.

$$\begin{aligned} \cos(\vec{F}, \hat{x}) &= \frac{F_x}{F} \\ \cos(\vec{F}, \hat{y}) &= \frac{F_y}{F} \\ \cos(\vec{F}, \hat{z}) &= \frac{F_z}{F} \end{aligned} \quad (6)$$

Ma'lumki F kuchning to'liq berilishi uchun F_x , F_y , F_z ning proyeksiyalaridan tashqari uning qo'yilish nuqtasining koordinatalarini bilish kerak. Bunday usulga analitik usul deyiladi. 22-shakldan paralelepiped qoidasini e'tiborga olib, koordinata

o'qlarining i, j, k birlik vektorlaridan foydalanib, $\vec{F}$ kuchni quyidagi yig'indi shaklida tasvirlash mumkin.

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F}_1 = F_x \cdot \vec{i}, \quad \vec{F}_2 = F_y \cdot \vec{j}, \quad \vec{F}_3 = F_z \cdot \vec{k} \quad (7)$$

bu yerda F_1, F_2, F_3 – kuchning koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilaridir. Yuqoridagi tenglama kuchning koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilarni tasvirlovchi formuladir.

3. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda aniqlash. Geometriyadan ma'lumki, vektorlar yig'indisining biror o'qdagi proyeksiyasi tashkil etuvchi vektorlarning shu o'qdagi proyeksiyalarining algebratik yig'indisiga teng bo'ladi. Shunga asosan (3)dan quyidagini topamiz:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} \quad (8)$$

Shunday qilib, kesishuvchi kuchlar sistemasinnpg to'g'ri burchakli koordinata sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} ($k=1, 2, \dots, n$) berilgan bo'lsa, u holda teng ta'sir etuvchining proyeksiyalari R_x, R_y, R_z (8) formula yordamida aniqlanadi. Keyin (5) va (6) formulalar yordamida teng ta'sir etuvchining miqdori, yo'nalishlari aniqlanadi.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos(\vec{R}, \vec{ox}) = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos(\vec{R}, \vec{oy}) = \frac{R_y}{R} \quad (9)$$

$$\cos(\vec{R}, \vec{oz}) = \frac{R_z}{R}$$

Kesishuvchi kuchlar sistemasiga qo'yilgan shart bajarilsa va ularning teng ta'sir etuvchisi $R=0$ bo'lsa, u holda bu shartga kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat sharti deyiladi.

1. Muvozanatning geometrik sharti. Ma'lumki, kesishuvchi kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagi yopiq bo'lganda, faqat shu holdagina $\vec{R} = 0$ bo'ladi. Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, kuch ko'pburchagining yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

2. Muvozanatning analitik sharti. Agar $R=0$ bo'lsa, u holda $R_x=0, R_y=0, R_z=0$ u holda (8)ga asosan quyidagini olamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \quad (10)$$

Teskarisi, agar (10) shart bajarilsa, u holda $R=0$ bo'ladi. Binobarin kesishuvchi kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, ularning uchta koordinata o'qlardagi proyeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Agar kesishuvchi kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo'lsa, u holda Ox va Oy o'qlarini shu tekislikda olib, quyidagi muvozanat shartini yozamiz.

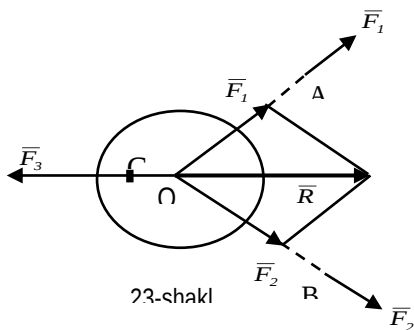
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad (11)$$

Agar (10) va (11) shartlarda noma'lum reaksiya kuchlari qatnasha va ularni aniqlashni taqozo qilsa, u holda bu shartlar muvozanat tengdamalari deb ataladi.

Teorema: Bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan uchta kuch ta'siridan jism muvozanatda bo'lsa, bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi

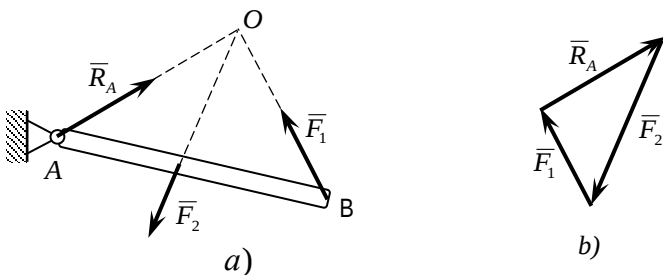
Isbot: Kuchlar sistemasi bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmaganligi uchun, ulardan ixtiyoriy ikkitasining, masalan, $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning ta'sir chiziqlari biror O nuqtada kesishadi. $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab O nuqtaga ko'chiramiz va parallelogramm qoidasiga asosan bitta O nuqtaga qo'yilgan $\vec{R}$ kuch bilan almashtiramiz. Natijada ikkita o'zaro muvozanatlashuvchi $\vec{F}_3$ va $\vec{R}$ kuchlarni olamiz. Statikaning birinchi aksiomasiga asosan $\vec{F}_3$ va $\vec{R}$ kuchlari bitta umumiy ta'sir chiziqqa ega. Demak, kuchlar bitta nuqtada kesishadi.

Odatda isbot qilingan uchta bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan kuchlarning muvozanat shartlarining zaruriyligidir, ammo bu shartlar yetarli emas, chunki uchta qandaydir kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan bo'lsa, ularni muvozanatlashuvchi deb xulosa chiqarib bo'lmaydi.



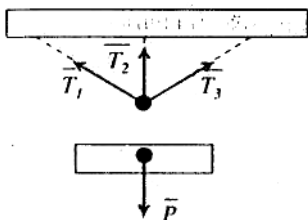
23-shakl

Uch kuch teoremasidan foydalanib, noma'lum reaksiya kuchlarining yo'nalishini avvaldan aniqlash mumkin. Aytaylik, masalan, AB sterjen (24-shakl) uchta kuch ta'siridan muvozanatda. Yo'nalishi noma'lum bo'lgan $\bar{R}_A$ reaksiya kuchining ta'sir chizig'i uch kuch muvozanati haqidagi teoreмага asosan $\bar{F}_1$ va $\bar{F}_2$ kuchlar ta'sir chiziqlari kesishgan O nuqtadan o'tadi. $\bar{R}_A$ reaksiya kuchining yo'nalishi esa, yopiq kuch uchburchagini qurish natijasida aniqlanadi, ya'ni kuch uchburchagida vektorlar oqimi bir xil yo'nalishda bo'ladi.



24-shakl

Bog'lanishdagi qattiq jismlarning muvozanatiga oid ko'pgina masalalar berilgan aktiv kuchlar ta'siridan hosil bo'ladigan bog'lanish reaksiya kuchlarini miqdor va yo'nalishlarini aniqlashdan iboratdir. Shuni ta'kidlaymizki, no'malumlar soni bog'lanishlarning turi va soniga bog'liq bo'ladi. No'malumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan oshmaydigan masalalarga statik aniq masalar deyiladi. Yuqoridagi mulohazamiz jismlar sistemasi uchun ham o'rinli bo'lsa, u holda sistema statik aniq sistema deb ataladi. Faqat



25-shakl

yuqoridagi masalalarni statikaning metodlari asosida hal qilish mumkin.

No'malumlar soni ular ishtirok etgan muvozanat tenglamalari sonidan ko'p bo'lsa, bunday masalalar statik aniqmas masalalar deb ataladi. Shu mulohazalar o'rinli bo'lgan sistema statik aniqmas sistemalar deb ataladi. Bunday masalalarni yechishda jismlarning deformatsiyalarini hisobga olish kerak bo'ladi va ular materiallar qarshiligi fanida yoritiladi. Og'irligi $\bar{P}$ bo'lgan yuk ta'siridan bir tekislikda yotuvchi uchta iplarda hosil bo'lgan $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ va $\bar{T}_3$ taranglik kuchlarini aniqlash masalasi statik aniqmas masalalarga misol bo'la oladi (25-shakl). Bu masalada uchta no'malumni aniqlash uchun tekislikda kesishuvchi kuchlar uchun ikkita muvozanat tengmalarini tuzish mumkin (11).

Takrorlash uchun savollar

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi qanday kuchlardan tashkil topgan?
2. Kuch ko'pburchagi deb qanday ko'pburchakka aytiladi?
3. Kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi geometrik usulda qanday aniqlanadi?
4. Kuchni qanday tashkil etuvchilarga ajratish mumkin?
5. Kuchning o'qdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
6. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday hisoblanadi va u qanday kattalik?
7. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda qanday aniqlanadi?
8. Kesishuvchi kuchlar sistemasi geometrik muvozanat sharti qanday?
9. Kesishuvchi kuchlar sistemasi analitik muvozanat sharti qanday?
10. Uch kuch muvozanati haqidagi teoremani isbotlang.

1-Amaliyot: Kuchlarning proeksiyalarini xioblash

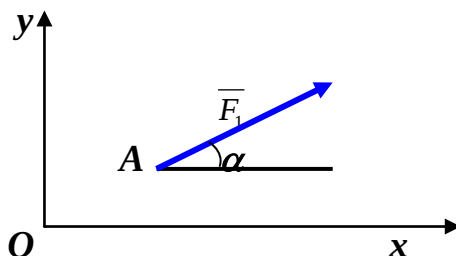
1-masala. Berilgan: $F_0=10$ (H) ; $\alpha_0=30^0$ tekislikda joylashgan F_0 kuchning x va y o'qlaridagi proeksiyalari topilsin.

Berilgan:

$F_0=10$ (H) ;

$\alpha_0=30^0$

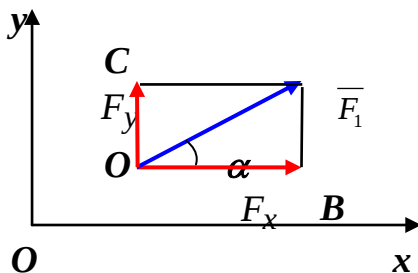
Topish kerak: F_x, F_y ;



1.1-rasm.

Yechish

Buning uchun A nuqtadan « x » va « y » o'qlariga nisbatan parallel chiziqlar o'tkazamiz. U chiziqlarni F kuchning uchidan tushurilgan perpendikulyar chiziqlar bilan chegaralaymiz (1.1 – 1.2 –rasmlar). Xosil bo'lgan AB kesma F kuchning x o'qidagi proeksiyasini, AC kesmaga esa F kuchning y o'qidagi proeksiyasini ifodalaydi, ya'ni



1.2-rasm.

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,86 = 8,6; (H)$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha = 10 \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5; (H)$$

Javob: $F_x = 8,6; (H)$; $F_y = 5; (H)$.

2-masala. Tekislikda joylashgan F_1 , F_2 va F_3 kuchlarning x va y o'qdagi proeksiyalari xisoblansin (2.1-rasm).

Berilgan:

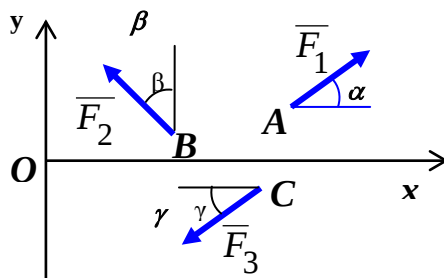
$$F_1 = 20 (H) ; \alpha = 60^\circ ;$$

$$F_2 = 30 (H) ; \beta = 30^\circ ;$$

$$F_3 = 40 (H) ; \gamma = 45^\circ ;$$

Topish kerak: F_{1x} ; F_{1y} ;

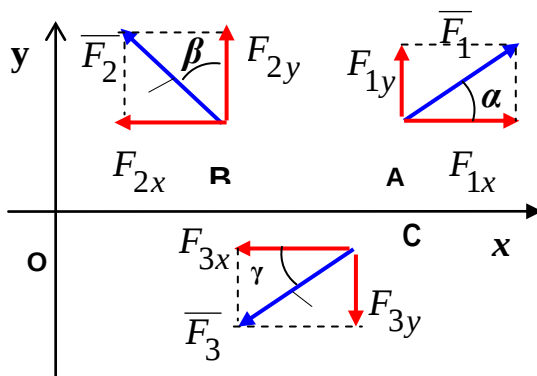
F_{2x} ; F_{2y} ; F_{3x} ; F_{3y}



2.1-rasm.

Yechish:

Buning uchun F_1 , F_2 va F_3 kuchlarning x va y o'qlardagi proeksiyalarini o'sha o'qlarga mos parallel kesmalar yordamida ko'rsatamiz. Bular F_{1x} , F_{1y} , F_{2x} , F_{2y} , F_{3x} , F_{3y}



2.2-rasm.

proeksiyalardir (2.1-rasm). Ularning qiymatlari quyidagicha topiladi:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha = 20 \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10; (H)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha = 20 \cdot \sin 60^\circ = 20 \cdot 0,86 = 17,2; (H)$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin \beta = 30 \cdot \sin 30^\circ = 30 \cdot 0,5 = 15; (H)$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \cos \beta = 30 \cdot \cos 30^\circ = 30 \cdot 0,86 = 25,8; (H)$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \gamma = 40 \cdot \cos 45^\circ = 40 \cdot 0,71 = 28,4; (H)$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \gamma = 40 \cdot \sin 45^\circ = 40 \cdot 0,71 = 28,4; (H)$$

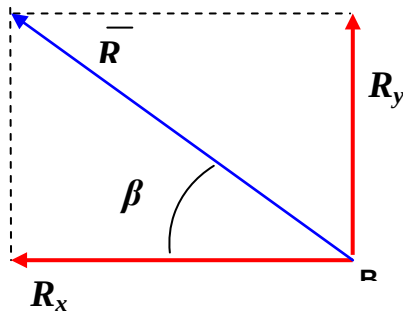
Javob: $F_{1x} = 10; (H); F_{1y} = 17,2; (H); F_{2x} = 15; (H);$

$F_{2y} = 25,8; (H); F_{3x} = 28,4; (H); F_{3y} = 28,4; (H).$

3-masala. Yuqorida berilgan F_1, F_2 va F_3 kuchlarning teng ta'sir etuvchisi (TTE) topilsin.

Yechish:

Buning uchun mazkur kuchlarning x va y o'qlardagi proeksiyalarini ishoralarini hisobga olgan holda yig'amiz, ya'ni



3.1-rasm.

$$R_x = \sum F_{2x} = F_{1x} - F_{2x} - F_{3x} = 10 - 15 - 28,4 = -33,4; (H)$$

$$R_y = \sum F_{2y} = F_{1y} - F_{2y} - F_{3y} = 17,2 + 25,8 - 28,4 = 14,6; (H)$$

Bu erda R_x va R_y kattaliklar TTE ning x va y o'qlardagi

proeksiyalari. TTE ning xaqiqiy qiymatini topish uchun Pifagor teoremasidan foydalanamiz, ya'ni

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-33,4)^2 + 14,6^2} = 36,5; (H)$$

TTE ning yo'nalishi quyidagicha topiladi.

$$\varphi = \arccos\left(\frac{33,4}{36,5}\right) = \arccos(0,915) \approx 26^\circ$$

Demak, tasvirda quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi (3.1-rasm). **Javob:** $R = 36,5; (H)$, $\varphi \approx 26^\circ$.

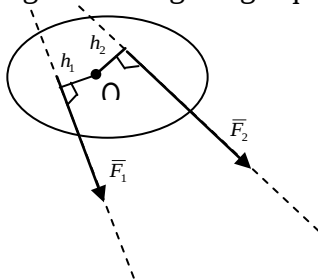
2-ma'ruza: Kuch momrnti (4 soat)

Reja:

1. Nuqtaga nisbatan kuch momenti
2. Teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasi
3. Kuchning o'qqa nisbatan momenti
4. Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasidagi munosabat

Bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga tekislikdagi kuchlar sistemasi deb aytiladi.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ko'rilayotganda, kuchni jismga beradigan burish qobiliyatini xarakterlovchi, ya'ni nuqtaga nisbatan kuch momenti tushunchasini kiritish zarurdir. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan ikki kuch $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ jismga qo'yilgan (30-shakl). Jismning biror O nuqtasi mahkamlangan deb tasavvur qilamiz, u holda, $\vec{F}_1$ kuch jismni O nuqta atrofida soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intiladi, $\vec{F}_2$ kuch esa soat mili yo'nalishi bo'yicha, u holda buralish hodisasi kuch miqdoriga va O nuqtadan kuchning ta'sir chizig'igacha bo'lgan masofaga bog'liq bo'ladi.



1-shakl

Ta'rif: Berilgan $\vec{F}$ kuchdan O nuqtaga nisbatan olingan kuch momenti deb, kuch miqdorini O nuqtadan kuchning ta'sir chizig'igacha tushirilgan perpendikulyar masofaga ko'paytmaning tegishli ishora bilan olingan miqdoriga aytiladi. Agar kuch jismni O nuqta atrofida soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda burishga intilsa, u holda moment musbat deb qabul qilinadi (2-a shakl). Agar kuch jismni O nuqta artrofida soat mili yo'nalishi

bo'yicha burishga intilsa, u holda moment manfiy deb qabul qilinadi (2-b shakl).

Berilgan $\vec{F}$ kuchdan O nuqtaga nisbatan olingan kuch momentini quyidagi ifoda bilan belgilaymiz $m_0(\vec{F})$. U holda

$$m_0(\vec{F}) = \pm F h \quad (1)$$

h ga $\vec{F}$ kuchning O nuqtasiga nisbatan yelkasi deb aytiladi. O nuqta moment markazi deb ataladi.

Kuch momentining xususiyatlari:

1. Kuchni ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirish bilan nuqtaga nisbatan kuch momenti o'zgarmaydi.

2. Agar kuchning ta'sir chizig'i O nuqtadan o'tsa, berilgan $\vec{F}$ kuchining O nuqtaga nisbatan kuch momenti nolga teng bo'ladi (2-d shakl).

3. Berilgan $\vec{F}$ kuchidan O nuqtaga nisbatan kuch momenti $\triangle OAB$ yuzining ikkilanganiga teng bo'ladi (2-e shakl). Ya'ni,

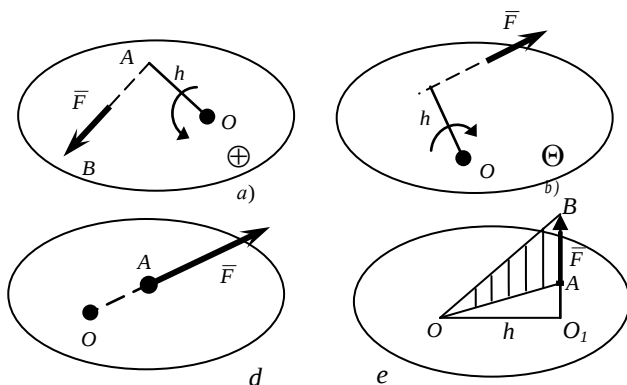
$$m_0(\vec{F}) = 2S_{\triangle OAB}. \quad (2)$$

Haqiqatan ham,

$$m_0(\vec{F}) = F h$$

Ikkinchi tomondan,

$$F h = 2S_{\triangle OAB}.$$



2-shakl

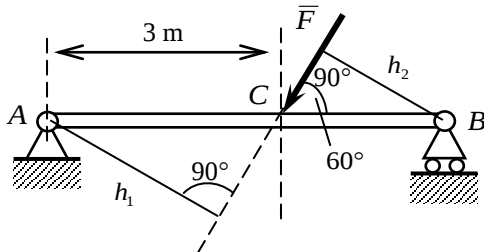
Texnik birlik sistemasida kuch momenti birligi uchun 1 N·m qabul qilingan.

5-masala Berilgan F ($F=20$ N) kuchdan A va B nuqtalarga nisbatan kuch momenti hisoblansin (3-shakl). $AB = 5$ m.

$$m_A(\bar{F}) = -Fh_1 = -F \cdot AC \sin 60^\circ$$

$$m_A(\bar{F}) = -20 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -30\sqrt{3} \approx -51,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$m_B(\bar{F}) = Fh_2 = F \cdot BC \sin 60^\circ.$$



3-shakl

$$m_B(\bar{F}) = 20 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \approx 34,6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Teorema: Tekislikda kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining biror nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlardan shu nuqtaga nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi.

Isbot: Ta'sir chiziqlari A nuqtada kesishuvchi tekislikdagi $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ kuchlar sistemasi berilgan (4-shakl). Bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\bar{R}$. Ixtiyoriy O nuqtadan OA ga perpendikulyar qilib Ox o'qini o'tkazamiz. Hamma kuchlardan O nuqtaga nisbatan kuch momentlarining ifodalarini (2) formuladan foydalanib tuzamiz.

$$m_0(\bar{F}) = OA \cdot OB_1 \quad \text{yoki}$$

$$m_0(\bar{F}_1) = OA \cdot F_{1x}$$

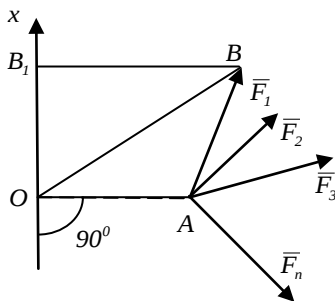
binobarin

$$m_0(\bar{F}_1) = OA \cdot F_{1x}$$

$$m_0(\bar{F}_2) = OA \cdot F_{2x}$$

.....

$$m_0(\bar{F}_n) = OA \cdot F_{nx}$$



4-shakl

Bu ifodalarning chap va o'ng tomonlarini o'zaro qo'shib quyidagini olamiz:

$$m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \dots + m_0(\bar{F}_n) = OA \cdot (F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}).$$

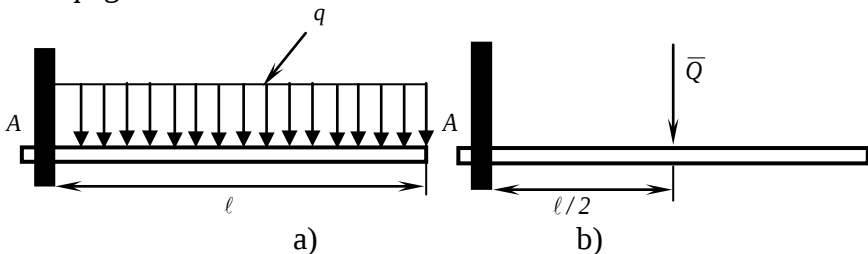
Tenglikning o'ng tomonidagi ifodalar teng ta'sir etuvchining biror o'qdagi proyeksiyasiga asosan R_x ni beradi. Natijada quyidagini olamiz:

$$OA \cdot R_x = m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \dots + m_0(\bar{F}_n) \quad (3)$$

$$\text{yoki} \quad m_0(\bar{R}) = \sum m_0(\bar{F}_n) \quad (4)$$

(3) formula Varin'on teoremasini ifodalaydi.

6-masala Intensivligi q N/m bo'lib, tekis yoyilgan yukning A nuqtaga nisbatan momenti hisoblansin.



5-shakl

Yoyilgan kuchni to'plangan Q kuchi (5-b shakl) $Q = q \cdot l$ bilan almashtiramiz. U holda Varin'on teoremasiga asosan quyidagini olamiz.

$$M_A = -Q \cdot \frac{l}{2} = -\frac{1}{2}ql^2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

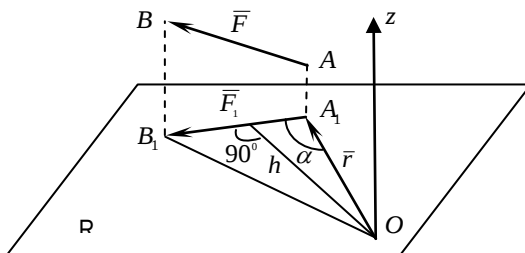
Qattiq jismning biror A nuqtasiga $\bar{F}$ kuchi qo'yilgan. Biror OZ o'qini o'tkazib, unga perpendikulyar bo'lgan R tekislikni olamiz.

O'q bilan tekislikning kesishgan nuqtasini O bilan belgilaymiz. $\vec{F}$ kuchini R tekislikka proyeksiyalaymiz va uni $\vec{F}_1$ deb belgilaymiz ya'ni $\vec{F}_1 = \vec{F}_{pro}$.

Ta'rif. $\vec{F}$ kuchining OZ o'qiga nisbatan kuch momenti deb, $\vec{F}$ kuchning o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi $\vec{F}_1$ proyeksiyasining o'q bilan tekislikning kesishgan O nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga aytiladi ya'ni:

$$m_z(F) = m_0(\vec{F}_1) = \pm F_1 \cdot h \quad (5)$$

O'qqa nisbatan kuch momenti musbat deb qabul qilinadi, agar OZ o'qining oxiridan qaralganda $\vec{F}_1$ proyeksiya tekislikni OZ o'qi atrofida



6-shakl

soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa. O'qqa nisbatan kuch momentining sonli qiymati OA_1B_1 uchburchak yuzasining ikkilanganligiga teng, ya'ni

$$m_z(\vec{F}) = 2S_{\Delta OA_1B_1} \quad (6)$$

O'qqa nisbatan kuch momenti quyidagi ikki holda nolga teng bo'ladi:

1. Agar $F_1=0$, ya'ni kuchning ta'sir chizig'i o'qqa parallel bo'lsa
2. Agar $h=0$, ya'ni kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa

Demak, agar kuch bilan o'q bir tekislikda yotsa, bu o'qqa nisbatan kuch momenti nolga teng bo'lar ekan.

masala Tomonlari a ga teng bo'lgan kubga qo'yilgan F_1, F_2, F_3 (7-shakl) kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan kuch momentlari hisoblansin.

F_1 kuchi OYZ tekisligida yotadi, shuning uchun

$$m_x(\bar{F}_1) = -F_1 a$$

$$m_y(\bar{F}_1) = 0$$

$$m_z(\bar{F}_1) = 0$$

F_2 kuchi OZ o'qiga parallel, shuning uchun, bu kuchning Z o'qiga nisbatan momenti nolga teng. Demak,

$$m_x(\bar{F}_2) = F_2 a$$

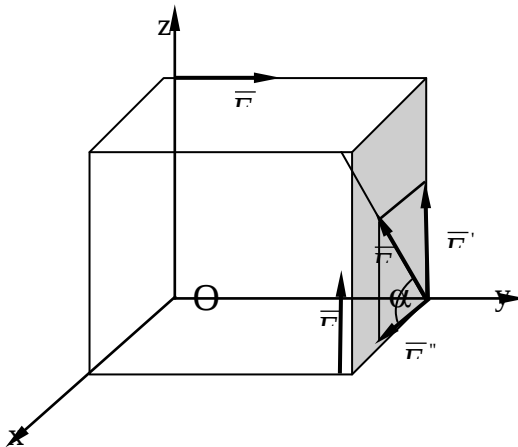
$$m_y(\bar{F}_2) = -F_2 a$$

$$m_z(\bar{F}_2) = 0$$

$\bar{F}_3$ kuchi OY o'qini kesib o'tadi, shuning uchun bu o'qqa nisbatan kuch momenti nolga teng bo'ladi $\bar{F}_3$ kuchini YOZ tekisligidagi $\bar{F}_3'$ proyeksiyasining miqdori quyidagiga teng:

$$F_3' = F_3 \sin \alpha = F_3 \cdot \sin 45^\circ = F_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad F_3'' = F_3 \cdot \cos \alpha = F_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

u holda



7-shakl

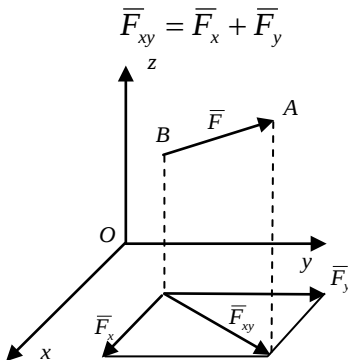
$$m_x(\bar{F}_3) = F_3' a = F_3 \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad m_z(\bar{F}_3) = -F_3'' a = -F_3 \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari. $\bar{F}$ -berilgan kuch, $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ -uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, x, y, z-ning qo'yilgan nuqtasi koordinatalari. $\bar{F}$ kuchini koordinata o'qlariga nisbatan olingan momentlarining ifodalarini tuzamiz. $\bar{F}$ kuchini XOY tekisligiga

proyeksiyalab, uni $\bar{F}_{xy}$ deb belgilaymiz (8-shakl). Ta'rifga asosan:

$$m_z(\bar{F}_3) = m_0(\bar{F}_{xy}) \quad (7)$$

$\bar{F}_{xy}$ kuchini OX va OY koordinata o'qlari bo'ylab $\bar{F}_x$ va $\bar{F}_y$ tashkil etuvchilarga ajratamiz:



8-shakl

Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasiga asosan:

$$m_0(\bar{F}_{xy}) = m_0(\bar{F}_x) + m_0(\bar{F}_y) \quad \text{yoki} \quad m_0(\bar{F}_{xy}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

u holda quyidagini olamiz:

$$m_z(\bar{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_x$$

Xuddi shunday asnoda kuchni OX va OY o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasini olishimiz mumkin, natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

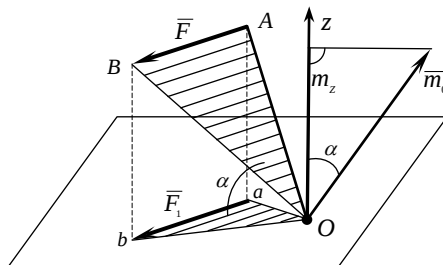
$$\left. \begin{aligned} m_z(\bar{F}) &= x \cdot F_y - y \cdot F_x \\ m_y(\bar{F}) &= z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ m_x(\bar{F}) &= x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) tenglik $\bar{F}$ kuchining koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari deyiladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti bilan shu nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan momentlari orasidagi munosabatlarini

o'rnatamiz. $\vec{F}$ berilgan kuch, $\vec{F}_1$ kuchni OZ o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi proyeksiyasi. $\vec{F}$ kuchini O nuqtaga nisbatan kuch momenti OAB uchburchak yuzining ikkilanganiga teng, bu kuchning OZ o'qiga nisbatan momenti esa OAB uchburchak yuzining ikkilanganiga teng ya'ni:

$$m_0(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}, \quad m_z(\vec{F}) = 2S_{\Delta oab}$$



9-shakl

Uchburchak oab, OAB uchburchakning OZ o'qiga perpendikulyar bo'lgan P tekislikdagi proyeksiyasidir. Shuning uchun

$$S_{\Delta oab} = S_{\Delta OAB} \cdot \cos \alpha$$

bu yerda α - OAB va oab uchburchaklar orasidagi burchakdir. Bu holda

$$m_z(\vec{F}) = 2 \cdot S_{\Delta OAB} \cdot \cos \alpha \text{ yoki } m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F}) \cdot \cos \alpha \quad (9)$$

$\vec{m}_0$ -vektor uchburchak yuzi $S_{\Delta OAB}$ ga perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi (76-shakl). Ma'lumki, tekisliklar orasidagi burchak ularga o'tkazilgan perpendikulyarlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Shuning uchun $\vec{m}_0$ va OZ o'qi orasidagi burchak α ga teng bo'ladi. Shuning uchun $\vec{m}_0 \cos \alpha$ miqdor $\vec{m}_0$ vektorning OZ o'qidagi proyeksiyasidir.

Shunday qilib, o'qqa nisbatan kuch momenti, kuchning shu o'qda yotuvchi nuqtaga nisbatan moment $\vec{m}_0$ -vektorining shu o'qdagi proyeksiyasiga teng bo'ladi. Agar kuch o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotsa, u holda $\cos \alpha = \pm 1$ bo'ladi va

$$m_z(\vec{F}) = m_0(\vec{F})$$

bo'ladi.

2-Amaliyot: Tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasiga oid masalalar yechish

4-masala: Og'irligi 100 H bo'lgan sharcha AB cho'zilmas iplar yordamida shipga osib quyilgan. Iplardagi zo'riqishlar topilsin ($\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$).

Berilgan:

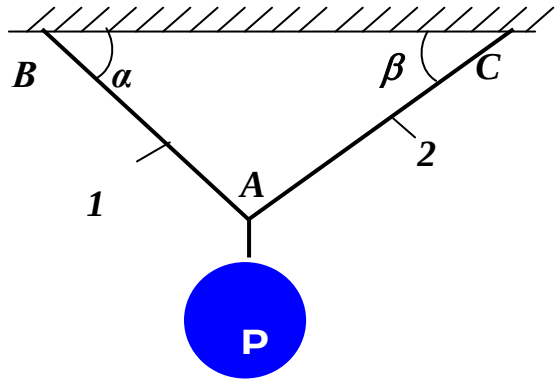
$$P_0=100\text{H}$$

$$\alpha=30^\circ;$$

$$\beta=45^\circ;$$

Topish kerak:

$$T_1; T_2$$

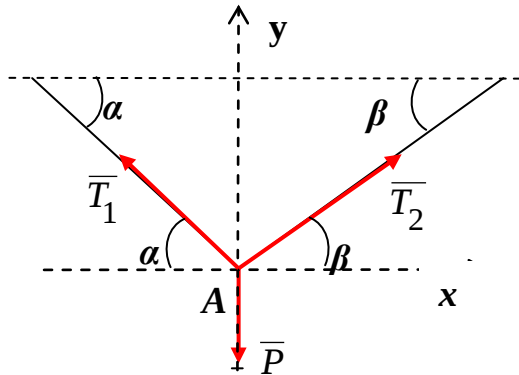


4.1-rasm.

Yechish:

1. Kuchlar

sistemi uchun xisob-sxema chizamiz. Buning uchun statikaning 5- (bog'lanishdan bo'shatish) aksiomasiga asosan iplarni uzib ta'sir etuvchi kuchlarni qo'yamiz va ularni xy o'qlari bilan



4.2-rasm.

bog'laymiz. T_1 va T_2 zo'rikish kuchlarni mos ravishda AB va AC

iplar bo'ycha yo'naltiramiz. P sharchani $\overline{P}$ kuch bilan almashtiramiz (4.2-rasm).

2. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$\sum F_{ix} = 0$; - barcha kuchlarning x o'qdagi proeksiyalarining yig'indisi nolga teng:

$\sum F_{iy} = 0$; - barcha kuchlarning y o'qdagi proeksiyalarining yig'indisi nolga teng:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -T_1 \cdot \cos \alpha + T_2 \cdot \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T_1 \cdot \sin \alpha + T_2 \cdot \sin \beta - P = 0 \quad (2)$$

3. Tenglamalarni echamiz. Buning uchun (1)- tenglamadan T_1 ni T_2 orqali ifodalab, (2) tenglamaga qo'yamiz:

$$(1) \rightarrow T_1 = \frac{T_2 \cdot \cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$(2) \rightarrow \frac{T_2 \cdot \cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha + T_2 \cdot \sin \beta - P = 0 \quad \text{yoki}$$

$$T_2 \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha + \sin \beta \right) = P \quad \text{yoki}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= P / \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha + \sin \beta \right) = 100 / \left(\frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \sin 30^\circ + \sin 45^\circ \right) = \\ &= 100 / \left(\frac{0,71}{0,86} \cdot 0,5 + 0,71 \right) = \frac{100}{1,12} \approx 89,3; (H) \end{aligned}$$

$$T_1 = \frac{T_2 \cdot \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{89,3 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} \approx 73,3; (H)$$

Javob: $T_1=73,3(H)$; $T_2=89,3(H)$.

