

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI QISHLOQ VA SUV HO'JALIGI VAZIRLIGI

Toshkent davlat agrar universiteti
Nukus filiali

«Tiller va aniq fanlar» kafedrası

«Oliy matematika» fanidan

Maruzalar matni

Bilim sohasi:	400000 - Qishloq va suv xo'jaligi
Ta'lim sohasi:	410000 – Qishloq, o'rmon va baliq xo'jaligi
Ta'lim yunalishi:	5410100 – agroxiimiya va agrotuproqshinoslik 5410200 - agronomiya (dehonshilik maxsulotlari bo'yicha) 5410500- qishloq xo'jaligi maxsulotlarini etishtirish, saqlash va dastlabki qayta ishlash texnologiyasi 5420100 - Qishloq xo'jaliginda menejmenti

Oliy matematika fanining ma`ruza matnlari to'plami ishchi o'quv dasturi asosida ishlab chqilgan.

Tuzuvchi:

R. Beglerbekov - «Tillar va aniq fanlar» kafedrası assitenti

Fikr bildiruvchilar:

K.Yakupov - «Tillar va aniq fanlar»
kafedrası katta o'qituvchisi

№	MA'RUZA MAVZULARI	AJRAT. SOAT
1	Haqiqiy sonlar. To'plamlar va ular ustida amallar. Haqiqiy sonlar ustida amallar.	2
2	Funksiya tushunchasi. Misollar. Murakkab funksiya. Funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi.	2
3	Tekislikda analitik geometriyaning sodda masalalari: ikki nuqta orasidagi masofa; kesmani berilgan nisbatda bo'lish; uchburchakning yuzini xisoblash.	2
4	To'g'ri chiziqning turli xil tenglamalari. To'g'ri chiziqlarga doir asosiy masalalar: ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, paralellik va perpendikularlik shartlari, nuqtadan to'g'ri chiziqqa masofa, ikki parallel to'g'ri chiziq orasidagi masofa. Koordinatalarni almashtirish: qutb koordinatalari, parallel ko'chirish va o'qlarni burish.	2
5	Ikkinchi tartibli chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning kanonik tenglamalari.	2
6	Determinantlar va ularning xossalari.	2
7	Kramer qoidasi va Gauss usuli. Yoqari tartibli determinantni hisoblash	
8	Ketma-ketlik va funktsiya limiti. Uzlüksizlik, uzilish turlari. Ajoyib limitlar.	2
9	Funktsiya hosilasi. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari. Hosilani hisoblash qoidalari. Hosilalar jadvali.	2
10	Differentsial. Differentsiallashtirish jadvali va xisoblash qoidalari. YUqori tartibli hosila va differentsiallashtirish.	2
11	Aniqlanmas integral. Aniqlanmas integral jadvali. O'zgaruvchilarni almashtirish va bevosita integrallashtirish. Ko'p uchraydigan integrallar. Bo'laklab integrallashtirish.	2
12	Aniqlanmas integral, xossalari. Egri chiziqli trapetsiya yuzi. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniqlanmas integralda integrallashtirish usullari.	2
13	Qatorlar. Musbat hadli qatorlarning yaqinlashuvchi alomatlari. Solishtirish, Dalambert, Koshi va Koshi integral alomatlari. Leybnits qatori. Absolyot va shartli yaqinlashuv. Darajali qatorlar.	2
14	Differentsial tenglamalar. Differentsial tenglamalarga keladigan biologik masalalar Birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Uzgaruvchilari ajraladigan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar.	2
15	Uzgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli differentsial tenglamalar. Uzgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differentsial tenglamalar. Uzgarmas koeffitsientli chiziqli ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar.	2
16	Kombinatorika va uning turlari: o'rinshtirishlar, o'rin almashtirishlar va guruhlashlar. Hodisalar ehtimoli va matematik statistika elementlari. Ehtimollik ta'rif va xossalari, turlari	2
17	Tasodifiy hodisalar. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni. Taqsimot funktsiyasi va uning xossalari. Diskret va uziliksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalar va ularning xossalari	2

1-maruza: Haqiqiy sonlar. To'plamlar va ular ustida amallar. Haqiqiy sonlar ustida amallar

Reja:

1. To'plamlar va ular ustida amallar
2. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar to'plami.
3. Haqiqiy sonning absolyut qiymati.

