Ўзбекистон Республикаси
Олий ва Ўрта махсус таълим
Вазирлиги

Наманган Давлат Университети

Физика-матаматика факультети
”Математика”кафедраси ўқитувчиси
Мамадалиев Ўктамжон Хасанбоевичнинг

”АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ”

фанидан ёзган

реферати

Наманган 2016

Мавзу: Чизиқли алгебралар ва чизиқли операторлар.

Режа

1. Чизиқли алгебралар.

2. Чизиқли операторлар алгебраси ва матрицалар алгебраси.

3. Хос векторлар ва хос қийматлар.

4. Чизиқли тенгсизликлар системаси.

5. Минковский теоремаси.

6. Симплекс метод ҳақида тушунча.

1. Чизиқли алгебралар.

F майдон устида V_n вектор фазо берилган бўлиб,

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, .., \overline{e}_n \qquad (1)$$

унинг бирор базиси ва φ оператор берилган V_n фазонинг чизиқли оператори бўлсин. $\overline{x}$ ва φ($\overline{x}$) векторларнинг (1) базис орқали $x = b_1\overline{e}_1 + ... + b_n e_n$, $j(\overline{x}) = g_1\overline{e}_1 + ... + g_n\overline{e}_n$ кўринишда ифодалансин.

$\overline{x}$ ва φ($\overline{x}$) векторларнинг (1) базисга нисбатан устун координаталарини мос равишда ушбу

$$M(\overline{x}) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad M(j(\overline{x})) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix}$$

кўринишларда белгилаб, улар орасидаги боғланиш формуласини келтириб чиқарайлик.

Теорема. Агар φ оператор V_n фазода аниқланган чизиқли оператор бўлиб, M(φ) шу φ чизиқли операторнинг (1) базисдаги матрицаси бўлса, у ҳолда $\forall \overline{x} \in V_n$ учун M(φ($\overline{x}$))=M(φ)M($\overline{x}$) тенглик бажарилади.

Исботи. Бизга маълумки, φ чизиқли операторнинг матрицаси

$$M(j) = \begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \dots a_{nn} \\ -------- \\ a_{n1} \; a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} \varphi(\overline{e}_1) = \alpha_{11}\overline{e}_1 + \alpha_{21}\overline{e}_2 + \dots + \alpha_{n1}\overline{e}_n, \\ \varphi(\overline{e}_2) = \alpha_{12}\overline{e}_1 + \alpha_{22}\overline{e}_2 + \dots + \alpha_{n2}\overline{e}_n, \\ ------------------ \\ \varphi(\overline{e}_n) = \alpha_{1n}\overline{e}_1 + \alpha_{2n}\overline{e}_2 + \dots + \alpha_{nn}\overline{e}_n, \end{cases} \qquad (2)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Агар $\bar{x}=b_1\bar{e}_1+...b_n\bar{e}_n$ бўлса, у ҳолда $j(\bar{x})=b_1 j(\bar{e}_1)+...+b_n j(\bar{e}_n)$ бўлади. Бу тенгликда $j(\bar{e}_1),...j(\bar{e}_n)$ ларни (2) даги қийматлари билан алмаштириб, $\varphi(\bar{x})=\beta_1(\alpha_{11}\bar{e}_1+\alpha_{21}\bar{e}_2+...+\alpha_{n1}\bar{e}_n)+$ $+...+\beta_n(\alpha_{n1}\bar{e}_1+\alpha_{n2}\bar{e}_2+...+\alpha_{nn}\bar{e}_n)$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $j(\bar{x})=(a_{11}b_1+...a_{1n}b_n)\bar{e}_1+...+(a_{n1}b_1+...+a_{nn}b_n)\bar{e}_n$ келиб чиқади. φ(х) векторнинг устун координаталарига кўра

$$M(j(\bar{x}))=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ ... \\ g_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_1+...+a_{1n}b_n \\ ---------- \\ a_{n1}b_1+...+a_{nn}b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ ------ \\ a_{n1}...e_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}=M(j)\cdot M(\bar{x})$$

ҳосил бўлади, яъни М(φ($\bar{x}$))=М(φ)М($\bar{x}$) тенглик келиб чиқади.

Мисол. V_3 фазода $\bar{a}_1=(0,0,1), a_2=(0,1,1), a_3=(1,1,1)$ векторларни $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ базисга нисбатан мос равишда $j(\bar{a}_1)=\bar{в}_1=(2,3,5)$, $j(\bar{a}_2)=\bar{в}_2=(1,0,0)$, $j(\bar{a}_3)=\bar{в}_3=(0,1,-1)$ векторга ўтказувчи φ чизиқли операторнинг матрицасини топинг.

$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ векторларни базис векторга ўтказувчи матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\overline{в}_1, \overline{в}_2, \overline{в}_3$ векторларни базис векторга ўтказувчи матрица $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ бўлади.

Энди шундай М(φ) матрица топиш керакки, у А матрицани В матрицага ўтказсин, яъни қуйидаги тенглик бажарилсин: $B = M(\varphi)\cdot A$

Бундан М(φ)=ВА$^{-1}$ тенгликни ёза оламиз. Агар А га тескари $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрицани топсак, у ҳолда $M(j)=\begin{pmatrix} 210 \\ 301 \\ 50-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0-11 \\ -110 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-12 \\ 1\ \ -33 \\ -1-55 \end{pmatrix}$, яъни $M(\varphi)=\begin{pmatrix} -1-12 \\ 1-33 \\ -1-55 \end{pmatrix}$ ҳосил бўлади.

F сонлар майдони устидаги V чизиқли фазонинг исталган $\bar{x},\bar{y}$ векторлари учун кўпайтириш қоидаси аниқланган деб фараз қилиб, $\bar{x}$ *ва* $\bar{y}$ лар кўпайтмасини $\bar{x}\bullet\bar{y}$ шаклда белгилайлик.