5-masala: Og'irligi 200 kG bo'lgan yuk AB va AC sterjenlar yordamida devorga ilib qo'yilgan. Sterjenlardagi zo'riqish kuchlari topilsin. ($\alpha=60^\circ$; $\beta=30^\circ$).

Berilgan:

$$Q=2000 (H)$$

$$=200 (kG);$$

$$\alpha=60^\circ; \beta=30^\circ;$$

Topish kerak: T_1 ; T_2

Yechish:

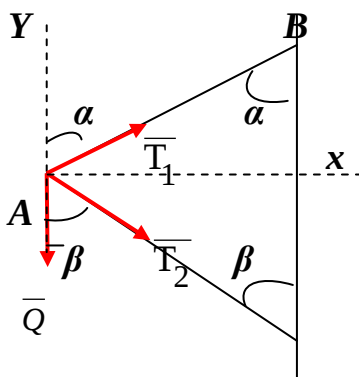
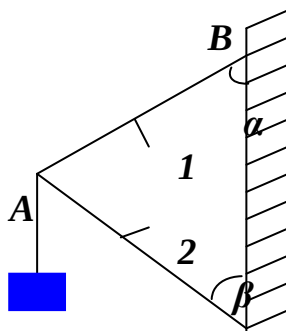
1. Kuchlar sistemasi

uchun xisob-sxema chizamiz. Buning uchun statikaning 5 - (bog'la-nishdan bo'shatish) aksiomasiga asosan iplarni uzib ta'sir etuvchi kuchlarni qo'yamiz va ularni xy koordinata o'qlariga joylashtiramiz (5.2-rasm).

2. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad T_1 \cdot \sin \alpha + T_2 \cdot \sin \beta = 0 \quad (1)$$

5.1-



5.2-rasm

$$\sum F_{iy} = 0; \quad T_1 \cdot \cos \alpha - T_2 \cdot \cos \beta - Q = 0 ; (2)$$

3. Tenglamalarni echamiz. Buning uchun (1) - tenglamadan T_1 ni T_2 orqali ifodalab, (2) tenglamaga qo'yamiz:

$$(1) \rightarrow T_1 = -\frac{T_2 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$(2) \rightarrow -\frac{T_2 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha - T_2 \cdot \cos \beta - Q = 0 \quad \text{yoki}$$

$$-T_2 \cdot \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha + \cos \beta \right) = Q$$

$$T_2 = -Q / \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha + \cos \beta \right) = -200 / \left(\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \right) =$$

$$= -200 / \left(\frac{0,5}{0,86} \cdot 0,5 + 0,86 \right) = -\frac{200}{1,15} \approx -174; (KG)$$

$$T_1 = -\frac{T_2 \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = -\frac{-174 \cdot 0,5}{0,86} = 101; (kG)$$

Javob: $T_1=101(kG)$; $T_2=-174(kG)$ - aslida kuchning vektori sxemadagiga nisbatan teskari yo'nalgan.

6-masala. Og'irligi 500 kG bo'lgan shar devorga AB sim yordamida osib qo'yilgan. AB chiziqning davomi sharning o'rtasidan o'tadi. AB simdagi zo'riqish va devorga ko'rsatilayotgan bosim kuchi topilsin. ($\alpha=30^\circ$).

Berilgan:

$$P=500 \text{ (kG)};$$

$$\alpha=30^\circ;$$

Topish kerak: T, N

Yechish:

1. Kuchlar sistemasi uchun xisob-sxema chizamiz.

Bog'lanishlarni olib o'rniga kuchlarni qo'yamiz. Bunda T zo'rqiqlash kuchi AB sim bo'ylab yo'naladi, bosim kuchi esa devor tekisligiga

sharning markazi «C» bo'ladi. Og'irlik

nuqtadan pastga

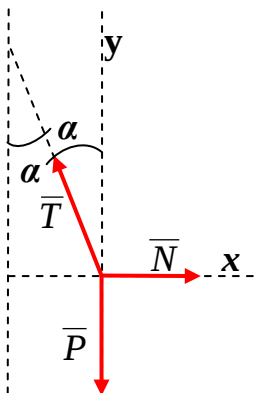
Kuchlarni xy o'qlarga

boshi uchun «C»

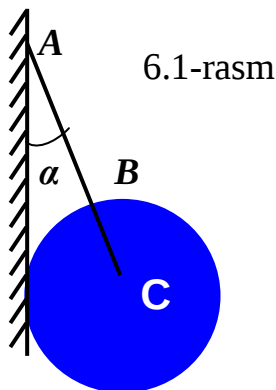
kuchlarni statikaning

shu nuqtaga

rasm).



6.2-rasm



6.1-rasm

perpendikulyar bo'lib

nuqtaga yo'nalgan

kuchi P ni «C»

yo'naltiramiz.

joylashtiramiz. o'qlar

nuqtani tanlab, barcha

2-aksiomasiga asosan

ko'chiramiz (6.2-

2. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{ix}=0; \quad N - T \cdot \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy}=0; \quad T \bullet \cos \alpha - P = 0 \quad (2)$$

3. Tenglamalarni echamiz. YYechishni (2) - tenglamadan boshlagan ma'qul. Chunki bu tenglamada noma'lumlar soni bitta.

$$(2) \rightarrow \quad T \bullet \cos \alpha = P \quad \text{yoki}$$

$$T = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{500}{\cos 30^{\circ}} = \frac{500}{0,86} = 582,4; (kG)$$

Bosim kuchini esa (1) - tenglamadan topamiz.

$$(1) \rightarrow$$

$$N = T \bullet \sin \alpha = 581,4 \bullet \sin 30^{\circ} = 581,4 \bullet 0,5 = 290; (kG)$$

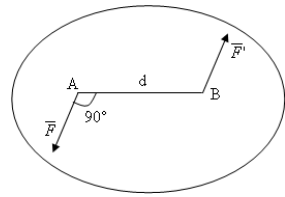
Javob: $T=581,4 \kappa G$; $N=290,7 \kappa G$

3-Maruza: Juft kuchlar nazariyasi (4 soat)

Reja:

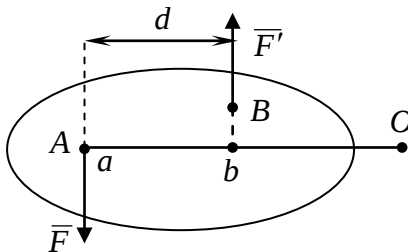
1. Juft kuch haqida tushuncha. Juft kuch momenti.
2. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish
3. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari
4. Jismlar sistemasining muvozanati
5. Fazodagi juft kuchlar

Miqdorlari teng, o'zaro ma'lum oraliqda parallel va qarama-qarshi yo'nalgan ikki kuchdan iborat sistema juft kuch deb ataladi (1-shakl). Juft kuch yotgan tekislik juftning ta'sir tekisligi deb ataladi. Juft kuch tashkil etuvchi kuchlarning ta'sir kuch chiziqlari orasidagi eng qisqa masofa d juft yelkasi deb



1-shakl

ataladi. Juft kuch jismni juft tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida burishga intiladi. Juft kuchni biror kuch bilan almashtirib bo'lmaydi, binobarin, juft kuch teng ta'sir etuvchiga ega bo'lmaydi. Juft kuch muvozanatlashishi uchun kuchning qarama-qarshi yo'nalishda buradigan juft qo'yish kerak. Juft kuch jismni juft tekisligida aylantirishga intiladi. Juftning jismga ta'siri uning momenti bilan baholanadi. Juft kuch tashkil etuvchi kuchlardan juft kuch tekisligida yotuvchi biror O markazga nisbatan olingan momentlarining yig'indisini hisoblaymiz (2-shakl).

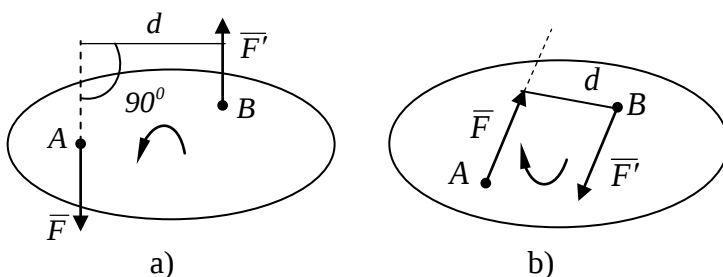


2-shakl

$$m_0(\vec{F}) + m_0(\vec{F}') = F \cdot oa - F' \cdot ob$$

$$F = F' \text{ va } oa - ob = d \text{ bo'lganligi uchun } \vec{m}_0(\vec{F}) + \vec{m}_0(\vec{F}') = F \cdot d$$

Bu yerdan ko'rinadiki, juft tashkil etuvchi kuchlarning momentlarining yig'indisi moment markaziga bog'liq bo'lmay har doim juft tashkil etuvchi kuchlarning birining miqdori bilan yelkasining ko'paytmasiga teng. Bu miqdor juft momenti deb qabul qilinadi. Demak, juft momenti skalyar miqdor bo'lib, tashkil etuvchi kuchlar birining miqdori bilan juft yelkasiga ko'paytmasiga aytiladi. Agar juft kuch jismni soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa, juft momenti musbat deb qabul qilinadi (3-a shakl). Agar juft kuch jismni soat mili yo'nalishida burashga intilsa, juft kuch momenti manfiy deb qabul qilinadi (3-b shakl).



3-shakl

Juft kuch momentini qisqa m deb belgilaymiz, ya'ni $m(\bar{F}, \bar{F}') = m$, u holda $m = \pm Fd$. Juft kuch momenti, juft tashkil etuvchi kuchlardan biri ikkinchi kuchning qo'yilish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga tengligi 3-shakldan ko'rinadi ya'ni,

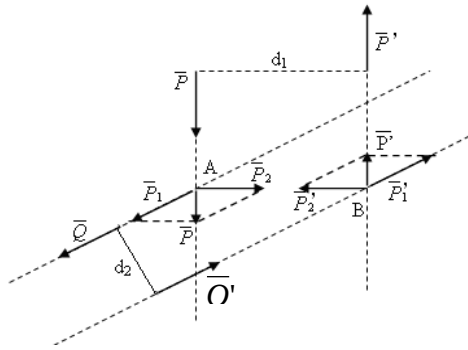
$$m = m_B(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') \quad (1)$$

Ta'rif: Juftning jismga beradigan ta'sirini o'zgartirmay boshqa juft bilan almashtirish mumkin bo'lsa, bunday ikki juft o'zaro ekvivalent juftlar deb ataladi. Quyidagi teorema juftlar ekvivalentligining sharti bo'la oladi.

Teorema: Momentlari o'zaro teng va burilish yo'nalishlari bir xil bo'lgan bir tekislikda joylashgan ikki juft o'zaro ekvivalent bo'ladi.

Isbot: Aytaylik, momenti o'zaro teng, bir xil burilishga ega bo'lgan bir tekislikda joylashgan $(\bar{P}, \bar{P}')$ va $(\bar{Q}, \bar{Q}')$ (4-shakl) juftlar berilgan, ya'ni,

$$P \cdot d_1 = Q \cdot d_2 \quad (2)$$



4-shakl

Juftlarni tashkil etuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlarini ular A va B nuqtalarda kesishguncha davom ettiramiz. Kuchlar P va P' ni A va B nuqtalarga keltirib mos ravishda $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ va $\vec{P}_1', \vec{P}_2'$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. Osonlikcha $\vec{P}_2, \vec{P}_2'$ lar miqdor jihatidan tengligini, yo'nalish jihatidan bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalib, o'zaro muvozanatlashganligini ko'rish mumkin. Ikkinchi aksiomaga asosan bu kuchlar sistemasini e'tiborga olmasak ham bo'ladi. Miqdorlari o'zaro teng bo'lib, juft tashkil etuvchi P_1 va P_1' kuchlar qoldi. Bu $(\vec{P}, \vec{P}')$ juftga ekvivalentdir. Bu yerda $(\vec{P}, \vec{P}')$ juftning jismga ta'sirini o'zgartirmay, ularning tashkil etuvchi kuchlari ustida amal bajariladi. Bu ikki $(\vec{P}, \vec{P}')$ va $(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$ juftlarning momentlari o'zaro tengligini osonlikcha ko'rsatish mumkin. Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasi, (3.5) formulalardan quyidagini olamiz:

$$m(\vec{P}, \vec{P}') = m_B(\vec{P}_1) + m_B(\vec{P}_2) \quad (3)$$

chunki, $m_B(\vec{P}_2) = 0$, vaholanki $m_B(\vec{P}_1) = m(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$

U holda, $m_B(\vec{P}, \vec{P}') = m(P_1, P_1')$, ya'ni $P \cdot d_1 = P_1 \cdot d_2$

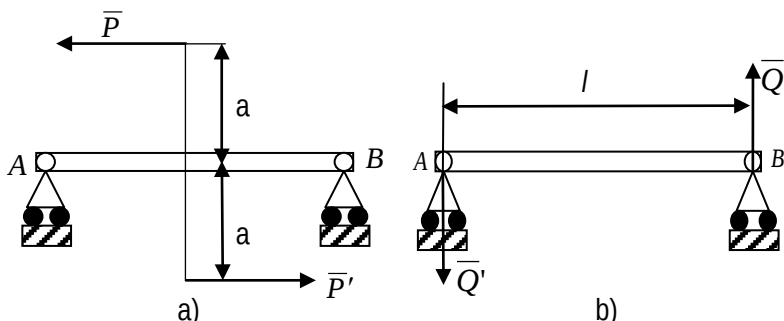
Ikkinchi tomondan teorema shartiga asosan $P \cdot d_1 = Q \cdot d_2$, binobarin, bundan quyidagi kelib chiqadi $P_1 = Q$ va $P_1' = Q_1'$. Modomiki, juft $(\vec{Q}, \vec{Q}')$ juft $(\vec{P}, \vec{P}')$ ga ekvivalent ekan, u holda juft $(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$ ga ham ekvivalent bo'ladi. Shuni isbot etish talab etilgan edi.

Natijalar:

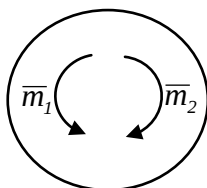
1. Juftni jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'z ta'sir tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkin.

2. Juftni jismga ta'sirini o'zgartirmay, juft momenti o'zgarmas qolib, uning tashkil etuvchilari va yelkasini o'zgartirish mumkin.

Ikki juftni har doim bitta umumiy yelkaga keltirish mumkin, masalan, AB balkaga qo'yilgan $(\bar{P}, \bar{P}')$ juftni (5-a shakl), yuqorida keltirilgan natijalarga asosan $(\bar{Q}, \bar{Q}')$ (5-b shakl) ga almashtirish mumkin. Bu juftning tashkil etuvchilari quyidagi shartdan $P \cdot 2a = Q \cdot l$ aniqlanadi, bundan $Q = \frac{2Pa}{l}$.



5-shakl



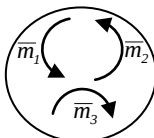
6-shakl

Isbot qilingan teorema va keltirilgan natijalardan, tekislikda juftning jismga ta'siri uning momenti bilan baholanar ekan. Shuning uchun odatda juftni uning momenti va aylanish yo'nalishini ko'rsatuvchi buralma strelkalar yordamida tasvirlanadi (6-shakl).

Teorema: Tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlarni, momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin.

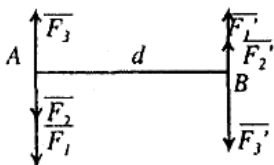
Isbot: Tekislikda momentlari m_1, m_2, m_3 bo'lgan 3 ta juft

joylashgan (7-shakl).

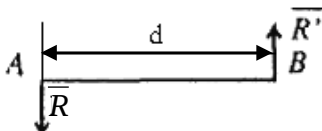


7-shakl

Juftlarning ta'sir tekisligida ixtiyoriy AB kesmani, berilgan juftlar uchun umumiy yelka uchun tanlab olamiz (8a-shakl) momentlari m_1, m_2, m_3 bo'lgan juftlarni, momentlari berilgan juftlarni momentlariga teng bo'lgan $(\bar{F}, \bar{F}')$, $(\bar{F}_2, \bar{F}_2')$, $(\bar{F}_3, \bar{F}_3')$ juftlar bilan almashtiramiz, ya'ni $m_1 = F_1 \cdot d$, $m_2 = F_2 \cdot d$, $m_3 = F_3 \cdot d$.



8-a shakl



8-b shakl

A nuqtaga qo'yilgan kuchlarni bitta kuch $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$ bilan almashtiramiz. B nuqtaga qo'yilgan kuchlarni bitta kuch $\bar{R}' = \bar{F}_1' + \bar{F}_2' + \bar{F}_3'$ bilan almashtiramiz. Boshqacha aytganda $(\bar{R}, \bar{R}')$ kuchlar sistemasi berilgan juftlarga teng ta'sir etuvchi juftidir (8-b shakl). Teng ta'sir etuvchi juftning momenti quyidagiga teng bo'ladi

$$M = R_1 d = (F_1 + F_2 - F_3) d = F_1 \cdot d + F_2 \cdot d + (-F_3 \cdot d)$$

yoki $M = m_1 + m_2 + m_3$, teorema isbotlandi. Xuddi shunday ixtiyoriy sondagi juftlar uchun quyidagini yozish mumkin,

$$M = \sum_{k=1}^n m_k \quad (4)$$

Bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar muvozanatda bo'lsin. Hamma juftlarni bitta juft bilan almashtirib, muvozanat mavjud bo'lishi uchun yoki $R=0$ yoki $d=0$ bo'lishi kerak degan xulosaga kelamiz. U holda $R \cdot d = 0$, ya'ni juft momenti $M=0$. Bu yerdan ko'rinadiki, (4) formulaga asosan

$$\sum_{k=1}^n m_k = 0 \quad (5)$$

Demak, bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar sistemasi muvozanatda bo'lsa, ular momentlarining algebraik yig'indisi 0 ga teng bo'ladi. Bu xulosaning teskarisi ham o'rinlidir. Ya'ni bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar momentlarning algebraik yig'indisi nolga teng bo'lsa, bu juftlar sistemasi muvozanatda bo'ladi. Haqiqatan ham agar $\sum m_k = 0$ bo'lsa, u holda $M=R \cdot d=0$. Bu yerdan $R=0$ yoki $d=0$ bo'lishi mumkin. Har ikkala holda ham sistema muvozanatda bo'ladi. Demak (5) tenglik juftlar sistemasi muvozanatining zarur va yetarli shartini ifodalaydi.

masala 9-shaklda tasvirlangan $(\bar{P}, \bar{P}')$, $(\bar{Q}, \bar{Q}')$, $(\bar{F}, \bar{F}')$ juftlar sistemasi muvozanatda bo'lishi mumkinligi tekshirib ko'rilsin, agar $P=10\text{N}$, $Q=5\sqrt{3}\text{N}$, $F=10\text{N}$. $AB=1\text{m}$, $CD=0,6\text{m}$, $EH=1,6\text{m}$.

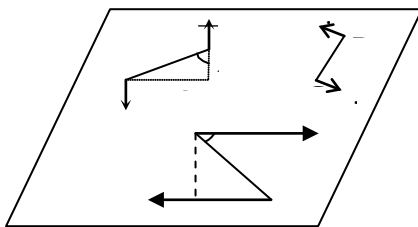
Yechish: Berilgan juftlar momentlarini hisoblaymiz

$$m_1 = P \cdot d_1 = P \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$m_2 = Q \cdot d_2 = 5\sqrt{3} \cdot 0,6 = 3\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$m_3 = -F \cdot d_3 = -F \cdot EH \cdot \sin 60^\circ = -10 \cdot 1,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -8\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

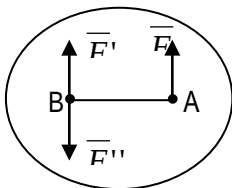
U holda $M = m_1 + m_2 + m_3 = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 0$ juftlar sistemasi muvozanatda ekan.



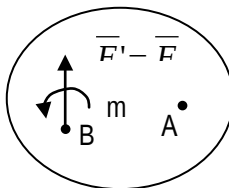
9-shakl

Teorema: Absolyut qattiq jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchni jismga ta'sirini o'zgartirmay o'ziga parallel ravishda boshqa ixtiyoriy nuqtaga keltirish, momenti berilgan kuchdan keltirish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan juft qo'shishni taqozo qiladi.

Isbot: Jismning biror A nuqtasiga F kuch qo'yilgan bo'lsin.



10-shakl

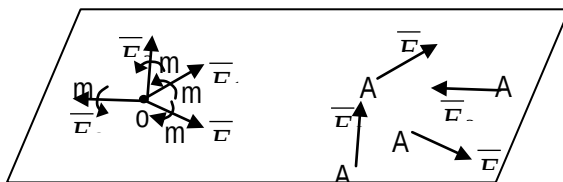


11-shakl

Jismning ixtiyoriy B nuqtasiga tashkil etuvchilari F' va F'' miqdor jihatidan F kuchga teng bo'lgan ya'ni $F' = F'' = F$ nolli sistemani kuchga parallel ravishda qo'yamiz (10-shakl). Hosil bo'lgan uchta kuchdan ($\vec{F}$, $\vec{F}'$, $\vec{F}''$) iborat bo'lgan sistema berilgan F kuchga ekvivalentdir. Bu sistemani F kuch va ($\vec{F}$, $\vec{F}''$) juftdan tashkil topgan deb qarash mumkin. Binobarin A nuqtaga qo'yilgan F kuchi, B nuqtaga qo'yilgan shunday F' kuchiga va ($\vec{F}$, $\vec{F}''$) juftga ekvivalentdir. Juft ($\vec{F}$, $\vec{F}''$) ni qo'shilgan juft deb ataladi. Uning momentini aniqlaymiz $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}'') = F \cdot d = m_B(\vec{F})$.

Binobarin qo'yilgan juftning momenti A nuqtaga qo'yilgan F kuchdan, ko'chirish zarur bo'lgan B nuqtaga nisbatan momentga teng bo'ladi. Bu teoremaning tafsiloti 10- va 11-shakllarda tasvirlangan.

Bosh vektor va bosh moment. Qattiq jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ kuchlar sistemasi ta'sir qilsin.



12-shakl

Tekislikda keltirish markazi deb ataluvchi ixtiyoriy O nuqtani olib, momentlari m_1, m_2, m_n bo'lgan qo'shilgan juftlarni qo'shib, hamma kuchlarni shu markazga keltiramiz, (12-shakl). Demak ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$). Kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n'$ kuchlar sistemasiga va bir tekislikda joylashgan

momentlari

$$m_1 = m_0(\bar{F}_1), m_2 = m_0(\bar{F}_2) \dots m_n = m_0(\bar{F}_n) \quad (6)$$

bo'lgan juftlar sistemasiga ekvivalent bo'ladi.

O nuqtaga qo'yilgan kuchlarni qo'shib, ularni bitta kuch bilan almashtiramiz.

$$\bar{R}' = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \quad (7)$$

Modomiki $\bar{F}_k' = \bar{F}_k$, u holda $\bar{R}' = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ kattalik berilgan

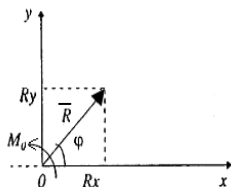
kuchlar sistemasining bosh vektori deb ataladi. Binobarin tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng ekan. Tekislikda joylashgan qo'shilgan juftlarni jamlab, momenti $M_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ bo'lgan bitta juft bilan almashtiramiz. Formula (6)ni e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M_0 = m_0(\bar{F}_1) + m_0(\bar{F}_2) + \dots + m_0(\bar{F}_n)$$

yoki

$$M_0 = \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) \quad (8)$$

Moment M_0 berilgan kuchlar sistemasining O keltirish markaziga nisbatan bosh momenti deb ataladi. Demak, tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror markazga nisbatan bosh momenti berilgan sistemaning kuchlaridan keltirish markaziga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng. Olingan natijani quyidagi teorema shaklida keltirish mumkin. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini umumiy holda, sistemaning bosh vektoriga teng bo'lgan va qandaydir O nuqtaga qo'yilgan bitta kuch va shu tekislikda yotuvchi momenti berilgan kuchlar sistemasining shu nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin (13-shakl).



13-shakl

Bosh vektor R' ni miqdor va yo'nalishini analitik aniqlash. Koordinata sistemasi boshini keltirish markazi O nuqtada olib (13-shakl) OX va OY o'qlarini o'tkazib, R' ning miqdorini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz.

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2} \quad (9)$$

Bu yerda R'_x va R'_y bosh vektor R' ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalaridir (7). Tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, quyidagini olamiz:

$$R'_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad R'_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} \quad (10)$$

Ya'ni kuchlar sistemasi bosh vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, kuchlarning shu o'qlardagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga tengdir. Formula (9)ga R'_x , R'_y larning qiymatlarini (10) formuladan keltirib qo'yib, quyidagini olamiz

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2} \quad (11)$$

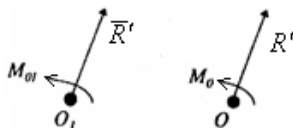
Bosh vektor R' ning yo'nalishi, uni OX o'qi bilan tashkil qilgan φ burchagi orqali quyidagicha aniqlanadi

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R'_y}{R'_x} \quad (12)$$

Shuni ta'kidlaymizki, bosh vektor R' keltirish markazini o'zgartirish bilan o'zgarmaydi, chunki berilgan kuchlar sistemasining miqdor va yo'nalishlari o'zgarmas qoladi.

Keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi. Berilgan ($F_1, F_2, \dots, F_n$) kuchlar sistemasini bir O markazga keltirib, O nuqtaga qo'yilgan R' kuchni va momenti M_o bo'lgan juftni

olamiz (14-shak).



14-shakl

Keltirish markazi uchun boshqa O_1 nuqtani olamiz va bu nuqtaga nisbatan bosh momentni M_{01} deb belgilaymiz, R' kuchni O nuqtadan O_1 nuqtaga ko'chirish uchun momenti O_1 nuqtaga qo'yilgan R' kuchdan O_1 nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan ya'ni $m_{01}(R')$ juftni qo'shish kerak. Bu juftni kuchlar sistemasining O ga keltirish natijasida hosil bo'lgan juft bilan qo'shib, momenti quyidagiga teng bo'lgan bitta juft hosil qilamiz

$$M_{01} = M_0 + m_{01}(\bar{R}') \quad (13)$$

bundan

$$M_{01} - M_0 = m_{01}(\bar{R}') \quad (14)$$

Demak, keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi oldingi markazga qo'yilgan bosh vektordan, keyingi markazga nisbatan olingan momentga teng bo'lar ekan.

Keltirishning xususiy hollari. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda hollarga keltirish. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirishda quyidagi xususiy hollar mavjud

$$1) \bar{R}' = 0, M_0 \neq 0$$

$$2) \bar{R}' \neq 0, M_0 = 0$$

$$3) \bar{R}' \neq 0, M_0 \neq 0$$

$$4) \bar{R}' = 0, M_0 = 0$$

1) Kuchlar sistemasini bir juftga keltirish

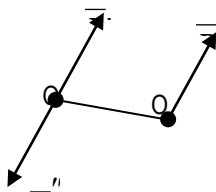
Agar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori nolga teng bo'lib, biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bir juftga keladi. Bunday holda bosh momenti keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham, agar $R'=0$ bo'lsa, u holda (14) formuladan $M_{01}=M_0$ ekanligi kelib chiqadi.

2) Kuchlar sistemasini bir teng ta'sir etuvchiga keltirish. Teng ta'sir etuvchining momenti haqida teorema

Agar kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi (2 va 3 xususiy hollar).

Agar $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida bitta kuch $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ va momenti $M_0 = \sum m_0(\vec{F}_k)$ bo'lgan bitta juft hosil bo'lsin. Juft tashkil etuvchi kuchlar miqdorini bosh vektorga teng qilib olib, ya'ni, $\vec{R}' = \vec{R}'' = \vec{R}$ va juft tashkil etuvchi kuchlardan birini O nuqtaga R' bilan qarama-qarshi yo'nalishda joylashtiramiz (15-shakl) juft $(\vec{R}_1, \vec{R}'')$ ning yelkasi quyidagi formuladan aniqlanadi.

$$d = \frac{M_0}{R} \quad (15)$$



15-shakl

Hosil bo'lgan $(\vec{R}', \vec{R}'', \vec{R})$ kuchlar 15-shakl sistemasi bitta R kuchga ekvivalent bo'ladi. Darhaqiqat, $\vec{R}$ berilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi bo'ladi.

Teorema: Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlardan shu nuqtaga nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isbot: 50-shakldan ko'rinadiki, $m_0(\vec{R}) = R \cdot d$. $R = R'$ ekanligi va (3.18) formulani e'tiborga olib quyidagini yozish mumkin

$$m_0(\vec{R}) = M_0 \text{ yoki } m_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n m_0(\vec{F}_k) \quad (16)$$

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi

muvozanatlashishi uchun, quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$$\overline{R}' = 0 \quad \text{va} \quad \overline{M}_0 = 0 \quad (17)$$

Agar biror shart bajarilmasa, u holda kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga yoki juftga keltiriladi, ya'ni muvozanatda bo'lmaydi. Agar $\overline{R}' = 0$ bo'lsa, u holda sistema momenti M_0 bo'lgan juftga keltiriladi, modomiki $M_0 = 0$, u holda sistema muvozanatda bo'ladi. (17) shartdan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatining quyidagi analitik shartlari kelib chiqadi:

Bosh vektor $\overline{R}'$ va bosh moment M_0 quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n F_{ky}\right)^2}, \quad M_0 = \sum_{k=1}^n m_0(\overline{F}_k)$$

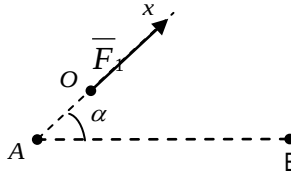
Agar $R' = 0$ va $M_0 = 0$ bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_0(\overline{F}_k) = 0 \quad (18)$$

Ya'ni tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi, kuchlarning ta'sir tekisligidagi biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Bog'lanishdagi jismlarning muvozanatiga oid masalalar yechishda (18) shartda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etadi va muvozanat tenglamari deb ataladi. Agar noma'lum reaksiyalar soni ular qatnashgan tenglamalar soniga teng bo'lsa, u holda hamma noma'lumlar shu tenglamalardan aniqlanadi. Bunday masalar statik aniq masalalar deb ataladi. Agar noma'lum reaksiyalar soni, ular qatnashgan tenglamalar sonidan ko'p bo'lsa, u holda bunday masalalar statik aniqmas masalalar deb ataladi.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning ikkita A va B nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi, hamda AB kesmaga perpendikulyar bo'lmagan OX o'qiga proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (16-shakl).

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{ix} &= 0 \\ \sum m_A(\bar{F}_i) &= 0 \\ \sum m_B(\bar{F}_i) &= 0 \\ \alpha &\neq 90^\circ \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



16-shakl

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning bir to'g'ri chiziq ustida yotmagan uchta A, B va C nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0 \quad (20)$$

Eslatma: (19) va (20) shartlar isbotsiz taklif etildi.

Agar hamma kuchlar OY o'qiga parallel bo'lsa (17-shakl), u holda

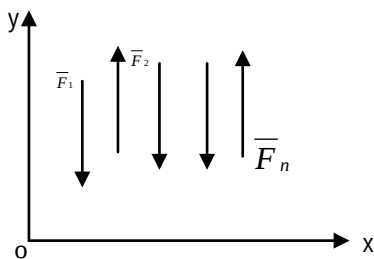
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0,$$

modomiki

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = \sum_{k=1}^n F_k$$

va muvozanat sharti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum_{k=1}^n F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) = 0 \quad (21)$$



17-shakl

Demak tekislikdagi parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning algebraik yig'indisi va shu tekislikdagi biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Tekislikda parallel kuchlar muvozanat shartining ikkinchi shakli.

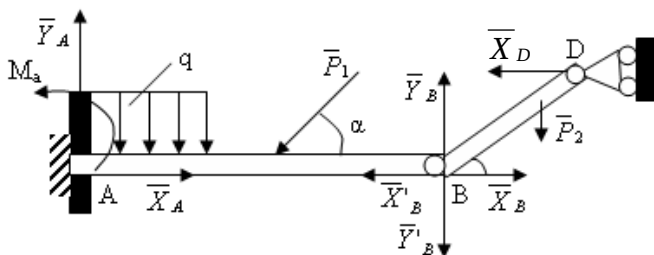
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, bu kuchlarga parallel bo'lgan chiziq ustida yotmay turgan ikki A va B nuqtalarga nisbatan olingan kuchlar momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0 \quad (22)$$

Odatda o'zaro bog'langan (sharnir, arqon, sterjen vositasida), bir necha jismlardan tashkil topgan qurilmalar ko'proq uchraydi. 56-shaklda ikkita AB va BD jismlar o'zaro B sharnir yordamida biriktirilgan sistema tasvirlangan. A va D nuqtalardagi tayanch reaksiya kuchlari va B sharnirdagi o'zaro bosim aniqlanishi talab qilindi. B sharnirdagi o'zaro bosim kuchi miqdor va yo'nalish jihatidan noma'lum. Shuning uchun uni koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilar orqali tasvirlaymiz va ta'sir hamda aks ta'sir aksiomasiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\bar{X}_B = -\bar{X}'_B, \quad \bar{Y}_B = -\bar{Y}'_B$$

X_B, Y_B tashkil etuvchilar BD jismga ta'sir qiladi va X'_B, Y'_B lar AB jismga.



18-shakl

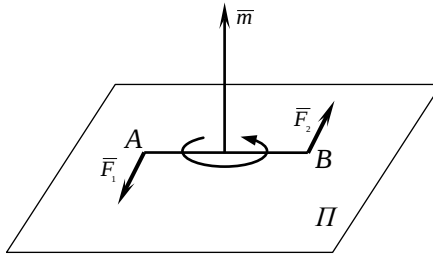
Tashqi bog'lanishlarni bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirib, muvozanat holatdagi o'zgaruvchan mexanik sistemani hosil qilamiz, har ikkala jism ham B sharnir atrofida aylanishi mumkin. Qotish prinsipiga asosan, bu sistema uchun, xuddi absolyut qattiq jismga o'xshash, uchta muvozanat tenglamasini tuzamiz. Bu tenglamalar sistemasi noma'lumlarni aniqlashda o'jizlik qiladi. Bundan tashqari masalani yechish uchun, jismlardan birortasini, masalan BD jismning muvozanatini ko'rish va u uchun uchta muvozanat tenglamasini tuzish kerak. Bu masalani boshqacha tartibda ham hal qilsa bo'ladi. Ya'ni har ikkala jism uchun alohida-alohida muvozanat tenglamasini tuzish mumkin.

