

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI

Andijon Mashinasozlik instituti

«Oliy matematika» kafedrası

Oliy matematika fanidan
laboratoriya mashg`ulotlarini bajarish bo'yicha
USLUBIY KO`RSATMA

Bilim sohasi: 300000 – Ishlab chiqarish-texnik soha

Ta'lim sohasi: 310000- Muhandislik ishi

Ta'lim yo'nalishi: 5310500 – Avtomobilsozlik va traktorsozlik

ANDIJON-2013

«TASDIQLAYMAN»
Andijon mashinasozlik instituti
O'quv-uslubiy kehgashida ko'rib chiqilgan va
ma'qullangan

Kengash raisi _____ Q.Ermatov

« » bayonnoma _____ 2013 yil.

«MA'QULLANGAN»
«Mashinasozlik» fakulteti
kengashida muhokama qilingan va
ma'qullangan

Kengash raisi _____ N. Halilov

« » bayonnoma _____ 2013 yil.

«TAVSIYA ETILGAN»
«Oliy matematika» kafedrasi
majlisida muhokama qilingan va tavsiya etilgan

Kafedra mudiri _____ A.G. Abdullayev
(Kafedra majlisining - sonli bayonnomasi
« » _____ 2013 y.

Taqrizchilar: t.f.n., dotsent S. Ergashev

dotsent R. Nazarov (ADU)

Tuzuvchilar:

Dotsentlar A. Abdullayev, F.A.Aliyev, A.T.Djalilova, assistent A. Djabborov
«Oliy matematika» fani . —A.: AndMI, 2013 y.

Soʻz boshi.

Elektron hisoblash mashinalari fan va texnikaning turli sohalariga chuqur kirib bormoqda, shuning uchun har bir olim, injener, konstruktor, shifokor, iqtisodchi va boshqalar hisoblash texnikasi va amaliy matematika usullarini etarli darajada bilishlari talab qilinmoqda.

Hozirgi davrda amaliy matematikaning bir qator boʻlimlari boʻyicha darsliklar, oʻquv qoʻllanmalar mavjud. Lekin ularning kam qismi oʻzbek tilida boʻlib, talabalarning chuqur bilim olishiga qiyinchilik tugʻdirmoqda. Shularni hisobga olib, oliy matematikadan oʻzbek tilida laboratoriya mashgʻulotlarini bajarish uchun uslubiy koʻrsatma yaratish maqsadga muvofiq deb topilmoqda.

Ushbu uslubiy koʻrsatmada “Kasb taʼlimi”, “Materialshunoslik va yangi materiallar texnologiyasi”, “Mashinasozlik texnologiyasi, mashinasozlik ishlab chiqarishni jihozlash va avtomatlashtirish”, “Texnologik mashinalar va jihozlar”,

“Avtomobilsozlik va traktorsozlik”, “Elektr texnikasi, elektr mexanikasi va elektr texnologiyasi”, “Metrologiya, standartlash va mahsulot sifati menejmenti”, “Texnologik jarayonlar va ishlab chiqarishni avtomatlashtirish va boshqarish” yoʻnalishlarining 1- va 2- bosqich talabalari oliy matematikadan bajaradigan laboratoriya mashgʻulotlari yoritilgan boʻlib, bunda asosiy eʼtibor kompyuterlardan foydalanishga qaratilgan.

Uslubiy koʻrsatmada laboratoriya ishlarini bajarish namunalari va talabalar bajarishi kerak boʻlgan variantlar keltirilgan.

Laboratoriya mashgʻulotini talaba kompyuterda bajarishi maqsadga muvofiqdir. Variantlar roʻyxat boʻyicha olinadi. 25 tadan koʻp talabasi bor guruhlarda 26-oʻrinda turgan talaba 1-variantni, 27- oʻrinda turgan talaba 2-variantni va hokazo bajaradilar. Ushbu yoʻnalishlarning ishchi oʻquv rejalarida laboratoriya mashgʻulotlari jami 18 soatdan qilib belgilangan.

MUNDARIJA

№	Laboratoriya ishi nomi	Bet
1	$f(x)=0$ tenglamaning ildizlarini ajratish va oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli bilan taqribiy yechish.	5
2	$f(x)=0$ tenglamani oddiy iteratsiya usuli bilan taqribiy yechish.	7
3	$f(x)=0$ tenglamani Nyuton usuli bilan taqribiy yechish.	10
4	Chiziqli tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiyalar usuli bilan yechish	12
5	Aniq integrallarni taqribiy hisoblash, to'g'ri to'rtburchak, trapetsiyalar, Simpson usuli.	19
6	Birinchi tartibli differentsial tenglama uchun Koshi masalasini Eyler usuli bilan yechish.	23
7	Chiziqli regressiya tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli	28
8	Bosh to'plam parametrlarini oraliqli baholashlar.	36
9	Adabiyotlar	42

1-laboratoriya ishi.

Mavzu: $f(x)=0$ tenglamaning ildizlarini ajratish va oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli.

Tenglamalarini taqribiy yechish jarayoni ikki bosqichga bo'linadi:

- 1) ildizlarni ajratish;
- 2) ildizlarni berilgan aniqlikda topish;

I. $[a,b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning $x=\xi$ (dan boshqa ildizi bo'lmasa, ildiz $x=\xi$ ajratilgan hisoblanadi. Ildizlarni ajratish uchun $[a,b]$ kesmani shunday kesmachalarga bo'lish kerakki, bu kesmachalarda tenglamaning faqat bitta ildizi bo'lsin. Ildizlarini grafik va analitik usullar bilan ajratish mumkin.

Ildizlarini grafik usulda ajratish.

1-hol. Bu holda Dekart koordinatalar sistemasida $y=f(x)$ funksiyaaning grafigini chizamiz. Shu grafikning OX o'qi bilan kesishgan nuqtalari izlanayotgan taqribiy ildizlar bo'ladi.

2-hol. $f(x)=0$ tenglamani $f_1(x)=f_2(x)$ ko'rinishda yozib olamiz. Dekart koordinatalar sistemasida $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyaalarning grafiklarini chizamiz. Agar bu egri chiziqlar o'zaro kesishsa, kesishgan nuqtalardan OX o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz, hosil bo'lgan nuqtalar taqribiy yechimlar bo'ladi. Bu usullar bilan tenglamalarni echganda aniqroq yechimlar olish uchun grafiklarni iloji boricha aniq chizish kerak. Grafik usul bilan tenglamaning ildizlarini biror chegaralangan kesmada aniqlaymiz. Agar ildizlarni yuqori aniqlikda topish kerak bo'lsa, boshqa taqribiy usullardan foydalanamiz.

Ildizlarni analitik usulda ajratish.

$f(x)=0$ tenglamaning ildizlarini analitik usulda ajratish uchun oliy matematikadagi ba'zi teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda shu kesmada berilgan tenglamaning kamida bitta ildizi yotadi.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va monoton bo'lib, kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda shu kesmada berilgan tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.

II. Yuqorida topilgan taqribiy qiymatlarning aniqligini orttirish uchun kesmani ikkiga bo'lish usulini qo'llash mumkin.

Faraz qilaylik, $f(x) \neq 0$ tenglamaning biror $x=\xi$ ildizi $[a,b]$ kesmada ajratilgan bo'lsin, kesmaning uzunligini $d=b-a$ deb belgilaymiz. Tenglamaning $x=\xi$ yechimini $\varepsilon = 0.001$ aniqlikda topilsin.

ξ ildiz $[a,b]$ kesmaning ichida bo'lganligi uchun a ni kami bilan, b ni ortig'i bilan olingan taqribiy ildiz deb olishimiz mumkin. Agar $d < 0.001$ bo'lsa, masala echiladi va a hamda b lar $f(x)=0$ tenglamaning berilgan aniqlikdagi

yechimi boʻladi. Bu holda taqribiy yechim sifatida a va b lardan tashqari ular orasida yotgan istalgan x_1 ni olish mumkin. Taqribiy yechim sifatida $x_1 = \frac{a+b}{2}$ ni olish maqsadga muvofiq boʻladi.

Faraz qilaylik, $d < 0.001$ va $[a, b]$ kesmaning oʻrtasida $x_2 = \frac{a+b}{2}$ nuqta olingan boʻlsin. U holda $[a, b]$ kesma uzunliklari $\frac{b-a}{2}$ ga teng boʻlgan $[a, c]$ va $[c, b]$ kesmalarga ajraydi. Shu ikki kesmadan qaysi birining chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiyaa ishoralari turlicha boʻlsa, shu kesmani tanlab, yuqoridagi jarayonni takrorlaymiz. Bu jarayon kesmaning uzunligi $d \leq \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirganda ishni toʻxtatamiz. Ildizning qiymati uchun ξ aniqlangan kesmaning oʻrta nuqtasi olinadi.

Misol. $x^3 - 4x - 1 = 0$ tenglamaning $\varepsilon = 0.001$ aniqlik bilan biror ildizi topilsin.

Quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	-1	0	1	2	2,1	2,2
$f(x)$ ning ishorasi	+	-	-	-	-	+

Jadvaldan koʻrinadiki, $[-1; 0]$ va $[2.1; 2.2]$ kesmalarda taqribiy yechim bor. Shart boʻyicha olingan qulay kesma $[2.1; 2.2]$ boʻladi, bunda $f(2.1) = -1.39 < 0$; $f(2.2) = 0.85 > 0$ $a = 2.1$; $b = 2.2$; $d = b - a = 2.2 - 2.1 = 0.1 > \varepsilon$

Demak, hisoblashni davom ettiramiz:

$$f(2.11) = -0.046 < 0; \quad f(2.12) = 0.046 > 0$$

Bu erdan $a = 2.11$; $b = 2.12$; $d = b - a = 2.12 - 2.11 = 0.01 > \varepsilon$ boʻlganligi uchun hisoblashni yana davom ettiramiz:

$$f(2.114) = -0.0085 < 0; \quad f(2.115) = 0.0009 > 0,$$

$$\text{bunda } a = 2.114; \quad b = 2.115; \quad d = b - a = 2.115 - 2.114 = 0.001 = \varepsilon$$

Qoʻyilgan maqsadga erishdik, ya'ni kesmaning uzunligi d berilgan aniqlik $\varepsilon = 0.001$ dan katta emas. Bu misolda izlanayotgan taqribiy yechim ξ quyidagi oraliqda boʻladi: $2.114 < \xi < 2.115$

I-laboratoriya ishini bajarish uchun variantlar.

Quyidagi tenglamalarni $\varepsilon = 0.01$ aniqlik bilan biror ildizi topilsin.

1. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$

2. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$

3. $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$

4. $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$

5. $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

6. $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$

7. $2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$

8. $x^3 - 3x^2 - 4 = 0$
9. $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$
10. $x^3 + 3x^2 + 2 = 0$
11. $2x^3 + 9x^2 - 1 = 0$
12. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$
13. $x^3 - 12x + 6 = 0$
14. $x^3 - 3x^2 + 1.5 = 0$
15. $x^3 + 3x^2 - 2.5 = 0$
16. $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$
17. $2x^3 + 6x^2 - 5 = 0$
18. $x^3 - 12x - 10 = 0$
19. $x^3 - 3x^2 + 3.5 = 0$
20. $x^3 - 6x - 8 = 0$
21. $x^3 + x - 5 = 0$
22. $x^3 - 4x - 6 = 0$
23. $x^3 - 2x - 4 = 0$
24. $x^3 + x - 3 = 0$
25. $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$

2-laboratoriya ishi.