To'plamlar va ular ustida amallar. To'plam matematikaning boshlang'ich, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri. Uni ixtiyoriy tabiatli narsalarning (predmetlarning) ma'lum tushunchali belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. Masalan, shkafdagi kitoblar to'plami, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami, $x^2 - 5x + 6 = 0$ tenglamaning ildizlari to'plami. To'plamni tashkil etgan narsalar **uning elementlari** deyiladi. Matematikada to'plamlar bosh harflar bilan, ularning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, A, B, C -to'plam, a, b, c - to'plamning elementlari. Ba'zan to'plamlar ularning elementlarini ko'rsatish bilan yoziladi.

$$A = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$$

$$N = (1, 2, 3, \dots, n, \dots)$$

$$Z = (\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

Agar a biror A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$ kabi yoziladi va “ a element A to'plamga tegishli” deb o'qiladi.

Agar a shu to'plamga tegishli bo'lmasa, $a \notin A$ kabi yoziladi va “ a element A to'plamga tegishli emas” deb o'qiladi.

Agar A chekli sonli elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u **chekli to'plam**, aks holda **cheksiz to'plam** deyiladi. Masalan, $A = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$ chekli to'plam, bir nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami esa cheksiz to'plam bo'ladi.

1-ta'rif. A va B to'plamlari berilgan bo'lib, A to'plamning barcha elementlari B to'plamga tegishli bo'lsa, A to'plam B ning **qismi** (**qisman to'plami**) deyiladi.

A to'plamning elementlari orasida biror xususiyatga (bu xususiyatni P bilan belgilaymiz.) ega bo'ladiganlari bo'lishi mumkin. Bunday xususiyatli elementlardan tuzilgan to'plam quyidagicha

$$\{x \in A / P\}$$

belgilanadi. Ravshanki,

$$\{x \in A / P\} \subset A$$

bo'ladi.

Agar A to'plam elementlari orasida P xususiyatli elementlar bo'lsa, u holda

$$\{x \in A / P\}$$

bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'lib, uni **bo'sh to'plam** deyiladi. U bo'sh to'plam belgisi bilan belgilanadi. Masalan, $x^2 + x + 1 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlaridan iborat A to'plam bo'sh to'plam bo'ladi:

$A = \emptyset$. Odatda A to'plamning barcha qismaniy to'plamlaridan iborat to'plam $F(A)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $\{a, b, c\}$ to'plam uchun

$$F(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

2- ta'rif. A va B to'plamlari berilgan bo'lib, A va B bir biriga **teng to'plamlar** deyiladi va

$$A = B$$

kabi yoziladi.

Demak, $A = B$ tenglik A va B to'plamlarning bir xil elementlaridan tashkil topganini bildiradi.

2- qism. 3-ta'rif. X ixtiyoriy to'plam bo'lib, A to'plam uning biror qismi bo'lsin. X to'plamining A ga kirmagan barcha elementlaridan iborat to'plamni A ning X ga qadar to'ldiruvchi to'plami deyiladi va u $S_x(A)$ kabi belgilanadi.

4-ta'rif. Agar A to'plam B to'plamning qismi va B to'plam A to'plamning qismi bo'lsa, A to'plam B to'plamga teng deyiladi va bu munosabat $A=B$ kabi yoziladi.

ta'rif. A va B ikkita ixtiyoriy to'plam bo'lsin. Agar S to'plam faqatgina A va B to'plamlarning elementlaridan iborat bo'lsa u holda S to'plam A va B to'plamlarning yig'indisi deyiladi va $A \cup B = C$ ko'rinishida yoziladi.

5-ta'rif. A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tuzilgan S to'plam A va B to'plamlarning umumiy qismi yoki ko'paytmasi deyiladi (yoki kesishmasi) va $C = A \cap B$ ko'rinishida yoziladi.

6-ta'rif. A to'plamning B to'plamga kirmagan barcha elementlaridan tuzilgan S to'plam A va V to'plamlarning ayirmasi deyiladi va $S = A/B$ ko'rinishida yoziladi.

7-ta'rif A to'plamning B to'plamga kirmagan va B to'plamning A to'plamga kirmagan barcha elementlaridan tuzilgan S to'plam A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va $S = A \Delta B$ kabi yoziladi.