Juft momentining vektorligi. ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$)-juft kuch berilgan, II-uning ta'sir tekisligi. Juft momentining algebraik qiymati quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$m = \pm F \cdot d$$

Bu yerda d-juft kuch yelkasi. Juft momentini vektor shaklida tasvirlaymiz. Ma'lumki, juftning ta'siri, juft tekisligining fazodagi holatiga bog'liq. Tekislikning fazodagi holati unga o'tkazilgan perpendikulyar orqali aniqlanadi, u holda ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$) tekisligiga perpendikulyar bo'ladi. U shunday tomonga yo'nalganki, uning oxiridan qaralganda juft ta'sir tekisligini soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi tomonga aylantirishga intiladi. (19-shakl). Moment vektori $\vec{m}$ juft ta'sir tekisligining ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilgan bo'lishi mumkin, yuqoridagi tavsifdan, quyidagi kelib chiqadi:

$$\vec{m} = \vec{m}_B; \quad m_B(\vec{F}_1) = m_A(\vec{F}_2)$$



19-shakl

Ya'ni moment vektori, juft tashkil etuvchi kuchlarining birortasidan ikkinchi kuchning qo'yilish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga teng. U holda quyidagini yozishimiz mumkin:

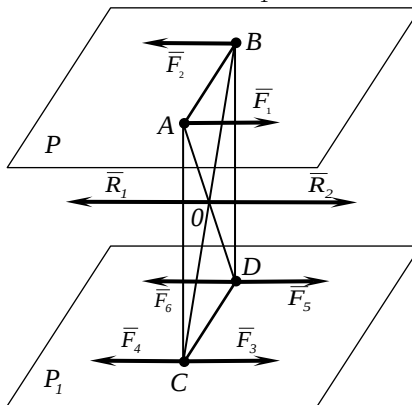
$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 \cdot AB = F_2 \cdot AB \quad (23)$$

Teorema. Juft kuchni ta'sir tekisligiga parallel tekislikka ko'chirish

Juft kuchni jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'zining ta'sir tekisligiga parallel bo'lgan ixtiyoriy tekislikka ko'chirish mumkin.

Isbot. Yelkasi d bo'lgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ juft kuchni P tekislikda olamiz. Juft kuchning momenti quyidagiga teng:

$$m = \pm F_1 \cdot d$$



20-shakl

P tekisligiga parallel bo'lgan P_1 tekislikni o'tkazamiz va bu tekislikda juftning yelkasi AB ga teng va parallel bo'lgan CD kesmani olamiz. C va D nuqtalarga o'zaro muvozanatdagi 2 ta kuchlarni qo'yamiz. $\vec{F}_3, \vec{F}_4$ va $\vec{F}_5, \vec{F}_6$ ya'ni $(\vec{F}_3, \vec{F}_4) \Leftrightarrow 0, (\vec{F}_5,$

$\overline{F}_6 \Leftrightarrow 0$ (78-shakl). $\overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6$ kuchlarni $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarga teng va parallel qilib olamiz. Bu 4 ta kuchlar sistemasi bilan juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi, shuning uchun quyidagini yozishimiz mumkin:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \Leftrightarrow (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6)$$

AB va CD yelka ustiga parallelogramm quramiz va uning AD va BC diagonallarini o'tkazamiz $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2, \overline{F}_4$ va $\overline{F}_5$ kuchlarni o'zaro qo'shib, ikkita $\overline{R}_1$ va $\overline{R}_2$ kuchlarni olamiz:

$$\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_5, \quad \overline{R}_2 = \overline{F}_2 + \overline{F}_4$$

$\overline{R}_1$ va $\overline{R}_2$ kuchlar AD va BC diagonallarining kesishgan O nuqtasiga qo'yilgan. Bu kuchlar o'zaro teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. Shuning uchun $(\overline{R}_1, \overline{R}_2) \Leftrightarrow 0$ yoki $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_4, \overline{F}_5) \Leftrightarrow 0$ u holda quyidagini yozishimiz mumkin $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \Leftrightarrow (\overline{F}_3, \overline{F}_6)$. $(\overline{F}_3, \overline{F}_6)$ kuchlar sistemasi $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ juft kuchga ekvivalent bo'lgan juft kuchdir. Talab qilingan teorema isbotlandi. III bobda juft kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uni juft tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkinligi ta'kidlangan edi. Shunday qilib isbot qilingan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

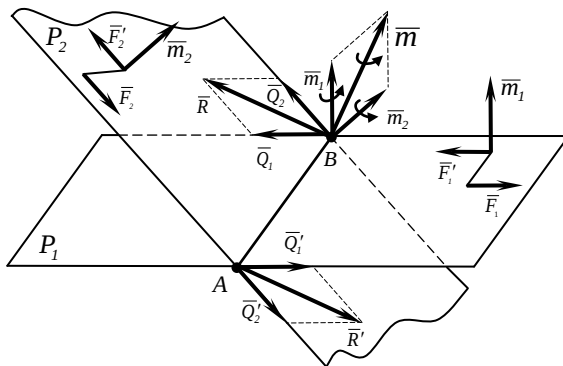
Juft kuchlar ekvivalent bo'ladi, agar:

1. Ular bir yoki parallel tekisliklarda yotsa;
2. Momentlari miqdor jihatidan teng va bir xil burilishga ega bo'lsa. Demak juft kuchlar o'zaro ekvivalent bo'ladi, agar ularning moment vektorlari o'zaro geometrik teng bo'lsa. Juftni ta'sir tekisligida va unga parallel bo'lgan tekisliklarga uning ta'sirini o'zgartirmay ko'chirish mumkin. Shuning uchun juft kuch moment vektori erkin vektordir;

Teorema: Ikkita kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlar yolg'iz juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng.

Isbot: Momentlari tegishli $\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$ bo'lgan kesishuvchi tekisliklarda joylashgan 2 ta $\overline{F}_1, \overline{F}_1'$ va $\overline{F}_2, \overline{F}_2'$ juftlarni olamiz (21-shakl). Tekisliklar kesishish chizig'i AB kesmani umumiy yelka qilib tanlab olamiz. Berilgan juftlar momentlarini o'zgartirmay umumiy

AB yelkaga keltiramiz.



21-shakl

Moment vektorlari berilgan juftlarning moment vektorlariga teng bo'lgan yangi ikkita $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_1')$ va $(\bar{Q}_2, \bar{Q}_2')$ juftlarni hosil qilamiz, ya'ni

$$\bar{m}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_1') = \bar{m}_1; \quad \bar{m}(\bar{Q}_2, \bar{Q}_2') = \bar{m}_2$$

$\bar{m}_1$ va $\bar{m}_2$ vektorlarni B nuqtaga qo'yamiz. A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni parallelogramm qoidasiga asosan qo'shamiz.

Ikkita $\bar{R}$ va $\bar{R}'$ kuchlarni hosil qilamiz ya'ni:

$$\bar{R} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, \quad \bar{R}' = \bar{Q}_1' + \bar{Q}_2'$$

Agar $\bar{R} = \bar{R}'$ bo'lsa u holda $(\bar{R}, \bar{R}')$ sistema juft kuchni hosil qilib ekvivalent deb ataladi. Ikkita kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlar sistemasi yolg'iz juftga ekvivalent bo'lar ekan shu juftning moment vektorini aniqlaymiz, (23) formulasiga asosan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\bar{m}(\bar{R}, \bar{R}') = \bar{AB} \times \bar{R}$$

$$\bar{R} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2, \quad \bar{m} = \bar{AB} \times (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2) = \bar{AB} \times \bar{Q}_1 + \bar{AB} \times \bar{Q}_2$$

yoki $\bar{m} = \bar{m}(\bar{Q}_1, \bar{Q}_1') + \bar{m}(\bar{Q}_2, \bar{Q}_2')$ natijada $\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$ ekanligi

isbotlandi. Shunday qilib $\bar{m}$ moment vektorni miqdor va yo'nalishi $\bar{m}_1$ va $\bar{m}_2$ momentlar vektorlarining ustiga qurilgan parallelogramm diagonali orqali aniqlanadi. Umumiy, holda fazoda ixtiyoriy joylashgan juft kuchlarni qo'shish natijasida hosil bo'lgan ekvivalent juft kuchlarning momenti berilgan juft kuchlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng, ya'ni:

$$\overline{m} = \sum_{k=1}^n \overline{m}_k \quad (24)$$

Agar ekvivalent juftning momenti nolga teng bo'lsa, u holda juftlar o'zaro muvozanatlashadi:

$$\sum_{k=1}^n \overline{m}_k = 0 \quad (25)$$

Shunday qilib fazoda ixtiyoriy joylashgan juft kuchlar muvozanatlarini quyidagicha ifodalash mumkin: fazoda ixtiyoriy joylashgan juftlar sistemasi o'zaro muvozanatda bo'lishi uchun ular momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
2. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti qachon nolga teng bo'ladi?
3. Kuchni ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirilsa kuch momenti o'zgaradimi?
4. Kuchning nuqtaga nisbatan momentining geometrik ma'nosi qanday?
5. Teng ta'sir etuvchi kuchning momenti tashkil etuvchi kuchlar momenti orqali qanday hisoblanadi?

3-Amaliyot: Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga oid masalalar yechish

7-masala. AB to'singa F yig'ilgan va q yoyilgan kuchlar ta'sir qilmoqda. A va B tayanchlardagi reaksiya kuchlarini aniqlang ($\alpha = 60^\circ$).

Berilgan:

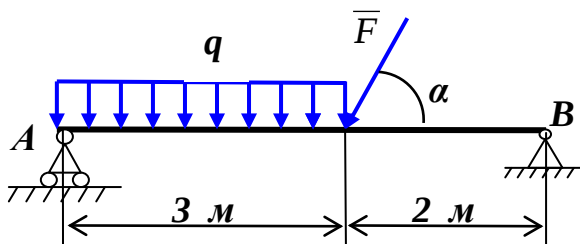
$$F = 2000 \text{ H};$$

$$q = 100 \text{ H/m};$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

Topish

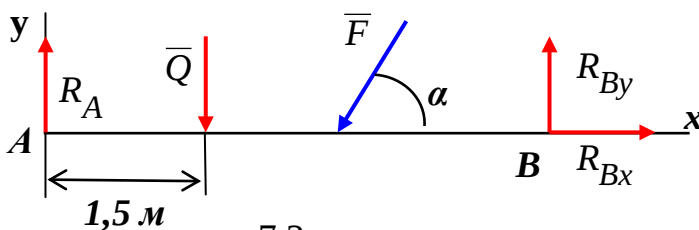
kerak: R_A, R_B



7.1-rasm

Yechish:

1. To'sinning xisob-sxemasini chizamiz. Buning uchun AB to'sinni xy o'qlariga joylashtiramiz, ya'ni x o'qini to'sin bo'yicha yo'nalti



7.2-rasm

ligi tufayli y o'qi bo'yicha R_A reaksiyani yo'naltiramiz. Yoyilgan q

kuchni jamlab (yig'ib) olamiz, ya'ni yoyilgan kuchning o'rtasidan Q kuchni y o'qiga parallel qilib qo'yamiz ($Q=q \cdot 3=100 \cdot 3=300H$). B tayanch kuzgalmas bo'lganligidan R_B reaksiya ikkita tashkil etuvchilarga ega bo'ladi (R_{Bx}, R_{By}). R_{Bx} kuchni x o'qi bo'ylab yo'naltiramiz, R_{By} kuchni esa y o'qiga parallel qilib yo'naltiramiz (7.2-rasm).

2. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun ko'pi bilan 3 ta muvozanat tenglamalari tuzish o'rinli. Ortiqchasi natija bermaydi (ayniyatga aylanadi).

Ushbu kuchlar sistemasi uchun muvozanat shartlarining 1 - shaklidan foydalanamiz, ya'ni

$$\sum F_{ix}=0; \quad -F \cdot \cos \alpha + R_{Bx} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy}=0; \quad R_A - Q - F \cdot \sin \alpha + R_{By} = 0$$

(2)

$$\sum M_A(\overline{F_i})=0; \quad -Q \cdot 1,5 - T \cdot \sin \alpha \cdot 3 + R_{By} \cdot 5 = 0$$

(3)

3. Tenglamalarni echamiz.

(1) $\rightarrow$

$$R_{Bx} = F \cdot \cos \alpha = 2000 \cdot \cos 60^0 = 2000 \cdot 0,5 = 1000; (H)$$

(3) $\rightarrow$

$$R_{By} = \frac{Q \cdot 1,5 + T \cdot \sin \alpha \cdot 3}{5} = \frac{300 \cdot 1,5 + 2000 \cdot \sin 60^0 \cdot 3}{5} =$$

$$\frac{300 \bullet 1,5 + 6000 \bullet 0,86}{5} = 1122; (H)$$

(2) →

$$R_A = Q + F \bullet \sin \alpha - R_{By} = 300 + 2000 \bullet \sin 60^0 - 1122 = 898; (H)$$

3. Topilgan natijalarni tekshiramiz. Buning uchun xisob-sxemasidan foydalanamiz, ya'ni barcha kuchlarning B nuqtaga nisbatan momentlarini topamiz va nolga tenglaymiz (tekshirishda barcha kuchlar momentlarining yigindisi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan topiladi).

$$\begin{aligned} \sum M_B(\overline{F_i}) &= 0; \quad -R_A \bullet 5 + Q \bullet 3,5 - F \bullet \sin \alpha \bullet 2 = 0 \quad \text{yoki} \\ &-898 \bullet 5 + 300 \bullet 3,5 - 2000 \bullet 0,86 \bullet 2 = 0 \\ &-4490 + 4490 = 0 \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

Demak, noma'lumlar to'g'ri topilgan.

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{1000^2 + 1122^2} = 1503; (H)$$

Jabob: $R_A = 898 (H); \quad R_B = 1503; (H).$

8-masala. Qistirib maxkamlangan to'singa yig'ilgan F , yoyilgan q va juft kuch momenti bilan ta'sir qilmokda. A tayanchdagi reaksiya kuchini va reaktiv momentni toping ($\alpha = 45^0$)

Berilgan:

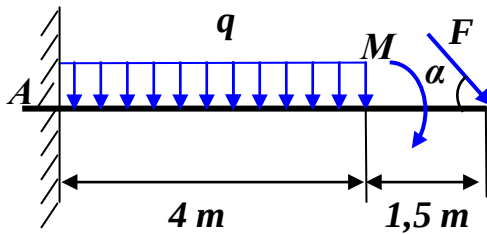
$$F=15 \text{ (}\kappa H\text{)};$$

$$M=3 \text{ (}\kappa H^*m\text{)};$$

$$q=1,5 \text{ (}\kappa H/m\text{)};$$

$$\alpha=45^0$$

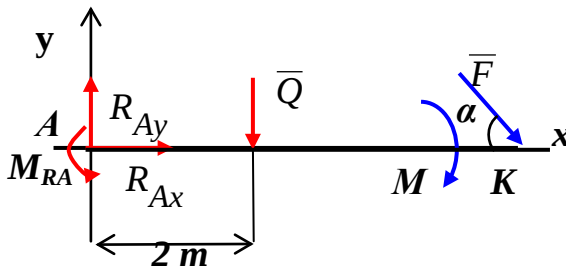
Topish kerak: R_A ; M_{RA} .



8.1-rasm

Yechish:

1. To'sinning xisob-sxemasini chizamiz. Buning uchun barcha bog'lanishlarni olib o'rniga reaksiya kuchlarini qo'yamiz. Yoyilgan q kuch o'rniga yig'ilgan Q kuchini qo'yamiz ($Q=q*4=1.5*4=6 \text{ } \kappa H^*m$). A nuqta qistirib maxkamlanganligi tufayli u erda R_{Ax} va R_{Ay} reaksiya tashkil etuvchilaridan tashqari reaktiv moment M_{RA} ham ko'rsatiladi.



8.2-rasm

2.

Muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{ix}=0 ; \quad F \bullet \cos \alpha + R_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy}=0; \quad R_{Ay} - Q - F \cdot \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(\overline{F_i})=0; \quad M_{RA} - Q \cdot 2 - M - F \cdot \sin \alpha \cdot 5,5 = 0$$

(3)

3. Tenglamalarni echamiz.

$$(1) \rightarrow R_{Ax} = -F \cdot \cos \alpha = -15 \cdot \cos 45^{\circ} = -10,7; (kH)$$

$$(2) \rightarrow R_{Ay} = Q + F \cdot \sin \alpha = 6 + 15 \cdot \sin 45^{\circ} = 16,7; (kH)$$

$$(3) \rightarrow$$

$$M_{RA} = Q \cdot 2 + M + F \cdot \sin \alpha \cdot 5,5 = 6 \cdot 2 + 3 + 15 \cdot \sin 45^{\circ} \cdot 5,5 = 73,8; (kH)$$

4. Topilgan natijalarni tekshiramiz. Buning uchun xisob-sxemasida ixtiyoriy «K» nuqta olib, shu nuqtaga nisbatan barcha kuchlarning momentlarini topamiz va yigindisini nolga tenglaymiz ya'ni:

$$\sum M_K(\overline{F_i})=0; \quad M_{RA} - R_{Ry} \cdot 5,5 + Q \cdot 3,5 - M = 0;$$

$$73,8 - 16,7 \cdot 5,5 + 6 \cdot 3,5 - 3 = 0;$$

$$94,8 - 94,8 = 0; \quad 0 = 0$$

Xisoblashlardagi yaxlitlanganlarni inobatga olib yig'indini (natijasini) nolga teng, deb kabul qilamiz.

Demak,

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-10,7)^2 + 16,7^2} = 19,8; (kH)$$

$$\text{Javob: } R_A = 19,8; (kH), \quad M_{RA} = 73,8 \text{ (} \kappa H^* m \text{)}$$

4-Ma'ruza: Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi (6 soat)

Reja:

1. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini
2. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirishning turli hollari
3. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari
4. Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari
5. Parallel kuchlarni qo'shish, parallel kuchlar markazi
6. Jism og'irlik markazining koordinatalari uchun umumiy formulalar
7. Og'irlik markazini aniqlash usullari. Simmetrik jismlarning og'irlik markazi

Ta'sir chiziqlari fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlardan tashkil topgan sistema fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi deyiladi.

Agar jismga fazoviy kuchlar ta'sir etsa, u holda jismning mazkur kuchlar ta'sirida aylanish yo'nalishini aniqlash uchun kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor tarzida qaraladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori moment markaziga qo'yilgan bo'lib, bu markaz va kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikulyar yo'naladi hamda uning uchidan qaraganimizda kuch jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi.

$\vec{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan momenti vektorini aniqlash uchun kuch qo'yilgan A nuqtaning O markazga nisbatan radius-vektori $\vec{r}$ ning shu kuch vektoriga vektorli ko'paytmasini aniqlaymiz. Vektorlar algebrasidan ma'lumki, $\vec{r} \times \vec{F}$ vektor ustiga tushirish uchun soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda eng qisqa burchakka burish kerak. Bu vektorning moduli

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = r F \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}) \quad (1)$$

bo'ladi.

O nuqtadan $\vec{F}$ kuchning ta'sir chizig'iga tik h kesmani o'tkazamiz, u holda

$$h = r \sin(\angle \vec{r}, \vec{F}) \quad (2)$$

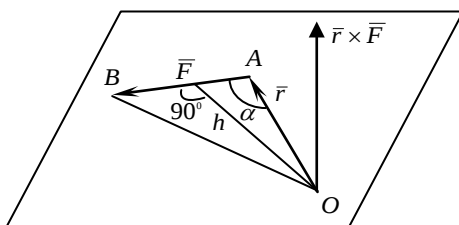
bo'lgani uchun

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot h = |\vec{M}_O(\vec{F})| \quad (3)$$

$\vec{r} \times \vec{F}$ vektorining yo'nalishi kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori bilan ustma-ust tushadi. $\vec{r} \times \vec{F}$ va $\vec{M}_O(\vec{F})$ vektorlarning miqdorlari teng, yo'nalishlari ustma-ust tushgani uchun

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4)$$

Ya'ni F kuchning O nuqtaga nisbatan moment vektori, moment markazidan kuch qo'yilgan nuqtaga o'tkazilgan radius-vektori bilan kuch vektorining vektorli ko'paytmasiga teng ekan.



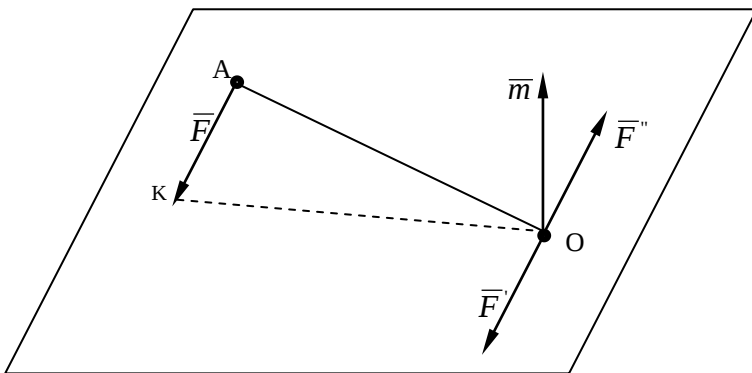
1-shakl

Qattiq jismning biror A nuqtasiga $\vec{F}$ kuchi qo'yilgan (2-shakl) kuchni o'ziga parallel ko'chirish haqidagi teoremaga asosan A nuqtaga qo'yilgan $\vec{F}$ kuchni O nuqtaga qo'yilgan shunday $\vec{F}'$ kuch va momenti $\vec{m}$ berilgan $\vec{F}$ kuchidan O nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan $(\vec{F}', \vec{F}'')$ juft kuch bilan almashtirish mumkin.

Juftning $\vec{m}$ moment vektori OAK tekislikka perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun quyidagicha yozish mumkin. $\vec{F} = \vec{F}'$ va juft $(\vec{F}, \vec{F}'')$ kuchni berilgan markazga keltirish chog'ida hosil bo'lgan qo'shilgan $(\vec{F}, \vec{F}'')$ juftni shaklda ko'rsatmay uning m momenti vektorini tasvirlash kifoya. Bu natijadan foydalanib ixtiyoriy joylashgan va qattiq jismning A_1, A_2, A_3 nuqtalariga qo'yilgan uchta $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlarni berilgan markazga keltiramiz (81-shakl). Buning uchun, hamma kuchlarni O nuqtaga keltirib qo'shilgan juftlarni olamiz. Natijada O markazga qo'yilgan $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ kuchlar sistemasi va

momentlari $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3$ bo'lgan qo'shilgan juft kuchlar sistemasini olamiz. Ma'lumki

$$\bar{m}_1 = \bar{m}_0(\bar{F}_1), \bar{m}_2 = \bar{m}_0(\bar{F}_2), \bar{m}_3 = \bar{m}_0(\bar{F}_3)$$



2-shakl

O nuqta qo'yilgan $\bar{F}_1', \bar{F}_2', \bar{F}_3'$ kuchlarni qo'shib ularning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan $\bar{R}'$ ni olamiz ya'ni

$$\bar{R}' = \bar{F}_1' + \bar{F}_2' + \bar{F}_3'$$

agar $\bar{F}_1' = \bar{F}_1, \bar{F}_2' = \bar{F}_2, \bar{F}_3' = \bar{F}_3$ bo'lsa, u holda $\bar{R}' = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$ kuchlarning geometrik yig'indisi bosh vektor deyiladi. Qo'shilgan juftlarni yig'ib teng ta'sir etuvchi juftni hosil qilamiz uning momenti qo'shilgan juft momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Ya'ni

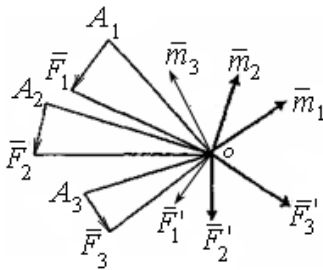
$$\bar{M}_0 = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3$$

agar $\bar{m}_1 = \bar{m}_0(\bar{F}_1), \bar{m}_2 = \bar{m}_0(\bar{F}_2), \bar{m}_3 = \bar{m}_0(\bar{F}_3)$ bo'lsa,

u holda

$$M_0 = \bar{m}_0(\bar{F}_1) + \bar{m}_0(\bar{F}_2) + \bar{m}_0(\bar{F}_3)$$

$\bar{M}_0$ -vektor berilgan kuchlardan O keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lib, kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan olingan bosh momenti deyiladi.

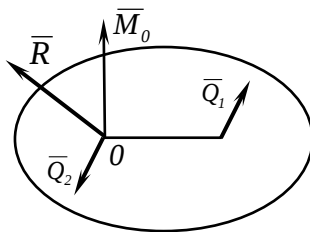


3-shakl

Olingan natijadan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun tatbiq qilib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k; \quad \bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{F}_k) \quad (5)$$

Shunday qilib fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan va keltirish markaziga qo'yilgan yolg'iz kuch va momenti berilgan kuchlardan keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lgan qandaydir (Q_1, Q_2) juft bilan almashtirish mumkin (4-shakl) shuni ta'kidlab o'tamizki, bosh vektor keltirish markaziga bog'liq bo'lmaydi, lekin bosh moment esa keltirish markazining tanlab olinishiga bog'liq bo'lib, keltirish markazining o'zgarishi bilan bosh moment ham o'zgarishi mumkin.



4-shakl

To'g'ri burchakli koordinata sistemasining boshini keltirish markazi O da olamiz, u holda bosh $\bar{R}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^n F_{kx} \\ R_y &= \sum_{k=1}^n F_{ky} \\ R_z &= \sum_{k=1}^n F_{kz} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

bo'ladi. Bosh vektorning moduli quyidagicha

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (7)$$

Bosh vektor $\bar{R}$ ning yo'nalishi, yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos(\bar{R}, \hat{ox}) = \frac{R_x}{R}; \cos(\bar{R}, \hat{oy}) = \frac{R_y}{R}; \cos(\bar{R}, \hat{oz}) = \frac{R_z}{R} \quad (8)$$

Bosh moment M_0 ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$\left. \begin{aligned} M_{ox} &= \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k) \\ M_{oy} &= \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k) \\ M_{oz} &= \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

formula yordamida aniqlanuvchi M_{ox} , M_{oy} , M_{oz} miqdorlar koordinata o'qlariga nisbatan bosh momentlar deyiladi. Qandaydir koordinata o'qiga nisbatan sistema kuchlarining bosh momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan momentlar algebraik yig'indisiga teng ekanligi (9) formuladan yaqqol ko'rinadi. Bosh momentning miqdor va yo'nalishi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} \quad (10)$$

$$\cos(\bar{M}_0, \hat{ox}) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \cos(\bar{M}_0, \hat{oy}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \cos(\bar{M}_0, \hat{oz}) = \frac{M_{0z}}{M_0} \quad (11)$$

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirilganda, bosh vektor bilan bosh moment orasidagi burchak ta'sir qilayotgan kuchlarga bog'liq bo'lib, ixtiyoriy bo'lishi, bu burchakni

aniqlash vektorlar skalyar ko'paytmasining ifodasidan

$$\begin{aligned} (\vec{R} \cdot \vec{M}_0) &= RM_0 \cos(\vec{R}, \vec{M}_0) \\ \text{Bundan } \cos(\vec{R}, \vec{M}_0) &= \frac{\vec{R} \cdot \vec{M}_0}{RM_0} = \frac{R_x M_{0x} + R_y M_{0y} + R_z M_{0z}}{RM_0} \quad (12) \end{aligned}$$

Agar $R \perp M_0$ bo'lsa, u holda

$$\cos(\vec{R}, \vec{M}_0) = 0$$

va

$$R_x M_{0x} + R_y M_{0y} + R_z M_{0z} = 0 \quad (13)$$

munosabat (13) bosh vektor bilan bosh moment o'zaro perpendikulyarlik alomatidir.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirilganda quyidagi hollar sodir bo'lishi mumkin.

1. $R = 0, M_0 \neq 0$

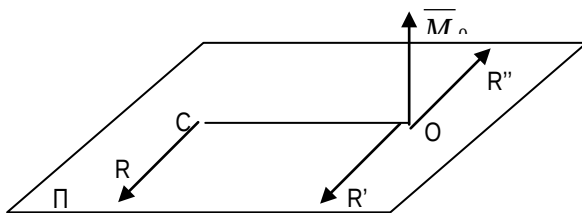
Bu holda kuchlar sistemasi momenti keltirish markaziga nisbatan bosh momentga teng bo'lgan juftga keltiriladi. Juft momenti moment markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaganligi uchun bosh moment ham keltirish markazining olinishiga bog'liq bo'lmaydi.

2. $R \neq 0, M_0 = 0$

Bu holda kuchlar sistemasi, ta'sir chizg'i keltirish markazidan o'tuvchi bir teng ta'sir etuvchiga keltiriladi.

3. $R \neq 0, M_0 \neq 0$ va $\vec{M}_0 \perp \vec{R}$

Bu holda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi, ta'sir chizig'i keltirish markazidan o'tmaydigan bir teng ta'sir etuvchiga keltiriladi. Haqiqatan R va M_0 fazoda ixtiyoriy joylashgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momenti bo'lsin va $M_0 \perp R'$ (5-shakl). Bosh moment M_0 ni $R=R''=R'$ bo'lgan (R, R'') juft bilan almashtiramiz. Bu juftning biror kuchini O nuqtaga qo'yib, R' kuchga qarama-qarshi qilib olamiz,



5-shakl

juftning yelkasi quyidagi shartdan aniqlanadi:

$$OC = \frac{M_0}{R'} \quad (14)$$

demak kuchlar sistemasi, $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \Leftrightarrow (\bar{R}', \bar{R}'', \dots, \bar{R})$, biroq sistema bo'lgani uchun $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \Leftrightarrow \bar{R}$ va berilgan kuchlar sistemasiga ekvivalent bo'lib, C nuqtaga qo'yiladi, O nuqtadan C nuqtagacha bo'lgan masofa (14) formula yordamida topiladi.

Biror nuqtaga nisbatan teng ta'sir etuvchining momenti bilan kuchlar sistemasini tashkil etuvchilari momentlari orasidagi munosabatini o'rnatamiz.

Fazodagi $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sir chizig'i C dan o'tuvchi R kuchga keltiriladi deb qaraylik. Teng ta'sir etuvchini ixtiyoriy O nuqtasiga nisbatan momenti $\bar{m}_0(R)$ ni aniqlaymiz. Ixtiyoriy O markazga nisbatan

$$m_0(\bar{R}) = R \cdot OC$$

modomiki

$$R = R' \text{ va } OC = \frac{M_0}{R'},$$

u holda

$$m_0(\bar{R}) = M_0$$

ya'ni teng ta'sir etuvchining momenti berilgan kuchlar sistemasi bosh momentiga teng. Teng ta'sir etuvchining moment vektori yo'nalishi O keltirish markaziga nisbatan bosh moment vektorining yo'nalishi bilan bir xil. Teng ta'sir etuvchi kuchning momenti $\bar{m}_0(\bar{R})$ bosh moment $\bar{M}_0$ ga geometrik teng ya'ni

$$\overline{m}_0(\overline{R}) = \overline{M}_0$$

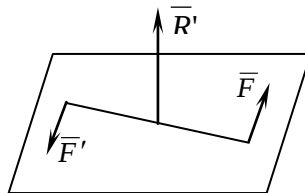
yoki (5) ga binoan

$$\overline{m}_0(\overline{R}) = \sum_{k=1}^n \overline{m}_0(\overline{F}_k) \quad (15)$$

(15) ifoda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun Varin'on teoremasini ifodalaydi: fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini O markazga nisbatan momenti berilgan kuchlardan shu markazga nisbatan olingan momentlarning geometrik yig'indisiga teng. Ixtiyoriy keltirish markazi O dan qandaydir OZ o'qini o'tkazamiz nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan undan o'tuvchi o'qqa nisbatan kuch momentlari orasidagi munosabatdan foydalanib va (15) vektorli tenglikni OZ o'qiga proyeksiyalab quyidagini olamiz:

$$\overline{m}_z(\overline{R}) = \sum_{k=1}^n \overline{m}_z(\overline{F}_k) \quad (16)$$

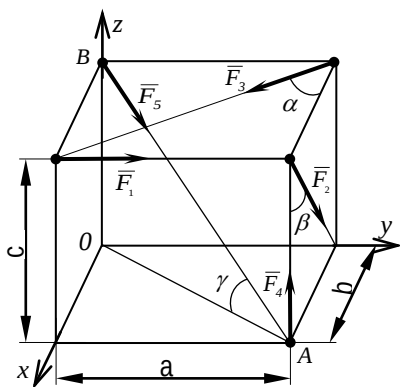
Teng ta'sir etuvchini ixtiyoriy OZ o'qiga nisbatan momenti haqidagi Varin'on teoremasini (16) tenglik ifodalaydi. Kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisini biror OZ o'qiga nisbatan momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng. Umumiy holda $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ va bosh vektor bilan bosh momenti o'zaro perpendikulyar bo'lmasa, u holda kuchlar sistemasi bosh vektor R' ga teng bo'lgan kuchga va bosh vektor perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotuvchi qandaydir juftga keltiriladi. Juft va juftning ta'sir tekisligiga perpendikulyar bo'lgan kuchdan tashkil topgan sistema dinamika deyiladi (6-shakl).



6-shakl

Masala Tomonlari a bo'lgan to'g'riburchakli parallelepipedning uchlariga $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5$ kuchlar qo'yilgan. Bosh vektor va bosh momentlar miqdor va yo'nalishlari aniqlansin.

Berilgan kuchlar sistemasi bir teng ta'sir etuvchiga, yoki bir juft kuchga keltirish mumkinligi tekshirilsin (7-shakl).