Mavzu: $f(x) = 0$ tenglamani oddiy iteratsiya usuli bilan taqribiy yechish.

Tenglamani yechishning iteratsiya usuli ketma-ket yaqinlashish usuli ham deb yuritiladi.

Bizga $f(x) = 0$ tenglamaning taqribiy ildizini aniqlash masalasi qo'yilgan bo'lsin. Buning uchun berilgan tenglamani o'ziga teng kuchli bo'lgan

$$x = \varphi(x) \quad (1)$$

tenglama ko'rinishida yozib olamiz. $f(x) = 0$ tenglamani x ga nisbatan echsak (1) tenglamani hosil qilish oson. (1) tenglamaning ildizi biror $[a, b]$ kesmada ajratilgan bo'lsin. Kesmani ichida ixtiyoriy $a \leq x_0 \leq b$ shartni qanoatlantiruvchi x_0 nuqtani tanlab olamiz va bu nuqtani nolinchi boshlang'ich yaqinlashish deb qabul qilamiz. x_0 qiymatni (1) tenglamaning o'ng tomoniga qo'yib, hosil bo'lgan natijani x_1 deb olsak

$$x_1 = \varphi(x_0) \quad (2)$$

hosil bo'ladi.

(2) tenglamadagi x_1 birinchi yaqinlashish bo'yicha (1) tenglamaning ildizi deyiladi.

Keyingi yaqinlashishlar ham xuddi shunday topiladi va natijada quyidagi ketma-ketlik hosil bo`ladi.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \varphi(x_0), \\
 x_2 &= \varphi(x_1), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 x_n &= \varphi(x_{n-1}), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

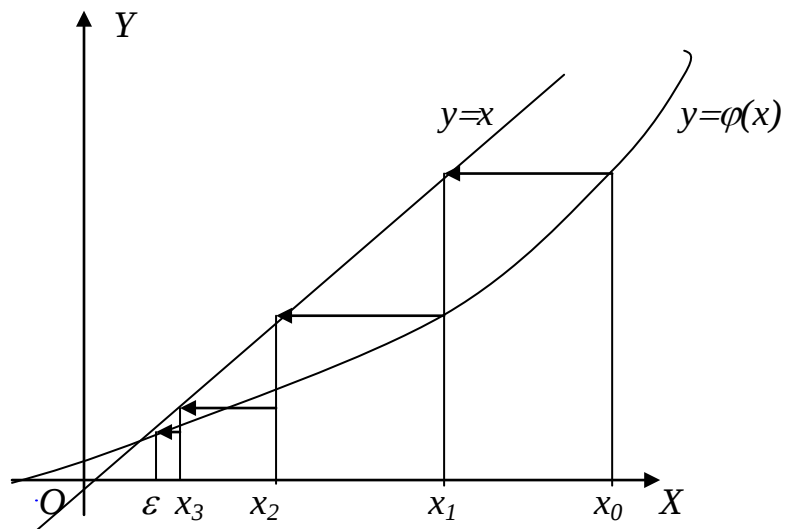
Agar bu ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lsa, u limit (1) tenglamaning ildizi bo'ladi. Agar uning limiti mavjud bo'lmasa, u holda ketma-ket yaqinlashish ildizi bo'lmaydi. (3) ketma-ketlikda x_0 –boshlang'ich yaqinlashish, x_1 –birinchi yaqinlashish, x_2 – ikkinchi yaqinlashish va h.k deyiladi. (3) ning o'zi esa ketma-ket yaqinlashishlar deyiladi. Uni hisoblash oldindan berilgan ε aniqlik uchun

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

tengsizlik bajarilguncha davom ettiriladi.

Iteratsiya usuli quyidagicha geometrik talqin qilinadi:

Avval $y=x$ va $y=\varphi(x)$ funksiyaalarning grafiklari chiziladi. $x=\varphi(x)$ funksiya ildizi uchun $y=\varphi(x)$ funksiyaaning $y=x$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi olinadi. Boshlang'ich nuqta uchun $[a; b]$ kesmaga tegishli ixtiyoriy x_0 nuqtani olib, siniq chiziqlar o'tkaziladi. Bu siniq chiziqlar uchlarining abtsissalari berilgan tenglama ildizi ε ning keyingi yaqinlashishlarini beradi.



Bu usulni qo'llashda, asosan, berilgan tenglamaga ekvivalent bo'lgan $x=\varphi(x)$ tenglamani tanlash muhim ahamiyatga ega. Uni shunday tanlash kerak-ki, natijada

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Bunda q soni qancha kichik bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikni ξ ildizga yaqinlashishi shunchalik tezroq bo'ladi.

Мисол. Iteratsiya usuli bilan quyidagi tenglama ildizini 0,001 gacha aniqlikda hisoblansin:

$$2 - \lg x - x = 0$$

Ечиш. Ildiz ajratilgan oraliqni topamiz, buning uchun tenglama ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$\lg x = 2 - x$$

So`ngra  $y = \lg x$  va  $y=2-x$  funksiyaalarning grafiklarini chizamiz. Kesishish nuqtasining abtsissasi  $[1;2]$  kesmada bo`lgani uchun, boshlang`ich qiymatga  $x_0=1$  nuqtani olish mumkin. Berilgan tenglamani  $x=2-\lg x$  ko`rinishida yozib olamiz, bunda $\varphi(x)=2-\lg x$, $\varphi'(x)=-\frac{1}{x} \lg e$ bo`lib  $[1;2]$  kesmada  $|\varphi'(x)| < 1$  bo`lganligi uchun iteratsiya usulini qo`llash mumkin. Endi birinchi yaqinlashish qiymatini hisoblaymiz:

$$x_1=2-\lg x_0=2-\lg 1=2.$$

Ikkinchi va keyingi yaqinlashishlarni topamiz:

$$x_2=2-\lg x_1=2-0,3010=1,6990$$

$$x_3=2-\lg 1,6990=2-0,2302=1,7698$$

$$x_4=2-\lg 1,7698=2-0,2480=1,7520$$

$$x_5=2-\lg 1,7520=2-0,2435=1,7565$$

$$x_6=2-\lg 1,7565=2-0,2445=1,7555$$

$$x_7=2-\lg 1,7555=2-0,2444=1,7556$$

Shunday qilib, izlangan ildiz $x \approx 1,755$.

2-laboratoriya ishini bajarish uchun variantlar.

Quyidagi tenglamalar ildizlarini iteratsiya usuli bilan 0,1 aniqlikda taqribiy yechimini toping.

$$1. x^3-12x-5=0$$

$$2. x^3-2x^2-4x-7=0$$

$$3. x^3+3x^2-2=0$$

$$4. x^3-3x^2+1,5=0$$

$$5. x^3+3x^2-3,5=0$$

$$6. x^3-6x-8=0$$

$$7. x^3+x^2+x+2=0$$

$$8. 2x^3-3x^2-12x+5=0$$

$$9. x^3-3x^2+3=0$$

$$10. x^3+3x^2-24x-10=0$$

$$11. 2x^3+9x^2-21=0$$

$$12. x^3+3x^2-24x+10=0$$

$$13. 2x^3+9x^2-10=0$$

$$14. x^3+3x^2-3=0$$

$$15. x^3-12x-5=0$$

$$16. 2x^3+9x^2-4=0$$

$$17. x^3+3x^2-1=0$$

$$18. x^3-12x+6=0$$

$$19. x^3-3x^2+2,5=0$$

$$20. x^3-4x^2+2=0$$

$$21. 2x^3+9x^2-6=0$$

$$22. x^3-12x-10=0$$

$$23. x^3-3x^2+3,5=0$$

$$24. x^3+x-5=0$$

$$25. x^3-4x-6=0$$

3-laboratoriya ishi.

Mavzu: $f(x) = 0$ tenglamani Nyuton usuli bilan taqribiy yechish.

$f(x)=0$ tenglamaning boshlang'ich taqribiy yechimi ma'lum bo'lsa, u holda aniqlikni oshirish uchun eng qulay Nyuton usulidir. Bu usul «urinmalar usuli» ham deb yuritiladi.

Yaqinlashish ketma- ketligi $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ni hosil qilishdan iborat bo'lib, u

$f(x)=0$ tenglamaning ildiziga yaqinlashadi. Uni yaqinlashishining etarli sharti quyidagi teorema bilan ifodalanadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiyaa $[a;b]$ kesmada aniqlangan, ikki marta differentsiallanuvchi hamda $f(a) f(b)<0$ bo'lib, $f'(x), f''(x)$ hosilalar shu kesmada o'z ishorasini saqlasa, u holda $f(x_0), f'(x_0)>0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x_0 \in [a;b]$ boshlang'ich yaqinlashishdan kelib chiqib, $f(x)=0$ tenglamaning $[a;b]$

kesmadagi ξ yechimiga yagona yaqinlashuvchi $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ($n=0,1,2,\dots$)

ketma-ketlikni hosil qilish mumkin.

Nyuton usuli sodda geometrik talqinga ega:

Agar $(x_n; f(x_n))$ koordinatali nuqtadan urinma o'tkazilsa, bu urinmaning OX o'q bilan kesishgan nuqtasining abtsissasi $f(x)=0$ tenglamaning yechimiga yaqinlashuvchi navbatdagi qiymatni beradi.

Yechimning n - yaqinlashishini baholashda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2$$

bu erda $M_2 = |f''(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati; $m_1 = |f'(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik qiymati.

Agar $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ bo'lsa, u holda $|\xi - x_n| \leq \frac{M_2 \varepsilon^2}{2m_1}$ bo'ladi.

Bundan ko'rinadiki, agar boshlang'ich yaqinlashish to'g'ri tanlansa, har bir iteratsiyadan keyin aniq raqamlar soni ortib boradi, ya'ni natijaga tezroq erishiladi. Demak, yechimni ε aniqlikda topish uchun iteratsiyani $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon_0 = \sqrt{2m_1 \varepsilon / M_2}$ tengsizlik bajarilganda to'xtatish mumkin.

Iteratsiyani bir qadamini ko'rsatamiz:

Agar $(n-1)$ - qadamdagi x_{n-1} yaqinlashish jarayonni to'xtatish shartini qanoatlantirmasa, $f(x_{n-1}), f'(x_{n-1})$ larni hisoblaymiz va ildizga navbatdagi

yaqinlashish $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ bo'ladi.

$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{2m_1 \varepsilon / M_2}$ shartda x_n miqdorni ξ ildizga (aniqlikda yaqinlashuvchi qiymat deb olamiz.

Nyuton usuli boshlang'ich yaqinlashish to'g'ri tanlanganda juda qulay bo'lib, jarayonni tezroq yaqinlashishga olib keladi. Agar $f(x)$ hosilaning sonli qiymatlari tenglamaning ildizi atrofida kam bo'lsa, u holda shu ildizga yaqinlashish jarayoni ko'p vaqt talab qiladi.

Misol. Nyuton usuli bilan

$$x^4 - 2x - 4 = 0$$

tenglamani 0,01 aniqlikda taqribiy ildizini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning o'ng tomonini $f(x)$ bilan belgilab, uning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f(x) = x^4 - 2x - 4$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Berilgan tenglama (1;1,7) oraliqda musbat ildizga ega. $f(x)$ va $f'(x)$ funksiyaalar $x_0 = 1,7$ nuqtada bir xil ishoraga ega, ya'ni $f(1,7) = 0,952 > 0$, $f'(1,7) = 17,652 > 0$ bo'lgani uchun $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ formuladan foydalanamiz, u holda

$$x_1 = 1,7 - \frac{0,952}{17,652} = 1,646$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \text{ bunda } f(x_1) = f(1,646) = 0,048,$$

$$f'(x_1) = f'(1,646) = 15,838$$

$$x_2 = 1,646 - \frac{0,048}{15,838} = 1,643$$

Xuddi shu usul bilan quyidagilarni topish mumkin:

$$f(1,643) = 0,004; \quad f'(1,643) = 15,740$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,643 - \frac{0,004}{15,740} = 1,6427$$

Bundan berilgan tenglamaning 0,01 aniqlikdagi taqribiy yechimi 1,64 ekani kelib chiqadi.