Таъриф. F майдон устидаги V чизиқли фазо элементлари учун қуйидаги аксиомалар бажарилса:

1. $\overline{x}\overline{y} \in V\ (\forall \overline{x}, \overline{y} \in V)$;

2. $\overline{x}(\overline{y}\overline{z}) = (\overline{x}\overline{y})\overline{z}\ (\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V)$;

3. $\overline{x}(\overline{y} + \overline{z}) = \overline{x}\overline{y} + \overline{x}\overline{z}$ ва $(\overline{y} + \overline{z})\overline{x} = \overline{y}\overline{x} + \overline{z}\overline{x}\ (\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V)$

4. $\lambda(\overline{x}\overline{y}) = (\lambda\overline{x})\overline{y} = x(\lambda\overline{y})(\lambda \in F, \forall \overline{x}, \overline{y} \in V)$

у ҳолда V фазони F майдон устидаги чизиқли алгебра дейилади (Бу ерда F тўплам F майдоннинг асосий тўплами).

Таъриф. Агар V чизиқли алгебрада $\overline{x} \bullet \overline{y} = \overline{y} \bullet \overline{x} (\forall x, y \in V)$ аксиома бажарилса, V коммутатив чизиқли алгебра дейилади.

Таъриф. V чизиқли алгебранинг ранги деб V фазонинг ўлчовига айтилади.

1-мисол. $C=\{a+bi \mid \forall a,b \in P,\ i^2=-1\}$ тўплам P майдон устида ранги иккига тенг бўлган чизиқли алгебра ташкил этади.

2-мисол. барча n-тартибли квадрат матрицалар тўплами F^{nxn}, F майдон устида ранги n^2 бўлган чизиқли алгебра ташкил этади. Бундай чизиқли алгебрани F майдон устидаги тўлиқ матрицалар алгебраси дейилади.

3-мисол. P майдон устидаги кватернионлар алгебраси P майдон устидаги тўрт ўлчовли V_4 вектор фазо бўлиб, $\overline{e},\ \overline{i},\ \overline{j}, \overline{k}$ векторлар V_4 фазонинг базиси бўлсин. V_4 фазода кўпайтириш амали қуйидаги қоида асосида киритилади:

$\overline{i}^2 = \overline{j}^2 = \overline{k}^2 = -\overline{e},\ \overline{i} \cdot \overline{j} = -\overline{j} \cdot \overline{i} = \overline{k},\ \overline{j} \cdot \overline{k} = -\overline{k} \cdot \overline{j} = \overline{i},\ \overline{k} \cdot \overline{i} = -\overline{i} \cdot \overline{k} = \overline{j}$,
$\overline{a} \cdot \overline{e} = \overline{e} \cdot \overline{a},\ \ \overline{a} \in \{\overline{e},\ \overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}\}$. У ҳолда V_4 фазо ранги 4 га тенг бўлган кватернионлар алгебраси бўлади.

2. Чизиқли операторлар алгебраси.

V фазо F майдон устидаги вектор фазо бўлиб, j, y лар шу вектор фазонинг чизиқли операторлари бўлсин. j ва y чизиқли операторлар кўпайтмаси қуйидагича аниқланган бўлсин, яъни $(j\,y)(\overline{x}) = j\,(y\,(\overline{x})), \forall x \in V$.

Лемма. V вектор фазонинг ихтиёрий иккита чизиқли операторлари кўпайтмаси яна шу вектор фазонинг чизиқли оператори бўлади.

Исботи. j, y чизиқли операторлар V вектор фазонинг чизиқли операторлари бўлсин. У ҳолда $j \cdot y$ кўпайтма V вектор фазонинг чизиқли оператори эканлигини кўрамиз. Ҳақиқатан, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in V$ ва $\lambda \in$ F учун қуйидаги шартлар бажарилади:

1. $(j\,y)(\overline{x} + \overline{y}) = j\,(y\,(\overline{x} + \overline{y})) = j\,(y\,(\overline{x}) + y\,(\overline{y})) = j\,(y\,(\overline{x})) + j\,(y\,(\overline{y})) = (j\,y)(\overline{x}) + (j\,y)(\overline{y})$, яъни $(j\,y)(\overline{x} + \overline{y}) = (j\,y)(\overline{x}) + (j\,y)(\overline{y})$ бўлади.

2. $(j\,y)(l\bar{x}) = j\,(y\,(l\bar{x})) = j\,(l\,y\,(\bar{x})) = l\,(j\,(y\,(\bar{x})) = l\,((j\,y)(\bar{x}))$, яъни $(j\,y)(l\bar{x}) = l\,((j\,y)(\bar{x}))$ бўлади. Демак, $j \cdot y$ кўпайтма V вектор фазонинг чизиқли оператори бўлади.

Бизга маълумки Hom (V,V) тўплам F майдон устида вектор фазо ташкил этади.

Ушбу алгебрани <Hom (V,V), +, $\{w_l \mid l \in F\}, \bullet$> алгебра V вектор фазонинг чизиқли операторлар алгебраси дейилади ва қуйидагича белгиланади:

End V= <Hom (V,V), +, $\{w_l \mid l \in F\}, \bullet$>

Теорема. Агар V фазо F майдон устидаги вектор фазо бўлса, у ҳолда End V алгебра F майдон устида чизиқли алгебра ташкил қилади.

Исботи. EndV алгебра чизиқли алгебра шартларини тўлиқ бажаради. Ҳақиқатан,

1. <Hom (V,V), +, $\{w_l \mid l \in F\}, \bullet$> алгебра F майдон устида вектор

фазо ташкил қилади;

Бу тасдиқ олдинги маърузаларда исботланган.