7-shakl

Berilgan: $a = 10\sqrt{3}$ m, $F_1 = 10$ N, $F_2 = 12$ N, $F_3 = 10$ N, $F_4 = 6\sqrt{3}$ N, $F_5 = 10\sqrt{7}$ N, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

Yechish: Koordinata sistemasini 85-shaklda ko'rsatilgandek aniqlaymiz. Dastavval quyidagilarni aniqlaymiz:

$$b = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 10 \text{ m}; \quad c = b \cdot \operatorname{ctg} \beta = 10\sqrt{3} \text{ m};$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 10\sqrt{7} \text{ m}; \quad \cos \gamma = \frac{OA}{AB} = \frac{2\sqrt{7}}{7}; \quad \sin \gamma = \frac{C}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Bosh vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini (6) formula yordamida aniqlaymiz:

$$R'_x = -F_2 \sin \beta + F_3 \cos \alpha + F_5 \cos \alpha \cos \gamma = -12 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,5 + 10\sqrt{7} \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot 0,5 = 9 \text{ N}.$$

$$R'_y = F_1 - F_3 \sin \alpha + F_5 \cos \gamma \sin \alpha = 10 - 10 \frac{\sqrt{3}}{2} + 10\sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18,7 \text{ N}$$

$$R'_z = -F_2 \cos \beta + F_4 - F_5 \sin \gamma = -12 \frac{\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{3} - 10\sqrt{7} \cdot \frac{21}{7} = -17,3 \text{ N}.$$

Bosh vektorning miqdori (7) formula yorlamida aniqlanadi:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z} = \sqrt{730,7}; \quad R' = 27 \text{ N}.$$

Bosh vektorning yo'nalishi (8) formula yordamida aniqlanadi:

$$\cos(\bar{R}, \overset{\wedge}{ox}) = \frac{R'_x}{R} = \frac{1}{3} = 0,333$$

$$\cos(\bar{R}, \overset{\wedge}{oy}) = \frac{R'_y}{R} = 0,693$$

$$\cos(\bar{R}, \overset{\wedge}{oz}) = \frac{R'_z}{R} = -0,64$$

Bosh momentning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini (9) formula yordamida aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} M_{0x} = \sum_{k=1}^n m_k(F_k) &= -F_1 \cdot c - F_2 \cdot \cos \beta \cdot a + F_3 \cdot \sin \alpha \cdot c + F_4 \cdot c - \\ &- F_5 \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot c = -10 \cdot 10\sqrt{3} - 12 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \cdot 10\sqrt{3} - \\ &- 10\sqrt{7} \cdot 2 \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10\sqrt{3} = -3,23 N \cdot m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{0y} = \sum_{k=1}^n m_y(F_k) &= F_3 \cos \alpha \cdot c - F_4 \cdot b + F_5 \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot c = 10 \cdot 0,5 \times \\ &\times 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \cdot 10 + 10\sqrt{7} \cdot 2 \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot 0,5 \cdot 10\sqrt{3} = 90\sqrt{3} = 155,7 N \cdot m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{0z} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k) &= F_1 \cdot b + F_2 \cdot \sin \beta \cdot a - F_3 \cdot \cos \alpha \cdot a = 10 \cdot 10 + 12 \cdot 0,5 \times \\ &\times 10\sqrt{3} - 10 \cdot 0,5 \cdot 10\sqrt{3} = 100 + 10\sqrt{3} = 117,3 N \cdot m. \end{aligned}$$

Bosh moment miqdorini (10) formuladan foydalanib aniqlaymiz:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = \sqrt{142330,78}; \quad M_0 \approx 377 N \cdot m$$

Bosh moment yo'nalishini (13) formuladan foydalanib aniqlaymiz:

$$\cos(\bar{M}_0, \overset{\wedge}{ox}) = \frac{M_{ox}}{M_0} = 0,857$$

$$\cos(\bar{M}_0, \overset{\wedge}{oy}) = \frac{M_{oy}}{M_0} = 0,413$$

$$\cos(\bar{M}_0, \overset{\wedge}{oz}) = \frac{M_{oz}}{M_0} = 0,311$$

Bosh vektor bilan bosh moment o'zaro perpendikulyarlik alomatlarini tekshiramiz

$$R'_x \cdot M_{0x} + R'_y \cdot M_{0y} + R'_z \cdot M_{0z} = -2024,4 \neq 0$$

ya'ni R' va M_0 vektorlar o'zaro perpendikulyar emaslar, demak bu kuchlar sistemasini bir teng ta'sir etuvchiga keltirib bo'lmaydi.

Agar fazodagi kuchlar sistemasining bosh vektori $\bar{R}$ va bosh momenti M_0 lar nolga teng bo'lsa, u holda kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi. Shuning uchun fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_0 = 0$$

yoki:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n m_0(\bar{F}_k) = 0 \quad (17)$$

Fazodagi kuchlar sistemasi uchun (17) muvozanatning zarur va yetarli shartlaridir. Agar (17) tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, fazodagi kuchlar sistemasi muvozanat shartlarining analitik ifodasini olamiz:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0 \quad (18)$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_z(\bar{F}_k) = 0; \quad (19)$$

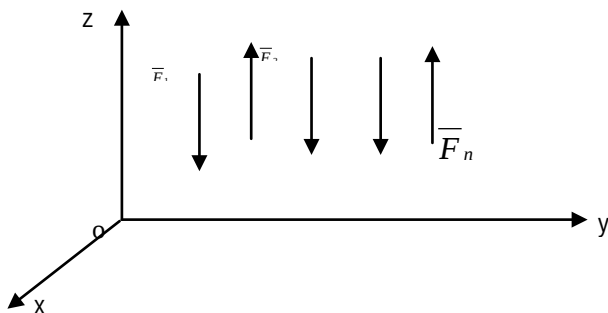
Agar (18) va (19) tengliklarda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etsa u holda bu tengliklar muvozanat tenglamalari deyiladi va ulardan noma'lum bog'lanish reaksiya kuchlari aniqlanadi. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar fazoda ixtiyoriy joylashgan bo'lib, bu kuchlar muvozanatiga oid masalalarda noma'lumlar soni oltitadan oshmasa, statik aniq masala deyiladi. Boshqa xususiy hollardagi kuchlar sistemasi uchun muvozanat sistemalari (18) va (19) lardan kelib chiqadi.

Berilgan kuchlar sistemasi OZ o'qiga parallel (8-shakl).

U holda bu kuchlar sistemasining har bir F_z kuchi OX va OY o'qlaridagi proyeksiyalari va OZ o'qiga nisbatan momentlari O ga teng, shuning uchun (18) va (19) tenglamalar sistemasidan faqat quyidagi tenglamalar qoladi:

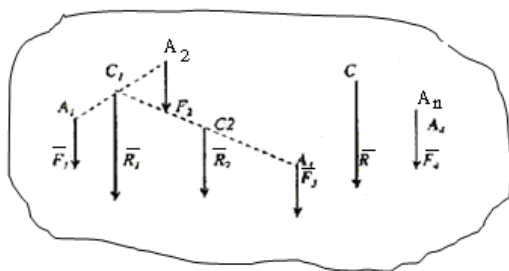
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0 \quad (20)$$

Tenglamalar (20) fazoda parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari deyiladi.



8-shakl

Bir tekislikda yotmaydigan ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$) parallel kuchlar sistemasini ko'ramiz (9-shakl)



9-shakl

kuchlarni ketma-ket qo'shamiz $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarni qo'shib, ularga parallel bo'lgan $\overline{R}_1$ teng ta'sir etuvchisini topamiz. Uning miqdori $R_1 = F_1 + F_2$ ga teng bo'lib, qo'yilish nuqtasi quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{A_1 C_1}{A_2 C_1} = \frac{F_2}{F_1}$$

Endi $\overline{R}_1$ va $\overline{F}_3$ kuchlarni qo'shamiz ularning teng ta'sir etuvchisi R_2 ning miqdori quyidagiga teng:

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$$

qo'yilish nuqtasi esa quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{C_1 C_2}{A_3 C_2} = \frac{F_3}{R_2}$$

Endi R_2 va F_4 kuchlarning teng ta'sir etuvchisining miqdori

$$R = R_2 + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

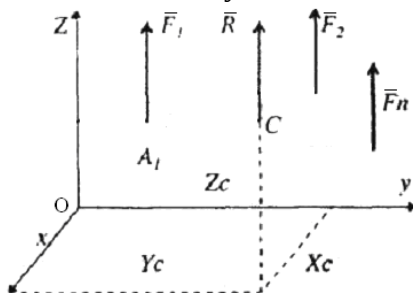
bo'lib, qo'yilish nuqtasi S nuqta quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{A_2 C}{A_4 C} = \frac{F_4}{R}$$

Yuqoridagi tavsifdan ko'rinadiki, n ta parallel kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi ularning yig'indisiga teng:

$$R = \sum_{k=1}^n F_k$$

Qo'yilish nuqtasi esa kuchlarning fazodagi yo'nalishlariga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham agar kuchlarning hammasini ularning qo'yilish nuqtalari atrofida teng burchakka bir tomonga bursak, ularning teng ta'sir etuvchisi ham shu burchakka C nuqta atrofida buriladi. Teng ta'sir etuvchi ta'sir chizig'i har doim parallel kuchlarning fazoda har qanday yo'nalishida ham C nuqtadan o'tadi. C nuqta parallel kuchlar markazi deyiladi.



10-shakl

Parallel kuchlar sistemi markazining koordinatalarini aniqlash uchun koordinata sistemi OZ o'qini berilgan kuchlar sistemasiga parallel qilib olamiz (10-shakl). Kuchlar qo'yilgan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda $x_1, y_1, z_1', x_2, y_2, z_2', \dots, x_n, y_n, z_n'$. Parallel kuchlar markazi C nuqtaning kichik x, y, z koordinatalarini X_c, Y_c, Z_c deb belgilaymiz. Teng ta'sir etuvchining OX o'qiga nisbatan momenti haqidagi teoremani tatbiq qilamiz:

$$m_x(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_x(F_k) \text{ yoki } R \cdot Y_c = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n$$

$$\text{bundan } y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + \dots + F_n \cdot y_n}{R} \text{ yoki } y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}$$

Shu teoremani OY o'qiga nisbatan tatbiq qilib Xc koordinatani aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}$$

Endi koordinatani aniqlash uchun hamma kuchlarni bir tomonga OY o'qiga parallel qilib 90^0 ga buramiz va teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi teoremani OX o'qiga nisbatan tatbiq qilamiz. Shunday qilib parallel kuchlar markazi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi.

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n F_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^n F_k} \quad (21)$$

Biror yo'nalishni musbat tanlab olib, (21) formula yordamida nuqta koordinatalari x_c , y_c , z_c larni aniqlanayotganda kuchlarning qiymatlari mos ishoralar bilan olinishi zarur.

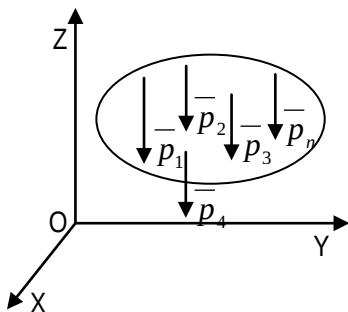
Jismni elementar bo'lakchalarga bo'lib, har bir bo'lakka ularning og'irlik kuchlarini qo'yamiz. U holda parallel kuchlar sistemasini hosil qilamiz (11-shakl). Parallel og'irlik kuchlar sistemasining markazi, jismning og'irlik markazi bo'ladi. Jismning og'irlik markazining koordinatalari (21) formulaga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n P}; \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n P}; \quad Z_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^n P} \quad (22)$$

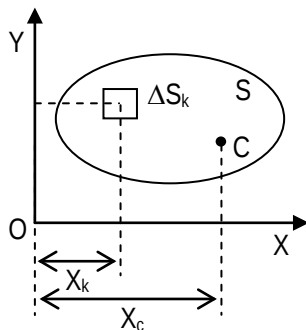
bu yerda R-jism og'irligi. Bir jinsli jism uchun

$$P_k = \gamma \Delta V_k; P = \gamma W$$

bu yerda ΔV_k -elementar bo'lakchanning hajmi, V -jism hajmi, γ - birlik hajmining og'irligi.



12-shakl



13-shakl

P_k va P larning qiymatlarini (22) formulalarga qo'yib quyidagilarni olamiz:

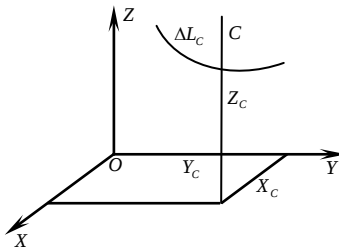
$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n X_k \Delta V_k}{V}; Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \Delta V_k}{V}; Z_c = \frac{\sum_{k=1}^n Z_k \Delta V_k}{V}; \quad (23)$$

Agar jism yupqa bir jinsli plastinka bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi (13-shakl):

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^n X_k \Delta \rho_k}{\rho}; Y_c = \frac{\sum_{k=1}^n Y_k \Delta \rho_k}{\rho} \quad (24)$$

bu yerda ΔS_k -elementar bo'lakchanning yuzasi S -butun plastinka yuzasi. Agar jism bir jinsli chiziqdan (14-shakl) iborat bo'lsa, uning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n X_k \Delta L_k; Y_c = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n Y_k \Delta L_k; Z_c = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n Z_k \Delta L_k \quad (25)$$



14-shakl

Quyidagi belgilarni kiritamiz:

$$S_k = \sum_{k=1}^n Y_k \Delta S_k ; S_y = \sum_{k=1}^n X_k \Delta S_k \quad (26)$$

U holda (26) formulalarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$X_c = \frac{S_y}{S} ; Y_c = \frac{S_x}{S} \quad (27)$$

Bu yerda S_x yuzaning OX o'qiga nisbatan statik momenti deb ataladi, S_y esa Oy o'qiga nisbatan yuzaning statik momenti deb ataladi. Agar yuza og'irlik markazining koordinatalari aniq bo'lsa, uning statik momenti quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$S_x = S \cdot Y_c ; S_y = S \cdot X_c \quad (28)$$

Teorema: Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligi o'qi yoki markaziga ega bo'lsa, u holda uning og'irlik markazi mos ravishda shu tekislikda, o'q yoki markazda yotadi.

Isbot: Jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsin (96-shakl). U holda teoremaga asosan

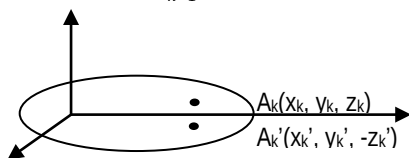
$$Z_c = 0 \text{ yoki } \sum_{k=1}^n Z_k \Delta V_k = 0$$

bo'ladi, shunga ko'ra jism elementar $A_1, A_2, \dots, A_n$ bo'laklarining hajmlarini mos ravishda quyidagicha bo'lgan

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$$

bo'lakchalarga bo'lamiz. Simmetriya o'qiga ega bo'lganligi sababli har qanday X_k, Y_k, Z_k koordinatali A_k bo'lakcha OXY tekisligiga nisbatan simmetrik bo'lgan A'_k nuqtaga mos keladi, uning koordinatalari $X_k, Y_k, -Z_k$ bo'ladi. Quyidagi ko'paytmalarni $Z_k \Delta V_k$ tuzib qo'shsak quyidagini olamiz:

$$\sum_{k=1}^n Z_k \Delta V_k = 0$$



15-shakl

u holda $Z_1 = 0$ bo'ladi. Xuddi shunday qolgan hollar ya'ni jism simmetrik o'q yoki markazga ega bo'lgan hollar isbot qilinadi.

Agar bir jinsli qattiq jismni og'irlik markazlari ma'lum bo'lgan chekli sonli geometrik shakllarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda uning og'irlik markazining koordinatalari (23), (24), (25) formulalar yordamida aniqlanadi. Agar qattiq jismda teshiklar mavjud bo'lsa, uning og'irlik markazini aniqlashda jismni to'liq deb qaraladi, teshiklar va yetishmovchi yuza yoki hajmga tegishli hadlar manfiy ishoralar bilan olinadi. Bu usulni manfiy yuzalar (hajmlar) usuli deb ataladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi deb qanday kuchlarga aytiladi?
2. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori deb qanday vektorga aytiladi?
3. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori qanday hisoblanadi?
4. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Kuchning o'qqa nisbatan momenti ishorasi qanday bo'ladi?
6. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qachon nolga teng?
7. Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasida qanday bog'lanishlar bor?
8. Fazodagi juft kuch momenti vektori nima?
9. Juft kuchni o'z tekisligiga parallel tekislikka ko'chirilsa uning jismga ta'siri qanday bo'ladi?
10. Kesishuvchi tekislikda joylashgan juft kuchlarni qanday qo'shish mumkin?

11. Bosh vektor va bosh moment deb qanday vektorlarga aytiladi?
12. Bosh vektor va bosh momentning analitik ifodalari qanday?
13. Bosh vektor va bosh moment bir markazga keltirilsa, qanday hollar bo'ladi?
14. Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasini aytib bering.
15. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
16. Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?

4-amaliyot: Fazodagi ixtiyoriy kuchlar sistemasiga oid masalalar yechish

11-masala. Tirsakli valga mikdorlari $F_1=3\kappa H$ ($\overline{F_1} // (\overline{y_A})$) va $F_2=4 \kappa H$ ($\overline{F_2} // (\overline{z_A})$) bo'lgan kuchlar ta'sir qiladi. Agar valni bir jinsli deb xisoblasak ($G=0.4 \kappa H$) A va B nuqtalardagi reaksiya kuchlari va karshilik momenti M_K qanday qiymatlarga ega bo'ladilar ?

Berilgan:

$$F_1=3 (\kappa H);$$

$$a=0,1 (m);$$

$$c=0,05 (m);$$

$$b=0,15$$

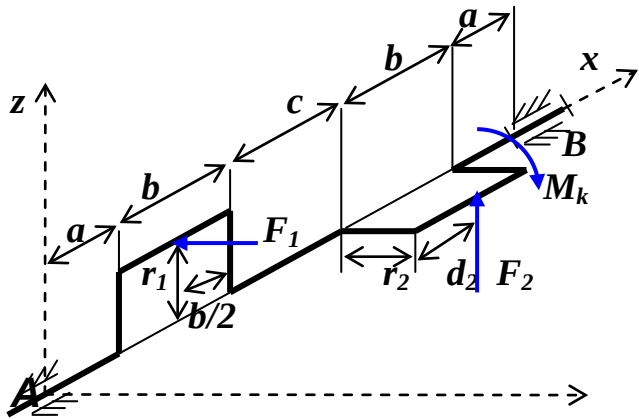
$$(m);$$

$$F_2=4 (\kappa H);$$

$$G=0,4 (\kappa H);$$

$$r_1=0,08$$

$$(m); r_2=0,1 (m).$$



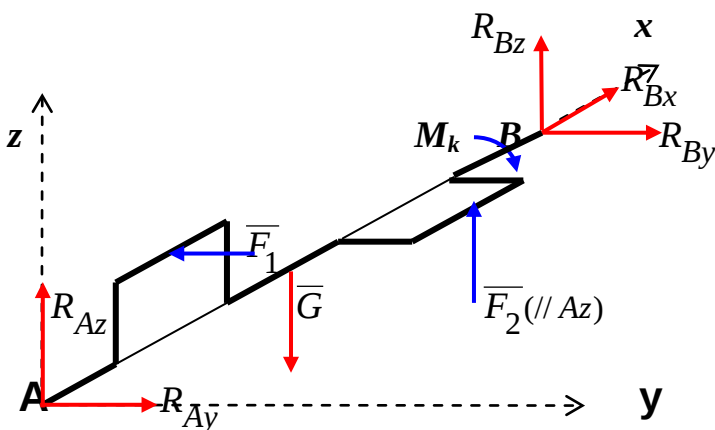
11.1-rasm.

Topish kerak: M_K , R_A , R_V

Yechish:

1. Tirsakli valni xisoblash chizmasini chizamiz. Buning uchun A nuqtaga xyz koordinata o'qlarini joylashtirib qalin chiziq bilan

valning ko'rinishini chizamiz . $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ vektorlarni parallel ravishda xisob sxemasiga ko'chiramiz. A nuqtada reaksiya kuchi vektorining ikkita proeksiyalarini, ya'ni R_{Ay} va R_{Az} larni qo'rsatamiz, B nuqtada esa reaksiya kuchi vektorining uchchala proeksiyalarini, ya'ni R_{Bx} , R_{By} va R_{Bz} larni ko'rsatamiz. (B nuqtada x o'qi bo'yicha xam harakat cheklanganligi sababli, R_{Bx} proeksiya xam ko'rsatiladi). Og'irlik kuchi vektori G AB kesmaning o'rtasiga joylashadi (11.2-rasm).



2. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Mazkur kuchlar sistemasi fazoda ixtiyoriy joylashganligi va noma'lum reaksiyalar soni 6 ta bo'lganligi uchun 6ta muvozanat tenglamalarini tuzamiz. Bulardan 3 tasi kuchlar tenglamalari, qolgan 3 tasi esa momentlar tenglamalari.

$$\sum F_{ix}=0; R_{Bx} = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy}=0; \quad R_{Ay} + R_{By} - F_1 = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{iz}=0; \quad R_{Az} + R_{Bz} - G + F_2 = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_x(\overline{F_i})=0; \quad M_k - F_1 \bullet r_1 - F_2 \bullet r_2 = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_y(\overline{F_i})=0;$$

$$F_2 \bullet (a + c + 1,5b) - G \bullet (a + b + 0,5c) + R_{Bz} \bullet (2a + 2b + c) = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_z(\overline{F_i})=0;$$

$$F_1 \bullet (a + 0,5b) - R_{By} \bullet (2a + 2b + c) = 0; \quad (6)$$

3. Tenglamalarni echamiz

$$(1) \rightarrow R_{Bx} = 0 \quad (4) \rightarrow$$

$$M_k = F_1 \bullet r_1 + F_2 \bullet r_2 = 3 \bullet 0,08 + 4 \bullet 0,1 = 0,64; (kH \bullet m)$$

$$(5) \rightarrow R_{Bz} = \frac{-F_2 \bullet (a + c + 1,5b) + G \bullet (a + b + 0,5c)}{(2a + 2b + c)} =$$

$$= \frac{-4 \bullet (0,1 + 0,05 + 1,5 \bullet 0,15) + 0,4 \bullet (0,1 + 0,15 + 0,5 \bullet 0,05)}{(2 \bullet 0,1 + 2 \bullet 0,15 + 0,05)} = -2,53; (kH) \quad (6) \rightarrow$$

$$R_{By} = \frac{F_1 \bullet (a + 0,5b)}{(2a + 2b + c)} = \frac{3 \bullet (0,1 + 0,5 \bullet 0,15)}{(2 \bullet 0,1 + 2 \bullet 0,15 + 0,05)} = 0,95; (kH)$$

$$(2) \rightarrow R_{Ay} = F_1 - R_{By} = 3 - 0,95 = 2,05; (kH)$$

$$(3) \rightarrow R_{Az} = -R_{Bz} + G - F_2 = -(-2,53) + 0,4 - 4 = -1,07; (kH)$$

Natijalardan qo'rinib turibdiki R_{Az} va R_{Bz} vektor proeksiyalar aslida chizmadagiga nisbatan teskari yo'nalgan.

4. Reaksiya larning qiymatlarini xisoblaymiz:

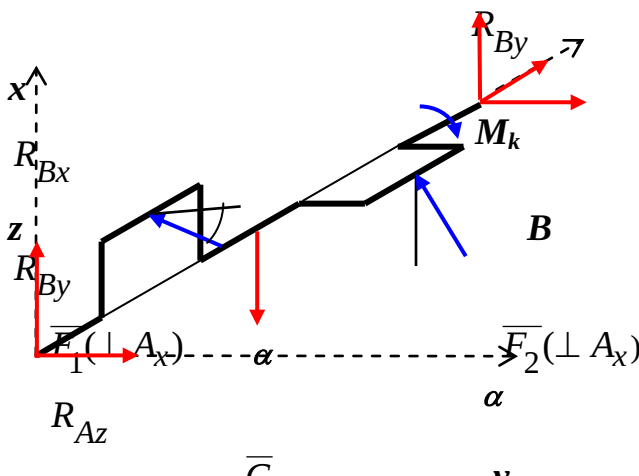
$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{2,05^2 + (-1,07)^2} = 2,31; (kH)$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = \sqrt{0^2 + 0,95^2 + (-2,53)^2} = 2,7; (kH)$$

Javob: $M_k = 0,64; (kH \cdot m); \quad R_A = 2,31; (kH);$

$$R_B = 2,7; (kH).$$

12-masala. Endi o'nbirinchi masalada ko'rilgan valni F_1 kuch vektori $\alpha = 30^\circ$ chap tomonga va F_2 kuch vektori $\alpha = 30^\circ$ o'ng tomonga burilib kolgandagi xolatini ko'ramiz. U xolda vektorlar $\overline{F_1} \perp A_x$ va $\overline{F_2} \perp A_x$ xolatlarini egallashadi. Berilganlarning qiymatlari o'zgarmaydi (12.1-rasm).



1. Ushbu xolat uchun xisob sxema chizamiz

2. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{ix}=0; R_{Bx}=0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy}=0; R_{Ay} + R_{By} - F_1 \cdot \cos \alpha - F_2 \cdot \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{iz}=0; R_{Az} + R_{Bz} - G + F_1 \cdot \sin \alpha + F_2 \cdot \cos \alpha = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_x(\overline{F_i})=0;$$

$$M_k - F_1 \cdot \cos \alpha \cdot r_1 - F_2 \cdot \cos \alpha \cdot r_2 = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_y(\overline{F_i})=0; F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a + 0,5b) - G \cdot (a + b + 0,5c) +$$

$$+ F_2 \cdot \cos \alpha \cdot (a + c + 1,5b) + R_{Bz} \cdot (2a + 2b + c) = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_z(\overline{F_i})=0;$$

$$F_1 \cdot \cos \alpha \cdot (a + 0,5b) + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (a + c + 1,5b) - \\ - R_{By} \cdot (2a + 2b + c) = 0; \quad (6)$$

3. Tenglamalarni echamiz

$$(1) \rightarrow R_{Bx} = 0$$

$$(4) \rightarrow M_k = F_1 \cdot \cos \alpha \cdot r_1 + F_2 \cdot \cos \alpha \cdot r_2 =$$

$$= 3 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,08 + 4 \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,1 = 0,55; (kH \cdot m)$$

$$(5) \rightarrow$$

$$R_{Bz} = \frac{-F_1 \cdot \sin \alpha \cdot (a + 0,5b) + G \cdot (a + b + 0,5c) - F_2 \cdot \cos \alpha \cdot (a + c + 1,5b)}{(2a + 2b + c)} =$$

$$= \frac{-3 \cdot \sin 30^\circ \cdot (0,1 + 0,5 \cdot 0,15) + 0,4 \cdot (0,1 + 0,15 + 0,5 \cdot 0,05)}{(2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 + 0,05)} - \frac{4 \cdot \cos 30^\circ \cdot (0,1 + 0,05 + 1,5 \cdot 0,15)}{(2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 + 0,05)} = -2,34; (kH); \quad (6) \quad \rightarrow$$

$$R_{By} = \frac{F_1 \cdot \cos \alpha \cdot (a + 0,5b) + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (a + c + 1,5b)}{(2a + 2b + c)} =$$

$$= \frac{3 \cdot \cos 30^\circ \cdot (0,1 + 0,5 \cdot 0,15) + 4 \cdot \sin 30^\circ \cdot (0,1 + 0,05 + 1,5 \cdot 0,15)}{(2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 + 0,05)} = 2,18; (kH)$$

;(2)→

$$R_{Ay} = F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \sin \alpha - R_{By} = 3 \cdot \cos 30^\circ + 4 \cdot \sin 30^\circ - 2,18 = 2,4; (kH)$$

$$(3) \rightarrow R_{Az} = G - F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \cos \alpha - R_{Bz} =$$

$$= 0,4 - 3 \cdot \sin 30^\circ - 4 \cdot \cos 30^\circ - (-2,34) = -2,2; (kH)$$

4. Reaksiya larning qiymatlarini xisoblaymiz:

$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{2,4^2 + (-2,2)^2} = 3,26; (kH)$$

$$R_B = \sqrt{R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = \sqrt{2,18^2 + (-2,34)^2} = 3,2; (kH)$$

Xulosa qilib aytganda, natijalardan ko'rinib turibdiki $\overline{F_1}$ va

$\overline{F_2}$ kuchlarning vektorlari α burchakka burilganda (turli tomonga)

valning qarshilik momenti M_k kamaydi. Demak 2-xolatda kuchlar kamroq burovchi moment xosil qilishadi, lekin reaksiya kuchlari R_A va R_B ortib ketar ekan.

5-ma'ruza. Nuqta kinematikasi (4 soat)

Reja:

1. Nuqta harakatini aniqlash usullari
2. Nuqtaning tezligi
3. Nuqtaning tezlanishi

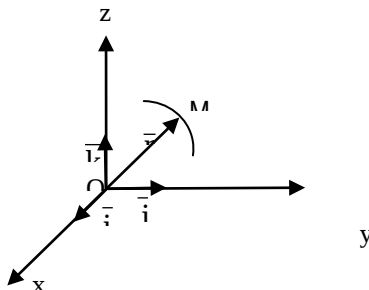
Agar istalgan t vaqt uchun nuqtaning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan holati (vaziyati) ma'lum bo'lsa, mazkur sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakat qonuni ma'lum bo'ladi. Kinematikada nuqtaning harakat qonuni uchta usulda aniqlanadi:

1. Vektor usuli
2. Koordinata usuli
3. Tabiiy usul

1. Vektor usuli: Bu usulda M nuqtaning holati biror qo'zg'almas markazdan $\vec{r}(t)$ radius vektori bilan aniqlanadi (1-shakl). Vaqtning o'tishi bilan M nuqta harakatlanganda uning $\vec{r}$ -radius vektori ma'lum qonun asosida o'zgaradi. Ya'ni skalyar argument t ning vektorli funksiyasidan iborat bo'ladi.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.1)$$

Arap $\vec{r}(t)$ funksiya ma'lum bo'lsa, t vaqtning har bir payti uchun M nuqtaning holati ma'lum bo'ladi.



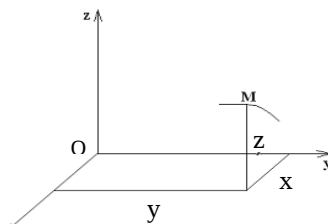
1-shakl

Shu sababli, (1.1)-tenglamani nuqtaning harakat tenglamasi, yoki harakat qonuni deyiladi. $\vec{r} = \text{const}$ bo'lsa, nuqta tinch holatda bo'ladi. Nuqta harakatini vektor usulida aniqlash harakatni

o'rganishni soddalashtiradi, shuning uchun bu usuldan kinematika va dinamikada keng foydalaniladi.

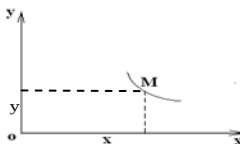
2. Koordinata usuli: Bu usulda harakatlanayotgan M nuqtaning holati uning uchta x , y , z to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari orqali aniqlanadi (2-shakl). Nuqta harakatlanganda uning koordinatlari vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. Binobarin, M nuqtaning koordinatlari x , y , z vaqtning bir qiymatli va uzluksiz differensiallanadigan funksiyasidan iborat bo'ladi.

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$



2-shakl

Nuqta koordinatalari bilan t vaqt orasidagi (1.2) munosabatlar berilgan bo'lsa, M nuqtaning fazoda istalgan paytdagi holati ma'lum bo'ladi. Shu sababli nuqtaning Dekart koordinatalaridagi harakat tenglamalari deb ataluvchi (1.2) tenglamalar nuqtaning holatini butunlay aniqlaydi, (1.2) tenglamalardan t vaqtini yo'qotib, nuqta trayektoriyasining tenglamasi aniqlanadi. Agar nuqta trayektoriyasi bir tekislikda yotsa, u holda OXY tekisligi uchun mazkur trayektoriya yotgan tekislikni olamiz (3-shakl). Natijada nuqtaning ikkita harakat tenglamalariga ega bo'lamiz.



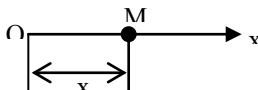
3-shakl

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= x(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

(1.3) tenglamalarga nuqtaning tekislikdagi harakat tenglamalari deyiladi. Moddiy nuqta o'zining fazodagi harakati natijasida to'g'ri chiziqli yo'lni o'tsa, bunday harakat to'g'ri chiziqli harakat deyiladi. O nuqtani koordinatalar boshi desak, biror M nuqta harakatlanmasdan oldin O da yoki O dan ma'lum uzoqlikda bo'ladi. (4-shakl) Nuqtaning to'g'ri chiziqli harakati bitta

$$x=x(t) \quad (1.4)$$

tenglama bilan aniqlanadi.



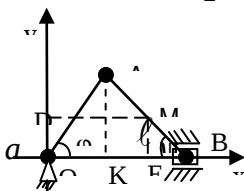
4-shakl

1-masala OA krivoship doimiy ω burchak tezligi bilan aniqlanadi. Uzunlik $OA=a$, $AB=\ell$. Shatun o'rtasidagi M nuqtaning harakat tenglamasi va trayektoriya tenglamasi aniqlansin. Shuningdek B polzunning harakat tenglamasi topilsin. Harakat boshlanishida B polzun o'ngdagi eng chetki holatda bo'lsin. Koordinata o'qlari shaklda ko'rsatilgan $l=a$ bo'lsin.

Yechish: M nuqtadan koordinata o'qlariga MD va ME perpendikulyarlar tushiramiz. Shakldan (5-shakl)

$$X=OE=OK+KE=OA \cdot \cos \varphi + AM \cdot \cos \psi$$

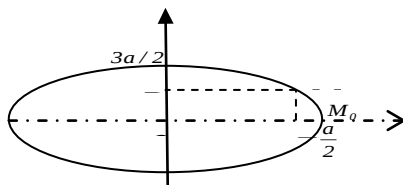
$$Y = ME = \frac{1}{2} \sin \psi$$



5-shakl

$l=a$ bo'lgani uchun $\varphi=\psi$ bo'ladi, u holda

$$X = a \cos \varphi + \frac{a}{2} \cos \varphi = \frac{3a}{2} \cos \varphi \quad Y = \frac{a}{2} \sin \varphi$$



6-shakl

Bizda $\varphi = \omega \cdot t$ u holda

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{3a}{2} \cos \omega \cdot t \\ Y &= \frac{a}{2} \sin \omega \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1) tenglamalar sistemasi M nuqtaning harakat tenglamalari bo'ladi. Bu tenglamalardan vaqt t ni yo'qotsak, trayektoriya tenglamalasini topamiz. Sinus va kosinus funksiyalarning argumentlari bir xil bo'lsa, vaqt t ni yo'qotish uchun (1) tenglamalarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{a} \\ \sin \omega t &= \frac{2}{a} \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) tenglamalarning ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \omega \cdot t &= \frac{4}{9} \cdot \frac{x^2}{a^2} \\ \sin^2 \omega \cdot t &= \frac{4}{a^2} \cdot y^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

o'zaro qo'shib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{4x^2}{9a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1 \quad yoki \quad \frac{\frac{x^2}{9a^2}}{\frac{4}{4}} + \frac{\frac{y^2}{a^2}}{\frac{4}{4}} = 1 \quad (4)$$

(4) ko'rinishdagi trayektoriya tenglamasini olamiz. M

nuqtaning trayektoriyasi (4) tenglama yarim o'qlari $\frac{3a}{2}$ va $\frac{a}{2}$ ga teng bo'lgan va markazi koordinata boshida bo'lgan ellipsdan iboratdir (6-shakl). Endi B polzunining harakat tenglamasini topamiz. 5-shakldan:

$$X=OB=ac\cos\varphi+lc\cos\varphi=ac\cos\varphi+ac\cos\varphi=2ac\cos\varphi \text{ yoki } X_B=2ac\cos\varphi$$

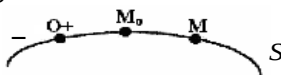
3.Tabiiy usul: Harakatlanayotgan nuqtaning trayektoriyasi oldindan ma'lum bo'lsa, nuqta harakatini tabiiy usulda aniqlash qulay. Nuqtaning trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan yoki egri chiziqdan iborat bo'ladi. Traektoriyada qo'zg'almas O nuqtani olib, bu nuqtaga nisbatan yoy koordinatasini o'tkazamiz (7-shakl). Harakatlanayotgan M nuqtaning trayektoriyadagi holatini O nuqtadan trayektoriya bo'yicha $OM=S$ yoy koordinatasi bilan aniqlaymiz. O nuqtadan bir tomonga qo'yilgan masofani musbat, ikkinchi tomonga qo'yilgan masofani manfiy, deb hisoblaymiz. Vaqtning o'tishi bilan harakatlanayotgan nuqtadan qo'zg'almas O nuqtagacha bo'lgan OM masofa o'zgaradi, ya'ni koordinatasi vaqtning funksiyasidan iborat:

$$S=f(t) \quad (1.5)$$

Bu munosabatga nuqtaning tabiiy usuldagi harakat tenglamasi yoki harakat qonuni deyiladi.