3-laboratoriya ishini bajarish uchun variantlar.

Quyidagi tenglamalar ildizlarini Nyuton usuli bilan 0,01 aniqlikda taqribiy hisoblang:

$$1. x^4 - 5x - 7 = 0$$

$$2. x^4 - 2x - 4 = 0$$

$$3. x^3 + x^2 - 11 = 0$$

$$4. x^4 - 0,5x - 1 = 0$$

$$5. x^4 + 3x - 20 = 0$$

$$6. x^3 + 4x + 1 = 0$$

$$14. 5x^3 - x - 1 = 0$$

$$15. x^3 + x^2 - 3 = 0$$

$$16. x^3 - 6x^2 + 20 = 0$$

$$17. x^3 - 4x + 1 = 0$$

$$18. x^4 + 3x - 15 = 0$$

$$19. x^3 - 2x + 5 = 0$$

$$7. x^3 - 2x - 5 = 0$$

$$8. x^3 - 12x - 5 = 0$$

9. $x^4 - 3x + 1 = 0$

$$10. x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$11. x^3 + 3x + 5 = 0$$

12. $x^3+x-1=0$

$$13. x^4 + 5x - 7 = 0$$

$$20. x^4 - 3x + 1 = 0$$

$$21. x^3 + 3x + 3 = 0$$

$$22. x^4 + 5x - 7 = 0$$

23. $x^4 - 2x - 5 = 0$

$$24. x^4 - x - 2 = 0$$

$$25. x^4 + 4x - 8 = 0$$

4-laboratoriya ishi.

Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiyalar usuli bilan yyechish.

n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Agar sistemaning rangi r uning o'zgaruvchilar soni n ga teng bo'lsa, ya'ni

$$r = n$$

bo'lsa, uning yagona yechimi bo'ladi. Faraz qilaylik, $r = n$ bo'lsin. Agar n kichik bo'lsa, sistemaning yechimi aniq topilishi mumkin (yaqinlashlardagi xatoliklar hisobga olinmaganda). Agar n katta bo'lsa, yechimni aniq topish qiyinlashib ketadi; bunday hollarda yvechimni taqriban topish maqsadga muvofiqdir.

Bir nechta taqribiy yechish usullari mavjud bo'lib, ulardan biri – oddiy iteratsiyalar (ketma-ket yaqinlashishlar) usulidir. Bu usulda tenglamalar sistemasining ko'rinishi teng kuchli almashtirishlar orqali quyidagi shakllardan biriga keltiriladi:

[illegible]

$$\text{Bu erda } \beta_i = \frac{b_i}{a_{ij}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}} \quad (i \neq j), \quad \alpha_{ij} = 0, \quad (i = j)$$

Belgilashlar kiritib, (2) ni qisqaroq yozish mumkin:

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x} \quad (2)'$$

Bu yerda

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \text{ - noma'lumlar vektori;} \quad (3)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \alpha_{n-1} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

bu o`ng tomonda turgan o`zgaruvchilar koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa;

$$\bar{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ - ozod hadlar vektori} \quad (5)$$

Agar (1) sistemada

$$a_{ii} = \alpha'_{ii} + \alpha''_{ii} \quad (6)$$

deb olinsa, bu sistema quyidagicha o`zgartiriladi:

$$\begin{cases} (\alpha'_{11} + \alpha''_{11})x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{12}x_1 + (\alpha'_{22} + \alpha''_{22})x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn-1}x_{n-1} + (\alpha'_{nn} + \alpha''_{nn})x_n = b_n \end{cases}$$

Buni quyidagicha o`zgartirish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{cases} \quad (7)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} \alpha_{ii} &= -\frac{\alpha'_{ii}}{\alpha''_{ii}} & \beta_i &= -\frac{b_i}{\alpha''_{ii}} \\ \alpha_{ij} &= -\frac{\alpha_{rj}}{\alpha''_{ij}} & (i \neq j) \end{aligned} \quad (8)$$

Endi (7) sistemani matritsa-vektor ko`rinishida yozsak, u ham (2)( kabi bo`ladi:

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x} \quad (9)$$

bunda α matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$\bar{\beta}$ ning ko'rinishida a_{ii} o'rniga α''_{ii} yoziladi.

Agar (10) matritsada diagonal elementlar nol bo'lsa ($\alpha_{ii}=0$; $\alpha'_{ii}=0$; $\alpha''_{ii}=a_{ii}$), (4) matritsa kelib chiqadi.

Shunday qilib, tenglamalar sistemasi (1) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\bar{x} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x} \quad (9)$$

bu erda $\bar{x}$ vektor (3) ko'rinishida, α - matritsa (4) yoki (10) ko'rinishda $\bar{\beta}$ -vektor (5) yoki (8) ko'rinishda bo'ladi.

α ning ikki xil ko'rinishda olish keyinroq ko'riladigan yaqinlashtirish shartlaridan kelib chiqadi.

$\bar{x}^{(0)} = \bar{\beta}$ deb olib, quyidagicha ketma-ket yaqinlashtirish jarayonini quramiz:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{\beta} + \alpha \bar{x}^{(k)} \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

(11) da $k=0$ deb olib $\bar{x}^{(1)}$ ni, $k=1$ deb olib $\bar{x}^{(2)}$ ni, ... $k=m$ deb, $\bar{x}^{(m+1)}$... larni topamiz.

Agar topilgan ketma-ketlik $\bar{x}^{(1)}$, $\bar{x}^{(2)}$, ..., $\bar{x}^{(a)}$, ... limitga ega bo'lsa, ya'ni

$$\bar{x}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)} \quad (12)$$

mavjud bo'lsa, bu limit ($\bar{x}^*$) (9) tenglamaning va demak berilgan (1) sistemaning yechimi bo'ladi.

Quyidagi teorema o'rinalidir: Agar α matritsaning biror kanonik normasi $\|\alpha\|$ birdan kichik bo'lsa ($\|\alpha\| < 1$), (11) iteratsiya jarayoni yaqinlashadi.

Eslatma. 1) Amaliyotda $\|\alpha\|$ uchun quyidagi uchta miqdorlardan biri ishlatiladi:

$$\|\alpha\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|, \quad m\text{-норма}$$

$$\|\alpha\|_l = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|, \quad l\text{-норма}$$

$$\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_{ij})^2}, \quad k\text{-норма}$$

(1) sistemaning yechimi ε aniqlikda topilishi kerak bo'lsa, hisoblash ishlari

$$\left| \bar{x}^{(x+1)} - \bar{x}^{(x)} \right| < \varepsilon \quad (13)$$

tengsizligi $\bar{x}$ ning barcha komponentalari bo'yicha bajarilgunga qadar davom ettiriladi, ya'ni

$$\left| x_j^{(x+1)} - x_j^{(k)} \right| < \varepsilon \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (13)'$$

bo'lguncha (13), (13)' shartlar bajarilganda $\bar{x}^* = \bar{x}^{-(k+1)}$ deb olinadi.

Misol. Quyidagi sistema uchun oddiy iteratsiyalar usulining yaqinlashishi ko'rsatilsin va yechim $\varepsilon = 10^{-3}$ aniqlik bilan topilsin:

$$\begin{cases} 20x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 + x_4 = -10 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 40x_4 = 8 \end{cases}$$

Yechish: Birinchi tenglamada $20x_1$, ikkinchi tenglamada $10x_2$, uchinchi tenglamada $20x_3$, to'rtinchi tenglamada $(-40)x_4$ ni chap tomonda qoldirib qolgan hadlarni o'ng tomonga o'tkazamiz:

$$\begin{cases} 20x_1 = 6 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ 10x_2 = 5 - x_1 - x_3 + 2x_4 \\ 20x_3 = -10 - 2x_1 - 3x_2 - x_4 \\ -40x_4 = 8 - 4x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

Birinchi tenglamani x_1 ning koeffitsiyentni 20ga, ikkinchi tenglamani x_2 ning koeffitsiyentni 10 ga, uchinchi tenglamani x_3 ning koeffitsiyentni 20 ga, to'rtinchi tenglamani esa x_4 ning koeffitsiyentni (-40) ga bo'lib quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 = 0,3 + 0,05x_2 - 0,1x_3 + 0,15x_4 \\ x_2 = 0,5 - 0,1x_1 - 0,1x_3 + 0,2x_4 \\ x_3 = -0,5 - 0,1x_1 - 0,15x_2 - 0,05x_4 \\ x_4 = -0,2 + 0,1x_1 - 0,05x_2 + 0,025x_3 \end{cases}$$

Bundan ko'rinadiki sistemaning matritsasi

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0,05 & -0,1 & 0,15 \\ -0,1 & 0 & -0,1 & 0,2 \\ -0,1 & -0,15 & 0 & -0,05 \\ 0,1 & -0,05 & 0,025 & 0 \end{pmatrix} \text{ va ozod hadlari vektori } \bar{\beta} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

α - matritsaning l normasini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_l &= \max_j [0 + |-0,1| + |-0,1| + 0,1; \quad 0,05 + 0 + |-0,15| + |-0,05|; \\ &\quad |0,1| + |-0,1| + 0 - 0,025; \quad 0,15 + 0,2 + |-0,05| + 0] = \\ &= \max_i [0,3; \quad 0,25; \quad 0,225; \quad 0,4] = 0,4 < 1 \end{aligned}$$

$\|\alpha\|_l = 0,4 < 1$, demak, oddiy yaqinlashish jarayoni yaqinlashadi.

Hisoblash ishlari quyidagi ko'rinishda olib boriladi:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0,05 & -0,1 & 0,15 \\ -0,1 & 0 & -0,1 & 0,2 \\ -0,1 & -0,15 & 0 & -0,05 \\ 0,1 & -0,05 & 0,025 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^{(0)} = \bar{\beta} \quad \text{яъни} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ x_4^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix}$$

deb olib $\bar{x}^{(1)}$ ni topamiz.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0,05 & -0,1 & 0,15 \\ -0,1 & 0 & -0,1 & 0,2 \\ -0,1 & -0,15 & 0 & -0,05 \\ 0,1 & -0,05 & 0,025 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,5 + (-0,1) \cdot (-0,5) + 0,15 \cdot (-0,2) \\ -0,1 \cdot 0,3 + 0,15 + (-0,1) \cdot (-0,5) + 0,2 \cdot (-0,2) \\ -0,1 \cdot 0,3 + (-0,15) \cdot 0,5 + 0 \cdot (-0,5) + (-0,05) \cdot (-0,2) \\ 0,1 \cdot 0,3 + (-0,05) \cdot 0,5 + 0,025 \cdot (-0,5) + 0 \cdot (-0,2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,045 \\ -0,02 \\ -0,095 \\ -0,0075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,335 \\ 0,48 \\ -0,595 \\ -0,2075 \end{pmatrix}. \quad \text{Demak,} \quad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,335 \\ 0,48 \\ -0,595 \\ -0,2075 \end{pmatrix}$$

$k=1$ deb olib, $\bar{x}^{(2)}$ ni hisoblaymiz:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ x_4^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ -0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0,05 & -0,1 & 0,15 \\ -0,1 & 0 & -0,1 & 0,2 \\ -0,1 & -0,15 & 0 & -0,05 \\ 0,1 & -0,05 & 0,025 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,335 \\ 0,48 \\ -0,505 \\ -0,2075 \end{pmatrix}$$

Buni yuqoridagiga o`xshash hisoblab chiqsak,

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,3529 \\ 0,4765 \\ -0,5947 \\ -0,2054 \end{pmatrix} \text{ ni topamiz.}$$

Hisoblashlarni davom etdirib quyidagiga ega bo`lamiz:

	$\bar{x}^{(0)}$	$\bar{x}^{(1)}$	$\bar{x}^{(2)}$	$\bar{x}^{(3)}$	$\bar{x}^{(4)}$	$\bar{x}^{(5)}$
x_1	0,3	0,335	0,3522	0,3525	0,3533	0,3534
x_2	0,5	0,48	0,4765	0,4832	0,4837	0,4837
x_3	-0,5	-0,595	-0,5947	-0,5964	-0,5976	-0,5978
x_4	-0,2	-0,2075	-0,2054	-0,2035	-0,2038	-0,2037

Bu jadvaldan ko`rinadiki $\bar{x}$ uchun $\bar{x}^{(5)}$ ning qiymatlari olinishi mumkin, chunki $\bar{x}^{(4)}$ va $\bar{x}^{(5)}$ lar orasidagi farqlar $|\bar{x}^{(4)} - \bar{x}^{(5)}| < \varepsilon$.