8-ta'rif Birinchi elementi X to'plamga va ikkinchi elementi Y to'plamga kirgan barcha (x, u) juftliklardan iborat to'plam X va Y to'plamlarning Dekart (to'g'ri) ko'paytmasi deyiladi va $X \times Y$ kabi belgilanadi.

3- qism. Biror X to'plam berilgan bo'lib, uning har bir x elementiga biror A_x to'plam mos keltirilgan bo'lsa, elementlari A_x to'plamlardan iborat H to'plam to'plamlar sistemasi deyiladi va $H = \{A_x\}, x \in X$ shaklida yoziladi.

Misollar.

1- misol. Agar $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ bo'lsa, u holda $H = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ bo'ladi. bunday sistema chekli sistema deyiladi.

2 - misol. Agar $X = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ bo'lsa, u holda $H = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots\}$ bo'ladi. Bunday to'plamlar sistemasi to'plamlar ketma-ketligi deyiladi.

N to'plamlar sistemasining ba'zi elementlaridan tashkil topgan G sistemani uning qismi yoki qism sistemasi deyiladi.

$H = \{A_x\}, x \in X$ to'plamlar sistemasini tashkil etuvchi A_x to'plamlar yig'indisi

deb shunday S to'plamga aytiladiki, A_x to'plamlarning har biri G to'plamning qismi bo'lib, S to'plamning har bir elementi A_x to'plamlarning kamida bittasiga tegishli bo'ladi. To'plamlar sistemasining yig'indisi uchun $C = \bigcup_{x \in X} A_x$ belgilash kiritiladi.

$H = \{A_x\}, x \in X$ to'plamlar sistemasining ko'paytmasi deb, bir vaqtda har bir A_x to'plamga kiruvchi barcha elementlardan iborat bo'lgan S to'plamga aytiladi.
 $C = \bigcap_{x \in X} A_x$

Agar $H = \{A_x\}, x \in X$ to'plamlar sistemasi berilgan bo'lib, bu sistemaga kiruvchi har qanday 2 ta to'plamning umumiy elementlari bo'lmasa va bu sistemaning yig'indisi M bo'lsa, u holda M to'plam qismlarga (yoki sinflarga) bo'lingan deyiladi. A_x to'plamlar M to'plamning sinflari N sistema esa bo'linma deyiladi. Masalan, natural sonlar to'plamining juft sonlardan va toq sonlardan iborat 2 sinfga bulish mumkin.

M to'plam sinflarga bo'lingan bo'lsin. Agar bu to'plamning ikkita a va b elementi bitta sinfga tegishli bo'lsa, ularni berilgan bo'linmaga nisbatan ekvivalent deyiladi va $a \sim b$ shaklda yoziladi. Ekvivalentlik munosabati quyidagixossalarga ega:

- a) Simmetriklik xossasi: agar $a \sim b$ bo'lsa, u holda $b \sim a$
- b) Tranzitivlik xossasi. Agar $a \sim b, b \sim c$ bo'lsa, u holda $a \sim c$
- v) Refleksivlik xossasi. Har qanday a element o'z-o'ziga ekvivalent, ya'ni $a \sim a$.

Endi M ixtiyoriy to'plam bo'lib, uning ba'zi elementlarini biror qoidaga muvofiq ekvivalent deyish mumkin bo'lsin, ya'ni simmetriklik, tranzitivlik va refleksivlik xossalarga ega bo'lgan munosabat berilgan deb faraz qilaylik. U holda ekvivalentlik munosabati M to'plamni sinflarga bo'ladi.

Haqiqiy sonlar.

1-qism. Natural sonlar. Butun sonlar. Ma'lumki, $N = \{1, 2, \dots\}$ - barcha notural sonlar to'plamini ifodalaydi. Bu to'plamdan olingan ixtiyoriy natural n, m va p sonlar uchun quyidagi ikki tasdiqning o'rinli ekani ravshan:

- 1) $n = m, n > m, n < m$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli,
- 2) $n < m, m < p$ tengsizliklardan $n < p$ tengsizlikning o'rinli ekani kelib chiqadi.