Agar $f(t)$ funksiya ma'lum bo'lsa, u holda t vaqtning har bir payti uchun OM ni aniqlab, O nuqtadan trayektoriya bo'yicha qo'yamiz. Natijada M nuqtaning berilgan t paytdagi holati aniqlanadi. Shunday qilib, M nuqtaning harakatini tabiiy usulda aniqlash uchun, uning trayektoriyasida O qo'zg'almas nuqta (hisoblash boshi) va yoy koordinatasining hisoblash yo'nalishi hamda $S=f(t)$ harakat tenglamasi bo'lishi kerak. Nuqtaning S yoy koordinatasi bilan trayektoriya ustidan o'tgan OM yo'li doimo bir xil bo'lavermaydi.

Agar M nuqtaning harakati O qo'zg'almas nuqtadan boshlanib $\Delta t = t - t_0$ vaqt oralig'ida doimo musbat yo'nalishi bo'yicha bo'lsa, t vaqtda nuqtaning yoy koordinatasi bilan Δt vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l o'zaro teng.



7-shakl

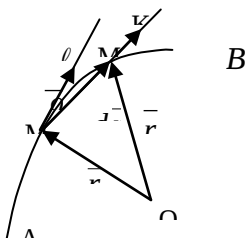
Agar t_0 boshlang'ich vaqtda nuqta M_0 holatda bo'lib, Δt vaqtdan keyin M holatni egallasa, u holda Δt oralig'ida nuqtaning bir tomonga harakatlanishi natijasida o'tilgan yo'l:

$$S = \int_{t_0}^t f'(t) dt$$

formula bilan aniqlanadi.

Nuqta tezligi vektor miqdor bo'lib, nuqta harakatining berilgan momentdagi tezligi va bu harakatning yo'nalishini harakterlaydi. Nuqta AB egri chiziqli trayektoriya chizgan bo'lsin, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ - harakat tenglamasi. Harakatlanayotgan bu nuqta holatini ixtiyoriy olingan qo'zg'almas O nuqtadan o'tkazilgan, uning $\vec{r}(t)$ radius vektorini bilan aniqlanadi (8-shakl). Kichik vaqt Δt oralig'ida esa ya'ni $t + \Delta t$ momentda M' holatni olsin. M' nuqtaning radius vektorini $\vec{r}_1$ bilan belgilaymiz. MM' vektor nuqtaning Δt vaqtdagi ko'chishi deb ataladi. MM' ko'chishni vaqt oralig'i Δt ga nisbatini ifodalovchi $\overline{MK}$ vektorni o'rtacha tezlik deyiladi. Agar nuqtaning o'rtacha tezligini $\vec{g}^*$ bilan belgilasak,

$$\vec{g}^* = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \overline{MK} \quad \text{ga teng.}$$



8-shakl

Endi Δt ni nolga intiltirib boramiz, bunda M' nuqta M nuqtaga intiladi. $\overline{\mathcal{G}}^*$ vektor yo'nalishining limiti trayektoriyaning M nuqtasidagi urinma yo'nalishiga mos keladi, uning moduli esa,

$$\overline{\mathcal{G}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{\mathcal{G}}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{MK} = \overline{MI}$$

Ammo $\Delta OMM'$ uchburchakdan $\overline{r}_1 = \overline{r} + \overline{MM'}$, $\overline{MM'} = \overline{r}_1 - \overline{r} = \overline{\Delta r}$ olamiz. Bu yerda Δr harakatlanayotgan nuqta radius vektorining Δt vaqtdagi o'zgarishidir. Shuning uchun $\overline{\mathcal{G}}^* = \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}$ va $\overline{\mathcal{G}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}$.

Demak,

$$\overline{\mathcal{G}} = \frac{d\overline{r}}{dt} \quad (1.6)$$

ya'ni *harakatlanayotgan nuqta tezligi bu nuqtaning radius vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasiga teng.*

Nuqta harakati koordinat usulda berilgan bo'lsin:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

$\overline{r}$ radius vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali yozish mumkin.

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} \quad (1.8)$$

Bu yerda $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan birlik vektorlardir. Tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari $\mathcal{G}_x$, $\mathcal{G}_y$, $\mathcal{G}_z$ bo'lsin, u holda $\overline{\mathcal{G}}$ ni quyidagicha yozish mumkin.

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_x \overline{i} + \mathcal{G}_y \overline{j} + \mathcal{G}_z \overline{k} \quad (1.9)$$

(1.8) va (1.9) ni (1.6) ga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\mathcal{G}_x \bar{i} + \mathcal{G}_y \bar{j} + \mathcal{G}_z \bar{k} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}$$

Ifoda ayniyat bo'lgani uchun birlik vektorlar oldidagi koeffitsientlar tegishli bo'lishi kerak:

$$\mathcal{G}_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \mathcal{G}_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad \mathcal{G}_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (1.10)$$

Demak, tezlik vektorining koordinata o'qidagi proyeksiyasi harakatdagi nuqta koordinatasidan vaqtga nisbatan olingan hosilaga teng bo'lar ekan.

Vektorning proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli va yo'nalishini topish mumkin. U proyeksiyalarga qurilgan parallelopiped diagonaliga teng, shunga ko'ra:

$$\mathcal{G} = \sqrt{\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2 + \mathcal{G}_z^2}$$

Tezlik vektorining yo'naltiruvchi kosinuslari uchun quyidagi formulalarni yozamiz

$$\cos(\hat{\mathcal{G}}, \bar{i}) = \frac{\mathcal{G}_x}{\mathcal{G}}; \quad \cos(\hat{\mathcal{G}}, \bar{j}) = \frac{\mathcal{G}_y}{\mathcal{G}}; \quad \cos(\hat{\mathcal{G}}, \bar{k}) = \frac{\mathcal{G}_z}{\mathcal{G}}$$

Harakat tekislikda bo'lsa, X, Y o'qlarni harakat tekisligida olamiz

$$\mathcal{G}_x = \frac{dx}{dt}; \quad \mathcal{G}_y = \frac{dy}{dt}; \quad \mathcal{G} = \sqrt{\mathcal{G}_x^2 + \mathcal{G}_y^2}$$

$$\cos(\hat{\mathcal{G}}, \bar{i}) = \frac{\mathcal{G}_x}{\mathcal{G}}; \quad \cos(\hat{\mathcal{G}}, \bar{j}) = \frac{\mathcal{G}_y}{\mathcal{G}}$$

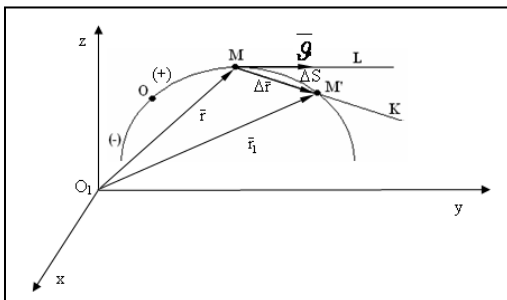
Nuqta berilgan trayektoriya bo'ylab $S=f(t)$ qonuniga muvofiq harakatlanayotgan bo'lsin. Nuqta t vaqtda M vaziyatda va $t+\Delta t$ momentda esa M' vaziyatda bo'lsin (9-shakl)

$$\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{S'} - \overline{S} = \Delta \overline{S}$$

bo'ladi.

Trayektoriyasi ma'lum bo'lgandagi nuqtaning istalgan momentdagi tezlik vektori urinma bo'ylab yo'naladi. Shuning uchun bizga tezlikning modulini topishgina qoladi. Ma'lumki, tezlik

$$\overline{\mathcal{G}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{\mathcal{G}}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$$



9-shakl

Shakl almashtirish kiritamiz

$$\overline{\mathcal{G}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau} \text{ bo'lgani uchun tezlik moduli}$$

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = f'(t) \quad (1.11)$$

bo'ladi.

$ds/dt > 0$ bo'lsa, S o'sib boradi.

$\frac{ds}{dt} < 0$ bo'lsa harakat teskari sodir bo'ladi, keyingi holda tezlik

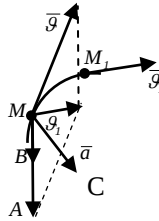
moduli uchun $\frac{ds}{dt}$ ning absolyut qiymati olinadi, ya'ni $\mathcal{G} = |\frac{ds}{dt}|$.

Agar $\frac{ds}{dt} = \mathcal{G} = \text{const}$ bo'lsa, harakat tekis bo'ladi ya'ni $S = S_0 + \mathcal{G}t$,

agar $t=0$ da $S_0=0$ bo'lsa, $S = \mathcal{G}t$ bo'ladi.

Nuqtaning tezlanishi vektor kattalik bo'lib, berilgan daqiqadagi nuqta tezlik vektorining vaqtga qarab o'zgarishini xarakterlaydi. Trayektoriya bir tekislikda yotsin (10-shakl).

Harakatlanayotgan nuqta trayektoriyada t daqiqada M holatda, tezligi $\vec{g}$ bo'lsin, bu nuqta Δt kichik vaqt oralig'ida, ya'ni $t + \Delta t$ daqiqada M' holatni olsin va tezligi $\vec{g}'$ bo'lsin, $\vec{g}'$ vektorni M' nuqtaga parallel ko'chiramiz, uning uchini $\vec{g}'$ vektorning uchi bilan tutashtiramiz va chizilgan uchburchakning parallelogrammga to'ldiramiz. U holda $\vec{MA} = \vec{g}' - \vec{g} = \Delta \vec{g}$ bo'lgani uchun $\vec{MA}$ vektor Δt vaqtda tezlik o'zgarishini ifodalaydi. Endi Δt vaqtga mos keluvchi $\Delta \vec{g}$ vektorni Δt ga nisbatiga teng bo'lgan $\vec{MB}$ vektorni yasaymiz. Ya'ni $\vec{MB} = \frac{\Delta \vec{g}}{\Delta t} = \frac{\vec{MA}}{\Delta t}$ bu vektor nuqtaning Δt vaqtdagi o'rtacha tezlanishi deyiladi.



10-shakl

Uning Δt nolga intilgandagi daqiqada M nuqtaning haqiqiy tezlanishi vektorini ifodalaydi.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{MB} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{g}}{\Delta t} = \frac{d \vec{g}}{d t} \\ \vec{a} &= \frac{d \vec{g}}{d t} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Bu vektorni chizmada $\vec{MC}$ vektor bilan ifodalaymiz. $\vec{MC}$ trayektoriya tekisligida yotadi.

M nuqta bir tekislikda yotmaydigan egri chiziqli trayektoriya bo'ylab harakatlansin (11-shakl).

Egri chiziqda bir-biriga yaqin ikkita M va M_1 nuqtalarni olib, hap biri orqali nuqtaning harakati yo'nalishida $M\vec{\tau}$ va $M_1\vec{\tau}_1$ urinmalarini o'tkazamiz. Egri chiziqli tekislikda yotmagani uchun ikki $M\vec{\tau}$ va $M_1\vec{\tau}_1$ urinmalar orqali bitta tekislik o'tkazib bo'lmaydi.

M nuqtadan $M_1\vec{\tau}_1$ ga parallel $M\vec{\tau}_1$ chiziqni o'tkazamiz

Yuqoridagi ifoda ayniyat bo'lgani uchun $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ birlik vektorning oldidagi koeffitsientlar tegishlicha bir-biriga teng bo'lishi kerak:

$$a_x = \frac{d\mathcal{G}_x}{dt}; \quad a_y = \frac{d\mathcal{G}_y}{dt}; \quad a_z = \frac{d\mathcal{G}_z}{dt}; \quad (1.15)$$

Bu formulalarga $\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_y, \mathcal{G}_z$ ning qiymatlarini (1.10) keltirib qo'ysak, tezlanish proyeksiyalarini koordinatalar orqali ifodalagan bo'lamiz.

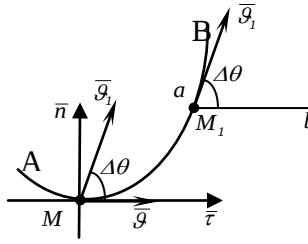
$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{d\mathcal{G}_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{d\mathcal{G}_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{d\mathcal{G}_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Demak, tezlanish vektorining koordinata o'qidagi proyeksiyalari, tezlik vektorining tegishlicha koordinata o'qidagi proyeksiyasining vaqtga nisbatan birinchi tartibli hosilasiga yoki harakatlanayotgan nuqta koordinatasining ikkinchi tartibli hosilasiga teng bo'lar ekan. Tezlanishning moduli va uning yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha yoziladi.

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ \cos(\widehat{a, \bar{i}}) &= \frac{a_x}{a} \\ \cos(\widehat{a, \bar{j}}) &= \frac{a_y}{a} \\ \cos(\widehat{a, \bar{k}}) &= \frac{a_z}{a} \end{aligned} \right\}$$

Nuqtaning harakat tenglamasi tabiiy usulda berilgan bo'lsa, (1.5), nuqta tezlanish vektorini uning tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlash ancha qulay bo'ladi.

Nuqta AB trayektoriya bo'ylab harakatlansin. Trayektoriya bo'ylab harakatlanuvchi M nuqta tezlanishining tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini topamiz (12-shakl).



12-shakl

Buning uchun M nuqtadan trayektoriyaning musbat yo'nalishi bo'ylab $\overline{M\tau}$ urinma va trayektoriyani botiq tomoniga qarab $\overline{Mn}$ bosh normal o'tkazamiz. Bu ikki urinma va bosh normal trayektoriyaning M nuqtasidan o'tgan yopishma tekislikda yotadi. Egri chiziqli harakatda nuqta tezlanishi yopishma tekislikda yotishi bizga ma'lum. Endi biz $\vec{a}$ tezlanish vektorining urinma va bosh normaldagi proyeksiyalarini aniqlaymiz. Aytaylik t vaqtida nuqta M holatda bo'lib, uning tezlik vektori $\vec{g}$ tezlik t+Δt vaqt o'tgandan keyin M₁ holatga ko'chib, tezligi $\vec{g}_1$ bo'lsin.

Nuqtaning tezlanish vektorini aniqlaymiz.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{g}_1 - \vec{g}}{\Delta t} \quad (1.17)$$

(1.17) ni $\overline{M\tau}$ va $\overline{Mn}$ tabiiy o'qlarga proyeksiyalaymiz.

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g_{1\tau} - g_\tau}{\Delta t} \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g_{1n} - g_n}{\Delta t} \quad (1.18)$$

M₁ nuqtadan Mτ ga parallel ab chiziq o'tkazamiz g_1 tezlik vektori bilan ab orasidagi burchakni Δθ bilan belgilaymiz.

$$g_{1\tau} = g_1 \cdot \cos \Delta\theta; \quad g_{1n} = g_1 \cdot \sin \Delta\theta; \quad g_\tau = g; \quad g_n = 0 \text{ ga teng.}$$

Bu yerda g va g₁ M nuqtaning t va t+Δt paytdagi tezliklarining miqdorlaridir. Olingan proyeksiyalarni yuqoridagi tengliklarga keltirib qo'yamiz.

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{g_1 \cos \Delta\theta - g}{\Delta t} \right); \quad a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{g_1 \sin \Delta\theta}{\Delta t} \right); \quad (1.19)$$

kelib chiqadi. Bunda Δt→0 da M₁→M, ΔS→0, g₁→g, Δθ→0 ga intiladi.

Natijada M₁ nuqta M ga yaqinlashganda $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \cos \Delta\theta = 1$

bo'ladi, bu holda

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g_i - g}{\Delta t} = \frac{dg}{dt}$$

bo'ladi. Demak,

$$a_{\tau} = \frac{dg}{dt} \quad (1.20)$$

bo'lib, urinma tezlanishi deyiladi.

Urinmalarning orasidagi burchakni $\Delta\theta$ bilan va $MM_1 = \Delta S$ bilan belgilaymiz $\frac{\Delta\theta}{\Delta S}$ nisbatga egri chiziqlarning (trayektoriyaning) o'rtacha egriligi deyiladi. Buning $\Delta S \rightarrow 0$ dagi limiti

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS} \quad (1.21)$$

ga egri chiziqlarning M nuqtasidagi egriligi deyiladi. Egrilikning teskari qiymatiga egri chiziq (trayektoriya)ning kuzatilgan $\bar{M}$ nuqtasidagi egrilik radiusi deyiladi va uni

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{dS}{d\theta}$$

deb belgilaymiz. Endi a_n ni topamiz. Buning uchun (1.19) ni o'ng tomoni surat va maxrajini $\Delta\theta \cdot \Delta S$ ga ko'paytiramiz

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{g_1 \cdot \sin \theta}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right) \quad (1.22)$$

Δt nolga intilganda qavs ichidagi har bir ko'paytmaning limiti quyidagicha hisoblanadi $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = g; \quad g_1 \text{ esa } g \text{ ga intiladi.}$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS} = k = \frac{1}{\rho}$$

Shunday qilib, urinma tezlanishining moduli

$$a_{\tau} = \frac{dg}{dt} \quad \text{ëku} \quad a_{\tau} = \frac{d^2 S}{dt^2} \quad (1.23)$$

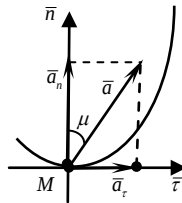
(1.22) formuladan normal tezlanishining moduli

$$a_n = \frac{g^2}{\rho} \quad (1.24)$$

formuladan topiladi.

Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning urinma tezlanishining moduli tezlik modulidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki nuqtaning yoy koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo'ladi. Hosilaning ishorasi urinma tezlanishining trayektoriyaning qaysi tomoniga yo'nalishini ko'rsatadi. Masalan: agar $\frac{dg}{dt} > 0$ bo'lsa, a_τ nuqtaning tezligi bilan bir yo'nalishda bo'ladi. Bu holda harakat tezlanuvchan egri chiziqli harakat bo'ladi. Agar $\frac{dg}{dt} < 0$ bo'lsa, a_τ nuqta tezligiga teskari yo'naladi. Harakat sekinlanuvchan egri chiziqli harakat bo'ladi.

Normal tezlanishning moduli harakati tekshirilayotgan nuqta tezligi kvadratining, egri chiziqning shu nuqtadagi ρ egrilik radiusiga nisbatiga teng- $\frac{g^2}{\rho}$



13-shakl

Hamma vaqt musbat miqdor bo'lgani uchun normal tezlanish hamma vaqt kuzatilayotgan nuqtadan trayektoriyaning bosh normali bo'ylab botiq tomoniga yo'naladi. Agar urinmaning birlik vektorini τ , bosh normalini n bilan belgilasak, urinma va normal tezlanishlarning vektorli ifodasi

$$\vec{a}_\tau = \frac{dg}{dt} \vec{\tau} \quad \vec{a}_n = \frac{g^2}{\rho} \vec{n}$$

ko'rinishda yoziladi. To'la tezlanishning vektor ifodasi

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dg}{dt} \vec{\tau} + \frac{g^2}{\rho} \vec{n}$$

bo'ladi.

Bu ikki $\bar{a}_\tau$ bilan $\bar{a}_n$ o'zaro tik yo'nalganidan to'la tezlanishning moduli quyidagi formuladan topiladi.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta^2}{\rho}\right)^2}$$

Yo'nalishi $tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}$ formuladan topiladi (13-shakl).

Nuqtaning harakat tenglamasi tabiiy usulda berilsa, uning tezlanishi vektori urinma va normal tezlanish vektorlarining geometrik yig'indisiga teng.

Takrorlash uchun savollar

1. Kinematika nimani o'rgatadi?
2. Nuqta trayektoriyasi deb nimaga aytiladi?
3. Nuqta harakati berilishining qanday usullarini bilasiz va ular qanday bo'ladi?
4. Nuqta harakati qonuni koordinata usulida berilganda uning trayektoriyasi qanday aniqlanadi?
5. Nuqta tezligi qanday aniqlanadi va qanday yo'nalishga ega?
6. Nuqta tezligining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday? Nuqta tezligi moduli va yo'nalishi tezlik proyeksiyalari orqali qanday aniqlanadi?
7. Nuqta harakati qonuni tabiiy usulda berilganda uning tezligi qanday aniqlanadi?
8. Nuqta tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
9. Nuqta tezlanishi Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi? Nuqta tezlanish moduli va yo'nalishi Dekart o'qlardagi proyeksiyalari orqali qanday aniqlanadi?
10. Nuqta tezlanishining trayektoriya bosh normal va urinmasidagi proyeksiyalari nimaga teng?
11. Urinma tezlanishi qachon nolga teng bo'ladi? Normal tezlanishchi?
12. Urinma va normal tezlanishlar orqali nuqtaning to'liq tezlanishi nimaga teng?
13. Tekis harakat nima? Tekis o'zgaruvchan harakatchi?

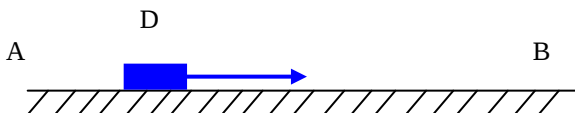
5-Amaliyot: Nuqta kinematikasiga oid misollar yechish

13-masala. *D* nuqta *AB* gorizontal to'g'ri chiziq bo'ylab $S=2t^2-3t+8$; (*m*) harakat tenglamisi bo'yicha harakatlanadi. *D* nuqtaning 5 sek ichida bosib o'tgan masofasi, o'sha ondagi tezligi va tezlanishi topilsin.

Berilgan :

$$S=2t^2-3t+8 \text{ (}m\text{)}$$

$t=5$ sek



Topish kerak: $S(5)$;

13.1-rasm.

$V(5)$; $a(5)$

Yechish :

1. *D* nuqtaning $t=5$ sek vaqt ichida bosib o'tgan masofasini topamiz. Buning uchun berilgan harakat tenglamasiga vaqtни qo'yib xisoblaymiz, ya'ni:

$$S(5) = 2 \bullet 5^2 - 3 \bullet 5 + 8 = 43; (m)$$

2. *D* nuqtaning tezligini topamiz: buning uchun berilgan harakat tenglamasidan vaqt bo'yicha birinchi tartibli xosila olamiz, ya'ni

$$V = \frac{ds}{dt} = (2t^2 - 3t + 8)' = 4t - 3; (m/s) \quad \text{Demak,}$$

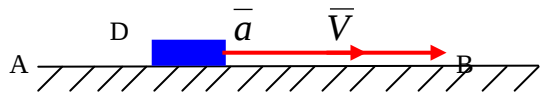
$$V(5) = 4 \bullet 5 - 3 = 17; (m/s)$$

1. D nuqtaning tezlanishini topamiz: Buning uchun tezlikdan vakt bo'yicha xosila olamiz, ya'ni:

$$a = \frac{dV}{dt} = (4t - 3)' = 4; (m/s^2)$$

Demak, $a(s) = a = 4; (m/s^2)$ bo'lib, ushbu xolda tezlanish vaqtga bog'lik emas ekan.

4. Tezlik va tezlanish vektorlarini sxemada ko'rsatamiz.



14-masala. Moddiy nuqta 22 i 13.2-rasm. bilan to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanmoqda. Agar uning boshlang'ich tezligi $4 (m/s)$ va harakatni koordinatalar boshidan boshlagan bo'lsa, uning harakat tenglamasi qanday bo'ladi?

Berilgan: $a=22; (m/c^2)$ $V_0=4; (m/c)$, $X_0=0$

Topish kerak: $x=f(t)$

Yechish :

1. Moddiy nuqtaning tezligini topamiz. Buning uchun tezlanishdan integral olamiz, ya'ni:

$$\frac{dV}{dt} = a = 22; (m/s^2) \text{ yoki}$$

$$\int dV = \int 22dt; \quad V = 22t + C_1 \quad (1)$$

bu erda C_1 -nuqtaning boshlang'ich tezligini ifodalovchi integrallash o'zgarmasi, birligi (m/s) .

C_1 ning qiymati quyidagicha topiladi:

$t=0$ da $V_0=4$; (m/c) bo'lgani uchun

$$(1) \rightarrow 4 = 22 \bullet 0 + C_1; \text{ bundan } C_1 = 4; (m/c)$$

Demak , nuqtaning tezlik tenglamasi $V = 22t + 4; (m/s)$

2. Moddiy nuqtaning harakat tenglamasini topamiz. Buning uchun tezlik tenglamasidan integral olamiz, ya'ni:

$$\frac{dx}{dt} = 22t + 4; \quad \text{yoki} \quad \int dx = \int (22t + 4) dt \quad \text{bundan}$$

$$x = 11t^2 + 4t + C_2 - (2) \text{ ni topamiz.}$$

Bu erda, C_2 - nuqtaning boshlangich xolatini ifodalovchi integrallash uzgarmasi, birligi (m).

C_2 ning qiymati quyidagicha topiladi:

$t=0$ da $x_0=0$ bo'lgani uchun

$$(2) \rightarrow 0 = 11 \bullet 0^2 + 4 \bullet 0 + C_2; \text{ bundan } C_2 = 0$$

Demak , nuqtaning harakat tenglamasi quyidagicha .

$$x = 11t^2 + 4t; (m) .$$

15-masala D nuqta egrilik radiusi 18 (m) bo'lgan AB chiziq bo'ylab $S = 2t^3 + 3t^2 - 6t + 4; (m)$ harakat tenglamasi bo'ycha harakatlanmoqda. Nuqtaning 2 sekunda bosib o'tgan masofasini, o'sha ondagi tezligini va to'la tezlanishini toping .

Berilgan: $S = 2t^3 + 3t^2 - 6t + 4; (m)$

$\rho = 18, (m) \quad t = 2 \text{ sek.}$

Topish kerak: $S, V, a^n, a^\tau, a.$

Yechish.

1. Moddiy nuqtaning 2 sekund ichida bosib o'tgan masofasini topamiz, ya'ni:

$$S = 2t^3 + 3t^2 - 6t + 4 = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 4 = 20; (m)$$

2. Nuqtaning tezligini topamiz. Buning uchun berilgan harakat tenglamadan vaqt bo'yicha xosila olamiz, ya'ni ,

$$V = \frac{dS}{dt} = (2t^3 + 3t^2 - 6t + 4)' = 6t^2 + 6t - 6; (m/s)$$

Demak, $t = 2 \text{ sek}$ bo'lganda

$$V = 6t^2 + 6t - 6 = 6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 6 = 30; (m/s)$$

3. D nuqta egri chiziq bo'ylab harakatlanayotganligi tufayli uning to'la tezlanishi normal a^n va urinma a^τ tezlanishlardan tashkil topadi, ya'ni:

$$a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2}$$

bu erda a^n - nuqtaning normal tezlanishi; a^τ - nuqtaning urinma tezlanishi;

Ularning qiymatlari quyidagicha;

$$a^n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{30^2}{18} = 50; (m/s^2)$$

Urinma tezlanishni topish uchun tezlikdan vaqt bo'yicha xosila _

olinadi:
$$a^\tau = \frac{dV}{dt} = (6t^2 + 6t - 6)' = 12t + 6; (m/s^2)$$

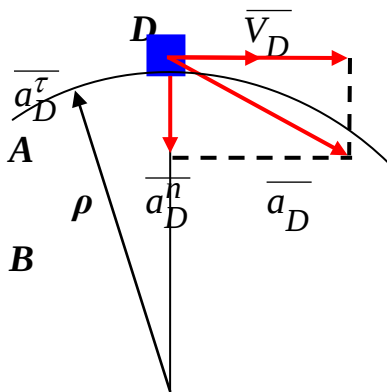
$t=2$ sek bo'lganida $a^\tau = 12 \cdot 2 + 6 = 30; (m/s^2)$

Demak, to'la tezlanishning qiymati quyidagicha:

$$a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2} = \sqrt{80,2^2 + 30^2} = \sqrt{7332,04} = 85,63; (m/s^2)$$

4. Endi tezlik va tezlanish vektorlarini sxemada ko'rsatamiz.

Tezlik vektori $\overline{V_D}$ AB egri chiziqqa urinma buylab yo'naladi. Xuddi shu yo'nalish buylab urinma tezlanish vektori $\overline{a_D^\tau}$ ham yo'naladi. Normal tezlanish vektori $\overline{a_D^n}$ esa normal buylab ichki botik tomonga yo'naladi. Urinma $\overline{a_D^\tau}$ va normal $\overline{a_D^n}$ tezlanish vektorlarini geometrik usulda kushib to'la tezlanish vektori $\overline{a_D}$ ni topamiz (15.1-rasm).



6-ma'ruza: Qattiq jismning ilgarilanma va o'q atrofida aylanma harakati (4 soat)

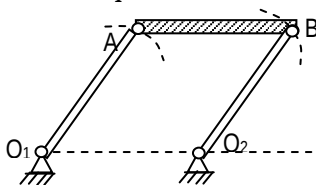
Reja:

1. Qattiq jismning ilgarilanma harakati
2. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakati
3. Aylanma harakat burchak tezligi
4. Aylanma harakat burchak tezlanishi
5. Aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik va tezlanishi
6. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasining tezligi va tezlanishining vektor ifodalari

Jismda olingan har qanday kesma harakat davomida hamma vaqt o'z-o'ziga parallel qolsa, jismning bunday harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi. Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtalarining trayektoriyalari istalgan egri chiziq bo'lishi mumkin.

Masalan to'g'ri chiziqli relsda harakatlanayotgan vagon kuzovining harakati ilgarilanma harakat bo'lib, kuzov nuqtalarining trayektoriyalari to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Ikkinchi misol tariqasida 1-shaklda ko'rsatilgan



1-shakl

AB sparnik harakatini kuzatamiz. O_1A va O_2B krivoshiplar O_1 , O_2 nuqtalar atrofida aylanganda AB sparnik hamma vaqt o'z-o'ziga parallel qoladi, ya'ni ilgarilanma harakat qiladi. Sparnik nuqtalari markazi O_1O_2 chizig'ida yotgan aylanalar chizadi. Demak, bu holda ilgarilanma harakatdagi AB sparnik nuqtalarining trayektoriyalari egri chiziqdan iborat bo'ladi. Ilgarilanma harakatning kinematik xususiyatlarini aniqlaydigan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema: Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning hamma nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi va har onda jism nuqtalarining

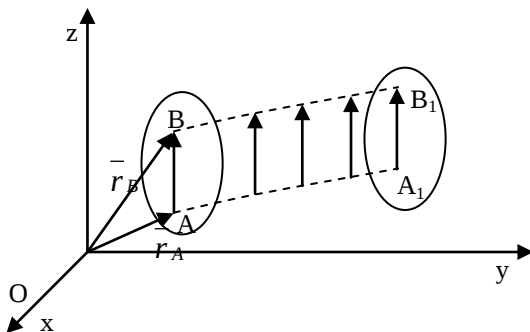
tezlik va tezlanishlari bir-biriga teng bo'ladi.

Teoremani isbotlash uchun berilgan OXYZ qo'zg'almas hisoblash sistemasiga nisbatan ilgarilanma harakatni tekshiramiz. Jismning ixtiyoriy A va B nuqtalarini olib, ularning radius vektorlarini o'tkazamiz.

Shakldan

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (2.1)$$

tenglikni olamiz (21-shakl). Jism harakatlanganda $\vec{r}_B$ va $\vec{r}_A$ lar o'zgaradi.



2-shakl

Ammo AB kesmaning uzunligi va yo'nalishi o'zgarmaydi, chunki qattiq jism ta'rifiga ko'ra AB uzunligi o'zgarmas bo'lib, ilgarilanma harakat ta'rifiga ko'ra doimo o'z-o'ziga parallel qoladi, ya'ni $\overline{AB} = const$. Shuning uchun tenglamadagi $\vec{r}_B$ va $\vec{r}_A$ vektorlarni o'zgarganda ularning uchlariidagi A va B nuqtalarining chizgan AA₁ va BB₁ trayektoriyalari o'zaro teng AA₁=BB₁ va AA₁ || BB₁ bo'ladi. (2.1) dan vaqtga nisbatan hosila olamiz.

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt} \text{ bunda } \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$$

bo'lgani uchun

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad (2.2)$$

A va B nuqtalar ixtiyoriy nuqta bo'lgani uchun ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalarining tezliklari bir xilda

bo'ladi degan natijaga kelamiz. (2.2) dan vaqtga nisbatan hosila olamiz.

$$\frac{d\bar{g}_B}{dt} = \frac{d\bar{g}_A}{dt} \text{ bundan } \bar{a}_B = \bar{a}_A \quad (2.3)$$

(2.3) tenglikdan ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalarining tezlanishlari bir xilda bo'ladi, degan natijaga kelamiz. Shunday qilib, teorema isbotlandi. Ilgarilanma harakat ta'rifidan va isbotlangan teoremadan jismning ilgarilanma harakati uning biror nuqtasining harakati bilan aniqlanishini ko'ramiz. Bunday nuqta uchun ko'pincha jism og'irlik markazi olinadi.

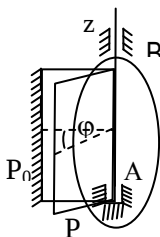
$$\left. \begin{aligned} X_c &= f_1(t) \\ Y_c &= f_2(t) \\ Z_c &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

C nuqtaning harakat tenglamalari jismning ilgarilanma harakat tenglamalari bo'ladi. Shuning uchun ilgarilanma harakatdagi jism kinematikasi nuqta kinematikasidan farq qilmaydi.

Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtasining $\bar{g}$ tezligi va $\bar{a}$ tezlanishi jismning hamma nuqtalari uchun bir xilda bo'lgani uchun $\bar{g}$ tezlikka jismning ilgarilanma harakat tezligi, $\bar{a}$ ga jismning ilgarilanma harakat tezlanishi deyiladi. $\bar{g}$ va $\bar{a}$ tezlik va tezlanish jismning istalgan nuqtasiga qo'yilgan deb tasvirlanadi. Shuni ta'kidlab o'tamizki, faqat jismning ilgarilanma harakati uchun $\bar{g}$ va $\bar{a}$ tezlik va tezlanishlar jismning ilgarilanma harakat tezligi va tezlanishi deb ataladi. Ammo jismning boshqa turdagi harakatlarida uning nuqtalari turlicha harakat qiladi. Shuning uchun uning biror nuqtasining harakati bilan aniqlab bo'lmaydi. Bunday holda jism nuqtasining tezligi, tezlanishini jism tezligi va tezlanishi deb atash mumkin emas.