4-laboratoriya ishini bajarish uchun variantlar.

Tenglamalar sistemasi oddiy iteratsiyalar usuli bilan $\varepsilon = 0.001$ aniqlikda echilsin.

$$1. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + 20x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 10x_4 = 10 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 20x_4 = 15 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ -2x_1 + 10x_2 + x_3 - 3x_4 = 20 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 25 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 15 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 16 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 = 20 \end{cases}$$

син.
$$5. \begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 30 \\ 3x_1 + 20x_2 - x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 20x_4 = 10 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10 \\ -x_1 - 3x_2 - 20x_3 + x_4 = 15 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ -2x_1 + 20x_2 + x_3 - 3x_4 = 25 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 = 20 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 - 2x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 - x_4 = 15 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 10x_4 = 20 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ -2x_1 + 20x_2 + x_3 - 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 = 12 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 8x_4 = -10 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 = 12 \\ -2x_1 + x_2 + 10x_3 + 4x_4 = 20 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 10x_4 = 25 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 15 \\ 2x_2 + 5x_3 - x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 10x_3 - 2x_4 = 16 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 8x_4 = 12 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 15 \\ -2x_1 + 10x_2 + x_3 - 2x_4 = 20 \\ x_1 + 3x_2 - 20x_3 + 4x_4 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 20 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 15 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 2x_4 = -16 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 8x_4 = 12 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} -10x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 - 8x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ -2x_1 - x_2 - 10x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 10x_4 = 20 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} -10x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 30 \\ -3x_1 - 20x_2 + x_3 - x_4 = 20 \\ -x_1 + 2x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 16 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 10 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} -5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 10x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = 15 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} -10x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ -2x_1 - 20x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 10 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 10x_4 = 20 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} -10x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 - 8x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ -2x_1 - x_2 - 10x_3 + x_4 = 15 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 10x_4 = 20 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} -8x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 12 \\ 2x_1 - 10x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 15 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 25 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 15 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 20x_4 = 20 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} -5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 = 10 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 8x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + 10x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - 12x_3 - x_4 = 16 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 24 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 10x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 16x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 20x_4 = 15 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 16 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 = 15 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} -5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 15 \\ x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = 16 \\ -x_1 + 2x_2 - 10x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 16x_4 = 24 \end{cases}$$

5-laboratoriya ish.

Mavzu: Aniq integrallarni taqribiy hisoblash, to'g'ri to'rtburchak, trapetsiyalar, Simpson usuli.

Agar $y=f(x)$ da uzluksiz va uning boshlang'ich funksiyaasi $f(x)$ ma'lum bo'lsa, bu funksiyaadan olingan aniq integral Nyuton-Leybnits formulasi bilan hisoblanadi, ya'ni

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Ammo ko'p hollarda $f(x)$ ning boshlang'ichini topish juda murakkab, yoki umuman topib bo'lmaydi, va demak (1) formulani qo'llash mumkin emas. Bundan tashqari $f(x)$ - jadval ko'rinishida berilgan bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyaasi degan tushunchaning ma'nosi yo'qoladi. Shuning uchun integrallarni taqribiy hisoblash katta ahamiyatga egadir.

Aniq integralni sonli integrallash (taqriban hisoblash) mexanik kvadraturalash deb aytiladi; unga mos formulalar kvadraturalari deb yuritiladi.

Kvadratura formulalarining asosida aniq integralning geometrik ma'nosi yotadi va ularning barchasida integral ostidagi funksiyaaning integrallash oralig'idagi bir nechta qiymatlaridan foydalaniladi.

Kvadratura formulalarining umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

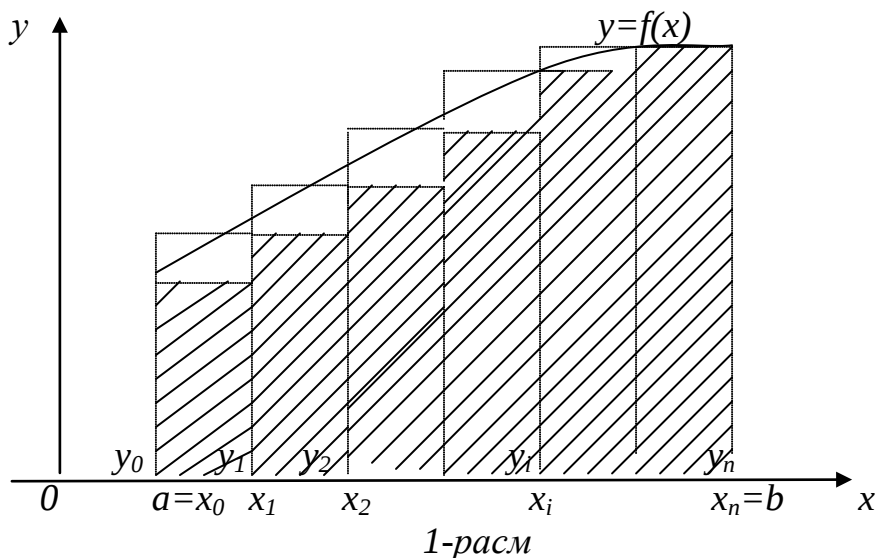
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) = \sum_i A_i f(x_i) \quad (2)$$

bu erdagi A_i lar qandaydir o'zgarmas koeffitsiyentlar, ularning qiymatlari ma'lum qoidalar asosida topiladi. Ayrim usullarni ko'ramiz.

a) To'g'ri to'rtburchaklar formulasi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiyaa $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Ushbu

$$\int_a^b f(x) dx$$

aniq integralni hisoblash talab etiladi. $[a, b]$ kesmani $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n = b$ nuqtalar bilan n – ta teng qismga bo'lamiz. Har bir bo'lakning uzunligi



$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ bo'ladi. $f(x)$ funksiyaaning $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ nuqtalardagi qiymatini

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n$ bilan belgilaymiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_i = f(x_i), \dots, y_n = f(x_n).$$

Shtrixlangan to'rtburchaklar (ichki) yuzlarining yig'indisi egri chiziqli trapetsiya yuziga taqriban teng deb olamiz va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_i \Delta x + \dots + y_{n-1} \Delta x = \\ &= \Delta x (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} y_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \end{aligned} \quad (4)$$

Agar egri chiziqli trapetsiyaning yuzi tashqi to'rtburchaklar yuzlarining yig'indisiga taqriban teng deb olsak, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \dots + y_i \Delta x + \dots + y_n \Delta x = \\ &= \Delta x (y_1 + y_2 + \dots + y_i + \dots + y_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \quad (5)$$

(4) va (5) formulalar aniq integralni hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deb aytiladi. Agar $f(x) \geq 0$ va o'suvchi bo'lsa, u holda (4) formula «ichki» to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali figuraning yuzini ifodalaydi. (5)

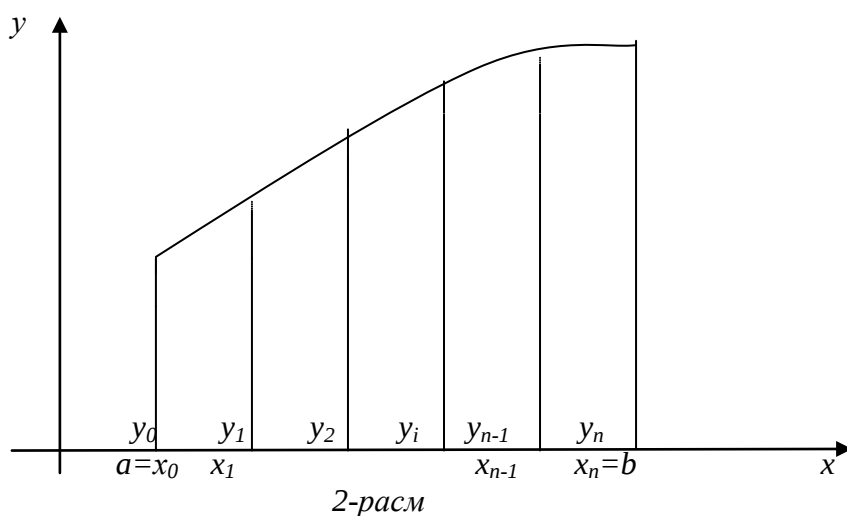
formula esa «tashqi» to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali figuraning yuzini ifodalaydi. Bu formulalarning absolyut xatosi (R)

$$R \leq \frac{(b-a)^2}{4n} \max_{[a;b]} |f'(x)| \quad (6)$$

orqali ifodalanadi.

b). Trapetsiyalar formulasi.

$[a; b]$ kesmani bo'linishini avvalgidek qoldiramiz, lekin Δx xususiy intervallarga mos keluvchi $y=f(x)$ chiziqlarning har bir yoyini, bu yoyning chetki nuqtalarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz.



Bu berilgan egri chiziqli trapetsiyaning n ta to'g'ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisi bilan almashtirilganini bildiradi (2-rasm). Bunday figuraning yuzi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali figuraning yuziga qaraganda ancha aniq ifodalashi geometrik jihatdan ravshandir. Xususiy intervalda yasalgan har bir trapetsiyaning yuzi:

$$S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \Delta x; \quad S_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \Delta x \quad \dots \quad S_n = \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot \Delta x$$

ga tengdir.

Bu yuzlarni qo'shib

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \quad (7)$$

ni hosil qilamiz. Bu trapetsiyalar formulasidir, n soni qancha katta bo'lsa va $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ bo'linish qadami qanchalik kichik bo'lsa, (7) formulaning o'ng qismida yozilgan yig'indi integralning qiymatini shuncha aniqlik bilan hisoblaydi. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi ko'rinishidagi kabi trapetsiyalar formulasining absolyut xatosi

$$R \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max_{[a;b]} |f''(x)| \quad (8)$$

tengsizligi orqali baholanadi.

Misol. Ushbu

$$I = \int_0^1 (x^3 + 1) dx$$

integralning taqribiy qiymatini to'g'ri to'rtburchaklar va trapetsiyalar formulalari bo'yicha hisoblang.