Agar biror E to'plamning elementlari orasida yuqorida keltirilgan 1) va 2) munosabatlar (tasdiqlar) o'rinli bo'lsa, E to'plam tartiblangan to'plam deyiladi. Natural sonlar to'plami tartiblangan to'plamga dastlabki misol bo'la oladi.

Natural sonlar to'plami elementlarini o'zaro taqqoslab, bu to'plam elementlari orasida eng kichik element mavjudligini va u 1 soni ekanligini topamiz. Ammo N to'plam elementlari orasida eng katta element yo'q. haqiqatan, har bir $n \in N$ uchun yana N ga tegishli $n+1$ son topiladi.

Ma'lumki ikki natural n, m sonlar yig'indisi $n+m$ hamda ko'paytmasi $n \cdot m$ yana natural son bo'lib, qo'shish va ko'paytirish amallari esa quyidagi hossalarga ega.

- 1. Qommutativlik: $n + m = m + n, n \cdot m = m \cdot n$.

2. Assotsiativlik: $(n + m) + p = n + (m + p)$, $(n \cdot m)p = n(m \cdot p)$.
3. Distributivlik: $(n + m)p = n \cdot p + m \cdot p$.
4. N to'plam shunday k element borki, $k \cdot n = n \cdot k = n$ bo'ladi. Bu element $k = 1$ dir.

N to'plamda $n + p = n$ tenglikni qanoatlantiradigan p son mavjud emas.

Agar $m \in N$, $n \in N$ bo'lsa, $m + x = n$ tenglama natural sonlar to'plamida doim yechimga ega bo'lavermaydi. U raqat $n > m$ bo'lgandagina yechimga ega. Agar $n \leq m$ bo'lsa, shu tenglama yechimi N to'plamda mavjud emas. Bu natural sonlar to'plamini kengaytirish zarurligini anglatadi.

Butun sonlar. Ishorasi natural sonlarga teskari bo'lgan sonlarni manfiy natural sonlar deyiladi. Barcha manfiy natural sonlar, nol soni va barcha natural sonlardan iborat to'plam butun sonlar to'plamini tashkil etadi. Va u odatda Z harfi bilan belgilanadi.

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Ravshanki, $N \subset Z$.

Butun sonlar to'plami natural sonlar to'plami kabi tartiblangan to'plam bo'ladi.

Ihtiyoriy ikki p va q butun sonlar yig'indisi $p + q$, ayirmasi $p - q$, ko'paytmasi $p \cdot q$ yana butun son bo'lib, qo'shish, ayirish, ko'paytirish amallarigta nisbatan 1-punktdagi 1, 2, 3, 4 xossalari bilan birga yana quyidagi xossalari ham o'rinlidir:

5. $\forall q \in Z$ element uchun Z to'plamda shunday element $-q$ mavjudki, $q + (-q) = 0$ bo'ladi.

6. $\forall q \in Z$ element uchun $q + 0 = 0 + q = q$ bo'ladi.

7. $\forall q \in Z$ element uchun $q \cdot 0 = 0 \cdot q = 0$ bo'ladi.

Demak, bir tomondan, Z to'lam o'z ichiga N to'plamning barcha elementlarini olsa, ikkinchi tomondan esa Z yo'plam elementlari uchun qo'shish va ko'paytirish amallari N to'plamdagi qo'shish va ko'paytirish amallari bilan bir hil bo'ladi.

Butun sonlar to'plamida $m + x = n$, $m \in Z$, $n \in Z$ tenglama doim yechimga ega.

Ammo shu to'plamda $m \cdot x = n$, $m \neq 0$ tenglama doim yechimga ega bo'lavermaydi.

Masalan, $2x = -4$ tenglama Z to'plamda $x = -2$ yechimga ega, $2x = -5$ tenglama esa Z to'plamda yechimga ega emas. Bundan butun sonlar to'plamini kengaytirish zarurligi kelib chiqadi.

2. Haqiqiy sonning absolyut qiymati. Aytaylik $x \in R$ soni berilgan bo'lsin. Ushbu

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

miqdor x sonining absolyut qiymati deyiladi.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

$x \in R$ son uchun

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x| \quad -x \leq |x|$$

munosabatlar o'rinli.

$$\begin{aligned} |x| < a &\Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| \leq a &\Leftrightarrow -a \leq x \leq a \end{aligned} \quad (a > 0)$$

$x \in R$ va $y \in R$ sonlar uchun

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| \leq \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0)$$

bo'ladi.