2. $(\varphi + \psi)\chi = \varphi\chi + \psi\chi;$

Исботи. $((\varphi + \psi)\chi(\bar{x}) = (\varphi + \psi)(\chi(\bar{x})) = \varphi(\chi(\bar{x})) + \psi(\chi(\bar{x})) = (\varphi\chi(\bar{x}) + (\psi\chi)(\bar{x}) =$

$= (\varphi\chi + \psi\chi)(\bar{x})((\varphi + \psi)\chi)(\bar{x}) = (\varphi\chi + \psi\chi)(\bar{x});\ \forall \bar{x} \in V$

3. $c\,(j + y) = c\,j + c\,y$;

Исботи. $(c\,(j + y))(\bar{x}) = c\,(j\,(\bar{x}) + y\,(\bar{x})) = c\,(j\,(\bar{x})) + c\,(y\,(\bar{x})) = (c\,j)(\bar{x}) + (c\,y)(\bar{x}) =$

$= (\chi\varphi + \chi\psi)(\bar{x}) \Rightarrow (\chi(\varphi + \psi))(\bar{x}) = (\chi\varphi + \chi\psi)(\bar{x})\ (\forall \bar{x} \in V);$

4. $l\,(j\,y) = (l\,j)y = j\,(l\,y),\ j, y, c \in$ Hom (V,V), ва $l \in F$.

Исботи. $(\lambda(\varphi\psi))(\bar{x}) = \lambda((\varphi\psi)(\bar{x})) = \lambda(\varphi(\psi(\bar{x}))) = (\lambda\varphi(\psi(\bar{x})) = ((\lambda\varphi)\psi)(\bar{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda(\varphi\psi))(\bar{x}) = ((\lambda\varphi)\psi)(\bar{x})$.

Таъриф. U ва U' алгебралар F майдон устидаги чизиқли алгебралар ва φ:U $\rightarrow$ U' акслантириш биектив акслантириш бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилса:

1. $j(\bar{a}+\bar{b}) = j(\bar{a}) + j(\bar{b})$;
2. $j(l\bar{a}) = l\,j(\bar{a})$;
3. $\varphi(\bar{a}\cdot\bar{b}) = \varphi(\bar{a})\cdot\varphi(\bar{b})\ \left(\forall\bar{a},\bar{b}\in V \wedge \forall\lambda\in F\right)$,

у ҳолда φ аксланциришга изоморфизм U ва U' чизиқли алгебраларга эса изоморф чизиқли алгебралар дейилади ва у $U \cong U'$ кўринишда белгиланади.

Мисол. $C_1 = \langle C, +, \{w_l \mid l\in R\}, \bullet\rangle$ - чизиқли алгебра, $=G=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix} \forall a,b\in R\right\}$;

$G_1 = \langle G, +, \{\omega_\lambda \mid \lambda\in R\}, \bullet\rangle$ - чизиқли алгебра билан изоморф, яъни $C_1 \cong G_1$ бўлади (бунда $j: a+bi \to \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$).

Агар F майдон устидаги матрицалар алгебрасини $M(n,F) = \langle F^{nxn}, +, \{w_l \mid l\in F\}, \bullet\rangle$ кўринишда белгиласак, у ҳолда қуйидаги теорема ўринли бўлади:

Теорема. V фазо F майдон устидаги вектор фазо бўлиб, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ унинг базиси, M(φ) матрица V вектор фазода аниқланган φ чизиқли операторнинг $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ базисга нисбатан матрицаси ва $j \to M(j)$ аксланциш мавжуд бўлса, у ҳолда End $V \cong M(n, F)$ муносабат ўринли бўлади.

Исботи. Бизга маълумки, End $V \to M(n, F)$ аксланциш биектив аксланциш бўлади.

1. $M(j+y) = M(j) + M(y)$.

Исботи. $\forall\bar{x}\in V \quad j(\bar{x}) = a_1\bar{e}_1 + \ldots + a_n\bar{e}_n, \quad y(\bar{x}) = b_1\bar{e}_1 + \ldots + b_n\bar{e}_n$

$(j+y)(\bar{x}) = j(\bar{x}) + y(\bar{x}) = (a_1+b_1)e_1 + \ldots + (a_n+b_n)\bar{e}_n$

$$M((j+y)(\bar{x})) = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ ----- \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -- \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ -- \\ b_n \end{pmatrix} = M(j(\bar{x})) + M(y(\bar{x})) \Rightarrow M((j+y)(\bar{x})) = M(j(\bar{x})) + M(y(\bar{x}))$$

$M(j+y)M(\bar{x}) = [M(j) + M(y)]M(\bar{x}). \quad M(j+y) = M(j) + M(y)$.

2. $M(l\,j) = lM(j)$.

Исботи. $((l\,j)(\bar{x}) = l\,a_1\bar{e}_1 + \ldots + l\,a_n\bar{e}_n$,

$$M((\lambda\varphi)(\bar{x}))=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ ---\\ \lambda a_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\ --\\ a_n\end{pmatrix}=\lambda M(\varphi(\bar{x})),$$

$M(\lambda\varphi)M(\bar{x})=(\lambda M(\varphi))\,M(\bar{x}).\quad M(\lambda\varphi)=\lambda M(\varphi)\,.$

3. $M(\varphi\psi)=M(\varphi)M(\psi)\ \ (\forall\varphi,\psi\in \mathrm{Hom}(V,V),\forall\lambda\in F$

Исботи. $M((\varphi\psi)(\bar{x}))=M(\varphi(\psi(\bar{x})))=M(\varphi)\ M(\psi(\bar{x}))=M(\varphi)\ M(\psi)\ M(\bar{x}).$`

$M(\varphi\psi)\ M(\bar{x})=[M(\varphi)M(\psi)]\ M(\bar{x})\Rightarrow M(\varphi\psi)=M(\varphi)M(\psi)$

Демак, таърифга асосан End V $\cong$ M(n, F) бўлади.

3. Хос векторлар ва хос қийматлар.

Комплекс сонлар майдони устида қурилган V_n вектор фазо ва φ:$V_n\to V_n$ чизиқли оператор берилган бўлсин.

Таъриф. Ушбу

$$\varphi(\bar{x})=\lambda\bar{x}(\forall\bar{x}\in V_n,\ \ x\neq\bar{0},\ \ \lambda\in F)\qquad(1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи α сонга φ чизиқли операторнинг хос қиймати, $\bar{x}$ вектор эса λ хос қийматга мос келувчи хос вектори дейилади.