Yechish: Avval berilgan integralni Nyuton-Leybnits formulasi bilan hisoblaymiz.

$$I = \int_0^1 (x^3 + 1) dx = \left(\frac{x^4 + x}{4} \right) \Big|_0^1 = 1 \frac{1}{4} = 1,25$$

[0; 1] kesmani $x_0=0$; $x_1=0,1$; ...; $x_{10}=1$ nuqtalar bilan 10 ta teng bo'lakka bo'lamiz va shu nuqtalarda $f(x)=x^3+1$ funksiyaaning qiymatlarini hisoblaymiz.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	1	1,001	1,008	1,027	1,064	1,125	1,216	1,343	1,512	1,729	2

a) To'g'ri to'rtburchaklar formulasi bo'yicha:

$$n=10 \quad \Delta x=0.1$$

(4) formula bo'yicha kami bilan hosil qilamiz:

$$I \approx 0,1(1+1,001+1,008+1,027+1,064+1,125+1,216+1,343+1,512+1,729) = 0,1 \cdot 12,025 = 1,2025$$

(5) formula bo'yicha ortig'i bilan hisoblaymiz:

$$I = 0,1(1,001+1,008+1,027+1,064+1,125+1,216+1,343+1,512+1,729+2) = 0,1 \cdot 13,025 = 1,3025$$

Hosil qilingan natijaning xatosini (6) formula bo'yicha baholaymiz: $f'(x)=3x^2$ bo'ladi. [0,1] kesmada $\max_{[0;1]} |f'(x)|=3$ ga ega bo'lamiz. Demak, hosil qilingan

natijaning xatosi $R = \frac{1}{4 \cdot 10} \cdot 3 = \frac{3}{40} = 0,075$ kattalikdan ortmaydi. Absolyut xato, ya'ni

1,25 aniq natija bilan 1,2025 va 1,3025 taqribiy natijalar orasidagi ayirmaning absolyut kattaliklari

$|1,25 - 1,2025| = |0,0475| = 0,0475$ va $|1,25 - 1,3025| = 0,0525$ ga teng bo'ladi. Ular 0,075 dan kichik. Bu olingan xatolik bahosiga mos keladi.

Trapetsiyalar formulasi bo'yicha. nql10 bo'lganda (7) formula bo'yicha

$$I = 0,1 \left(\frac{1+2}{2} + 1,001 + 1,008 + 1,027 + 1,064 + 1,125 + 1,216 + 1,343 + 1,512 + 1,729 \right) = 0,1 \cdot (1,5 + 11,025) = 1,2525$$

ni hosil qilamiz. Hosil qilingan natijaning xatosini (8) formula bo'yicha baholaymiz.

$$f'(x)=3x^2, \quad f''(x)=6x. \quad \max_{[0;1]} f''(x)=6 \quad \text{xatolik} \quad R = \frac{1}{12 \cdot 100} \cdot 6 = \frac{1}{200} = 0,005 \quad \text{ga teng.}$$

Integralning 1,25 aniq qiymati bilan 1,2525 taqribiy qiymati orasidagi absolyut xato 0,0025 ga teng. Bu xatolikning olingan bahosiga mos keladi.

5-laboratoriya ishini bajarish uchun variantlar.

Quyidagi integralning taqribiy qiymatlari to'g'ri to'rtburchaklar va trapetsiyalar formulalari bo'yicha hisoblang. $n=10$

1. $\int_0^1 (x^2 + 1) dx =$	9. $\int_0^1 (2x^3 + 1) dx =$	17. $\int_0^1 (x^4 + 2x^2 - 1) dx =$
2. $\int_1^2 (2x^2 - 1) dx =$	10. $\int_0^1 (x^4 + 1) dx =$	18. $\int_0^4 (x^2 - x) dx =$
3. $\int_2^4 \frac{dx}{x} =$	11. $\int_1^2 (x-1)^2 =$	19. $\int_5^{10} (x^2 - 5) dx =$
4. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} =$	12. $\int_0^4 (x^2 + 2x + 3) dx =$	20. $\int_0^4 (3x^2 + 1) dx =$
5. $\int_0^0 \sqrt{x} dx =$	13. $\int_0^{10} 3x^2 \cdot dx =$	21. $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx =$
6. $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx =$	14. $\int_2^5 \frac{dx}{x-1} =$	22. $\int_1^2 \sqrt{x+1} dx =$
7. $\int_0^1 (x+1)^2 =$	15. $\int_0^1 \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) dx =$	23. $\int_0^1 (x^3 + x) dx =$
8. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2} =$	16. $\int_1^4 (x^3 - x) dx =$	24. $\int_0^{10} (5x^2 - 10) =$
		25. $\int_0^1 (-x^2) dx =$

6-laboratoriya ishi.

Mavzu: Birinchi tartibli differentsial tenglama uchun Koshi masalasini Eyler usuli bilan yechish.

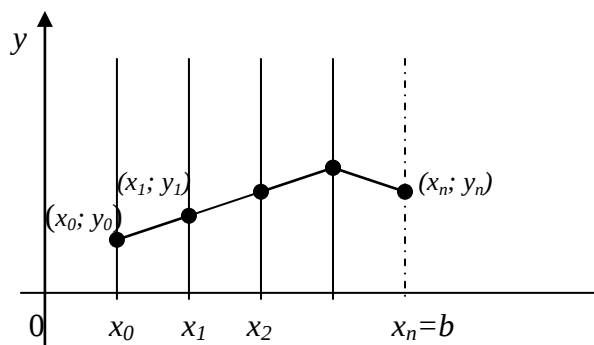
Agar $y' = f(x; y)$ differentsial tenglamaning yechimini aniq topib bo'lmasa, uni integrallash uchun taqribiy, sonli usullardan birortasi qo'llaniladi.

$$y' = f(x; y) \quad (1)$$

va boshlang'ich shartlar.

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (2)$$

berilgan bo'lsin. Tenglamaning $[x_0; b]$ kesmadagi va boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini topamiz.



$[x_0; b]$ ni n - ta bo'lakka bo'lamiz. $\Delta x = \frac{b - x_0}{n}$ $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$. x_i nuqtadagi taqribiy yechimni y_i deb belgilaymiz. x_i lardan OU ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. x_0 va y_0 larning qiymatini $y' = f(x; y)$ tenglamaning o'ng tomoniga qo'yamiz, va $y' = f(x_0; y_0)$ burchak koeffitsiyentini topamiz.

y_1 - ni topish uchun $[x_0; x_1]$ kesmada integral egri chiziqni uning $[x_0; y_0]$ dagi urinmasining kesmasi bilan almashtiramiz. Quyidagiga ega bo'lamiz.

$$y_1 - y_0 = f(x_0; y_0)(x_1 - x_0) \quad (3)$$

bundan:

$$y_1 = y_0 + f(x_0; y_0)(x_1 - x_0) \quad \text{ëku} \quad y_1 = y_0 + f(x_0; y_0)\Delta x \quad (4)$$

x_1 va y_1 ning qiymatlarini $y' = f(x; y)$ tenglamaning o'ng tomoniga qo'yib, $(x_1; y_1)$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini $y' = f(x_1; y_1)$ ni hisoblaymiz. So'ngra $[x_1; x_2]$ kesmada integral egri chiziqni urinma kesmasi bilan almashtirib, x_2 nuqtadagi yechimning taqribiy qiymati y_2 ni topamiz.

$$y_2 = y_1 + f(x_1; y_1)(x_2 - x_1) \quad \text{ëku} \quad y_2 = y_1 + f(x_1; y_1)\Delta x$$

Shunga o'xshash topish mumkinki

$$y_3 = y_2 + f(x_2; y_2)\Delta x, \dots, \quad y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}; y_{n-1})\Delta x \quad (5)$$

Shunday qilib, integral egri chiziq taqriban siniq chiziq kabi topildi va x_i nuqtalarda yechimning taqribiy qiymati y_i topildi. Bunda, y_i ning qiymatlari quyidagicha topiladi:

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}; y_{i-1})\Delta x \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

Bu formula Eyler usulining asosiy hisob formulasidir. Δx qancha kichik bo'lsa, usulning aniqlik darajasi shuncha ortadi.

Umuman olganda, Eyler usulining aniqlik darajasi uncha katta emas. Aniqlik darajalari yuqori bo'lgan juda ko'p usullar bor, masalan, Runge-Kutt usuli, setkalar (to'rlar) usuli va boshqalar.

3. Taqribiy hisoblarda qo'llanilayotgan usulning turg'unligi va taqribiy yechimning haqiqiy yechimga yaqinlashishi katta ahamiyatga egadir.

Agar hisoblash sxemasida tasodifan kelib chiqadigan (masalan yaxlitlash natijasida) xatolar kattalashmasdan yo'qolib borsa (ya'ni 0 ga intilsa) bunday

sxema turg'un sxema deb aytiladi, aks holda sxema noturg'un deb aytiladi. Noturg'un sxemalar hisoblash ishlarida qo'llanilmaydi.

Taqribiy yechimning haqiqiy yechimga yaqinlashishi uchun ma'lum shartlar bajarilishi kerak. Bunday shartlar maxsus adabiyotlarda keltiriladi. Masalan: M.Ismoilov. Sonli usullar. Toshkent, «Fan», 1987.

(6) formulani masalaga boshqacharoq yondoshish bilan hosil qilish mumkin. Berilgan tenglamadagi hosilaning (x_i) nuqtadagi qiymatini $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bilan taqriban

$$\text{almashtiramiz, ya'ni } \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx y' \quad \Delta y_i \approx y'_{i-1} \Delta x$$

$x=x_i$ nuqtani qaraymiz va $(\Delta y)_i = y_i - y_{i-1}$ ni hisobga olib $y_i = y_{i-1} + y'_{i-1} \Delta x$ ni hosil qilamiz; hosila o'rniga berilgan tenglamaning o'ng tomonini qo'yib

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}; y_{i-1}) \Delta x$$

ya'ni (6) formulani hosil qilamiz.

Misol. Eyler usuli bilan $y' = \frac{y-x}{y+x}$ tenglamaning $y(0)=1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini $[0; 1]$ kesmada toping. $x=10$ deb olinsin.