Qattiq jism harakatlanganda uning ikki nuqtasi doimo harakatsiz qolsa, qattiq jismning bunday harakatiga qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati deyiladi. Shu qo'zg'almas nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqqa aylanish o'qi deyiladi. Aylanish o'qida joylashgan jism nuqtalari doimo harakatsiz bo'ladi. Aylanish o'qidan tashqarida joylashgan hamma nuqtalari

trayektoriyasi aylanish o'qiga tik bo'lgan tekisliklarda joylashgan, markazi aylanish o'qida bo'lgan aylanalardan iborat bo'ladi. Qattiq jismning aylanma harakatini tekshirish uchun aylanish o'qi orqali ikki tekislik o'tkazamiz. Ulardan biri qo'zg'almas P_0 , ikkinchisi jism bilan birlashtirilgan, u bilan birga harakatlanadigan P tekislik bo'lsin. Aylanish o'qini jismning qo'zg'almas A va B nuqtalari orqali yuqoriga yo'naltiramiz va uni Az deb belgilaymiz. Jismni Az o'qi atrofida harakatlanganda P tekislik P_0 tekislikka nisbatan φ burchakka buriladi. Bu burchak aylanish burchagi deyiladi. Aylanish o'qining musbat yo'nalishidan qaraganimizda jism soat milining aylanishiga teskari tomonga aylanma harakatini musbat yo'nalishda deb qaraymiz. Aks holda harakat manfiy yo'nalishda bo'ladi. Demak, burchak P_0 dan P tekislikka qarab soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda kesib boradi.



3-shakl

Aylanish burchagining o'zgarishi P tekislikni P_0 tekislikka nisbatan harakatlanishini ifodalaydi. Shuning uchun aylanish burchagi φ bilan vaqt orasidagi munosabat

$$\varphi = f(t). \quad (2.5)$$

(2.5) ga jism aylanma harakat tenglamasi deyiladi. Agar (2.5) tenglik berilgan bo'lsa, vaqtning har bir paytdagi jismning holati ma'lum bo'ladi. Aylanish burchagi radianda o'lchanadi, u vaqtning bir qiymatli, uzliksiz, differensiallanadigan funksiyasi bo'ladi. Jism qo'zg'almas o'q atrofidagi holati bitta aylanish burchagi bilan aniqlangani uchun aylanma harakatdagi jism bitta erkinlik darajasiga ega bo'ladi.

Faraz qilaylik, jism t -vaqtda φ burchakka burilgan bo'lib,

Δt vaqtdan keyin $\varphi + \Delta\varphi$ burchakka burilsin. $\Delta\varphi$ ning Δt ga nisbati (2.6) ga o'rtacha burchakli tezlik deyiladi. Vaqtning har bir paytdagi burchak tezligini aniqlash uchun (2.6) dan Δt nolga intilgandagi limitni olamiz

$$\omega^* = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (2.6)$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.7)$$

Demak, haqiqiy burchak tezligi aylanish burchagidan vaqtga nisbatan olingan birinchi hosilasiga teng, hosilaning ishorasi harakat o'suvchi yoki kamayuvchi ekanini ko'rsatadi. Masalan, agar

$\frac{d\varphi}{dt} > 0$ bo'lsa, harakat o'suvchi bo'lib, φ burchagi orta boradi,

$\frac{d\varphi}{dt} < 0$ bo'lsa, φ burchagi kamayadi va harakat kamayuvchi

bo'ladi. Shunday qilib hosilaning ishorasi harakat yo'nalishini aniqlaydi. Burchak tezligi rad/s bilan yoki 1/s bilan o'lchanadi. Aylanma harakatda burchak tezligi $\overline{\omega}$ - aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan vektor kattalik bilan ifodalanadi. U aylanish o'qining istalgan nuqtasiga qo'yiladi va uning uchidan qaraganimizda jism soat milining yo'nalishiga teskari aylanishini ko'rish kerak.

Agar harakat davomida hamma vaqt ω o'zgarmas bo'lsa, harakat tekis aylanma harakat bo'ladi. Bu o'zgarmasni ω_0 bilan belgilab, (2.7) tenglikka qo'yamiz.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$$

bundan

$$d\varphi = \omega_0 dt$$

Hosil bo'lgan tenglikda boshlang'ich shartlarni hisobga olib, yani $t=0$ da $\varphi = \varphi_0$, tenglamani integrallaymiz.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt$$

ω_0 -o'zgarmas bo'lgani uchun quyidagi tenglik tekis aylanma

harakat tenglamasini olamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \quad (2.8)$$

Agar boshlang'ich $t=0$ paytda $\varphi_0 = 0$ bo'lsa, yuqoridagi tenglik quyidagi ko'rinishga keltiriladi.

$$\varphi = \omega_0 t \text{ bundan } \omega_0 = \frac{\varphi}{t} \quad (2.9)$$

Kinematika masalalarida ko'pincha tekis aylanma harakat burchak tezligini jismning $t=1$ min ichidagi aylanish soni n ifodasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Jism bir aylanganda $\varphi = 2\pi$ burchakka aylanadi. Agar $t=1$ minut 60 s jism n marotaba aylansa, $\varphi = 2n\pi$ bo'ladi (2.9) tenglikdan foydalanib, ω bilan n orasidagi munosabatni topamiz

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

Bunda $\omega = \omega_0 = \text{const}$ deb hisoblanadi.

Burchak tezlanishi aylanma harakat burchak tezligining vaqt birligi ichida o'zgarishini xarakterlaydi. Burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqtga nisbatan birinchi hosila yoki aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng bo'ladi. Burchak tezlanishini ε bilan belgilaymiz

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.10)$$

Burchak tezlanishi rad/s^2 yoki $1/\text{s}^2$ bilan o'lchanadi. Agar ω bilan ε bir xil ishorali bo'lsa, harakat tezlanuvchan, har xil ishorali bo'lsa, harakat sekinlanuvchan bo'ladi. Harakat davomida $\varepsilon = \text{const}$ bo'lsa, bunday harakatga tekis o'zgaruvchan aylanma harakat deyiladi. Tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ dan } \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

tenglikni olamiz. Bunda $\varepsilon = \text{const}$. Hosil bo'lgan tenglikni hisobga olgan holda (2.7) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t) dt$$

Buni yana $t=0$ da $\varphi = \varphi_0$ boshlang'ich shartlarda

integrallab tekis o'zgaruvchan harakat tenglamasini olamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

ε ning ishorasi harakatni tezlanuvchan yoki sekinlanuvchan ekanini ko'rsatadi. Agar $t=0$ da $\varphi=0$ bo'lsa,

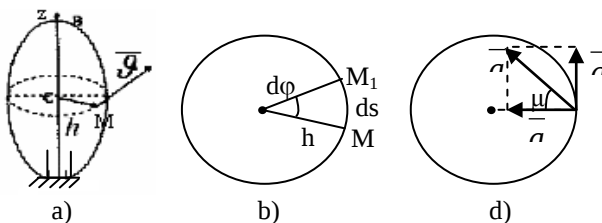
$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \text{ tenglik hosil bo'ladi.}$$

Aylanish o'qining birlik yo'naltiruvchi vektorini $\bar{k}$ bilan belgilasak, aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan burchak tezlik ϖ vektorining vaqtga nisbatan hosilasi burchak tezlanish vektorini ifodalaydi.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\varpi}{dt} \bar{k} \text{ yoki } \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}$$

Aylanish o'qi qo'zg'almas bo'lgani uchun $\bar{k} = \text{const}$ bo'ladi. Demak, burchak tezlanishi $\bar{\varepsilon}$ vektorini aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lib, ϖ va $\bar{\varepsilon}$ bir tomonga yo'nalsa, tezlanuvchan, qarama-qarshi tomonga yo'nalsa, harakat sekinlanuvchan bo'ladi.

Qattiq jismning nuqtalari harakatlarini xarakterlovchi kinematik elementlari – trayektoriya, tezlik va tezlanishlarini topamiz. Buning uchun jismni aylanish Az o'qidan ixtiyoriy masofada joylashgan M nuqtasining tezlik va tezlanishini aniqlaymiz. Faraz qilaylik M nuqta aylanish o'qidan h masofada joylashgan bo'lsin, jism harakatlanganda M nuqta radiusi h bo'lgan markazi aylanish o'qining S nuqtasida joylashgan aylana chizadi. Agar jism dt vaqt ichida aylanish o'qi atrofida dφ burchakka burilsa, M nuqta trayektoriya bo'ylab $MM_1 = dS = h d\varphi$ yoyini o'tadi.



4-shakl

Harakat egri chiziqli bo'lgani uchun M nuqtaning tezligi quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$g = \frac{dS}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt} = h\omega \quad (2.11)$$

Demak, aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezligi nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional o'zgarar ekan. Tezlik harakat yo'nalishida trayektoriyaga urinma bo'ylab yo'naladi. Endi M nuqtaning tezlanishini topamiz. Harakat egri chiziqli bo'lgani uchun M nuqtaning tezlanishi urinma va normal tezlanishlardan tashkil topadi.

$$a_n = \frac{g^2}{\rho}; \quad a_\tau = \frac{dg}{dt}$$

Bu tengliklarga (2.11) dan g ning qiymatini qo'yamiz:

$$a_n = \frac{d}{dt}(\omega \cdot h) = h \cdot \varepsilon; \quad a_n = \frac{(\omega \cdot h)^2}{h} = \omega^2 \cdot h \quad (2.12)$$

M nuqtaning to'liq tezlanishining miqdori:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (2.13)$$

va yo'nalishi

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (2.14)$$

(2.14) formulalardan aniqlanadi. (2.11), (2.12) hamda (2.13) formulalar aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional ekanligini ifodalaydi. a_n tezlanishi hamma vaqt aylanish markaziga qarab yo'naladi, ammo urinma tezlanish yo'nalishi harakatning tezlanuvchan yoki sekinlanuvchanligiga bog'liq bo'ladi. $\varepsilon > 0$ bo'lsa, harakat tezlanuvchan bo'lib, a_τ bilan g bir yo'nalishda, $\varepsilon < 0$ bo'lsa, harakat sekinlanuvchan bo'lib, a_τ ,

$\mathcal{G}$ ga teskari yo'naladi.

Qattiq jism ixtiyoriy M nuqtasining holati O nuqtaga nisbatan $\bar{r} = \overline{OM}$ radius vektor bilan aniqlanadi (5-shakl). M nuqtaning tezligini (2.11) formulaga muvofiq

$$\mathcal{G} = O_1 M \cdot \omega$$

ga teng, 24-shakldan

$$O_1 M = r \cdot \sin(\omega \wedge r) \quad ,$$

buni e'tiborga olsak,

$$\mathcal{G} = \omega r \sin(\omega \wedge r)$$

bo'ladi. $\bar{\mathcal{G}}$ tezlik vektori $\bar{r}$ -radius vektor bilan $\bar{\omega}$ -burchak tezlik vektorlar yotgan tekislikka tik yo'naladi (24-shakl).

Ikki vektorning vektor ko'paytmasi moduli

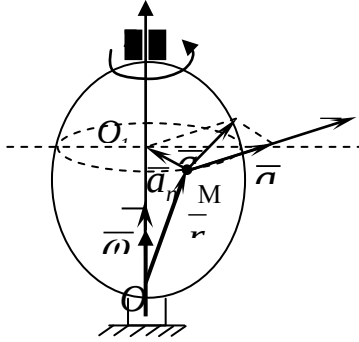
$$\mathcal{G} = \omega \cdot r \sin(\omega \wedge r)$$

bo'lgani uchun

$$\bar{\mathcal{G}} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (2.15)$$

bo'ladi.

Demak, aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik vektori $\bar{\mathcal{G}}$ burchak tezlik vektori $\bar{\omega}$ bilan nuqta radius vektori $\bar{r}$ ning vektorli ko'paytmasiga teng, yo'nalishi aylanma harakat yo'nalishida $\bar{\omega}$ bilan $\bar{r}$ yotgan tekislikka tik yo'naladi. (2.15) tenglikka Eyler formulasi deyiladi. M nuqtaning tezlanishini topishimiz uchun (2.15) tenglikdan vaqt bo'yicha hosila olamiz.



5-shakl

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}$$

bunda

$$\bar{g} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \text{va} \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\varepsilon}$$

bo'lgani uchun

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{g} \quad (2.16)$$

(2.15) tenglikdan $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ vektor $\bar{\varepsilon}$ bilan $\bar{r}$ vektorlar yotgan tekislikka tik, nuqta trayektoriyasiga urinma bo'ylab yo'naladi. Tezlanishning bu qismi urinma tezlanish vektori bo'ladi

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$$

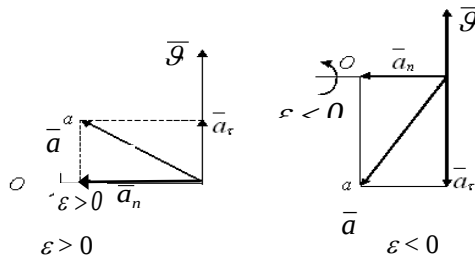
Bu vektor $\bar{\varepsilon}$ -ning ishorasiga qarab $\bar{g}$ bilan bir yoki $\bar{g}$ ga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi. (2.16) tezlanishning ikkinchi qismi $\bar{\omega} \times \bar{g}$ ni tekshiramiz, $\bar{\omega} \perp \bar{g}$ bo'lgani uchun

$$|\bar{\omega} \times \bar{g}| = \omega \cdot g = \omega^2 \cdot h = a_n$$

Demak, $\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{g}$ bu normal tezlanish a bilan g yotgan tekislikka tik ravishda M nuqtadan O nuqtaga yo'naladi To'la tezlanish vektori (2.15) quyidagicha yoziladi:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{g} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

Demak, aylanma harakatdagi jism nuqtasining to'la tezlanishi urinma va normal tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng (6-shakl).



6-shakl

Takrorlash uchun savollar

1. Qattiq jismning qanday harakati ilgariylanma deyiladi?
2. Jismni ilgariylanma harakatida uning nuqtalari trayektoriyasi aylanadan iborat bo'lishi mumkinmi?
3. Qattiq jimsning ilgariylanma harakati qanday xossalarga ega?
4. Qattiq jimsning qanday harakati qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat deyiladi? Qattiq jism nuqtasi trayektoriyasi nimadan iborat bo'ladi?
5. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat tenglamasi qanday?

6-amaliyot: Qattiq jismning aylanma xarakatiga oid masalalar yechish.

17-masala. Radiusi 0.5 m bo'lgan disk minutiga 60 marta tekis aylanmoqda. Uning A va B nuqtalarining tezlik va tezlanishlari topilsin. ($OB=0.5 \cdot OA$)

Berilgan:

$$n=60\text{ ayl/min};$$

$$r=OA=0.5\text{ m}$$

$$OB=0.25\text{ m}$$

Topish kerak: $\overline{V}_A$; $\overline{V}_B$; $\vec{a}_A$; $\vec{a}_B$

Yechish:

1. A nuqtaning tezligini topamiz.

$$V_A = \omega \cdot OA = \frac{\pi \cdot n}{30} \cdot OA = \frac{3,14 \cdot 60}{30} \cdot 0,5 = 3,14\text{ (m/s)}$$

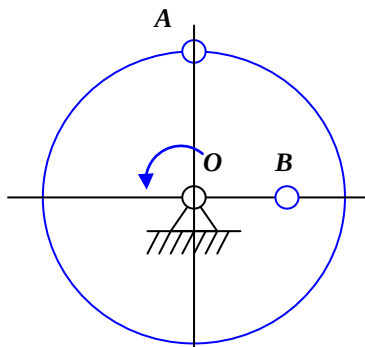
Bu erda ω - jismning burchak tezligi (rad/s).

2. B nuqtaning tezligini topamiz:

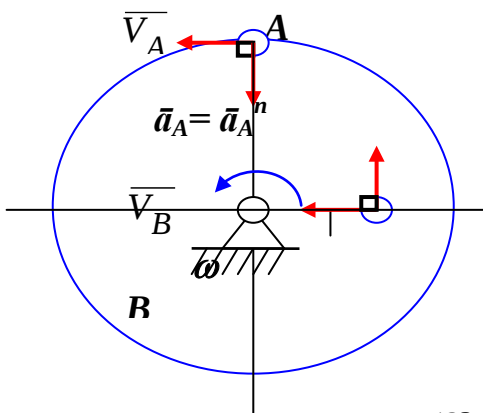
$$V_B = \omega \cdot OB = \frac{\pi \cdot n}{30} \cdot OB = \frac{3,14 \cdot 60}{30} \cdot 0,25 = 1,57\text{ (m/s)}$$

3. A nuqtaning tezligini topamiz: Aylanma harakat tekis bo'lganligidan burchak tezlanish $\varepsilon=0$ bo'lib, urinma tezlanish $a_A^{\tau}=0$ bo'ladi. A nuqtaning normal tezlanishi esa quyidagicha topiladi:

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{OA} = \frac{3,14^2}{0,5} = 19,7\text{ (m/s}^2\text{)}$$



17.1-rasm.



17.2-

Demak, nuqta tezlanishi:

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{0^2 + 19,7^2} = 19,7 \left(m/s^2 \right)$$

4. B nuqtaning tezlanishini topamiz ($\varepsilon=0$ bo'lgani uchun $a_B^\tau = 0$).

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{OB} = \frac{1,57^2}{0,25} = 9,85 \left(m/s^2 \right)$$

Demak, $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{0^2 + 9,85^2} = 9,85 \left(m/s^2 \right)$

5. Tezlik va tezlanishlar vektorlarini ko'rib chiqaylik.

$\overline{V_A}$ - tezlik vektori OA kesmaga perpendikulyar bo'lib, A nuqtadan aylanish tomonga (ushbu holda chap tomonga) yo'naladi (17.2-rasm).

$\overline{V_B}$ - tezlik vektori esa OB kesmaga perpendikulyar bo'lib, B nuqtadan aylanish tomonga (ushbu holda tepaga) yo'naladi.

$\overline{a_A}$ va $\overline{a_B}$ - tezlanish vektorlari $a_A = a_A^n$, $a_B = a_B^n$ bo'lgani uchun A va B nuqtalardan markaz O nuqtaga yo'nalishadi.

18-masala. Oldingi masaladagi disk $\varphi = (4t^2 - 3t + 2)$

harakat tenglamasi bo'yicha aylanayotgan bo'lsa huddi shu holatda A va B nuqtalar qanday tezlik va tezlanishlarga ega bo'lishadi (hisoblashda $t=3$ sek deb olinsin).

Berilgan: $\varphi = (4t^2 - 3t + 2)$ (rad) $r=OA=0,5$ (m);

OB=0,25(m); t=3 (sek),
Topish kerak: $\overline{V_A}$; $\overline{V_B}$; $\bar{a}_A$; $\bar{a}_B$

Yechish:

1. Diskning burchak tezligini topamiz. Buning uchun berilgan harakat tenglamasi ϑ dan vaqt bo'yicha hosila olamiz

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} = (4t^2 - 3t + 2)' = 8t - 3; (rad/s)$$

$$t=3 \text{ sek bo'lganda} \quad \omega = 8 \cdot 3 - 3 = 21; (rad/s)$$

2. A nuqtaning tezligini topamiz:
 $V_A = \omega \cdot OA = 9 \cdot 0,5 = 4,5; (m/s)$

3. B nuqtaning tezligini topamiz:
 $V_B = \omega \cdot OB = 9 \cdot 0,25 = 2,25; (m/s)$

4. A nuqtaning urinma tezlanishini topamiz: $a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA$;

$$\text{bu erda,} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (4t - 3)' = 4; (rad/s^2)$$

$$\text{Demak,} \quad a_A^\tau = 9 \cdot 0,5 = 4,5; (m/s^2)$$

A nuqtaning normal tezlanishi:
 $a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 21^2 \cdot 0,5 = 220,5; (m/s^2)$

to'la tezlanish esa

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{4,5^2 + 220,5^2} \approx 41; (m/s^2)$$

5. B nuqtaning urinma tezlanishini topamiz:

$$a_B^\tau = \varepsilon \cdot OB = 4 \cdot 0,25 = 1; (m/s^2)$$

B nuqtaning normal tezlanishi:

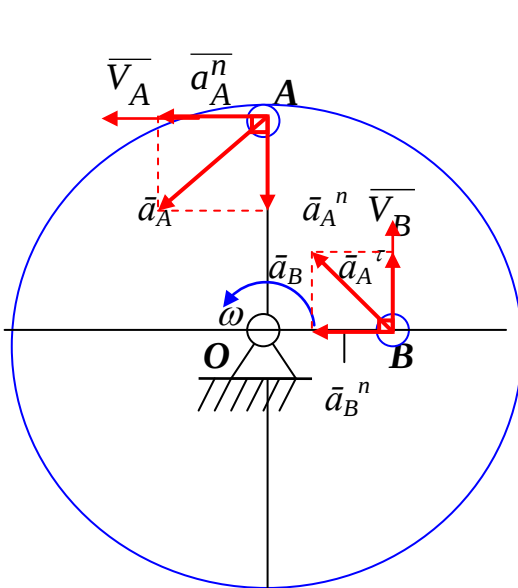
$$a_B^n = \omega^2 \cdot OB = 9^2 \cdot 0,25 = 20,25; (m/s^2)$$

to'la tezlanish esa

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{1^2 + 20,25^2} \approx 20,5; (m/s^2)$$

6. Tezlik va tezlanishlarning vektorlarini topamiz.

$\overline{V}_A$ va $\overline{V}_B$ tezlik, $\overline{a}_A^n$ va $\overline{a}_B^n$ tezlanish vektorlari 17-masaladagiga nisbatan o'zgarmaydi.



18.1-rasm.

$\overline{a}_A^\tau$ - tezlanish

vektori esa OA kesmaga perpendikulyar bo'lib, A nuqtadan (musbat qiymatga ega bo'lganligidan) aylanish tomonga yo'naladi (18.1-rasm).

$\overline{a}_B^\tau$ - tezlanish

vektori esa OB kesmaga perpendikulyar bo'lib, B nuqtadan (musbat

qiymatga ega bo'lganligidan) aylanish tomonga yo'naladi.

$\vec{a}_A$ va $\vec{a}_B$ - to'la tezlanish vektorlari, mos ravishda, $\overline{a_A^\tau}$; $\overline{a_B^n}$ va $\overline{a_B^\tau}$; $\overline{a_B^n}$ tashkil etuvchilardan geometrik usulda hosil qilinadi.

Javob: $V_A = 4,5; (m/s)$; $V_B = 2,25; (m/s)$;

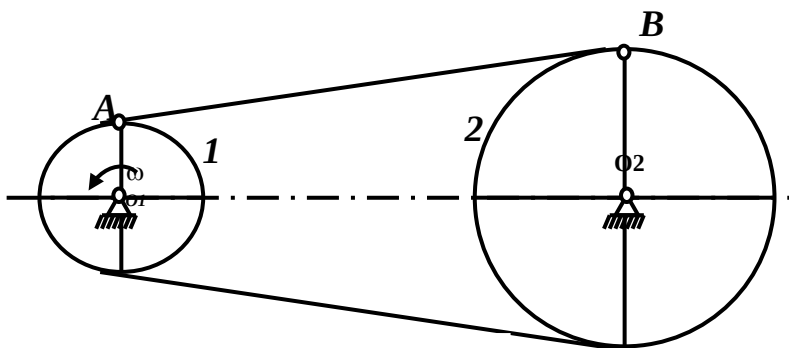
$a_A \approx 41; (m/s^2)$; $a_B \approx 20,5; (m/s^2)$.

19- masala. Radiuslari $0,3 \text{ m}$ va $0,5 \text{ m}$ bo'lgan shkiqlar bir-birlari bilan tasmali uzatma orqali bog'langan. Agar birinchi shkiq minitiga 240 marta tekis aylansa, ikkinchi shkiq qanday burchak tezlikka, tasma esa qanday chiziqli tezlikka ega bo'ladi?

Berilgan: $n_1 = 240 \text{ (ayl/ min)}$;

$r_1 = 0,3 \text{ (m)}$; $r_2 = 0,5 \text{ (m)}$.

Topish kerak: V_T ; n_2 ; ω_2



19.1-rasm.

Yechish:

1. Tasmaning tezligini topamiz. Tasmaning tezligi birinchi shkivning A nuqtasini tezligiga teng bo`ladi. Uning qiymati quyidagicha topiladi.

$$V_A = V_T = \omega_1 \cdot OA = \omega_1 \cdot r_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} \cdot r_1 = \frac{3,14 \cdot 240}{30} \cdot 0,3 = 7,5; (m/s)$$

2. Ikkinchi shkivning bir minutdagi aylanishlar sonini topamiz. Buning uchun quyidagi proporsiyalardan foydalanamiz.

$$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2 \text{ yoki } n_1 \cdot r_1 = n_2 \cdot r_2$$

$$n_2 = \frac{n_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{240 \cdot 0,3}{0,5} = 144; (ayl/min)$$

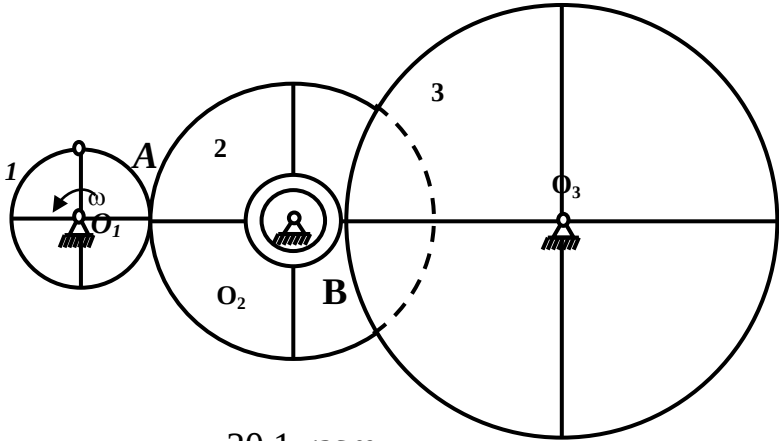
3. Ikkinchi diskning burchak tezligini topamiz.

$$\omega_2 = \frac{\pi \cdot n_2}{30} = \frac{3,14 \cdot 144}{30} = 15; (rad/s)$$

Javob: $V_T = 7,5; (m/s);$ $n_2 = 144; (ayl/min);$
 $\omega_2 = 15; (rad/s).$

20-masala. Slindrsimon reduktorning etaklovchi vali minutiga 300 marta aylanadi. Agar uning shkiv va g`ildiraklarining radiuslari mos ravishda,  $r_1=0,1$  m,  $r_2=0,3$  m,  $r_2'=0,07$  m va  $r_3=0,35$  m bo`lsa, ikkinchi va etaklanuvchi vallar qanday burchak tezlik bilan aylanma hamda g`ildiraklarning tishlari qanday

chiziqli tezliklarga ega bo'lishadi?



20.1-rasm.

Berilgan: $r_1=0,1 \text{ m}$; $r_2=0,3 \text{ m}$;

$r_2'=0,07 \text{ m}$; $r_3=0,35 \text{ m}$.

Topish kerak: n_2 ; n_3 ; V_A ; V_B

Yechish:

1. Ikkinchi valning bir minutdagi aylanishlar sonini topamiz. Buning uchun 19-masaladagi singari quyidagi proporsiyani tuzamiz.

$$n_1 \bullet r_1 = n_2 \bullet r_2 \text{ bundan}$$

$$n_2 = \frac{n_1 \bullet r_1}{r_2} = \frac{300 \bullet 0,1}{0,3} = 100; (\text{ayl}/\text{min})$$

2. Uchinchi valning bir minutdagi aylanishlar sonini topamiz, ya'ni:

$$n_2 \bullet r_2' = n_3 \bullet r_3 \text{ bundan}$$

$$n_3 = \frac{n_2 \cdot r_2}{r_3} = \frac{100 \cdot 0,07}{0,35} = 20; (ayl/min)$$

2. 1 va 2 g'ildiraklar tishlarining tezligi bir xilda bo'lib, A nuqtaning tezligiga teng, ya'ni:

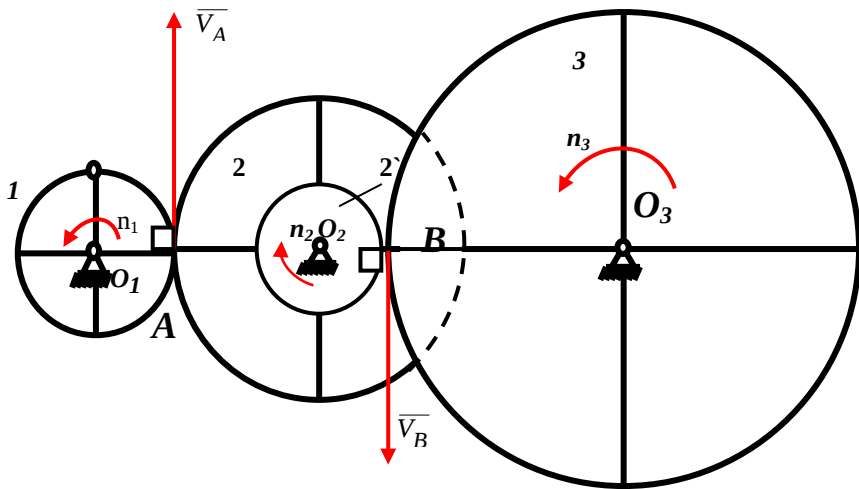
$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} \cdot r_1 = \frac{3,14 \cdot 300}{30} \cdot 0,1 = 3,14; (m/s)$$

4. 2'- va 3- g'ildiraklar tishlarining chiziqli tezliklari bir xilda bo'lib, B nuqtaning tezligiga teng, ya'ni:

$$V_B = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{\pi \cdot n_2}{30} \cdot r_2 = \frac{3,14 \cdot 100}{30} \cdot 0,07 = 0,73; (m/s)$$

5. $\overline{V_A}$ va $\overline{V_B}$ tezlik vektorlarini sxemada ko'rsatamiz. $\overline{V_A}$ - tezlik vektori OA kesmaga perpendikulyar bo'lib, A nuqtadan aylanish tomonga (ushbu holda, tepaga) yo'naladi. $\overline{V_A}$ tezlik birinchi va ikkinchi g'ildiraklar uchun ham tegishli (20.2-rasm).

$\overline{V_B}$ - tezlik vektori O_2B kesmaga perpendikulyar bo'lib, B nuqtadan aylanish tomonga (ushbu holda, pastga) yo'naladi. Shuningdek, $\overline{V_B}$ - tezlik 2'- va 3- g'ildiraklar uchun umumiy bo'ladi. Sxemada O_1 , O_2 va O_3 nuqtalar mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi vallar o'qlarining holatlari.



20.2-

Javob: $n_2 = 100; (ayl/min)$; $n_3 = 20; (ayl/min)$;

$V_A = 3,14; (m/s)$; $V_B = 0,73; (m/s)$.

7-ma'ruza: Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakati (sferik harakat) (4 soat)

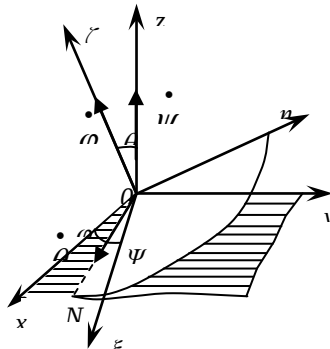
Reja:

1. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi aylanma harakat tenglamalari. Oniy burchak tezligi va tezlanish
2. Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezligi va tezlanishi.

Harakati vaqtida jismning bitta nuqtasi doimo qo'zg'almas bo'lgan qoladigan harakatga qo'zg'almas nuqta atrofida aylanma harakat yoki sferik harakat deyiladi.

Tayanch tekisligidagi nuqtasi qo'zg'almas bo'lgan pildiroqning harakati yoki birgina sferik sharnirli bog'lanish qo'yilgan jismning harakati sferik harakatga misol bo'la oladi. Sferik harakatni o'rganish uchun OXYZ koordinata sistemasi jism bilan birga harakatlanadi. O $\xi\eta\zeta$ qo'zg'aluvchi koordinata sistemasi va OXYZ qo'zg'almas koordinata sistemasini o'tkazamiz (1-shakl).

Jism bilan birga harakatlanuvchi O $\xi\eta\zeta$ tekislikning qo'zg'almas OXY tekislik bilan kesishish chizig'idan iborat ON - tugunlar chizigi deyiladi.



1-shakl

O ξ va ON orasidagi burchak Ψ -pretsessiya burchagi, OX va ON orasidagi burchak φ -sof aylanish burchagi, OZ va O ζ orasidagi burchak θ -nutatsiya burchagi deyiladi. Ψ , φ , θ burchaklarning

musbat yo'nalishlari mos ravishda OZ, O ζ va ON o'qlar uchlaridan qaraganda bu burchaklarning o'zgarishi soat mili aylanishiga teskari ko'rinadigan qilib olinadi. Ψ , φ , θ – Eyler burchaklari deyiladi.

Eyler teoremasi. Qattiq jismning qo'zg'almas nuqta atrofidagi ixtiyoriy ko'chishini mazkur qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi uchta o'q atrofida ketma-ket uchta aylantirish bilan bajarish mumkin.

Jismning istalgan paytdagi holatini bir-biriga bog'liq bo'lmagan uchta Eyler burchaklari vositasida aniqlash mumkin. Jismning harakati davomida bu burchaklar vaqtning uzluksiz funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t) \quad (3.1)$$

Bu tenglamalar qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi qattiq jismning kinematik tenglamalari yoki sferik harakat tenglamalari deyiladi.

Eyler-Dalamber teoremasi: Qo'zg'almas nuqta atrofida aylanuvchi jismning bir holatdan ikkinchi holatga o'tishini shu qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi o'q atrofida bir aylanish bilan bajarish mumkin.

Bu teoreмага ko'ra jismning sferik harakati har onda o'z holatini o'zgartiruvchi va qo'zg'almas nuqtadan o'tuvchi oniy o'qlar atrofida oniy aylanishlar majmuasi deb qaralishi mumkin; bunda har bir oniy aylanish o'qi atrofidagi oniy aylanishning burchak tezligi sferik harakatdagi jismning burchak tezligi deb qaraladi va ω bilan belgilanadi; ω - vektor oniy aylanish o'qi bo'ylab yo'naltiriladi.

Harakat Eyler burchaklari orqali tekshiriladigan bo'lsa, sferik harakatni har onda uchta kesishuvchi o'qlar (OZ, O ζ , ON) atrofidagi oniy aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin. Bu holda oniy burchak tezligi uchun

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\varphi} + \dot{\theta}$$

o'rinli bo'lib, uning qo'zg'almas koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \theta \cdot \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cdot \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

formuladan topiladi.