Теорема. Комплекс сонлар майдони устида қурилган V_n вектор фазонинг ҳар бир φ чизиқли оператори камида битта хос векторга эга.

Исботи. V_n вектор фазонинг

$$\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n\qquad(2)$$

базиси берилган бўлиб, $\forall\bar{x}\in V_n$ векторнинг бу базисдаги координатаси $\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\dots\bar{\alpha}_n$ бўлсин, яъни $\bar{x}=\alpha_1\bar{e}_1,+\dots+\alpha_n\bar{e}_n$ тенглик ўринли бўлсин. $\varphi(\bar{e}_1),\varphi(\bar{e}_2),\dots,\varphi(\bar{e}_n)$ векторлар (2) базис орқали чизиқли ифодаланади, яъни

$$\begin{cases}\varphi(\bar{e}_1)=a_{11}\bar{e}_1+a_{21}\bar{e}_2+\dots+a_{n1}\bar{e}_n,\\ \varphi(\bar{e}_2)=a_{12}\bar{e}_1+a_{22}\bar{e}_2+\dots+a_{n2}\bar{e}_n,\\ ------------------\\ \varphi(\bar{e}_n)=a_{1n}\bar{e}_1+a_{2n}\bar{e}_2+\dots+a_{nn}\bar{e}_n\end{cases}\qquad(3)$$

бўлади.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

матрица φ чизиқли операторнинг (2) базисдаги матрицаси. Энди φ($\bar{x}$) векторнинг (2) базисдаги координаталарини аниқлаймиз.

$$j(\bar{x}) = a_1 j(\bar{e}_1) + a_2 j(\bar{e}_2) + \ldots + a_n j(\bar{e}_n) = a_1(a_{11}\bar{e}_1 + \ldots + a_{n1}\bar{e}_n) + \ldots + a_n(a_{1n}\bar{e}_1 + \ldots + a_{nn}\bar{e}_n) =$$
$$= (\alpha_1 a_{11} + \ldots + \alpha_n a_{1n})\bar{e}_1 + \ldots + (\alpha_1 a_{n1} + \ldots + \alpha_n a_{nn})\bar{e}_n. \qquad (4)$$

(1) ва (4) га асосан

$$l\bar{x} = (l a_1)\bar{e}_1 + \ldots + (l a_n)\bar{e}_n = (a_1 a_{11} + \ldots + a_n a_{1n})\bar{e}_1 + \ldots + (a_1 a_{n1} + \ldots + a_n a_{nn})\bar{e}_n,$$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = \lambda\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_1 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = \lambda\alpha_2, \\ ------------- \\ a_{n1}\alpha_1 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = \lambda\alpha_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - l)a_1 + \ldots + a_{1n}a_n = 0, \\ a_{21}a_1 + (a_{22} - l)a_2 + \ldots + a_{2n}a_n = 0, \\ ------------------- \\ a_{n1}a_1 + a_{n2}a_2 + \ldots + (a_{nn} - l)a_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

келиб чиқади.

(5) система $a_1, a_2, \ldots a_n$ номаълумли бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси. Бу система нолмас ечимга эга бўлиши учун система детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Шунга кўра

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - l) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - l) & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn} - l) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} - l \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A - lE| = 0 \qquad (6)$$

ҳосил бўлади. (6) га φ чизиқли операторнинг характеристик тенгламаси деб юритилади. (6) нинг чап қисмидаги детерминант l га нисбатан n-даражали кўпҳадни билдиради. Бу кўпҳадга φ чизиқли операторнинг характеристик кўпҳади деб юритилади. Бизга маълумки, n-даражали кўпҳад комплекс сонлар майдони устида n та илдизга эга бўлади. Бу илдизлар $l_1, l_2, \ldots l_n$ бўлиб, улар φ чизиқли операторнинг хос қийматлари бўлади. Ҳар бир хос сонларни (5) системага қўйиб, унинг нолмас ечимлари топилади. Бу ечимлардан тузилган векторлар $\lambda_1, \lambda_2, \mathbf{K}, \lambda_n$ хос сонларга мос хос векторлар бўлади.

Агар $(A - l_i E)$ матрицанинг ранги r_i бўлса, φ чизиқли операторнинг ҳар бири l_i хос сонга мос келувчи хос векторлар сони (n-r_i) га тенг бўлади.

Теорема. φ чизиқли операторнинг турли базисларидаги характеристик кўпҳадлари тенг.

Исботи. φ чизиқли операторнинг

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots \bar{e}_n, \qquad (7)$$

$$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots \bar{g}_n \qquad (8)$$

базислардаги матрицалари мос равишда А ва В бўлсин. У ҳолда $|A - lE| = |B - lE|$ эканлигини кўрсатамиз. Бизга маълумки, =в$T^{-1}AT$ бўлиб, Т матрица (7) базисдан (8) базисга ўтиш матрицаси. У ҳолда

$|B-\lambda E|=|T^{-1}AT-\lambda E|=|T^{-1}AT-\lambda T^{-1}T|=|T^{-1}AT-T^{-1}\lambda T|=|T^{-1}||AT-\lambda T|=|T^{-1}||A-\lambda E||T|=$

к$|A-\lambda E||T^{-1}||T|=|A-\lambda E||T^{-1}T|=|A-\lambda E|\cdot 1=|A-\lambda E|$,

яъни $|B-\lambda E|=|A-\lambda E|$ бўлади.

4. Чизиқли тенгсизликлар системаси.

Ҳозирги кунда иқтисодиёт масалаларини ҳал этиш учун тенгсизликлар системасидан кенг фойдаланилмоқда.

Таъриф. Ушбу

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b \geq 0 \left(a_i, b \in R, i = \overline{1,n}\right) \qquad (1)$$

тенгсизлик R ҳақиқий сонлар майдони устидаги n та $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$ номаълумли тенгсизлик дейилади.