Yechish.

$$f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}; \quad x_0 = 0; \quad b = 1; \quad n = 10. \quad \Delta x = \frac{1-0}{10} = 0,1;$$

$$y(0)=1; \quad x_0 = 0; \quad x_i = i \cdot \Delta x = i \cdot 0,1 = 0,1 \cdot i.$$

(6) formulaga asosan

$$y_i = y_{i-1} + \frac{y_{i-1} - x_{i-1}}{y_{i-1} + x_{i-1}}$$

tenglikni yozib olamiz. Bunga asosan

$$y_1 = y_0 + \frac{y_0 - x_0}{y_0 + x_0} \cdot \Delta x = 1 + \frac{1-0}{1+0} \cdot 0,1 = 1 + 0,1 = 1,1$$

$$y_2 = y_1 + \frac{y_1 - x_1}{y_1 + x_1} \cdot \Delta x = 1,1 + \frac{1,1-0,1}{1,1+0,1} \cdot 0,1 = 1,1 + \frac{0,1}{1,2} = 1,1 + 0,0833 = 1,1833$$

$$y_3 = y_2 + \frac{y_2 - x_2}{y_2 + x_2} \cdot \Delta x = 1,1833 + \frac{1,1833-0,2}{1,1833+0,2} \cdot 0,1 = 1,1833 + \frac{0,0983}{1,3833} = 1,2544$$

$$y_4 = y_3 + \frac{y_3 - x_3}{y_3 + x_3} \cdot \Delta x = 1,2544 + \frac{1,2544-0,3}{1,2544+0,3} \cdot 0,1 = 1,3158$$

$$y_5 = y_4 + \frac{y_4 - x_4}{y_4 + x_4} \cdot \Delta x = 1,3158 + \frac{1,3158-0,4}{1,3158+0,4} \cdot 0,1 = 1,3692$$

$$y_6 = y_5 + \frac{y_5 - x_5}{y_5 + x_5} \cdot \Delta x = 1,3692 + \frac{1,3692-0,5}{1,3692+0,5} \cdot 0,1 = 1,4157$$

$$y_7 = y_6 + \frac{y_6 - x_6}{y_6 + x_6} \cdot \Delta x = 1,4157 + \frac{1,4157-0,6}{1,4157+0,6} \cdot 0,1 = 1,4562$$

$$y_8 = y_7 + \frac{y_7 - x_7}{y_7 + x_7} \cdot \Delta x = 1,4562 + \frac{1,4562 - 0,7}{1,4562 + 0,7} \cdot 0,1 = 1,4863$$

$$y_9 = y_8 + \frac{y_8 - x_8}{y_8 + x_8} \cdot \Delta x = 1,4863 + \frac{1,4863 - 0,8}{1,4863 + 0,8} \cdot 0,1 = 1,5163$$

$$y_{10} = y_9 + \frac{y_9 - x_9}{y_9 + x_9} \cdot \Delta x = 1,5163 + \frac{1,5163 - 0,9}{1,5163 + 0,9} \cdot 0,1 = 1,5418$$

Jadval.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1	1,1	1,1833	1,2544	1,3158	1,3692	1,4157	1,4562	1,4863	1,5163	1,5418

6-laboratoriya ishini bajarish uchun variantlar.

Quyidagi tenglamalar berilgan shartlarda Eyler usuli bilan yechilsin.

$$1. y' = x + y; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad b = 1; \quad n = 10$$

$$2. y' = 1 + x + y^2; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad b = 1; \quad n = 10$$

$$3. y' = 1 - x + y^2; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad b = 1; \quad n = 10$$

$$4. y' = 1 + x - y^2; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad b = 1; \quad n = 10$$

$$5. y' = x^2 + y^2; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad b = 1; \quad n = 10$$

$$6. y' = y^2 + \frac{y}{x}; \quad x_0 = 1; \quad y(0) = 1; \quad b = 2; \quad n = 10$$

$$7. y' = y - \frac{1}{x}; \quad x_0 = 1; \quad y(1) = 2; \quad b = 2; \quad n = 10$$

$$8. y' = y^2 - \frac{y}{x}; \quad x_0 = 1; \quad y(1) = 2; \quad b = 2; \quad n = 10$$

$$9. y' = \frac{(x+y)(1-xy)}{x+2y}; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad b = 2; \quad n = 10$$

$$10. y' = \frac{(x-y)(1+xy)}{x+2y}; \quad x_0 = 1; \quad y(1) = 1; \quad b = 2; \quad n = 10$$

11. $y' = \frac{(x-y)(1+xy)}{2x+y}$; $x_0=1$; $y(1)=1$; $b=2$; $n=10$
12. $y' = \frac{(x+y)(1-xy)}{2x+y}$; $x_0=1$; $y(1)=1$; $b=2$; $n=10$
13. $y' = \frac{(2x+y)(1-xy)}{x+2y}$; $x_0=0$; $y(0)=1$; $b=1$; $n=10$
14. $y' = x^2 - y^2$; $x_0=1$; $y(1)=1$; $b=2$; $n=10$
15. $y' = 1 + 2x - y^2$; $x_0=1$; $y(1)=0$; $b=2$; $n=10$
16. $y' = 1 - 2x + y^2$; $x_0=1$; $y(1)=0$; $b=2$; $n=10$
17. $y' = x - y$; $x_0=1$; $y(1)=0$; $b=2$; $n=10$
18. $y' = x^2 + y$; $x_0=0$; $y(0)=1$; $b=1$; $n=10$
19. $y' = x + y^2$; $x_0=0$; $y(0)=1$; $b=1$; $n=10$
20. $y' = \frac{y-x}{2y+x}$; $x_0=0$; $y(0)=1$; $b=2$; $n=10$
21. $y' = \frac{y-2}{x+y}$; $x_0=0$; $y(0)=1$; $b=1$; $n=10$
22. $y' = x^2 + y^3$; $x_0=0$; $y(0)=0$; $b=1$; $n=10$
23. $y' = x^3 + y^2$; $x_0=0$; $y(0)=0$; $b=1$; $n=10$
24. $y' = x^3 - y^2$; $x_0=0$; $y(0)=0$; $b=1$; $n=10$
25. $y' = y^2 - x^3$; $x_0=0$; $y(0)=0$; $b=1$; $n=10$

7- LABORATORIYA ISHI

Mavzu: Chiziqli regressiya tenglamasi. Eng kichik kvadratlar usuli.

X va Y belgili ikki o'lchovli bosh to'plamdan olingan n hajmli tanlanma berilgan bo'lsin. (x_i, y_k) kuzatilgan qiymatlarini mos chastotalari bilan ushbu korrelyatsion jadvalga joylashtiramiz:

$X \backslash Y$	$y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m$	$\sum_{j=1}^m n_{ij}$
x_1	$n_{11} \quad n_{12} \quad \dots \quad n_{1m}$	n_{x_1}
x_2	$n_{21} \quad n_{22} \quad \dots \quad n_{2m}$	n_{x_2}
$\dots$	$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$	$\dots$
x_l	$n_{l1} \quad n_{l2} \quad \dots \quad n_{lm}$	n_{x_l}
$\sum_{j=1}^l n_{ij}$	$n_{y_1} \quad n_{y_2} \quad \dots \quad n_{y_m}$	$n = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^m n_{ij}$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i n_{x_i}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m y_i n_{y_i}$$

$$\overline{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i y_i n_{ij}, \quad \overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i^2 n_{x_i}$$

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m y_i^2 n_{y_i}, \quad \sigma_x^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

$$\sigma_y^2 = \overline{Y^2} - \bar{Y}^2, \quad r = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$Y - \bar{Y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r (x - \bar{x}) \text{ eng kichik kvadratlar usuli bilan topilgan } Y \text{ ning } X \text{ ga}$$

to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasidir.

Ko'pincha bu tenglamani topishni soddalashtirish uchun

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad u_i = \frac{y_i - C_2}{h_2}$$

almashtirishlar kiritiladi.

C_1 va C_2 mos ravishda $x_1 \leq \dots \leq x_l$ va $y_1 \leq \dots \leq y_m$ variatsion qatorlarning o'rtalarida joylashgan variantalar, h_1 va h_2 lar esa variatsion qatorlar qo'shni variantalarining ayirmasi.

Yuqoridagi almashtirishlardan foydalanib, chiziqli regressiya tenglamasini topishda quyidagi formulalar ishlatiladi:

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l u_i n_{x_i}, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m v_j n_{y_j}$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l u_i^2 n_{x_i}, \quad \overline{v^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m v_j^2 n_{y_j}$$

$$\sigma_u^2 = \overline{u^2} - \bar{u}^2, \quad \sigma_v^2 = \overline{v^2} - \bar{v}^2,$$

$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u, \quad \sigma_y = h_2 \sigma_v, \quad \bar{X} = \bar{u} \cdot h_1 + C_1$$

$$Y = \bar{v} \cdot h_2 + C_2, \quad r = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m u_i v_j n_{ij} - n \cdot \bar{u} \bar{v}}{n \sigma_u \sigma_v}$$

Misol. Berilgan korrelyatsion jadval ma'lumotlariga ko'ra Y ning X ga chiziqli regressiya tenglamasini toping.

1-jadval.

$X \backslash Y$	2	7	12	17	22	27	n_y
100	1	5	-	-	-	-	6
110	-	5	3	-	-	-	8
120	-	-	3	40	12	-	55
130	-	-	2	10	5	-	17
140	-	-	-	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	100

Hisoblashlarni osonlashtirish maqsadida $C_1=17$ va $C_2=120$ deb olamiz. U holda $h_1 = 5$ bo'lgani uchun:

$$U_1 = \frac{2-17}{5} = -3, \quad U_2 = \frac{7-17}{5} = -2, \quad U_3 = \frac{12-17}{5} = -1$$

$$U_4 = 0, \quad U_5 = \frac{22-17}{5} = 1, \quad U_6 = \frac{27-17}{5} = 2$$

bo'ladi va $h_2 = 10$ bo'lgani uchun

$$V_1 = \frac{100-120}{10} = -2, \quad V_2 = \frac{110-120}{10} = -1, \quad V_3 = 0$$

$$V_4 = \frac{130-120}{10} = 1, \quad V_5 = \frac{140-120}{10} = 2$$

bo'ladi. Bu topilgan qiymatlarni 1-jadvaldagi X_i va Y_j lar o'rniga qo'yamiz:

2-jadval

$U \backslash V$	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	1	5	-	-	-	-	6
-1	-	5	3	-	-	-	8
0	-	-	3	40	12	-	55

1	-	-	2	10	5	-	17
2	-	-	-	3	4	7	14
n_n	1	10	8	53	21	7	100

2-jadvaldan foydalanib hisoblash ishlarini bajaramiz:

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{1}{n} \sum u n_u = \frac{1}{100} (-3 \cdot 1 + (-2) \cdot 10 + (-1) \cdot 8 + 1 \cdot 21 + 2 \cdot 7) = \\ &= \frac{1}{100} (-3 - 20 - 8 + 21 + 14) = 0,04\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{U^2} &= \frac{1}{n} \sum u^2 n_u = \frac{1}{100} (9 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 21 + 4 \cdot 7) = \\ &= \frac{1}{100} (9 + 40 + 8 + 21 + 28) = 1,06\end{aligned}$$

$$\sigma_u^2 = \overline{u^2} - \bar{u}^2 = 1,06 - 0,04^2 = 1,06 - 0,0016 = 1,0584$$

$$\sigma_u \approx 1,03$$

$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u = 5 \cdot 1,03 = 5,15$$

$$\bar{X} = \bar{u} \cdot h_1 + C_1 = 0,04 \cdot 5 + 17 = 17,2$$

Xuddi shunga o'xshash $\bar{v}$, $\overline{v^2}$, σ_v , σ_y va $\bar{y}$ larni topamiz.

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{1}{n} \sum v n_v = \frac{1}{100} (-2 \cdot 6 + (-1) \cdot 8 + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 14) = \\ &= \frac{1}{100} (-12 - 8 + 17 + 28) = 0,25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{v^2} &= \frac{1}{n} \sum v^2 n_v = \frac{1}{100} (4 \cdot 6 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 17 + 4 \cdot 14) = \\ &= \frac{1}{100} (24 + 8 + 17 + 56) = 1,05\end{aligned}$$

$$\sigma_v^2 = \overline{v^2} - \bar{v}^2 = 1,05 - 0,25^2 = 1,05 - 0,0625 = 1,05 - 0,0625 = 0,9875$$

$$\sigma_v \approx 0,99$$

$$\sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v = 10 \cdot 0,99 = 9,9$$

$$\bar{Y} = \bar{v} \cdot h_2 + C_2 = 0,25 \cdot 10 + 120 = 122,5$$

Korrelyatsiya koeffitsiyenti r ni hisoblash uchun avval $\overline{uv}$ ni topamiz:

$$\begin{aligned}\overline{uv} &= \frac{1}{n} \sum \sum u_i v_j n_{ij} = \frac{1}{100} ((-2) + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) \cdot 5 + \\ &+ (-1) \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 7) = \frac{1}{100} (6 + 20 + 10 + 3 - 2 + 5 + 8 + 28) = 0,78\end{aligned}$$

$$r = \frac{\overline{uv} - \bar{u} \bar{v}}{\sigma_u \cdot \sigma_v} \text{ ga ko'ra}$$

$$r = \frac{0,78 - 0,04 \cdot 0,25}{1,03 \cdot 0,99} = \frac{0,77}{1,0197} \approx 0,75$$

Korrelyatsiya koeffitsiyenti o'zgaruvchilarni chiziqli almashtirishga nisbatan invariant bo'lganligi uchun $r = r_{xy} = r_{uv} = 0,75$ bo'ladi.