Bu xossalarning isboti bevosita sonning absolyut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi.

Ulardan birini, masalan $|x + y| \leq |x| + |y|$ bo'lishini isbotlaymiz.

Aytaylik, $x + y > 0$ bo'lsin. Unda $|x + y| = x + y$ bo'ladi. $x \leq |x|$, $y \leq |y|$ bo'lishini e'tiborga olib topamiz.:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$$

Endi $x + y < 0$ bo'lsin.

Unda $|x + y| = -(x + y) \leq (-x) + (-y)$ bo'ladi.

$-x \leq |x|$, $-y \leq |y|$ bo'lishini e'tiborga olib topamiz.:

$$|x + y| = -(x + y) \leq (-x) + (-y)$$

Misol. Ushbu

$$|3x - 1| \leq |2x - 1| + |x|$$

tengsizlik x ning qanday qiymatlarida o'rinli bo'ladi?

Echish. Sonning absolyut qiymati xossasidan foydalanib topamiz.:

$$|3x - 1| = |(2x - 1) + x| \leq |2x - 1| + |x|$$

Demak, (3) tengsizlik ixtiyoriy $x \in R$ uchun o'rinli bo'ladi.

Barcha manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plamini R_+ bilan belgilaymiz.

Ravshanki, $R_+ \in R$

Har bir $x \in R$ haqiqiy songa uning absolyut qiymati $|x|$ ni mos qo'yish bilan ushbu

$$f: x \rightarrow x|x| \quad (f: R \rightarrow R_+)$$

akslantirishga ega bo'lamiz.

Demak haqiqiy sonning absolyut qiymati R to'plamni R_+ to'plamga akslantirish

deb qarash mumkin.

Ixtiyoriy $x \in R$, $y \in R$ sonlarni olaylik. Ushbu

$$|x - y|$$

miqdor x va y **nuqtalar orasidagi masofa** deyiladi. va $d(x, y)$ kabi belgilanadi:

$$d(x, y) = |x - y|$$

Masofa quyidagi xossalarga ega:

$$d(x, y) \geq 0 \quad \text{va} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad (z \in R)$$

Bu xossalarning isboti masofa tushunchasi va absolyut qiymat xossalardan bevosita kelib chiqadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. To'plamlar va ular ustida amallar
2. Haqiqiy sonning absolyut qiymati
3. Haqiqiy sonlar

2-maruza: Funksiya tushunchasi. Misollar. Murakkab funksiya.
Funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi

Reja:

1. Funksiya tushunchasi. Misollar.
2. Funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi
3. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar.

Funksiya tushunchasi. Funksiya tushunchasi o'quvchiga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. SHuni e'tiborga olib funksiya haqidagi dastlabki ma'lumotlarni qisqaroq bayon etishni lozim topdik.

Aytaylik, $X \subset R, Y \subset R$ to'plamlar berilgan bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin: $x \in X, y \in Y$.

1-ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda **funksiya berilgan (aniqlangan)** deyiladi va

$$f: x \rightarrow y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

a) Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bu **funksiyaning analitik usulda berilishi** deyiladi. Masalan,

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, uning aniqlanish to'plami

$$X = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

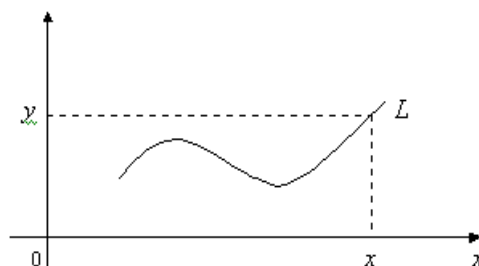
bo'ladi.

b) Ba'zi hollarda $x \in X, y \in Y$ o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali bo'lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, t_1 vaqtda havo harorati T_1 , t_2 vaqtda havo harorati T_2 va h.k. bo'lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

t – vaqt	t_1	t_2	t_3	...	t_n
T – harorat	T_1	T_2	T_3	...	T_n

Bu jadval t vaqt bilan havo harorati T orasidagi bog'lanish-ni ifodalaydi, bunda t -argument, T esa t ning funksiyasi bo'ladi.

v) x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ham ifodalanishi mumkin (2-chizma).