(1) да $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – номаълумлар, a_i , b□R $(i = \overline{1,n})$ эса коэффици-ентлар дейилади.

Таъриф. Агар (1) да b=о бўлса, у ҳолда (1) га бир жинсли, b≠о бўлса, у ҳолда (1) га бир жинсли бўлмаган тенгсизлик дейилади.

Таъриф. Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + в_1 \geq о, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + в_2 \geq о, \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + в_m \geq о \end{cases} \quad (2)$$

системага n та номаълумли m та чизиқли тенгсизликлар системаси дейилади.

(2) да x_1, x_2 ,..., x_n номаълумлар, $a_{ij}, b \in R$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ сонлар (2) системанинг коэффициентлари дейилади. $в_i \in R$ (2) системанинг озод ҳадлари дейилади.

n номаълумлар сонини, m тенгламалар сонини билдириб, улар орасида m=n, m<n, m>n муносабатларнинг бири ўринли бўлади.

Таъриф. (2) системанинг ҳамма тенгсизликларини қаноатлантирувчи $x_1=a_1$, $x_2=a_2$,..., $x_n=a_n$ сонлар (2) системанинг ечими дейилади.

Таъриф. (2) системадаги ҳамма тенгсизликлар бир жинсли бўлса, система ҳам бир жинсли система дейилади. (2) системанинг камида битта тенгсизлиги бир жинсли бўлмаса, система бир жинсли бўлмаган система дейилади.

Таъриф. Камида битта ечимга эга бўлган (2) система ҳамжойли система, битта ҳам ечимга эга бўлмаган (2) система ҳамжойсиз система дейилади.

Таъриф. Агар (2) нинг ихтиёрий ечими (1) тенгсизликнинг ҳам ечими бўлса, (1) га (2) нинг натижаси дейилади.

Таъриф. Агар (1) тенгсизлик битта ҳам ечимга эга бўлмаса, у зиддиятли тенгсизлик дейилади. зиддиятли тенгсизлик қуйидаги кўринишда бўлади:

$$0 \cdot x_1 + 0.x_2 + \ldots + 0.x_n + b \geq 0 \ (b<0) \quad (3).$$

Таъриф. (2) системанинг биринчи тенгсизлигини $k_1 \geq 0$ сонга, иккинчисини $k_2 \geq 0$ сонга, ... , m-сини $k_m \geq 0$ сонга кўпайтириб, уларни ҳадлаб қўшсак ҳосил бўлган ушбу тенгсизлик

$$\sum_{j=1}^{m} k_j a_{j1} x_1 + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{j2} x_2 + \ldots + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{jm} x_m + \sum_{j=1}^{m} k_j b_j \geq 0 \qquad (4)$$

га (2) системанинг манфиймас чизиқли комбинацияси дейилади.

Теорема. (2) системанинг ҳар бир манфиймас чизиқли комбинацияси шу системанинг натижаси бўлади.

Исботи. (4) тенгсизлик (2) системанинг натижаси бўлади, чунки (2) нинг ихтиёрий (α_1, ... α_n) ечими (4) ни қаноатлантиради.

$$\sum_{j=1}^{m} k_j a_{j1} a_1 + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{j2} a_2 + ... + \sum_{j=1}^{m} k_j a_{jm} a_m + \sum_{j=1}^{m} k_j b_j = k_1 (\sum_{i=1}^{n} a_{1i} a_i + b_1) + k_2 (\sum_{i=1}^{n} a_{2i} a_i + b_2) + ...$$

$$... + k_m (\sum_{i=1}^{n} a_{mi} a_i + b_m) \geq k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + ... + k_m \cdot 0 = 0 .$$

Таъриф. Бир хил x_1, x_2, ... ,x_n номаълумли иккита ҳамжойли тенгсизликлар системасидан бирининг исталган ечими иккинчиси учун ҳам ечим бўлса ёки иккала система ҳам ҳамжойсиз система бўлса, улар тенг кучли системалар дейилади.

Бизга қуйидаги n та номаълумли m та бир жинсли чизиқли тенгсизликлар системаси берилган бўлсин.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \geq o, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \geq o, \\ - \ - \ - \ - \ - \ - \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \geq o. \end{cases} \qquad (5)$$

$\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, ... a_{1n})$, $\bar{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, ... a_{2n}), ..., \bar{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, ... a_{mn})$ $V=R^n$ эса R майдон устидаги арифметик фазо бўлиб $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m \in V$ бўлсин.

Таъриф. Векторларни қўйиш ва манфиймас ҳақиқий сонга кўпайтириш амалларига нисбатан ёпиқ бўлган V вектор фазонинг векторларидан тузилган бўш бўлмаган тўпламга V вектор фазонинг қаварик конуси дейилади.

Мисол. 1. $\bar{a} \in R^n$ ва $\bar{a} \neq \bar{0}$. Ушбу $\{ l\bar{a} | \, l \geq 0, l \in R \}$ тўплам R^n фазонинг қаварик конуси бўлади. Бу қаварик конус $\bar{a}$ вектор яратган тўғри чизиқ дейилади.

2. $\overline{a}_1,...,\overline{a}_m \in R^n$ векторлар системасининг барча манфиймас чизиқли комбинациясининг тўплами R^n фазонинг қавариқ конуси бўлади ва қуйидагича белгиланади $L^+(\overline{a}_1,...,\overline{a}_m)$.

Теорема. (5) бир жинсли чизиқли тенгсизликлар системасининг барча ечимлар тўплами $V=R^n$ фазонинг қавариқ конуси бўлади.

Исботи. (5) нинг барча ечимлар тўплами

$\{\overline{a} = (a_1,...,a_n),\ \overline{b} = (b_1,...,b_n),\ \overline{c} = (c_1,...,c_n), \overline{0} = (0_1,...,0_n),...\}$ бўлсин. Бунда $a_i, b_i, c_i, ...\ (i = \overline{1,n})$ ҳақиқий сонлар.

Бу тўплам векторларни қўшиш ва манфиймас ҳақиқий сонга кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқдир. Шунинг учун бу тўплам V фазонинг қавариқ конуси бўлади.