Shuningdek oniy burchak tezligining qo'zg'aluvchi koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarni ham topish mumkin:

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

(3.2) va (3.3) formulalar Eylerning kinematik tenglamalari deyiladi.

(3.2) va (3.3) ga ko'ra, oniy burchak tezlikning miqdori quyidagicha topiladi:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\omega_\eta^2 + \omega_\xi^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta} \quad (3.4)$$

Burchak tezlikning yo'nalishi bu holda vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan burchaklari kosinuslari orqali ifodalanadi:

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{OX}) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{OY}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{OZ}) = \frac{\omega_z}{\omega} \quad (3.5)$$

yoki

$$\cos(\vec{\omega}, \hat{O\xi}) = \frac{\omega_\xi}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{O\eta}) = \frac{\omega_\eta}{\omega}, \quad \cos(\vec{\omega}, \hat{O\zeta}) = \frac{\omega_\zeta}{\omega} \quad (3.6)$$

Sferik harakatdagi jismning oniy burchak tezlanishini

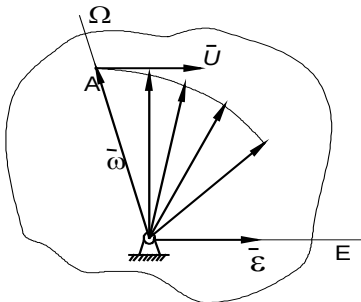
$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt \quad (3.7)$$

formula bilan aniqlanadi. Bunda $\vec{\omega}$ miqdor va yo'nalishi bo'yicha o'zgaruvchi vektordan iborat bo'lishini nazarda tutsak, sferik harakatdagi jismning biror ondagi burchak tezlanishi mazkur jismning shu ondagi burchak tezlik vektori uchining tezligi deb

qaralishi mumkin, degan xulosaga kelamiz; bu tezlikni $\bar{u}$ bilan belgilasak:

$$\bar{\varepsilon} = d\varpi / dt = \bar{u} \quad (3.8)$$

Binobarin, oniy burchak tezlanish vektori burchak tezlik godografiga o'tkazilgan urinma bo'yicha yo'naladi (2-shakl).



2-shakl

Agar ω vektorning qo'zgalmas o'qlardagi proyeksiyalari $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ qo'zgaluvchan o'qlardagi proyeksiyalari $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ ma'lum bo'lsa, oniy burchak tezlanishining shu o'qlardagi proyeksiyalari mos ravishda quyidagi formulalardan topiladi:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z \quad (3.9)$$

yoki

$$\varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi; \quad \varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta; \quad \varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta \quad (3.10)$$

u holda burchak tezlanish vektorining moduli:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2} \quad (3.11)$$

Formuladan yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslar orqali aniqlanadi:

$$\cos\left(\bar{\varepsilon}, \overset{\wedge}{OX}\right) = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon}; \quad \cos\left(\bar{\varepsilon}, \overset{\wedge}{OY}\right) = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon}; \quad \cos\left(\bar{\varepsilon}, \overset{\wedge}{OZ}\right) = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \quad (3.12)$$

yoki

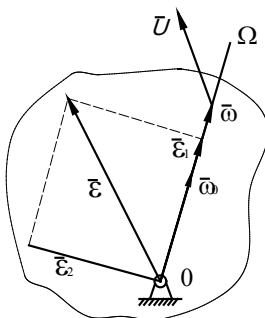
$$\cos\left(\bar{\varepsilon}, \overset{\wedge}{O\xi}\right) = \frac{\varepsilon_\xi}{\varepsilon}; \quad \cos\left(\bar{\varepsilon}, \overset{\wedge}{O\eta}\right) = \frac{\varepsilon_\eta}{\varepsilon}; \quad \cos\left(\bar{\varepsilon}, \overset{\wedge}{O\zeta}\right) = \frac{\varepsilon_\zeta}{\varepsilon} \quad (3.13)$$

Jismning oniy burchak tezlanishini topishda quyidagi

uchinchi usulni qo'llash ham mumkin. Bu usulga ko'ra aylanish oniy o'qi bo'yicha yo'nalgan $\overline{\omega}_0$ birlik vektor kiritiladi va $\overline{\omega} = \omega \cdot \overline{\omega}_0$ deb olinib, (3.8) formula

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \overline{\omega}_0 + \omega \frac{d\overline{\omega}_0}{dt} = \overline{\varepsilon}_1 + \overline{\varepsilon}_2 \quad (3.14)$$

ko'rinishga keltiriladi. (3.14) da $\overline{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \overline{\omega}_0$ jism oniy burchak tezligi miqdorining o'zgarishini ifodalab, $\overline{\omega}_0$ ya'ni $\overline{\omega}$ bo'yicha yo'naladi: $\overline{\varepsilon}_2 = \omega \cdot \frac{d\overline{\omega}_0}{dt}$ esa oniy burchak tezligi yo'nalishining o'zgarishini ifodalaydi va birlik vektorning hosilasi xossasiga ko'ra vektorga perpendekulyar yo'nalgan bo'ladi (3-shakl).



3-shakl

Binobarin $\overline{\varepsilon}_1$ va $\overline{\varepsilon}_2$ orasidagi burchak to'g'ri burchakdan iborat. Shunga ko'ra oniy burchak tezlanishi miqdorini

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \quad (3.15)$$

formulasidan, yo'nalishini esa uning $\overline{\omega}$ bilan tashkil qilgan burchak kosinusi orqali topish mumkin:

$$\cos\left(\overline{\varepsilon}, \overline{\omega}\right) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \quad (3.16)$$

Jismning sferik harakatini har onda oniy burchak tezlik vektori bo'yicha yo'nalgan $O\Omega$ aylanish oniy o'qi atrofida oniy

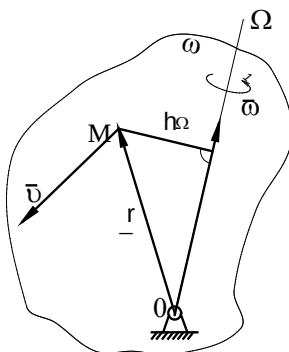
aylanma harakat qiladi deb qarash mumkin. Shunga asosan sferik harakatdagi jism M nuqtasining O qo'zgalmas markazga nisbatan radiusning vektori $\vec{r}$, oniy burchak tezlik vektorini $\vec{\omega}$ bilan belgilansa, mazkur nuqta tezligi, quyidagi Eyler formulasiga ko'ra aniqlanadi (4-shakl).

$$\vec{g} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.17)$$

(3.17) ga asosan tezlik miqdorini aniqlash uchun

$$g = \omega \cdot r \cdot \sin\left(\angle \vec{\omega}, \vec{r}\right) = \omega \cdot h_{\Omega} \quad (3.18)$$

formula hosil qilinadi, bunda h_{Ω} bilan M nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa belgilangan.



4-shakl

Agar sferik harakatdagi jism M nuqtasining koordinatalari (x, y, z) yoki (ξ, η, ζ) hamda oniy burchak tezlik vektorining o'qlardagi proyeksiyalari $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ yoki $(\omega_{\xi}, \omega_{\eta}, \omega_{\zeta})$ aniq bo'lsa, (3.17) dan tezlikning qo'zgalmas yoki qo'zgaluvchi koordinata o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlovchi formulalar hosil qilinadi:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\ g_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\ g_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} g_{\xi} &= \omega_{\eta} \cdot \zeta - \omega_{\zeta} \cdot \eta \\ g_{\eta} &= \omega_{\zeta} \cdot \xi - \omega_{\xi} \cdot \zeta \\ g_{\zeta} &= \omega_{\xi} \cdot \eta - \omega_{\eta} \cdot \xi \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Binobarin tezlik modulini aniqlashda quyidagi formulalardan foydalanish mumkin:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = \sqrt{g_\xi^2 + g_\eta^2 + g_\zeta^2} \quad (3.20)$$

Tezlik yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslardan topiladi, masalan:

$$\cos(\bar{g}, \hat{x}) = \frac{g_x}{g}; \quad \cos(\bar{g}, \hat{y}) = \frac{g_y}{g}; \quad \cos(\bar{g}, \hat{z}) = \frac{g_z}{g} \quad (3.21).$$

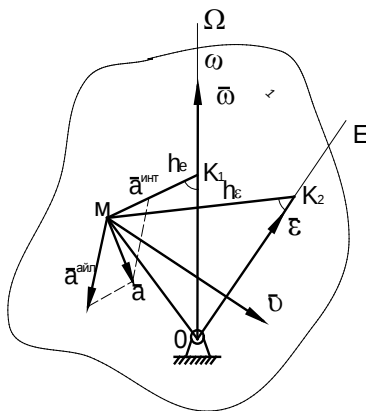
Bitta qo'zgalmas nuqtaga ega bo'lgan qattiq jism nuqtasining tezlanishi quyidagi Rivals teoremasiga ko'ra aniqlanadi (30-shakl):

$$\bar{a} = \bar{a}^{ayl} + \bar{a}^{int} \quad (3.22)$$

Bunda $\bar{a}^{ayl} = [\bar{\varepsilon} \cdot \bar{r}]$ aylanma tezlanish, $\bar{a}^{int} = [\bar{\omega} \cdot \bar{v}]$ o'qqa intilma tezlanish deyiladi. Vektor ko'paytma ta'rifga ko'ra:

$$|\bar{a}^{ayl}| = a^{ayl} = \varepsilon \cdot r \sin(\bar{\varepsilon}, \hat{r}) = \varepsilon \cdot h_\varepsilon \quad (3.23)$$

$$a^{int} = \omega \cdot \omega \cdot r \cdot \sin(\bar{\omega}, \hat{r}) \sin 90^\circ = \omega^2 h_\Omega \quad (3.24)$$



5-shakl

Bu formulalarda h_ε bilan tezlanishi aniqlanayotgan nuqtadan oniy burchak tezlanish vektori o'qi OE gacha bo'lgan masofa, h_Ω bilan esa nuqtadan oniy aylanish o'qi OΩ gacha bo'lgan masofa belgilangan. $\bar{a}^{ayl}$ vektor $\bar{\varepsilon}$ va $\bar{r}$ vektorlari yotgan tekislikka perpendikulyar ravishda shunday yo'nalganki, uning musbat uchidan qaraganda $\bar{\varepsilon}$ vektorning $\bar{r}$ tomon 180° dan kichik burchakka burilishi soat mili aylanishi yo'liga teskari ko'rinishi kerak. $\bar{a}^{int}$ vektor M nuqtadan aylanish oniy o'qiga tushirilgan perpendikulyar bo'ylab shu o'q tomon yo'nalgan.

Shuni ta'kidlash zarurki, $\bar{a}^{ayl}$ bilan $\bar{a}^{int}$ vektorlar orasidagi burchak umumiy holda 90° ga teng emas (xususiy holda – qo'zgalmas o'q atrofida aylanma harakatda, bu burchak 90° bo'ladi).

$\left(\bar{a}^{ayl}, \bar{a}^{int} \right) = \alpha$ deb belgilansa, M nuqta tezlanishining moduli quyidagi formuladan topiladi:

$$a = \sqrt{\left(\bar{a}^{ayl} \right)^2 + \left(\bar{a}^{int} \right)^2 + 2 \bar{a}^{ayl} \cdot \bar{a}^{int} \cdot \cos \alpha} \quad (3.25)$$

Sferik harakatdagi jism nuqtasining tezlanishini aniqlashda analitik usuldan ham foydalanish mumkin. Buning uchun nuqtaning koordinatalari (x, y, z) yoki (ξ, η, ζ) hamda burchak tezlik va burchak tezlanish vektorining qo'zgalmas yoki qo'zgaluvchi koordinata o'qlardagi proyeksiyalari berilgan bo'lishi, yoxud Eyler burchaklari berilganda (3.2), (3.3), (3.9), (3.10) formulalar bo'yicha topish mumkin bo'lishi kerak.

Masalan, tezlanishning qo'zgaluvchi o'qlardagi proyeksiyalari quyidagi formulalardan topiladi:

$$\left. \begin{aligned} a_\xi &= \varepsilon_\eta \zeta - \varepsilon_\zeta \cdot \eta + \omega_\xi (\omega_\xi \cdot \xi + \omega_\eta \cdot \eta + \omega_\zeta \cdot \zeta) - \omega^2 \xi \\ a_\eta &= \varepsilon_\eta \xi - \varepsilon_\xi \cdot \zeta + \omega_\eta (\omega_\xi \cdot \xi + \omega_\eta \cdot \eta + \omega_\zeta \cdot \zeta) - \omega^2 \eta \\ a_\zeta &= \varepsilon_\xi \cdot \eta - \varepsilon_\eta \cdot \xi + \omega_\zeta (\omega_\xi \cdot \xi + \omega_\eta \cdot \eta + \omega_\zeta \cdot \zeta) - \omega^2 \zeta \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

(3.26) formulada ξ, η, ζ harflarni mos ravishda x, y, z ga almashtirish bilan tezlanish vektorining qo'zgalmas o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlovchi formulalar hosil qilinadi.

Bu holda tezlanish moduli

$$a = \sqrt{a_{\xi}^2 + a_{\eta}^2 + a_{\zeta}^2} = \sqrt{a_z^2 + a_y^2 + a_x^2} \quad (3.27)$$

formuladan, yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslar orqali topiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Sferik harakat deb qanday harakatga aytiladi?
2. Eyler burchaklari deb nimaga aytiladi?
3. Oniy burchak tezligi nima?
4. Oniy burchk tezlanishi nima?
5. Oniy burchak tezlanishi qanday tashkil etuvchilarga ajraladi?

8-ma'ruza: Nuqtaning murakkab harakati (4 soat)

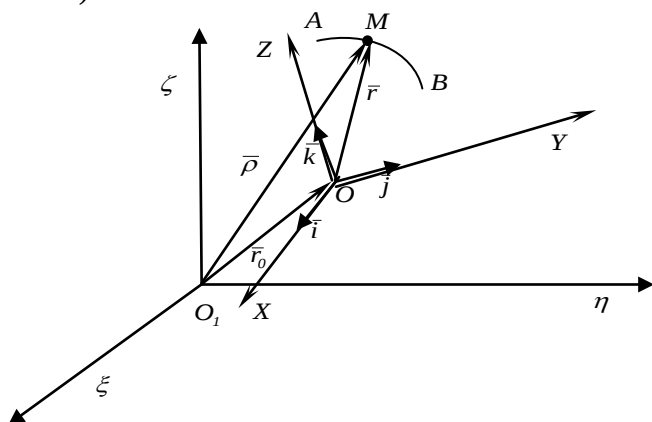
Reja:

1. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va mutlaq harakatlari
2. Nisbiy harakat tenglamalari
3. Murakkab harakatdagi nuqtaning tezligi
4. Tezlanishlarni qo'shish teoremasi. (Koriolis teoremasi)
5. Koriolis tezlanishi

Nuqta ikki va undan ortiq harakatda ishtirok etsa, uning bunday harakati *murakkab harakat* deb ataladi. Yuqorida nuqta yoki qattiq jismning qo'zg'almas, koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini tekshirgan edik, lekin nuqta yoki qattiq jismning harakatini qo'zg'aluvchi hamda qo'zg'almas koordinatalar sistemalariga nisbatan ham tekshirish mumkin. Nuqta yoki qattiq jism qo'zg'aluvchi sistemaga nisbatan harakatda bo'lib, qo'zg'aluvchi sistemani o'zi boshqa bir qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatlansa, nuqta yoki jismning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakati murakkab harakat bo'ladi. Nuqtaning murakkab harakatini qo'zg'almas sistemaga nisbatan tekshirish masalasi ancha murakkab masaladir. Amaliy masalalarni yechishda nuqtaning murakkab harakatini sodda harakatlarga ajratib yozish ancha qulay bo'ladi. Buning uchun nuqtaning harakatini qo'zg'aluvchi hamda qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiriladi.

Masalan: Kema palubasida harakatlanuvchi jismning daryo qirg'og'iga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat. Palubadagi jismning harakatini bevosita daryo qirg'og'iga nisbatan tekshirib bo'lmaydi. Bu harakatni kema bilan bog'langan qo'zg'aluvchi hamda qirg'oq bilan biriktirilgan qo'zg'almas koordinatalar sistemalariga nisbatan tekshirsak, harakatlanuvchi jismning murakkab harakatini ikki oddiy harakatlarga keltirib tekshirgan bo'lamiz. Ko'pincha murakkab harakatga oid masalalarda qo'zg'aluvchi koordinata sistemasining qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatini aniqlash yengil bo'ladi yoki shu harakat oldindan berilgan bo'ladi. Masalan keltirilgan misolda kemaning qirg'oqqa nisbatan harakati berilgan bo'lishi mumkin.

Nuqtaning qo'zg'almas O_1, ξ, η, ζ sistemasiga nisbatan murakkab harakatini tekshiramiz. Buning uchun O_1, ξ, η, ζ ga nisbatan harakatlanuvchi O, X, Y, Z koordinatalar sistemasini olamiz (1-shakl).



1-shakl

M nuqtaning shu ikki sistemaga nisbatan harakatini tekshiramiz. Shu ikki sistemaga nisbatan M nuqtaning harakati ikki xil bo'ladi. Bu ikki harakatni bir-biridan farq qilish uchun quyidagi belgilashlar kiritiladi. Harakatlanuvchi M nuqtaning qo'zg'aluvchi OXYZ sistemasiga nisbatan harakatiga nisbiy harakat deyiladi. M nuqtani qo'zg'aluvchi sistemaga nisbatan harakatsiz deb qarab, shu sistema bilan birgalikda qo'zg'almas $O_1 \xi \eta \zeta$ sistemasiga nisbatan harakatiga ko'chirma harakat deyiladi. Harakatlanuvchi M nuqtani bevosita qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakatiga murakkab yoki mutlaq harakat deyiladi. Nuqtaning nisbiy harakatini tekshirilganda, qo'zg'aluvchi koordinata sistemasini harakatda ekanligini nazarda tutib, harakatini faqat shu sistemaga nisbatan kuzatiladi. Bu kuzatilgan harakat trayektoriyasiga nisbiy harakat trayektoriyasi deyiladi. Nisbiy trayektoriya bo'ylab nuqtaning tezligiga nisbiy tezlik, nisbiy tezlikning o'zgarishini ifodalovchi tezlanishga nisbiy tezlanish deyiladi. Nisbiy tezlikni $\bar{g}_r$ va nisbiy ezlanishni $\bar{a}_r$ bilan belgilanadi. Keltirilgan misol kema palubasida harakatlanayotgan jism (nuqta)ning nisbiy harakatiga faqat kema (kema bilan bog'langan sistemaga) nisbatan kuzatiladi.

Jismning kemaga nisbatan tezligi nisbiy tezlik, tezlanishi nisbiy tezlanish bo'ladi. Harakat kuzatilayotgan paytda M nuqta qo'zg'aluvchi OXYZ koordinatalar sistemasiga biror nuqtasi bilan ustma-ust tushgan deb qarab, shu nuqtaning tezligiga ko'chirma tezlik va tezlanishiga ko'chirma tezlanish deyiladi. Ko'chirma tezlikni $\bar{\mathcal{G}}_e$, tezlanishni $\bar{a}_e$ deb belgilanadi. Keltirilgan misolda jism (nuqta) kesmaning biror nuqtasida joylashgan deb qarab, jismning kema bilan qirg'oqqa nisbatan harakati ko'chirma harakat bo'ladi.

Nuqtaning bevosita O_1, ξ, η, ζ qo'zg'almas sistemasiga nisbatan mutlaq harakati tezligiga mutlaq tezlik, tezlanishiga deyiladi. Mutlaq tezlikni $\bar{\mathcal{G}}_a$, mutlaq tezlanishni $\bar{a}_a$ bilan belgilanadi. Keltirilgan misolda kema palubasida harakatlanayotgan jism (nuqta)ni to'g'ridan-to'g'ri daryo qirg'og'i bilan bog'langan koordinata sistemasiga nisbatan harakati mutlaq harakat bo'ladi.

Qo'zg'aluvchi OXYZ koordinatalar sistemasiga nuqtaning holatini aniqlovchi x, y, z koordinatalari vaqtning funksiyalari

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

shaklda berilgan bo'lsa, nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinata sistemasiga nisbatan istalgan paytdagi holatini-harakatini aniqlash mumkin (34-shakl). Shu sababli (4.1) tenglamalarga nuqtaning nisbiy harakat tenglamalari deyiladi. (4.1) dan vaqt t ni chiqarib tashlasak, nuqtaning nisbiy harakat trayektoriyasi tenglamasini olamiz. Bu trayektoriya vaqt o'tishi bilan qo'zg'aluvchi sistema bilan birgalikda qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatlanadi. Odatdagi harakat sifatida (4.1) dan vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak, nisbiy tezlikning tegishli koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaydigan tengliklarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}_{rx} &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \mathcal{G}_{ry} &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \mathcal{G}_{rz} &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

(3.2) tengliklardan vaqt bo'yicha hosilani olsak, nisbiy tezlanishning proyeksiyalarini aniqlaydigan tengliklarni olamiz:

$$\left. \begin{aligned} a_{rx} &= \frac{d\mathcal{G}_{rx}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_{ry} &= \frac{d\mathcal{G}_{ry}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_{rz} &= \frac{d\mathcal{G}_{rz}}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Qo'zg'aluvchi OXYZ koordinata sistemasining koordinata o'qlarining birlik vektorlarini $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ deb belgilab, $\mathcal{G}_r$ ni (4.2) ga a_r ni (4.3) ga muvofiq quyidagi ko'rinishlarda yozamiz:

$$\mathcal{G}_r = \mathcal{G}_{rx}\bar{i} + \mathcal{G}_{ry}\bar{j} + \mathcal{G}_{rz}\bar{k} \quad (4.4)$$

$$a_r = a_{rx}\bar{i} + a_{ry}\bar{j} + a_{rz}\bar{k} \quad (4.5)$$

Ko'chirma va mutlaq harakatlarning tezlik va tezlanishlari harakatlanuvchi OXYZ sistemaning harakatiga bog'liq bo'ladi.

Qo'zg'aluvchi OXYZ koordinata sistemi qo'zg'almas O_1, ξ, η, ζ sistemaga nisbatan $\bar{\mathcal{G}}_0$ tezlik bilan ilgarilanma harakat qilsin deylik, harakatlanuvchi M nuqtaning OXYZ ga nisbatan nisbiy harakat tenglamalari (4.1) da berilgan bo'lib, harakat tekshirilayotgan onda uning nisbiy harakat trayektoriyasi AB egri chiziqdan iborat bo'ladi. O_1, ξ, η, ζ qo'zg'almas sistemaga nisbatan $\overline{OO_1} = \bar{r}_0(t)$, hamda $\overline{OM} = \bar{\rho}(t)$ deb belgilasak, M nuqtaning murakkab harakat radius vektori 34-shakldagi

$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + \bar{r} \quad (4.6)$$

ga teng. Agar $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ larni qo'zg'aluvchi koordinata o'qlarining birlik vektorlari desak, nisbiy harakat radius vektorini

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} \quad (4.7)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (4.7) ga ko'ra (4.6) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} \quad (4.8)$$

Bu tenglikdagi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ larning yo'nalish o'zgaruvchi vektorlar ekanligini e'tiborga olib, (4.8) dan t-vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} + \left(x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt} \right) \quad (4.9)$$

bundan

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{g}_a; \quad \frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{g}_0 \quad (4.10)$$

Eyler formulalariga asosan

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{i}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{i} \\ \frac{d\bar{j}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{j} \\ \frac{d\bar{k}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{k} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

(4.2), (4.4), (4.10), (4.11) larni hisobga olsak, (4.9) quyidagicha yoziladi:

$$\bar{g}_a = \bar{g}_r + \bar{g}_o + \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \quad (4.12)$$

$$\bar{g}_a = \bar{g}_r + \bar{g}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} \quad (4.13)$$

Bu yerda $\bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})$

M nuqtaning ko'chirma tezligi

$$\bar{g}_e = \bar{g}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} \quad (4.14)$$

ga teng.

Agar ko'chirma harakat ilgari lanma harakatdan iborat bo'lsa,

$$\overline{g}_e = \overline{g}_o,$$

qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdan iborat bo'lsa,

$$\overline{g}_e = \overline{\omega}_e \times \overline{r}$$

bo'ladi.

Shunday qilib

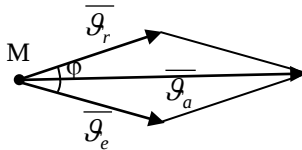
$$\overline{g}_a = \overline{g}_r + \overline{g}_e \quad (4.15)$$

Bunda (4.15) tenglik tezliklarni qo'shish teoremasini ifodalaydi.

Teorema. Nuqtaning murakkab harakatida uning mutlaq tezligi ko'chirma va nisbiy tezliklarning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Boshqacha aytganda mutlaq tezligi ko'chirma va nisbiy tezlik vektorlariga qurilgan parallelogramm diagonaliga teng bo'ladi.

Agar $\overline{g}_e$, $\overline{g}_r$ tezliklar qiymati va ular orasidagi burchak berilgan bo'lsa, mutlaq tezlik moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$g_a = \sqrt{g_e^2 + g_r^2 + 2g_e g_r \cos \varphi}$$



2-shakl

Agar:

a) $\varphi=0^\circ$ bo'lsa, $g_a = g_e + g_r$

b) $\varphi=90^\circ$ bo'lsa, $g_a = \sqrt{g_e^2 + g_r^2}$

c) $\varphi=180^\circ$ bo'lsa, $g_a = |g_e - g_r|$.

M nuqtaning mutlaq tezlanishini aniqlash uchun (4.9) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathcal{G}}_a}{dt} &= \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} \right) + \\ &+ 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{k}}{dt} \right) + \\ &+ x \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\bar{k}}{dt^2}\end{aligned}\quad (4.16)$$

Bu yerda $\frac{d\bar{\mathcal{G}}_a}{dt} = \bar{a}_a$ – M nuqtaning mutlaq tezlanishi.

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{i}) \\ \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{j}) \\ \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{k})\end{aligned}$$

bo'lib,

$$\begin{aligned}x \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} &= \bar{\varepsilon}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) + \bar{\omega}_e \times \\ &\times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}) = \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n \\ \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} &= \bar{a}_0 \text{ – O qutbning tezlanishi.}\end{aligned}$$

$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau$ – M nuqtaning ko'chirma tezlanishi bo'lib, O nuqtaning tezlanishi hamda aylanma va o'qqa intilma tezlanishlarning geometrik yig'indisiga teng.

$$\bar{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} \quad (4.17)$$

– nisbiy tezlanish.

$$\bar{a}_k = 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\bar{k}}{dt} \right) = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) \quad (4.18)$$

– Koriolis tezlanishi.

Demak, M nuqtaning mutlaq tezlanishi quyidagicha

hisoblanadi:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_k \quad (4.19)$$

(4.19) Koriolis teoremasini ifodalaydi: ko'chirma harakati ilgari lanma bo'lmagan murakkab harakatdagi nuqtaning mutlaq tezlanishi uning nisbiy ko'chirma va Koriolis tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.

Agar ko'chirma harakat ilgari lanma harakatdan iborat bo'lsa ($\omega_e=0$), (4.18) ga asosan Koriolis tezlanishi ($\overline{a}_k=0$) nolga teng bo'ladi. Bu holda Koriolis teoremasi quyidagicha bo'ladi.

Agar nuqtaning ko'chirma harakati ilgari lanma harakatdan iborat bo'lsa, uning mutlaq tezlanishi nisbiy va ko'chirma tezlanishlarining geometrik yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e \quad (4.20)$$

Koriolis tezlanishi ko'chirma harakat burchak tezlik vektorining nisbiy harakat tezlik vektoriga vektorli ko'paytmaning ikkilanganligiga teng.

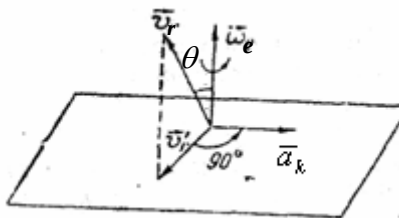
$$\overline{a}_k = 2(\overline{\mathcal{G}}_r \times \overline{\omega}_e) \quad (4.21)$$

Ko'chirma nisbiy tezlanishlar vaqt birligi ichida tegishli nisbiy, ko'chirma tezliklarning o'zgarishini xarakterlaydi. Koriolis tezlanishi esa, nisbiy tezlikni ko'chirma harakat ta'siridan, aksincha ko'chirma harakat burchak tezligini nisbiy harakat ta'sirida o'zgarishini xarakterlaydi. Agar ko'chirma harakat ilgari lanma bo'lsa, $\omega_e=0$, bu holda $a_k=0$. Koriolis tezlanishi hosil bo'lmaydi. Ko'chirma harakati aylanma bo'lgan nuqta murakkab harakatiga tegishli masalani yechishda, ko'chirma, nisbiy tezlanishlardan tashqari Koriolis tezlanishini ham hisoblash talab etiladi. (4.21) formuladan Koriolis tezlanishining miqdor va yo'nalishini aniqlaymiz. Agar $\overline{\omega}$ bilan $\overline{\mathcal{G}}_r$ orasidagi θ burchak berilgan bo'lsa, Koriolis tezlanish a_k ning miqdori,

$$a_k = 2\omega_e \mathcal{G}_r \sin \theta \quad (4.22)$$

tenglikdan topiladi. Koriolis tezlanishi ko'chirma harakat ω_e -burchak tezlik vektorini bilan $\mathcal{G}_r$ nisbiy harakat tezlik vektorining vektor ko'paytmasi yo'nalishida yo'nalgan $\overline{a}_k$ vektor bo'lib, $\overline{\omega}$

bilan $\overline{g}_r$ yotgan tekislikka tik yo'naladi. $\overline{a}_k$ ning yo'nalishini aniqlash uchun $\overline{\omega}_e$ vektorni tezlanishi izlanayotgan M nuqtaga ko'chiramiz. Koriolis tezlanishi vektori uchidan qaraganda, vektor soat milining aylanishiga teskari aylanishda θ burchakka burib $\overline{g}_r$ vektor bilan bir yo'nalishda ko'rinishi kerak. Koriolis tezlanish yo'nalishini quyidagi *Jukovskiy qoidasi* asosida aniqlanadi. Nisbiy tezlik vektorini ko'chirma harakat burchak tezligi yo'nalishiga perpendikulyar tekislikka proyeksiyalaymiz. Bu proyeksiya $\overline{g}_r$ ' ni mazkur tekislikda ko'chirma harakat aylanish yo'nalishida 90° ga buramiz (3-shakl). Bu yo'nalish Koriolis tezlanishining yo'nalishidir.



3-shakl

Quyidagi hollarni tekshiramiz:

1. Agar $\mathcal{G}_r$ nisbiy tezlik, ko'chirma harakat ω_e - burchak tezligiga tik yo'nalgan bo'lsa, Koriolis tezlanishining qiymati $a_k = 2\omega_e \mathcal{G}_r$ ga teng bo'ladi.

$\mathcal{G}_r$ ni ω_e ga tik tekislikda aylanma harakat yo'nalishida 90° ga aylantirsak, Koriolis tezlanishining yo'nalishini olamiz.

2. Agar $\overline{\mathcal{G}_r} \parallel \overline{\omega_e}$ ga parallel bo'lsa, u holda $(\omega_e \wedge \mathcal{G}_r) = 0$, yoki $(\omega_e \wedge \mathcal{G}_r) = 180^\circ$ bo'lib, $a_k = 0$ bo'ladi.

3. Ko'chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa, $\omega_e = 0$ bo'lib, $a_k = 0$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Nuqtaning nisbiy, ko'chirma, mutlaq harakatlari deb qanday harakatlarga aytiladi?
2. Nisbiy, ko'chirma, mutlaq tezliklar orasida qanday bog'lanish mavjud?
3. Qo'zg'almas sanoq sistemasiga nisbatan tinch turgan nuqtaning nisbiy va ko'chirma tezliklari orasida qanday bog'lanish mavjud?
4. Nuqtaning mutlaq tezlanishi qanday aniqlanadi?
5. Koriolis tezlanishi qanday aniqlanadi? Koriolis tezlanishi qanday hollarda nolga teng bo'ladi?
6. Ko'chirma harakat ilgarilanma bo'lgan holda nuqtaning mutlaq tezlanishi qanday aniqlanadi?
7. Nuqtaning mutlaq tezligi moduli qanday aniqlanadi?
8. Nuqta doira gardishi bo'ylab, doiraga nisbatan, doira aylanishiga teskari tomonga harakatlanadi. Bu nuqtaning mutlaq tezligi qanday yo'naladi?

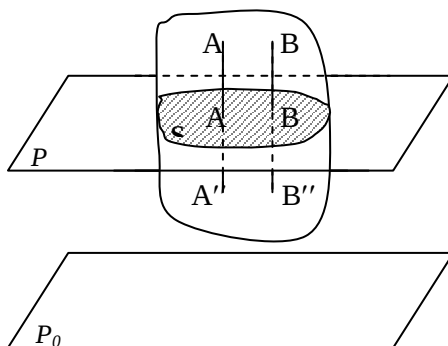
9-ma'ruza: Qattiq jismning tekis-parallel harakati (4 soat)

Reja:

1. Qattiq jismning tekis-parallel harakati. Qattiq jismning tekis-parallel harakatini aniqlash
2. Tekis shaklning harakat tenglamalari
3. Tezliklar oniy markazi
4. Tekis shakl nuqtasining tezlanishi va uning oniy markazi

Qattiq jism harakatlanganda uning hamma nuqtalari biror qo'zg'almas tekislikka parallel tekisliklarda harakatlangan, qattiq jismning bunday harakatiga tekis-parallel harakat deyiladi (41-shakl). Jismni P_0 tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy P tekislik bilan qirqamiz. Natijada P tekislikda S qirqim yuza hosil bo'ladi. Bu yuzani tekis shakl deb ataladi. Tekis shakl hamma vaqt P tekislikda harakatlanadi. Jismda tekislikka tik qilib A' , A'' olingan kesma jism harakatlanganda P o'ziga o'zi parallel qoladi. Uning hamma nuqtalarining tezlik va tezlanishlari bir xil bo'lib, P tekislikka parallel bo'ladi. Bunday holda A' , A'' kesma ustida yotuvchi jismning hamma nuqtalarining harakatini o'rganish o'rniga, shu nuqtalardan birining harakatini o'rganish kifoya. Shunday nuqta uchun S tekis shaklning a nuqtasini olsak bo'ladi.

Demak qattiq jism tekis parallel harakatini o'rganish uchun, jismda P_0 qo'zg'almas tekislikka parallel bo'lgan S yuzaning (tekis shaklning) P tekislikdagi harakatini bilsak kifoya. Kinematikada qattiq jismning tekis parallel harakati sohasida yuritiladigan mulohazalar mashina va mexanizmlarning va ularning ayrim qismlarining harakatini o'rganishda nazariy baza sifatida qo'llaniladi. Shuning uchun qattiq jismning tekis parallel harakati kinematikaning asosiy qismi bo'lib, bu qismni ayrim o'rganiladi. Tekis shakl harakatlanadigan tekislikka tekis shaklning harakat tekisligi deyiladi. Tekis shaklning harakat tekisligida joylashgan qo'zg'almas OXY koordinata sistemasiga nisbatan harakatini o'rganamiz.