Topilgan ko'rsatkichlarni chiziqli regressiya tenglamasiga qo'yib quyidagini topamiz:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot r (x - \bar{x})$$

$$y - 122,5 = \frac{9,9}{5,15} (x - 17,2)$$

$$y - 122,5 = 1,92 x - 33,06$$

yoki

$$y = 1,92 x + 89,44$$

Bu esa Y o'zgaruvchini X o'zgaruvchiga chiziqli regressiya tenglamasi bo'ladi.

Javob: $y = 1,92 x + 89,44$

7 – laboratoriya ishi bo'yicha talabalarga mustaqil bajarish uchun beriladigan topshiriqlar

Korrelyatsion jadval ma'lumotlari bo'yicha Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiya tenglamasini eng kichik kvadratlar usuli bilan toping.

1)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	n_y
45	2	4	-	-	-	-	6
55	-	3	5	-	-	-	8
65	-	-	5	35	5	-	45
75	-	-	2	8	17	-	27
85	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	$n = 100$

2)

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	35	n_y
40	2	4	-	-	-	-	6
50	-	3	7	-	-	-	10
60	-	-	5	30	10	-	45
70	-	-	7	10	8	-	25
80	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n = 100$

3)

$X \backslash Y$	15	20	25	30	35	40	n_y
15	4	1	-	-	-	-	5
25	-	6	4	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	9	7	-	17
55	-	-	-	4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	$n = 100$

4)

$X \backslash Y$	2	7	12	27	22	27	n_y
100	1	5	-	-	-	-	6
110	-	5	3	-	-	-	8
120	-	-	3	40	12	-	55
130	-	-	2	10	5	-	17
140	-	-	-	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	$n = 100$

5)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	n_y
10	3	5	-	-	-	-	8
20	-	4	4	-	-	-	8
30	-	-	7	35	8	-	50
40	-	-	2	10	8	-	20
50	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	$n = 100$

6)

$X \backslash Y$	12	14	22	27	32	37	n_y
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	4	-	45
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	$n = 100$

7)

$X \backslash Y$	15	20	25	30	35	40	n_y
25	3	4	-	-	-	-	7
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	2	-	43
55	-	-	12	8	6	-	26
65	-	-	-	4	7	4	15
n_x	3	10	21	47	15	4	$n = 100$

8)

$X \backslash Y$	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	-	-	-	-	6
40	-	5	4	-	-	-	9
50	-	-	40	2	8	-	50
60	-	-	5	10	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	$n = 100$

9)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	n_y
30	2	6	-	-	-	-	8
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	7	40	2	-	49
60	-	-	4	9	6	-	19
70	-	-	-	4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	$n = 100$

10)

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	35	n_y
20	5	1	-	-	-	-	6
30	-	6	2	-	-	-	8
40	-	-	40	5	5	-	50
50	-	-	2	8	7	-	17
60	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

11)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	-	-	-	-	-	-	3
120	3	4	3	-	-	-	-	-	10
140	-	-	5	10	8	-	-	-	23
160	-	-	-	1	-	6	1	1	9
180	-	-	-	-	-	-	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n = 50$

12)

$X \backslash Y$	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	-	1	-	-	-	-	-	1
150	1	2	5	-	-	-	-	8
175	-	3	2	12	-	-	-	17
200	-	-	1	8	7	-	-	16
225	-	-	-	-	3	3	-	6
250	-	-	-	-	1	1	-	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n = 50$

13)

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	-	-	-	-	-	6	1	7
120	-	-	-	-	-	4	2	6
140	-	-	8	10	5	-	-	23
160	3	4	3	-	-	-	-	10
180	2	1	-	1	-	-	-	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n = 50$

14)

$X \backslash Y$	13	18	23	28	33	n_y
25	3	2	-	-	-	5
35	-	6	4	-	-	10
45	-	1	9	5	-	15
55	-	1	2	4	8	15
65	-	-	1	-	4	5
n_x	3	10	16	9	12	$n = 50$

15)

$X \backslash Y$	30	35	40	45	50	n_y
46	2	6	-	-	-	8
56	2	8	10	-	-	20
66	-	-	32	3	9	44
76	-	-	4	11	6	21
86	-	-	-	2	5	7
n_x	4	14	46	16	20	$n = 100$

16)

$X \backslash Y$	33	38	43	48	53	58	n_y
65	4	8	1	-	-	-	13
75	-	4	4	2	-	-	10
85	-	1	6	6	1	-	14
95	-	-	-	1	5	-	6
105	-	-	-	1	4	1	6
115	-	-	-	-	2	4	6
n_x	4	13	11	10	12	5	$n = 55$

17)

$X \backslash Y$	3	7	11	15	19	23	n_y
6	5	3	-	2	-	-	10
16	7	10	1	2	-	-	20
26	2	18	15	20	-	-	55
36	-	-	30	26	-	-	56
46	-	-	-	19	12	-	31
56	-	-	-	-	21	7	28
n_x	14	31	46	69	33	7	$n = 200$

18)

$X \backslash Y$	45	50	55	60	65	70	75	n_y
30	-	-	-	-	8	2	1	11
35	-	1	6	22	33	10	3	75
40	1	2	10	48	37	8	1	107
45	-	1	12	11	2	-	-	26
50	-	-	1	-	-	-	-	1
55	-	-	1	-	-	-	-	1
n_x	1	6	30	82	80	20	5	$n = 224$

19)

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	-	-	20
3	1	20	-	-	-	21
6	3	5	10	2	-	20
9	-	-	7	12	-	19
12	-	-	-	-	20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n = 100$

20)

$X \backslash Y$	0	4	8	12	16	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
19	-	3	22	2	-	27
25	-	-	-	15	-	15
31	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n = 100$

21)

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	n_y
10	20	5	-	-	-	25
20	7	15	3	1	-	26
30	-	3	17	4	-	24
40	-	-	8	13	7	28
50	-	-	-	5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	$n = 150$

22)

$X \backslash Y$	150	165	175	185	195	n_y
50	2	2	-	-	-	4
70	-	2	-	-	-	2
90	-	-	9	2	1	12
110	-	-	2	7	9	18
130	-	-	-	3	11	14
n_x	2	4	11	12	21	$n = 50$

23)

$X \backslash Y$	20	25	30	35	40	n_y
10	3	7	-	-	-	10
16	-	12	5	1	-	18
20	-	-	6	1	1	8
24	-	-	-	3	1	4
28	-	-	-	-	1	1
n_x	3	19	11	5	3	$n = 41$

24)

$X \backslash Y$	25	35	45	55	65	n_y
2	5	10	-	-	-	15
4	-	13	10	10	-	33
6	-	-	18	16	-	34
8	-	-	-	2	2	4
10	-	-	-	-	1	1
n_x	5	23	28	28	3	$n = 87$

25)

$X \backslash Y$	10	20	30	40	50	n_y
10	7	17	10	-	-	34
20	-	23	12	5	-	40
30	-	10	5	3	2	20
40	-	-	2	2	1	5
50	-	-	-	-	1	1
n_x	7	50	29	10	4	$n = 100$

8 – LABORATORIYA ISHI

Mavzu: Bosh to'plam parametrlarini oraliqli baholashlar.

1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ — belgili bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'lib, uning taqsimot funksiyasi $F(x, \theta)$ bo'lsin. θ parametr uchun $L(X_1, \dots, X_n)$ baho bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $\alpha > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topish mumkin bo'lsaki, uning uchun

$$P(|L - \theta| < \delta) = 1 - \alpha$$

bo'lsa, u holda $(L - \delta; L + \delta)$ oraliq θ parametrning $1 - \alpha$ ishonchlilik darajali *ishonchli oraliq* deyiladi.

2. X belgisi normal taqsimlangan bosh to'plamni qaraymiz. Bu taqsimotning matematik kutilishi α uchun quyidagi ishonchli oraliqdan foydalaniladi:

$$a) \bar{X} - t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

bu yerda σ — o'rta kvadratik chetlanish, t_{α} — Laplas funksiyasi $\Phi(t)$ ning $\Phi(t_{\alpha}) = \alpha/2$ bo'ladigan qiymati.

b) σ — noma'lum bo'lib, tanlanma hajmi $n > 30$ bo'lganda:

$$\bar{X} - t_{n-1; \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1; \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ bu yerda}$$

S^2 — tanlanma dispersiya, $t_{n-1; \alpha}$ — Student taqsimoti jadvalidan berilgan n va α lar bo'yicha topiladi.

3. X belgisi normal taqsimlangan taqsimot funksiyasining dispersiyasi σ^2 uchun quyidagi ishonchli oraliqlardan foydalaniladi:

$$S^2(1-q)^2 < \sigma^2 < S^2(1+q)^2, q < 1 \text{ bo'lganda,}$$

$$0 < \sigma^2 < S^2(1+q^2), \quad q > 1 \text{ bo'lganda.}$$

1 - m i s o l. Tasodifiy miqdor $\sigma = 2$ parametr bilan normal qonun bo'yicha taqsimlangan. $n = 5$ hajmli tanlanma olingan. Bu taqsimotning noma'lum a parametric uchun $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping.

Y e ch i sh. $\Phi(t) = \frac{1}{2}\gamma = 0,475$ tenglikdan, $\Phi(t)$ funksiya jadvalidan $t = 1,96$ sonni topamiz. U holda baho aniqligi quyidagicha bo'ladi:

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t = \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot 1,96 = 0,784,$$

ishonchli oraliq esa

$$\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ yoki } (\bar{X} - 0,784, \bar{X} + 0,784)$$

Masalan, agar olingan tanlanma uchun $\bar{X} = 2,3$ bo'lsa, u holda $(1,5; 3,1)$ oraliq 95% ishonchlilik bilan noma'lum parametr a ni qoplaydi.

2 - m i s o l. Bosh to'planning normal taqsimlangan X belgisining noma'lum matematik kutilishi a ni $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping. Bunda $\sigma = 5$, tanlanmaning o'rta qiymati $\bar{X} = 14$ va tanlama hajmi $n = 25$ berilgan.

Y e ch i sh. $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ munosabatdan: $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$. Jadvaldan $t = 1,96$ ni topamiz.

Topilganlarni $\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ga qo'yamiz:

$$\left(14 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}; \quad 14 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \right)$$

yoki

$$(12,04; 15,96)$$

ishonchli oraliqni topamiz.

3 - m i s o l. Bosh to'planning X belgisi normal taqsimlangan. $n = 16$ hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rta qiymat $\bar{X} = 20,2$ va tanlanma o'rta kvadratik chetlanish $S = 0,8$ topilgan. Noma'lum matematik kutilishni ishonchli oraliq yordamida $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan baholang.