5. Минковский теоремаси.

$$\begin{cases} P_1=a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... +a_{1n} x_n \geq o, \\ P_2=a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... +a_{2n} x_n \geq o, \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ P_m=a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... +a_{mn} x_n \geq o, \end{cases} \qquad (S)$$

тенгсизликлар системаси

$$P_m=a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... +a_{mn} x_n \geq o. \qquad (1)$$

тенгсизлик берилган бўлиб, у (S) системанинг натижаси бўлсин.

Теорема(Минковский теоремаси). (S) бир жинсли чизиқли тенгсизликлар системасининг ҳар бир натижаси бу системанинг манфиймас коэффициентли чизиқли комбинациясидан ибоарат бўлади.

Бу теоремани исботлаш учун қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз:

Теорема. Чизиқли тенгсизликлар системаси ҳамжойсиз бўлиши учун бу тенгсизликлар системасининг бирор чизиқли комбинацияси зиддиятли тенгсизлик бўлиши зарур ва етарли.

Мисол. Ушбу системанинг ҳамжойсиз эканлигини кўрсатинг.

$$(S)\begin{cases}3x_1-3x_2+x_3+1\ge 0,\\-2x_1-x_2-x_3+1\ge 0,\\ \qquad 9x_2+x_3-6\ge 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3\ge -3x_1+3x_2-1,\\-2x_1-x_2+1\ge x_3,\\x_3\ge -9x_2+6.\end{cases}\qquad (T)$$

$$(S')\begin{cases}-2x_1-x_2+1\ge -3x_1+3x_1+3x_2-1,\\-2x_1-x_2+1\ge -9x_2+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-4x_2+2\ge 0,\\-2x_1+8x_2-5\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_1+2\ge 4x_2\\8x_2\ge 2x_1+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x_1}{4}+\dfrac{1}{2}\ge x_2,\\x_2\ge\dfrac{x_1}{4}+\dfrac{5}{8}\end{cases}\Rightarrow\frac{x_1}{4}+\frac{1}{2}\ge\frac{x_1}{4}+\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{1}{2}\ge\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{5}{8}\le\frac{1}{2}$$

зиддиятли тенгсизлик. У ҳолда юқоридаги теоремага асосан берилган система ҳамжойсиз ситема бўлади.

Таъриф. Чизиқли тенгсизликлар системасидан номаълумлар сонини биттага камайтириб тузилган янги системани берилган системага йўлдош система дейилади.

(S) системадан

$$\begin{cases}P_1\ge x_n,\\P_2\ge x_n,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\P_p\ge x_n;\end{cases}\quad\begin{cases}x_n\ge Q_1,\\x_n\ge Q_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\x_n\ge Q_q;\end{cases}\quad\begin{cases}R_1\ge 0,\\R_2\ge 0,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\R_r\ge 0\end{cases}\qquad (T)$$

системани ҳосил қиламиз. Бундан

$$\begin{cases}P_\alpha\ge Q_\beta\ \ (\alpha=\overline{1,p}\,;\beta=\overline{1,q}\,),\\R_\gamma\ge 0\ \ (\gamma=\overline{1,r})\end{cases}\qquad (S')$$

системани ҳосил қиламиз.

Лемма.Йўлдош системанинг ҳар бир тенгсизлиги берилган тенгсизликлар системасининг чизиқли комбинацияси бўлади.

Исботи. $(S)\Leftrightarrow(T)$; (S^I) йўлдош системанинг тенгсизликлари $P_a\ge Q_b\ (a=\overline{1,p};\ b=\overline{1,q})$ ва $R_g\ge 0\ (g=\overline{1,r})$ тенгсизликлардан тузилган. Бу тенгсизликлар (S) система тенгсизликларини мусбат сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлади. $R_S\ge 0$ эса (S) система тенгсизликларидан иборат бўлади. Демак, (S^I) система тенгсизликлари (S) система тенгсизликларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади.

Минковский теоремасининг исботи. $c>0$ бўлганда $P+c<0$ ҳам (S) нинг натижаси бўлади, чунки (1) ни қаноатлантирувчи ҳар бир ечим $P+c>0$ ни ҳам қаноатлантиради, у ҳолда $\begin{cases} P+c>0 \\ P+c\leq 0 \end{cases}$ система ҳамжойсиз бўлади. (S) нинг исталган ечими $P+c>0$ учун ҳам ечим бўлгани учун

$$P_1\geq 0,\ P_2\geq 0\ ,\ \dots\ ,P_m\geq 0,\ -P-c\geq 0 \qquad (2)$$

система ҳамжойсиз бўлади. Иккинчи теоремага асосан $k_1\geq 0$, $k_2\geq 0$, ... ,$k_m\geq 0$, $k\geq 0$ сонлар учун (2) нинг чизиқли комбинацияси

$$k_1P_1+k_2P_2+\dots+k_mP_m+(-P-c)k\geq 0,$$

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\dots+0\cdot x_m+b=0+b=b\geq 0\ \ (b<0)$$

зиддиятли тенгсизликни ифодалайди. Шундай қилиб ушбу

$$k_1P_1+k_2P_2+\dots+k_mP_m-kP-kc=0+b$$

тенглик бажарилади. P_1, P_2, ... ,P_m, P – бир жинсли ифода бўлгани учун $-kc-b=0$ тенглик ҳосил бўлади.

$b<0$ ва $c>0$ дан $k>0$ ҳосил бўлади. Демак,

$k_1P_1+k_2P_2+\dots+k_mP_m-kP=0$ бўлиб, бундан

$$P=\frac{k_1}{k}P_1+\frac{k_2}{k}P_2+\dots+\frac{k_m}{k}P_m \qquad (3)$$

тенглик келиб чиқади.

(3) да $\frac{k_i}{k}\geq 0$, чунки $k>0$ ва $k_i\geq 0$.

(3) га асосан (1) тенгсизлик (S) системанинг манфиймас чизиқли комбинациясидан иборат бўлади.