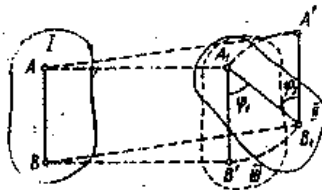


1-shakl

Tekis shakl S ning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan vaziyati unda olingan ixtiyoriy ikkita nuqtasini tutashtiruvchi AB kesmaning vaziyati bilan aniqlanadi. Biroq AB kesmaning qo'zg'almas sistemaga nisbatan vaziyati uning biror nuqtasining koordinatalari va bu kesmaning OX o'qi bilan tashkil etgan φ burchagi bilan aniqlanadi. Bunday nuqtaga *qutb nuqta* deyiladi. Faraz qilaylik, S tekis shakl t vaqtda 1-holatda bo'lib uning holati AB kesma bilan aniqlansin, $t+\Delta t$ vaqtda S , II holatga ko'chib, AB kesma A_1B_1 holatni oladi. A nuqtani qutb deb olamiz. AB ning A nuqtasi A_1 ga S o'tguncha tekis shaklga ilgarilanma harakat beramiz, shunda AB kesma A_1B' holatga keladi. Bu holda S ning hamma nuqtalari geometrik AA_1 ga teng masofaga ko'chadi. A_1B' ni A_1 nuqta atrofida $\angle BA_1B' = \varphi_1$ ga aylantirsak, A_1B' kesma A_1B_1 holatga ko'chadi. Tekis shakl S birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tadi. Endi B nuqtani qutb deb olamiz. B nuqta B_1 holatga kelguncha S tekis shaklga ilgarilanma harakat beramiz. Bu holda AB kesma $A'B_1$ holatga o'tadi. Tekis shaklning hamma nuqtalari bir xilda BB' masofaga ko'chadi. B nuqta atrofida $\angle A'B_1A_1 = \varphi_2$ burchakka aylantirsak, AB kesma A_1B_1 holatga keladi. Bu holda S tekis shakl B nuqta harakati bilan ilgarilanma ko'chib, B nuqta atrofida φ_2 burchakka aylanishi natijasida S birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tadi. Birinchi holda S tekis shakl A nuqtaning ilgarilanma harakati bilan A nuqta atrofida φ_1 burchakka aylanishi natijasida birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tgan edi. Har ikki

holda tekis shaklni birinchi holatdan ikkinchi holatga ko'chishi ikki harakat natijasida bajarilishini ko'rdik. Bu tekis shaklning harakat tekisligida ko'chishiga doir teoremani ifodalaydi.

Teorema: Tekis shaklning harakat tekisligidagi har qanday harakatini ixtiyoriy tanlab olingan qutb nuqtasining harakati bilan ilgarilanma harakatdan va shu qutb nuqta atrofida aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin (2-shakl).



2-shakl

Biz yuqorida bir gal A, ikkinchi galda B nuqtani qutb deb oldik A va B lar ixtiyoriy nuqtalar bo'lgani uchun qutb nuqtani tanlab olish ixtiyoriy bo'ladi. Tekis shaklni ilgarilanma harakati qutb nuqtani tanlab olishga bog'liq. Masalan yuqorida A nuqtani qutb nuqta uchun olganimizda S ni nuqtalari ilgarilanma harakat natijasida AA' masofaga ko'chgan bo'lsa, B nuqtani qutb uchun olganimizda BB' masofaga ko'chadi. Biroq $AA' \neq BB'$ aks holda ($AA' = BB'$) tekis shakl faqat ilgarilanma harakat qiladi. Shakldan $AB \neq A_1B'$ va $AB \neq A'B_1$ bo'lgandan $A_1B' \neq A'B_1$ bo'ladi. Har ikki holda $\angle B'AB_1 = \angle A'B_1A_1$: ya'ni $\varphi_1 = \varphi_2$. Bundan tekis shaklni har ikki qutb nuqta atrofida aylanish yo'nalishi va aylanish burchagi bir xilda ekanligini ko'ramiz. Demak tekis shaklning ilgarilanma harakati qutb nuqtani tanlab olishga bog'liq, ammo aylanma harakati qutb nuqtani tanlashga bog'liq bo'lmaydi.

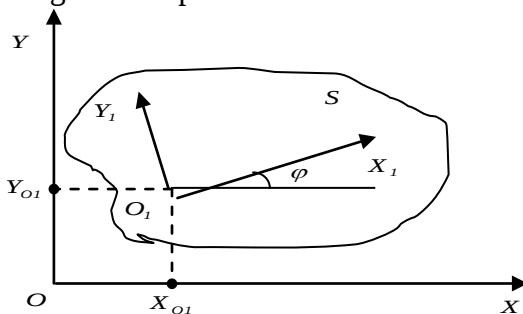
Tekis shakl S ni harakat tekisligida joylashgan OXY qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakatini tekshiramiz. Qutb nuqta uchun S ning biror O nuqtasini ixtiyoriy tanlab olamiz. Shu O_1 nuqtada S bilan mahkam bog'langan, u bilan birga harakatlanuvchi $O_1X_1Y_1$ koordinata sistemasini o'tkazamiz. $O_1X_1Y_1$ koordinata sistemasini OXY koordinata sistemasiga nisbatan harakati S ni OXY ga nisbatan harakatini ifodalaydi. $O_1X_1Y_1$ ning

ОХУ га nisbatan holati O_1 ni X_{01} , Y_{01} koordinatalari hamda ОХ ning O_1X_1 bilan tashkil etgan φ burchagi bilan aniqlanadi. Vaqt o'tishi bilan S harakatlenganda X_{01} , Y_{01} va φ lar t vaqtning funksiyasi shaklida o'zgaradi (3-shakl).

Ya'ni

$$\left. \begin{aligned} X_{01} &= f_1(t) \\ Y_{01} &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

bo'ladi. X_{01} , Y_{01} va φ lar vaqtning bir qiymatli, uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasi bo'ladi. (5.1) tenglamalar berilgan bo'lsa, istalgan t vaqt uchun S ning XY tekisligidagi holati ma'lum bo'ladi. (5.1) tenglamalar tekis shaklning harakat tenglamalari deyiladi. Agar harakat davomida $\varphi = \text{const}$ bo'lsa, S va Y bilan bog'langan $O_1X_1Y_1$ koordinata o'qlari o'zlarining boslang'ich holatiga doimo parallel harakatlanadi.



3-shakl

S ilgari lanma harakatda bo'ladi. Agar $X_{01}, Y_{01} = \text{const}$ bo'lsa, S va Y bilan bog'langan $O_1X_1Y_1$ koordinata o'qlari O_1 nuqta atrofida aylanma harakat qiladi. φ aylanish burchagini ОХ dan boshlab soat milining aylanish tomoniga teskari aylanishda hisoblanadi. Shunday qilib S ning qo'zg'almas XY tekisligidagi harakati ikki harakatdan tashkil topadi.

(5.1) tenglamalarning birinchi ikkitasi S tekis shaklning ilgari lanma harakatini, uchinchi S ning qutb nuqta atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi. Agar (5.1) berilgan bo'lsa, ularni

birinchi ikkitasidan t bo'yicha bir marta hosila olib, S ning ilgarilanma harakat $\mathcal{G}$ tezligini topamiz:

$$\mathcal{G}_{0_1x} = f'_1(t); \mathcal{G}_{0_1y} = f'_2(t)$$

bunda

$$\mathcal{G}_{0_1} = \sqrt{\dot{X}_{0_1}^2 + \dot{Y}_{0_1}^2} = \sqrt{\mathcal{G}_{0_1x}^2 + \mathcal{G}_{0_1y}^2}$$

Agar (5.1) ning uchinchi tenglamasidan t vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak, S tekis shaklning O_1 nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi ω ni va ikki marta hosila olsak, burchak tezlanishi ε ni topamiz.

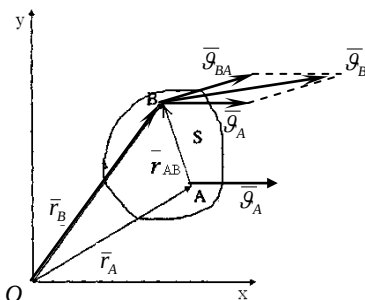
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Demak S tekis shakl harakat tekisligidagi harakati ixtiyoriy tanlab olingan O_1 qutb nuqtasining tezligi bilan ilgarilanma va O_1 qutb nuqta atrofida aylanma harakatlardan tashkil topadi. S tekis shakl OXY qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan bir vaqtda ikki harakatda ishtirok etadi. Shuning uchun S ning OXY ga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat deb qarash mumkin. S ning ilgarilanma harakati ko'chirma, uning qutb nuqta atrofidagi aylanma harakati nisbiy harakat bo'ladi.

Tekis shaklning XY tekisligidagi harakatini tekshiramiz (4-shakl). S ning biror A nuqtasini qutb uchun tanlab, uning radius vektorini $\vec{r}_A$ bilan belgilaymiz, S ning ixtiyoriy B nuqtasining radius vektorini $\vec{r}_B$. Yuqorida isbotlangan teorema ga asosan

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \quad (5.2)$$

bo'ladi.



4-shakl

Bunda $\vec{r}_{AB}$ B nuqtaning A nuqta atrofida aylanma (nisbiy) harakat radius vektori. Nuqta harakatlanganda uning radius vektori t vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi. B nuqtaning tezligi (5.2) dan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi. Ya'ni

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} \quad (5.3)$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{g}_B; \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{g}_A; \quad \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{g}_{AB}$$

bunda $\vec{g}_{AB}$ B nuqtaning A nuqta atrofidagi nisbiy (aylanma) harakat tezligi. Aylanma harakat tezligi, aylanma harakat ω burchak tezlik vektorining aylanish radius vektoriga vektorlik ko'paytmasiga teng ekanligi bizga ma'lum

$$\vec{g}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB};$$

Bunda $\vec{\omega} \perp \vec{AB}$ bo'lgani uchun $\vec{g}_{BA}$ ning miqdori $g_{BA} = \omega AB$ bo'ladi. Bularning qiymatlarini (5.3) ga qo'ysak quyidagi tenglikni olamiz

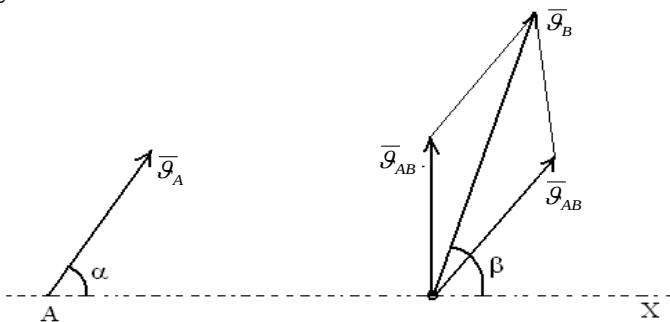
$$\vec{g}_B = \vec{g}_A + \vec{g}_{AB} \quad (5.4)$$

Demak, tekis shaklning biror nuqtasining tezligi, qutb nuqtasining ilgarilanma harakat tezligi bilan qutb nuqta atrofidagi aylanma harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng ekan. Boshqacha aytganda, tekis shaklning biror nuqtasining absolyut ($\vec{g}_B$) tezligi uning qutb nuqtasining ko'chirma harakat ($\vec{g}_A$) tezligi bilan qutb nuqta atrofida nisbiy ($\vec{g}_{BA}$ aylanma) harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. (5.4) tenglikdan foydalanib, amaliy masalalarni yechishda katta ahamiyatga ega bo'lgan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema: Tekis shakl ikki nuqtasining tezliklarini shu nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziqdan o'tuvchi o'qdagi proyeksiyalar o'zaro teng bo'ladi.

Tekis shaklning $\vec{g}_A$ va $\vec{g}_B$ tezliklari berilgan bo'lsin (5-shakl). Shu tezliklarning A va B nuqtalarini tutashtiruvchi AX yo'nalishiga proyeksiyasining tengligini ko'rsatsak, teoremani

isbotlagan bo'lamiz. Buning uchun (5.4) ni AX yo'nalishiga proyeksiyalaymiz.



5-shakl

$$pr_{AX}(\bar{g}_B) = pr_{AX}(\bar{g}_A) + pr_{AX}(\bar{g}_{AB})$$

Bunda $\bar{g}_{BA} \perp AB$ bo'lgani uchun $pr_{AX}(\bar{g}_{AB}) = 0$.

Demak,

$$pr_{AX}(\bar{g}_B) = pr_{AX}(\bar{g}_A) \quad (5.5)$$

$$g_A \cos \alpha = g_B \cos \beta$$

bo'ladi.

Berilgan onda (daqiqada) tezligi nolga teng bo'lgan tekis shakl nuqtasiga tezliklar oniy markazi deb ataladi. Tekis shaklning bunday nuqtasini topish uchun uning istalgan nuqtasining tezligini aniqlaydigan (5.4) formuladan foydalanamiz. Aytaylik tekis shaklning biror O nuqtasining g_0 ilgarilanma (ko'chirma) harakat tezligi va shu O nuqta atrofidagi (nisbiy) aylanma harakat ω burchak tezligi berilgan bo'lsin. Shu O nuqtani qutb nuqta deb olamiz. Bu holda tekis shaklning ixtiyoriy nuqtasining (absolyut) tezligi, qutb nuqta g_0 ilgarilanma (ko'chirma) harakat tezligi bilan qutb nuqta atrofida g_{OR} (nisbiy) aylanma harakat tezligining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. O nuqtadan g_0 ga aylanma harakat yo'nalishiga tik chiziq o'tkazamiz (6-shakl).

$$\bar{g}_0$$

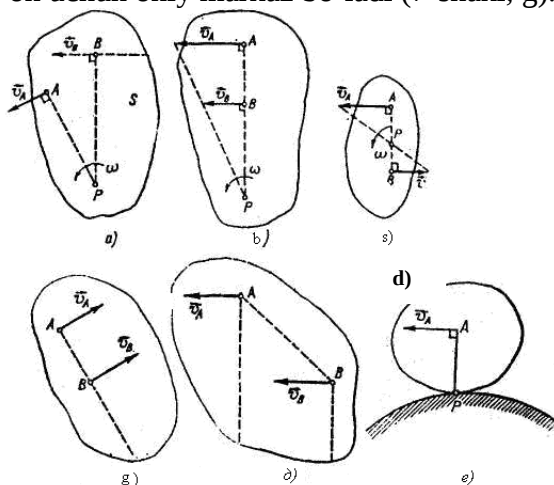

$$\overline{\mathcal{G}}_P = \overline{\mathcal{G}}_O + \overline{\mathcal{G}}_{PO}$$
$$OP = \frac{g_0}{\varrho} \quad (5.6)$$

2) Agar tekis shaklni ikki A va B nuqtalarini $\overline{\mathcal{G}}_A, \overline{\mathcal{G}}_B$

tezliklari shu nuqtalarni tutashtiruvchi AB ga tik, miqdorlari farqli bo'lsa ($\vartheta_A \neq \vartheta_B$), tezliklar oniy markazi tezliklarning uchini tutashtiruvchi chiziq bilan AB chiziqni davomining kesishgan nuqtasida bo'ladi (7- shakl, b, d);

3) Agar tekis shaklning A va B nuqtalarining tezliklari teng va parallel bo'lsa, tezliklar oniy markazi ($AP=\infty$) cheksizlikda bo'ladi. Shu onda tekis shakl oniy ilgarilanma harakat qiladi (7- shakl, e,f).

4) Amaliyotda ko'pincha tekis shakl S qo'zg'almas egri chizig'i ustida sirpanmasdan dumalaydi. Bu holda S ning egri chiziqqa tegib turgan nuqtasining tezligi nolga teng bo'ladi. Shu nuqta mazkur on uchun oniy markaz bo'ladi (7-shakl, g).



7- shakl

Berilgan onda tekis shaklning oniy markazini P ma'lum bo'lsin. P ni qutb nuqta uchun olib, (5.4) formulaga muvofiq tekis shaklning A, B, C nuqtalari tezliklarini topamiz:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{AP}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{BP}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{CP}$$

Bu yerda $\vec{v}_P=0$ bo'lgani uchun

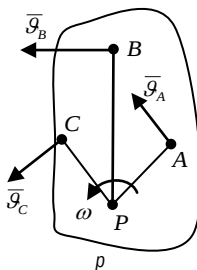
$$\vec{v}_A = \omega_p \vec{AP}, \vec{v}_B = \omega_p \vec{BP}, \vec{v}_C = \omega_p \vec{CP} \quad (5.7)$$

yo'nalishlari $\vec{v}_A \perp \vec{AP}$ $\vec{v}_B \perp \vec{BP}$ $\vec{v}_C \perp \vec{CP}$.

Agar tekis shaklning olingan onda oniy markazi ma'lum bo'lsa, tekis shakl nuqtalarining shu ondagi tezliklari, oniy markazi atrofida xuddi oniy aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari kabi topiladi. Demak, tekis shaklning oniy markazi ma'lum bo'lganda, uning nuqtalari tezliklarining miqdorlari tekis shaklning aylanma harakat burchak tezligini nuqtalardan oniy markazgacha bo'lgan masofalariga ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Tezliklar mos ravishda shu oraliqlarga aylanma harakat yo'nalishlarda tik yo'nalgan bo'ladi (8-shakl). (5.7) dan tekis shakl nuqtalarining oniy paytdagi tezliklari orasidagi munosabatni aniqlaymiz

$$\frac{g_A}{AP} = \frac{g_B}{BP} = \frac{g_C}{CP} \quad (5.8)$$



8-shakl

O₁ξη qo'zg'almas tekislikda harakatlanayotgan S tekis shaklning biror ixtiyoriy B nuqtasining tezlanishini aniqlaymiz. Bizga ma'lumki, S ning qo'zg'almas O₁ξη tekislikdagi harakati ikki harakatdan tashkil topadi:

1) ixtiyoriy ravishda tanlab olingan qutb nuqtasining harakati bilan ilgarilanma;

2) qutb nuqta atrofida nisbiy aylanma harakatlardan iborat.

Shu sababli S tekis shakl har bir nuqtasining harakati ko'chirma va nisbiy harakatlardan tashkil topgan murakkab harakatdan iborat bo'lib, tezlanishi murakkab harakat tezlanishi kabi tezlanishlarni qo'shish teoremasiga muvofiq aniqlanadi (9-shakl).

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} \quad (5.9)$$

Bu tenglikdagi $\bar{a}_A$ – S tekis shakldan ixtiyoriy tanlab

olingan qutb nuqtasining ilgarilanma harakat tezlanishi. Bu tezlanish qattiq jismning ilgarilanma harakati xususiyatiga ko'ra tekis shaklning hamma nuqtalari uchun bir xil bo'lib, S ning ko'chirma harakat tezlanishi bo'ladi, ya'ni $\overline{a_e} = \overline{a_A}$.

$\overline{a_{BA}}$ esa B nuqtaning O qutb nuqta atrofida aylanma harakat tezlanishi, S ning nisbiy harakat tezlanishini ifodalaydi $\overline{a_r} = \overline{a_{BA}}$. Shunday qilib, tekis shaklning istalgan B nuqtasining tezlanishi $\overline{a_B}$ ixtiyoriy ravishda tanlab olingan A qutb nuqtani ilgarilanma harakat tezlanishi $\overline{a_A}$ bilan qutb nuqta atrofida aylanma harakat $\overline{a_{BA}}$ tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng. Boshqacha aytilganda, tekis shaklning istalgan nuqtasining tezlanishi tekis shaklning ko'chirma va nisbiy tezlanishlariga qurilgan parallelogramm diagonali bo'ylab yo'nalgan bo'lib, miqdori shu diagonal uzunligiga teng. $\overline{a_{OM}}$ aylanma harakat tezlanishi bo'lgani uchun uni ikki tezlanishga ajratiladi:

1) B nuqtadan aylanish markazi A qutbga qarab BA bo'ylab yo'nalgan $\overline{a_{BA}^n}$ – markazga intilma tezlanish;

2) Aylanish radiusi BA ga tik yo'nalgan $\overline{a_{BA}^\tau}$ – aylanma tezlanishga ajraladi. Ya'ni

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau} \quad (5.10)$$

Markazga intilma tezlanishning moduli

$$a_{BA}^n = \omega^2 BA \quad (5.11)$$

Hamma vaqt musbat son bo'lgani uchun a_{BA}^n hamma vaqt kuzatilayotgan nuqtadan aylanish radiusi bo'ylab aylanish markaziga yo'nalgan bo'ladi. Aylanma tezlanishning moduli

$$a_{BA}^\tau = |\varepsilon| BA \quad (5.12)$$

ga teng yo'nalishi aylanma harakat burchak tezlanishining ishorasiga bog'liq.

Agar $\varepsilon = d\omega/dt > 0$ bo'lsa, $\overline{a_{BA}^\tau}$ BA ga tik qutb nuqta atrofida aylanma harakat tezligi $\overline{\vartheta_{BA}}$ bilan bir yo'nalishda bo'lib, aylanma harakat tezlanuvchan bo'ladi. Agar $\varepsilon < 0$ bo'lsa, $\overline{a_{BA}^\tau}$ BA ga tik,

aylanma harakat tezligi $\vec{g}_{BA}$ ga teskari tomonga yo'nalgan bo'ladi. Bu holda aylanma harakat sekinlanuvchan bo'ladi. $\vec{a}_{BA}^n$ bilan $\vec{a}_{BA}^\tau$ orasidagi burchak 90° bo'lgani uchun a_{BA}^n ning moduli

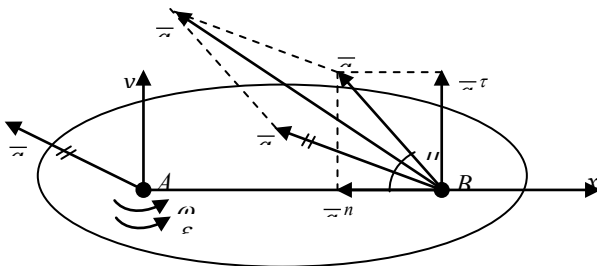
$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^\tau)^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (5.13)$$

tenglikdan topiladi.

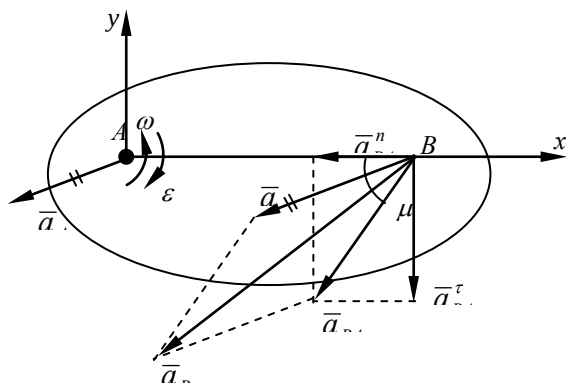
Agar aylanish radiusi AB bilan a_{BA} ni tashkil etgan burchagini μ bilan belgilasak, quyidagi tenglikni olamiz

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\vec{a}_{BA}^\tau|}{a_{BA}^n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (5.14)$$

Bundan ω va ε aylanma harakat burchak tezligi va burchak tezlanishi tekis shaklining hamma nuqtalari uchun bir xilda bo'lganligi sababli μ burchak har onda tekis shaklning hamma nuqtalari tezlanishlari uchun bir xilda bo'ladi. Agar $\varepsilon=0$ bo'lsa, $\vec{a}_{BA}^\tau = 0$ bo'lib, $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n$. Bu holda aylanma harakatdagi tezlanish markazga intilma tezlanishdan iborat bo'lib, aylanma harakat tekis o'zgaruvchan aylanma harakat bo'ladi. (5.10) ga ko'ra (5.9) ni quyidagicha yozish mumkin



9-a shakl



9-b shakl

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \quad (5.15)$$

Shunday qilib, agar ixtiyoriy tanlab olingan A qutb nuqtani ilgarilanma harakat tezlanishi va qutb nuqta atrofida aylanma harakat burchak tezligi va burchak tezlanishi berilgan bo'lsa, tekis shaklning istalgan B nuqtasining tezlanishi (5.15) formula asosida topiladi.

Tekis shaklning har onda tezliklar oniy markazi bo'lgani kabi, tezlanishlar oniy markazi ham bo'ladi. Harakatlanayotgan tekis shaklning kuzatilayotgan onda tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqtasiga tezlanishlar oniy markazi deyiladi. Tezlanishlar oniy markazini Q bilan belgilaymiz va uning holatini aniqlaymiz. Q nuqtaning tezlanishi S tekis shaklning boshqa nuqtalarining tezlanishi kabi (5.9) formulaga muvofiq aniqlanadi. Buning uchun S ning biror O nuqtasining a_0 ilgarilanma ko'chirma harakat tezlanishi bilan S ning burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε berilgan bo'lishi kerak. Bu holda (15.9) ga muvofiq

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_0 + \vec{a}_{Q0} \quad (5.16)$$

bo'ladi.

Q tezlanishlar oniy markazi bo'lishi uchun $a_Q = 0$ bo'lishi kerak. Bundan $a_0 = a_{Q0}$ kelib chiqadi. Demak, Q tezlanishlar oniy markazi bo'lishi uchun Q ning ko'chirma harakat a_0 tezlanishi oniy aylanma harakat a_{Q0} tezlanishiga miqdor jihatidan teng bo'lib, bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan bo'lishi kerak.

(5.16) ga muvofiq

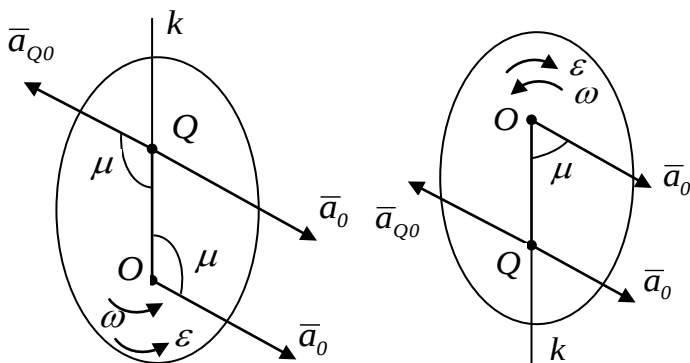
$$|a_{Q0}| = Q0\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

shartga ko'ra $a_0 = |a_{Q0}|$ bo'lganidan

$$Q0 = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \quad (5.17)$$

ni topamiz. Bu tenglik tezlanishlar oniy markazi Q ning 0 nuqttagacha bo'lgan masofasini aniqlaydi. Oniy aylanish radiusi QO ning a_{Q0} bilan tashkil etgan burchagi (5.14) formulaga muvofiq

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (5.18)$$



10-shakl

a_0 ga μ burchak ostida ($\varepsilon > 0$) aylanma harakat yo'nalishida (agar $\varepsilon < 0$ aylanma harakatga teskari yo'nalishda bo'lsa) OK chizig'ini o'tkazamiz (10-shakl). Shu OK chiziq olingan QO kesmaning Q uchi tezlanishlar oniy markazini ifodalaydi. Shunday qilib tekis shaklning tezlanishlar oniy markazining holatini (5.17) va (5.18) formulalaridan foydalanib topiladi. Buning uchun a_0 va ω , ε lar berilgan bo'lishi shart. Tekis shaklning tezlanishlar oniy markazi Q ma'lum bo'lsa, uning boshqa nuqtalarining tezlanishlarini aniqlash soddalashadi. Q ni qutb nuqtasi uchun olib tekis shaklning boshqa A va B nuqtalarining tezlanishlarini (5.1) formulaga muvofiq topamiz

$$\overline{a}_A = \overline{a}_Q + \overline{a}_{AQ}$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_Q + \overline{a}_{BQ}$$

Bu yerda Q tezlanishlar oniy markazi bo'lgani uchun $\overline{a}_Q = 0$ bo'lib, yuqoridagi tengliklar quyidagi ko'rinishga keltiriladi.

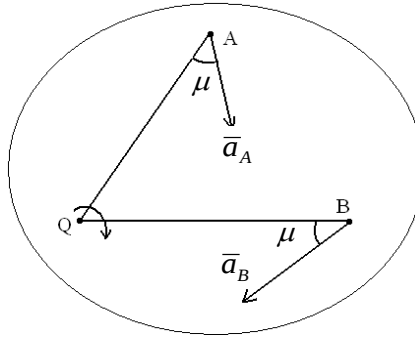
$$\overline{a}_A = \overline{a}_{AQ} \quad (5.19)$$

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{BQ}$$

bu tezlanishlarning moduli

$$a_A = a_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (5.20)$$

$$a_B = a_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



11-shakl

tengliklaridan aniqlanadi. (5.11) formulalardan S tekis shaklning tegishli nuqtalarining tezlanishlari nuqtalardan tezlanishlar oniy markazi bo'lgan oraliqlarga proporsional ekanli chiqadi

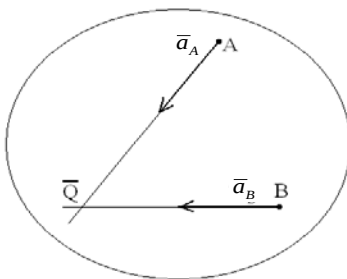
$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ} \quad (5.21)$$

olingan (5.11) va (5.12) ga asosan quyidagi natijaga kelish mumkin.

Agar tekis shaklning tezlanishlar oniy markazi, aylanma harakat burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε lar berilgan bo'lsa, tekis shaklning istalgan nuqtalarining tezlanishlarini qutb nuqta atrofida oddiy aylanma harakat tezlanishlari kabi aniqlanar ekan. Tezlanishlar oniy markazi A va B nuqtalardan ularning $\overline{a}_A$ va $\overline{a}_B$

tezlanishlariga μ burchak ostida o'tkazilgan chiziqlarning kesishgan nuqtasida joylashgan bo'ladi (11-shakl). Agar $\varepsilon=0$ bo'lsa, $a_A = a_{AQ}^n$ va $a_B = a_{BQ}^n$ bo'lib, tezlanishlar oniy markazi $\bar{a}_A$ va $\bar{a}_B$ tezlanishlar yo'nalgan chiziqlarning kesishgan nuqtasida joylashgan bo'ladi (12-shakl).

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, tezliklar oniy markazi bilan tezlanishlar oniy markazi bir nuqtada bo'lmaydi.



12-shakl

Takrorlash uchun savollar

1. Qattiq jismning qanday harakati tekis parallel harakat deyiladi?
2. Tekis parallel harakat tenglamalari qanday?
3. Tekis shaklning ilgarilanma hamda aylanma harakatlari qutb nuqtaning tanlanishiga bog'liqligi?
4. Tekis shakl harakat tenglamalariga asosan qutb nuqtaning tezligi va burchak tezlanishi qanday aniqlanadi?
5. Tekis shaklning ixtiyoriy nuqtasi tezligi va qutb nuqtasi tezligi orasida qanday bog'lanish mavjud?
6. Agar ϑ_A AB to'g'ri chiziq bilan 45° , ϑ_B esa 15° hosil qilsa, tekis shaklning A va B nuqtalaridan qaysinisi kattaroq tezlikka ega bo'ladi?
7. Tekis shaklning tezliklar oniy markazi nima? Tezliklar oniy markazi turli hollarda qanday aniqlanadi?

8. Agar tekis shakl oniy ilgarilanma harakat qilsa, uning tezliklar oniy markazi qayerda joylashadi?
9. Tekis shakl nuqtalari tezligi, qutb nuqtasiga nisbatan qanday qonun bo'yicha taqsimlanadi?
10. Qo'zg'olmas sirt ustida dumalovchi g'ildirakning qaysi nuqtasi eng katta tezlikka ega?
11. Tekis shakl nuqtasi tezlanishi qanday aniqlanadi?
12. $\bar{a}_{BA}^n$ va $\bar{a}_{BA}^\tau$ tezlanishlar qanday aniqlanadi?
13. Agar tekis shakl oniy ilgarilanma harakat bo'lib, A nuqta tezlanish AB ga perpendikulyar yo'nalgan bo'lsa, tekis shakl B nuqtasi tezlanishi qanday yo'nalishga ega?
14. Agar A nuqta tezlanishi nolga teng bo'lib, B nuqta tezlanishi AB to'g'ri chiziq bo'yicha yo'nalgan bo'lsa, tekis shaklning burchak tezlanishi qanday bo'ladi?

Adabiyotlar

1. Шохайдарова П. ва бошқалар. Назарий механика. -Т.: Ўқитувчи, 1992.
2. Рашидов Т.Р. ва бошқалар. Назарий механика асослари. -Т.: Ўқитувчи, 1991.
3. Яхёев М.С., Мўминов К.Б. Назарий механика. -Т.: Ўқитувчи, 1990.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. -М.: Высшая школа, 1990.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механика. -М.: Высшая школа, 2002.
6. Мешчерский И.В. Назарий механикадан масалалар тўплами. -Т.: Ўқитувчи, 1990.
7. И.В. Мешчерский. Сборник задач по теоретической механике. -М.: Наука, 1986.
8. Аноркулов Т., Хусанов К., Комилжонов А. Назарий механикадан курс ишлари учун топшириқлар тўплами. - Т.: Зиё-нашр, 2002.
9. Зоиров Ж. Назарий механика. -Т.: Фан, 1998.
10. Назарий механикадан курс ишлари учун топшириқлар тўплами. -Т.: Ўқитувчи, 2002.
11. Муродов М.М., Иноятова Х.М., Уснатдинов К.У. Назарий механика. -Т.: Истиклол, 2004.

MUNDARIJA

Kirish	3
1- Maruza: Qattiq jism statikasi va statikaning asosiy aksiomalari	4
1-Amaliyot: Kuchlarning proeksiyalarini xioblash	24
2-ma’ruza: Kuch momrnti	28
2-Amaliyot:Tekislikdagi kesishuvchi kuchlar sistemasiga oid masalalar yechish	36
3-Maruza: Juft kuchlar nazariyasi.....	42
3-Amaliyot:Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga oid masalalar yechish.....	61
4-Ma’ruza:Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi.....	66
4-amaliyot:Fazodagi ixtiyoriy kuchlar sistemasiga oid masalalar yechish.....	85
5-ma’ruza. Nuqta kinematikasi.....	91
5-Amaliyot:Nuqta kinematikasiga oid misollar yechish.....	107
6-ma’ruza: Qattiq jismning ilgarilanma va o’q atrofidavi aylanma harakati.....	113
6-amaliyot:Qattiq jismning aylanma xarakatiga oid masalalar yechish.....	123
7-ma’ruza: Qattiq jismning qo’zg’almas nuqta atrofida aylanma harakati (sferik harakat).....	133
8-ma’ruza: Nuqtaning murakkab harakati.....	142
9-ma’ruza: Qattiq jismning tekis-parallel harakati.....	152
Adabiyotlar.....	169