Y e ch i sh. $t_{n-1;\gamma}$ ni jadvaldan topamiz:

$$\gamma = 0,95; \quad n = 16; \quad t_{n-1;\gamma} = 2,13$$

Bularni

$$\bar{X} - t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

formulaga qo'ysak,

$$\left(20,2 - 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}}, \quad 20,2 + 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}} \right)$$

yoki

$$(19,774; 20,626)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib, noma'lum a parametr 0,95 ishonchlilik bilan

$$19,774 < a < 20,626$$

ishonchli oraliqda yotadi.

4 - m i s o l. Fizik kattalikni to'qqizta bir xil, bog'liqmas o'lchash natijasida olingan natijalarning o'rta arifmetigi $\bar{X} = 42,319$ va tanlanma o'rta kvadratik chetlanishi $S = 5,0$

topilgan. O'lganayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan aniqlash talab qilinadi.

Y e ch i sh. O'lganayotgan kattalikning haqiqiy qiymati uning matematik kutilishiga teng. Shuning uchun masala σ noma'lum bo'lganda

$$\bar{X} - t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

ishonchlilik oralig'i yordamida matematik kutilishni baholashga keltiriladi.

Jadvaldan $\gamma = 0,95$ va $n = 9$ bo'yicha $t_{n-1;\gamma} = 231$ ni topamiz. U holda

$$42,319 - 2,31 \cdot \frac{5}{3} < a < 42,319 + 2,31 \cdot \frac{5}{3}$$

yoki

$$38,469 < a < 46,169$$

Shunday qilib, izlanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati 0,95 ishonchlilik bilan $38,469 < a < 46,169$ ishonchli oraliqda yotadi.

5 – m i s o l. Bosh to'plamning X belgisi normal taqsimlangan. $n = 16$ hajmli tanlanma bo'yicha tanlanma o'rta kvadratik chetlanishi $S = 1$ topilgan. Bosh to'plam o'rta kvadratik chetlanish σ ni 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping.

Y e ch i sh. Berilganlar $\gamma = 0,95$ va $n = 9$ bo'yicha jadvaldan $q = 0,44 < 1$ ni topamiz. Topilganlarni $S(1 - q) < \sigma < S(1 + q)$ formulaga qo'yamiz va

$$1 \cdot (1 - 0,44) < \sigma < 1(1 + 0,44)$$

yoki

$$0,56 < \sigma < 1,44$$

ni hosil qilamiz.

6 – m i s o l. Biror fizik kattalik bitta asbob yordamida 12 marta o'lgangan, bunda o'lgashlardagi tasodifiy xatoliklarning o'rta kvadratik chetlanishi 0,6 ga teng bo'lib chiqdi. Asbob aniqligini 0,99 ishonchlilik bilan toping.

Y e ch i sh. Asbobning aniqligi o'lgashlardagi tasodifiy xatoliklarning o'rta kvadratik chetlanish σ ni berilgan $\gamma = 0,99$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni topishga keltiriladi.

Jadvaldan $\gamma = 0,99$ va $n = 12$ bo'yicha $q = 0,9$ ni topamiz. $S = 0,6$ va $q = 0,9$ larni formulaga qo'yib, izlanayotgan oraliqni topamiz:

$$0,6(1 - 0,9) < \sigma < 0,6(1 + 0,9)$$

yoki

$$0,06 < \sigma < 1,14$$

8 - laboratoriya ishi bo'yicha darsxona topshiriqlari

1. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X son belgisining noma'lum matematik kutilishi a ni 0,99 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping, bunda o'rta kvadratik chetlanish $\sigma = 4$, tanlanmaning o'rta qiymati $\bar{X} = 10,2$ va tanlama hajmi $n = 16$.

$$J: 7,63 < a < 12,77$$

2. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining matematik kutilishini tanlanma o'rta qiymat bo'yicha bahosining 0,925 ishonchlilik bilan aniqligi 0,2 ga yeng bo'ladigan tanlamaning minimal hajmini toping. O'rta kvadratik chetlanishni $\sigma = 1,5$ ga teng deb oling.

$$J: n = 179$$

3. Bosh to'plamdan $n = 10$ hajmli tanlanma olingan:

X_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Bosh to'plamning normal taqsimlangan belgisi matematik kutilishini tanlanma o'rta qiymati bo'yicha 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli oraliq yordamida baholang.

J: $0,3 < a < 3,7$

4. Biror fizik kattalikni bog'liqmas bir xil aniqlikdagi 9 ta o'lchash ma'lumotlari bo'yicha o'lchashlarning o'rta arifmetik qiymati $\bar{X} = 30,1$ va o'rta kvadratik chetlanishi $S = 6$ topilgan. O'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli oraliq yordamida $\gamma = 0,99$ ishonchlilik bilan baholang.

J: $23,38 < a < 36,82$

5. Bosh to'plamning miqdoriy belgisi normal taqsimlangan. n hajmli tanlanma bo'yicha tuzatilgan o'rta kvadratik chetlanish S topilgan.

a) o'rtacha kvadratik chetlanish σ ni;

b) dispersiyani 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping, bunda $n = 10$; $S = 5,1$.

J: a) $0 < \sigma < 14,28$; b) $0 < \sigma^2 < 203,92$

6. Bitta asbob yordamida (sistematik xatolarsiz) biror fizik kattalik 10 marta o'lchangan, bunda o'lchashlardagi tasodifiy xatolarning o'rta kvadratik chetlanishi 0,8 ga teng bo'lgan. Asbob aniqligini 0,95 ishonchlilik bilan aniqlang.

J: $0,28 < \sigma < 1,32$

7. Normal taqsimlangan bosh to'plamdan $n = 10$ hajmli tanlanma olingan va ushbu chastotalar jadvali tuzilgan:

X_i	-2	1	2	3	4	5
ω_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Matematik kutilish uchun $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping.

8. 10 ta bog'liqmas (erkli) o'lchashlar natijasida sterjen uzunligi (mm) uchun quyidagi ma'lumotlar olingan: 23, 24, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 24, 25. O'lchash xatoligi normal taqsimlangan deb faraz qilib, sterjen uzunligining matematik kutilishi uchun $\gamma = 95\%$ bilan ishonchli oraliqni toping.

J: $23,8 < a < 25,4$.

9. Agar 10 ta bog'liqsiz o'lchashlar natijasida obektgacha bo'lgan masofa (m) uchun 25025, 24780, 25315, 24097, 24646, 24717, 25354, 24912, 25374 natijalar olingan bo'lsa, obektgacha bo'lgan masofaning matematik kutilishi uchun $\gamma = 0,9$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping. Bunda o'lchash xatoligi $\sigma = 100$ o'rta kvadratik chetlanish bilan normal taqsimlangan deb faraz qilinadi.

J: $249 < a < 25052$

**8 – laboratoriya ishi bo'yicha talabalarga mustaqil
bajarish uchun beriladigan topshiriqlar**

Berilgan tanlanma to'plam bo'yicha matematik kutilma va dispersiya uchun ishonchli oraliqlar quring ($\gamma=0,95$ deb oling).

1.	X_i	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
	n_i	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5
2.	X_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
	n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2
3.	X_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8			
	n_i	5	10	17	30	20	12	6			
4.	X_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55	
	n_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4	
5.	X_i	18,6	19,0	19,4	19,8	20,2	20,6				
	n_i	4	6	30	40	18	2				
6.	X_i	65	70	75	80	85	90				
	n_i	2	5	25	15	5	3				
7.	X_i	20,2	20,4	20,6	20,8	21,0					
	n_i	4	7	20	15	3					
8.	X_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45					
	n_i	18	20	25	22	15					
9.	X_i	5	10	15	20	25	30				
	n_i	10	20	40	30	15	5				
10.	X_i	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,8				
	n_i	5	10	25	20	15	4				
11.	X_i	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8			
	n_i	7	12	16	30	25	15	6			
12.	X_i	7,3	7,6	7,9	8,2	8,5	8,8	9,1			
	n_i	10	15	18	24	20	14	5			
13.	X_i	8,2	8,6	9,0	9,4	9,8	10,2				
	n_i	6	12	30	25	20	4				
14.	X_i	9,1	9,3	9,5	9,7	9,9	10,1	10,3			
	n_i	10	13	16	28	23	17	7			
15.	X_i	10,1	10,5	10,9	11,3	11,7	12,1	12,5			
	n_i	20	25	30	45	40	35	15			
16.	X_i	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0		
	n_i	15	18	23	25	35	32	22	13		
17.	X_i	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5		
	n_i	19	25	28	30	40	35	24	15		
18.	X_i	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8		
	n_i	20	25	35	40	50	32	23	15		
19.	X_i	3,2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7	5,0	5,3		
	n_i	10	15	20	22	35	30	25	12		
20.	X_i	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4		
	n_i	15	25	30	35	45	40	30	20		
21.	X_i	4,3	4,6	4,9	5,2	5,5	5,8	6,1	6,4		
	n_i	6	8	13	15	25	20	14	5		
22.	X_i	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0		
	n_i	10	16	18	20	30	28	15	8		
23.	X_i	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	12,2	12,4	12,6		
	n_i	5	8	12	15	25	22	13	7		

24.	X_i	11,5	11,9	12,3	12,7	13,1	13,5	13,9	14,3
	n_i	10	14	18	20	26	21	13	8
25.	X_i	12,3	12,5	12,7	12,9	13,1	13,3	13,5	13,7
	n_i	2	5	8	12	20	15	7	3
26.	X_i	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2
	n_i	3	10	15	25	40	30	20	5
27.	X_i	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	14,2	14,4	14,6
	n_i	10	15	18	20	30	25	16	12
28.	X_i	13,8	14,3	14,8	15,3	15,8	16,3	16,8	17,3
	n_i	4	7	9	11	15	10	6	5
29.	X_i	14	16	18	20	22	24	26	28
	n_i	15	17	20	22	25	23	16	13
30.	X_i	16,1	16,4	16,7	17,0	17,3	17,6		
	n_i	10	14	21	28	23	15		

ADABIYOTLAR RO`YXATI.

1. Sh.Sh. Shohamidov. Amaliy matematika unsurlari. T. 2004.
2. Плис А.И. Лабораторный практикум по высшей математике. Москва 1983.
3. Т.А.Джалилова va boshqalar. Sonli usullar. 2-qism, 1996 yil.
4. Выгодский М. Справочник по высшей математике. Москва 1999.
5. Соатов Ё.У. “Олий математика” I-V жилдлар, Тошкент, “Ўзбекистон” нашриёти 1994, 1996, 1998, 2000.
6. Jo`raev Т. va boshqalar. “Oliy matematika asoslari” I-II jildlar, Toshkent, “O`zbekiston” nashriyoti, 1998.
7. Пискунов Н.С. “Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗОВ (Под редакцией В.П. Демидовича) М: Физматгиз 1959-1963
8. Данко П.Е. и др. “Высшая математика в упражнениях и задачах”, М: Высшая школа, 1980, 4.1,2.
9. Бугров Я.С., Никольский С.М. “Высшая математика”. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М: Наука, 1980-1984
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. “Высшая математика”. Дифференциальное и интегральное исчисление. М: Наука, 1980-1984

11. Бугров Я.С., Никольский С.М. “Высшая математика”. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды функции комплексного переменного. М: Наука, 1980-1984
12. Бугров Я.С., Никольский С.М. “Высшая математика”. Задачник М: Наука, 1982
13. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Изд. Наука, 1975
14. Кузнецов Л.А. “Сборник заданий по высшей математике”, Москва, 1983
15. А.И.Карасев и др. Курс высшей математики для экономических ВУЗов. М.1982г. 2-кисм.