6. Симплекс метод ҳақида тушунча.

Чизиқли программалаш масаласини ечишнинг муҳим усули симплекс усулидир. Симплекс усул қуйидаги жараённи ифодалайди:

Чекланиш тенгламалар системасини

$$\begin{cases} x_1=b_1-(a_{1r}+_1x_r+_1+ \dots +a_{1n}x_n), \\ x_2=b_2-(a_{2r}+_1x_r+_1+ \dots +a_{2n}x_n), \\ \text{-------------} \\ x_r=b_r-(a_{rr}+_1x_r+_1+ \dots +a_{rn}x_n) \end{cases} \qquad (1)$$

кўринишга (бунда $b_1 \geq 0, \dots ,b_r \geq 0$) ва берилган чизиқли формадаги $x_1,\dots,x_r$ ларни (1) орқали ифодалаб, уни

$$f = g_0 - g_{r+1}x_{r+1} - \dots - g_n x_n \qquad (2)$$

кўринишга келтирамиз ва бу форманинг минимумини топиш масаласини қўямиз.

(2) даги $x_1, \dots ,x_r$ номаълумлар тўплами чизиқли программалаш масаласининг базиси дейилади ва у $M=\{ x_1, \dots ,x_r\}$ кўринишда белгиланади. $x_1, \dots ,x_r$ ларни базис номаълумлар, $x_r+_1, \dots ,x_r$ ларни озод номаълумлар деб атаймиз. Агар $x_r+_1= \dots =x_n=0$ бўлса, (1) дан $x_1=b_1 \geq 0, \dots ,x_r=b_r \geq 0$ ларни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб,

$$(b_1, b_2, \dots ,b_r, 0, 0, \dots 0) \qquad (3)$$

ечим ҳосил бўлади. f нинг бу ечимдаги қиймати $f = g_0$ га тенг бўлади.

қуйидаги икки ҳол рўй бериши мумкин:

I. (2) да ҳамма $-\gamma_i \geq 0 \ (i = \overline{r+1,n})$ бўлсин. У вақтда f форма $x_r+_1= \dots =x_n=0$ шартда минимум $f = g_0$ қийматга эришади.

II. (2) да $-g_{r+1},\dots,-g_n$ сонлар орасида манфийлари бор бўлсин.

Масалан, $-g_i < 0$ дейлик. У вақта $x_r+_1= \dots =x_j= \dots =x_n=0$ ва $x_j>0$ деб олиб, x_j нинг қийматини орттира бориши ҳисобига $f = g_0 - g_j x_j$ нинг қийматини камайтириш мумкин, лекин бу ишда эҳтиёткорлик керак, чунки бу ҳолда (1) лардан келиб чиқадиган

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1j}x_j, \\ x_2 &= b_2 - a_{2j}x_j, \\ &\text{---------} \\ x_r &= b_r - a_{rj}x_j \end{aligned} \qquad (4)$$

тенгламалардаги $x_1, \ldots, x_r$ ларнинг ҳеч қайсиси манфий бўлиб қолмасин.

Бу ерда ҳам қуйидаги иккита ҳол рўй беради:

А. (4) да ҳамма $a_{1j}, \ldots, a_{rj}$ сонлар мусбатмас. У вақтда $x_j>0$ учун $-a_{kj}x_j \geq 0 \ (k=\overline{1,r})$ бўлганидан $x_k = b_k - a_{kj}x_j \geq b_k \geq 0 \ (k=\overline{1,r})$ га асосан $x_1 \geq b_1 \geq 0, \ldots, x_r \geq b_r \geq 0$ бўлади. Демак, $f = g_0 - g_j x_j$ да $g_j > 0$ ва $x_j > 0$ бўлгани сабабли x_j ни чексиз орттирма бериш билан min $f=-\infty$ га келамиз. Бундан эса f форманинг минимумга эришмаслиги кўринади.

Б. (4) да $a_{1j}, a_{ij}, \ldots, a_{rj}$ сонлар орасида мусбатлари бор. Масалан, $a_{kj}>0$ бўлсин. У ҳолда $x_k=b_k-a_{kj}x_j$ да x_j га $\frac{b_k}{a_{kj}}$ дан ортиқ қиймат бериш мумкин эмас, чунки акс ҳолда $x_k<0$ бўлиб қолади. Бунда $\frac{b_k}{a_{kj}} \geq 0$ эканлиги равшан. Бундай касрлар орасида энг кичиги $\frac{b_i}{a_{ij}}$ бўлсин. Бунда $a_{ij}>0$ сон ҳал қилувчи элемент дейилади.

қисқалик учун $\frac{b_i}{a_{ij}} = \rho$ белгилаш киритайлик. (4) да x_j ни ρ гачагина орттира оламиз, чунки акс ҳолда $x_j<0$ бўлишини кўрдик.

Озод номаълумларга

$$x_{r+1}=\ldots=x_{j-1}=0, \ x_j=\rho, \ x_{j+1}=\ldots=x_n=0 \qquad (5)$$

қийматларни бериб, базис номаълумларни аниқлаймиз:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{ij}\rho, \\ \text{--------} \\ x_i = b_i - a_{ij}\rho, \\ \text{--------} \\ x_r = b_r - a_{rj}\rho. \end{cases} \qquad (6)$$

Энди қуйидаги янги M' базисга ўтамиз:

$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_r$.

Бунга мос базис ечим (6) ва (5) лардан тузилади, (1) система ва (2) формани янги базисга мослаб ёзамиз. Бунинг учун (1) даги

$x_i=b_i-(a_{ir+1}x_{r+1}+...+a_{ij}x_j+...+a_{in}x_n)$

тенгламани x_j га нисбатан ечамиз, яъни

$$x_j=\frac{b_j}{a_{ij}}-\left(\frac{a_{ir+1}}{a_{ij}}x_{r+1}+...+\frac{1}{a_{ij}}x_i+...+\frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n\right)$$

ва бу ифодани (1) га қўйиб, ҳосил бўлган янги системани

$$\begin{cases} x_1=b_1^I-(a_{1r+1}^I x_{r+1}+...+a_{1i}^I x_i+...+a_{1n}^I x_n), \\ ------------------------ \\ x_j=b_j^I-(a_{jr+1}^I x_{r+1}+...+a_{ji}^I x_i+...+a_{jn}^I x_n), \\ ------------------------ \\ x_r=b_r^I-(a_{rr+1}^I x_{r+1}+...+a_{ri}^I x_i+...+a_{rn}^I x_n) \end{cases} \qquad (7)$$

кўринишда ёза оламиз. Бу базиснинг ифодаларини f га қўйиб, уни

$$f=g_0^I-g_{r+1}^I x_{r+1}-...-g_i^I x_i-...-g_n^I x_n \qquad (8)$$

кўринишга келтирамиз. Бу билан жараённинг биринчи қадами тугайди. Кейинги қадам яна шу биринчи қадамни, яъни (8) ва (7) ларга нисбатан I ёки II ҳолни, ундан кейин IIА ёки IIБ ни такрорлашдан иборат бўлади ва ҳ.қ.

Мисол. $\begin{cases} x_1=2-(2x_3-3x_4), \\ x_2=1-(x_3+2x_4) \end{cases}$

система учун $f=1+4x_3+2x_4$ форманинг минимуми топилсин.

Ечиш. x_1, x_2- базис номаълумлар, x_3, x_4 эса озод номаълумлар. $x_3=x_4=0$ да $x_1=2$, $x_2=1$ бўлади. Шундай қилиб, М базиснинг ўринли (2,1,0,0) ечимига эга бўламиз.

f форманинг бу ечимга мос қиймати f=1 бўлди. Энди, f да $g_3=4>0, g_4=2>0$ бўлгани учун I ҳолга эга бўламиз. Шу сабабли, f нинг минимуми f=1 бўлиб, унга мос (2,1,0,0) ечим оптималдир.

Бирор масаланинг ечимини симплекс усул ёрдамида топиш бир қанча босқичлардан иборат эканлиги бизга маълум. Шу босқичларнинг ҳаммасини симплекс жадваллар ёрдамида бажариш мумкин. Буни қуйидаги мисолда кўриш мумкин:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 - 3x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

системанинг манфиймас ечимлари орасида

$$f = x_4 - x_5$$

формага минимум қиймат берувчи ечим топилсин.

Ечиш.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \\ f - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

система тузамиз.

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1	-2
x_2	2	0	1	0	-2	(1)
x_3	3	0	0	1	3	1
f форма	0	0	0	0	-1	1

1-жадвал

f формага минимум қиймат берувчи оптимал ечимни топиш учун $\{x_1, x_2, x_3\}$ базисдан бошқа базисга ўтамиз.

а) 1-жадвалда f га мос келувчи охирги сатрда 1>0 элемент бор. Бу устунда 1>0, 1>0 элементлар мавжуд. Бу элементлар мос равишда 2,3 сатрларда жойлашган;

б) ажратилган 1>0, 1>0 элементлар билан битта сатрда жойлашган озод ҳадларнинг шу 1, 1 ларга нисбатларини оламиз, яъни $\frac{2}{1} = 2$ *ва* $\frac{3}{1} = 3$ бўлади;

в) бу нисбатлар энг кичигининг махражи 1 ҳал қилувчи элемент бўлади. У 1-жадвалда белгиланган.

г) ҳал қилувчи элемент турган устун элементларини (ўзидан бошқалари) нолга айлантирамиз. Бунинг учун ҳал қилувчи элементни 2, -1, -1 ларга кўпайтириб, мос равишда 1,3,4 сатрларга қўшамиз. Бунинг натижасида x_2 жойлашган устуннинг тўртинчи сатрда –1 ҳосил бўлгани учун x_2 ни базисдан чиқариб, ўрнига x_5 киритиб қуйидаги 2-жадвални тузамиз:

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5	1	2	0	-3	0
x_5	2	0	1	0	-2	1
x_3	1	0	-1	1	(5)	0
f форма	-2	0	-1	0	1	0

2-жадвал

2-жадвалда кўрсатилгандек $\{x_1, x_5, x_3\}$ янги базис ҳосил бўлади. 2-жадвалнинг охирги сатрида 1>0 элемент мавжуд бўлиб, у x_4 жойлашган устундадир. Бу устунда 5>0 элемент бўлиб, у ҳал қилувчи элемент бўлади. Учинчи сатрни 5 га бўлиб, ҳосил бўлган 1>0 элементдан фойдаланиб, шу элемент турган устун элементларини нолларга айлантирамиз (ўзидан бошқа). Натижада қуйидаги 3-жадвални ҳосил қиламиз:

Базис номаълумлар	Озод ҳадлар	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$\frac{28}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
x_5	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
x_4	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0
f форма	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0

3-жадвал

3-жадвалда янги базис $\{x_1, x_5, x_4\}$ бўлади. 3-жадвалнинг охирги сатрида бирорта ҳам мусбат элемент қолмади. Демак, топилган $(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5})$ ечим оптимал ечим бўлиб, унга мос келувчи f форманинг минимуми $-\frac{11}{5}$ га, яъни min $f = -\frac{11}{5}$ бўлади.

Адабиётлар рўйхати

1. Назаров Р.Н., Тошпўлатов Б.Т., Дўсумбетов А.Д. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Т.: Ўқитувчи. 1993 й.
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Вўсш. школа. 1979 г.
3. А, Г, Курош, Курс вўсшей алгебрў, «НАУКА», М 1975г.
4. Мальцев А, И, Основў линейной алгебрў, изд.2, Гостехиздат, 1956.
5. Проскуряков И.В., Сборник задач по линейной алгебре, «НАУКА», М 1967г.
6. В.В. Воеводин. Линейная алгебра. Москва, 1980.
7. Х.С. Расулов. Вектор фазолар. Наманган, 2005.