2-chizma.

Masalan, 2-chizmada tasvirlangan L egri chiziq beril-gan bo'lsin. Aytaylik, $[a, b]$ segmentdagi har bir nuqtadan o'tkazilgan perpendikular L chiziqni faqat bitta nuqtada kessin. $\forall x \in [a, b]$ nuqtadan perpendikular chiqarib, uning L chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz. Olingan x nuqta-ga kesishish nuqtasining ordinatasi y ni mos qo'yamiz. Natijada har bir $x \in [a, b]$ ga bitta y mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda x bilan y orasidagi bog'lanishni beril-gan L egri chiziq bajaradi.

Aytaylik, $f_1(x)$ funksiya $X_1 \subset R$ to'plamda, $f_2(x)$ funksiya esa $X_2 \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar

$$1) X_1 = X_2$$

$$2) \forall x \in X_1 \text{ da } f_1(x) = f_2(x)$$

bo'lsa, $f_1(x)$ hamda $f_2(x)$ funksiyalar o'zaro teng deyiladi va $f_1(x) = f_2(x)$ kabi belgilanadi.

Elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o'zgarish sohasi E to'plamni F to'plamga akslantirish

$$f: E \rightarrow F$$

berilgan bo'lsin.

Endi $E = F$, $F = R$ deb olamiz. Unda har bir haqiqiy x songa biror haqiqiy y sonni mos qo'yuvchi

$$f: F \rightarrow R \quad (x \xrightarrow{f} y)$$

akslantirishga kelimiz. Bu esa funksiya tushunchasiga olib keladi.

kabi belgilanadi. Bunda X - **funksiyaning aniqlanish to'plami (cohasi)**, Y - **funksiyaning o'zgarish to'plami (cohasi)** deyiladi. x - **erkli o'zgaruvchi** yoki **funksiya argumenti**, y esa **erksiz o'zgaruvchi** yoki **funksiya** deyiladi.

Misollar. 1. $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ bo'lib, f qoida

$$f: x \rightarrow y = x^2 + 1$$

bo'lsin. Bu holda har bir $x \in X$ ga bitta $x^2 + 1 \in Y$ mos qo'yilib,

$$y = x^2 + 1$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

SHunday qilib, $y = f(x)$ funksiya uchta: X to'plam, Y to'plam va har bir $x \in X$ ga bitta $y \in Y$ ni mos qo'yuvchi f qoidaning berilishi bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin. $x_0 \in X$ nuqtaga mos keluvchi y_0 miqdor $y = f(x)$ **funksiyaning** $x = x_0$ **nuqtadagi xususiy qiymati** deyiladi va $f(x_0) = y_0$ kabi belgilanadi.

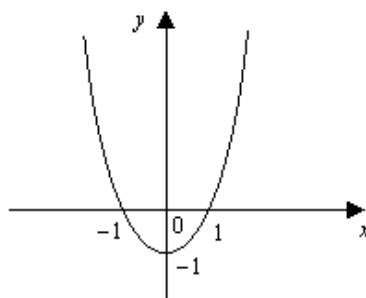
Tekislikda dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikdagi $(x, f(x))$ nuqtalardan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) \in Y\}$$

to'plam $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi. Masalan,

$$y = x^2 - 1 \quad (x \in X = [-2, 2])$$

funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan.



1-chizma.

Funksiya ta'rifidagi f qoida turlicha bo'lishi mumkin.

Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar. $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, bu funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam

$$Y_f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

bo'lsin.

Faraz qilaylik, biror qoidaga ko'ra Y_f , to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamdagi bitta x mos qo'yilgan bo'lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan **teskari funksiya** deyiladi va $x = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $y = \frac{1}{2}x + 1$ funksiya nisbatan teskari funksiya $x = 2y - 1$ bo'ladi.

Yuqorida aytilganlardan $y = f(x)$ da x argument, y esa x ning funksiyasi, teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiyada y argument, x esa y ning funksiyasi bo'lishi ko'rinadi.

Qulaylik uchun teskari funksiya argumenti ham x , uning funksiyasi y bilan belgilanadi: $y = g(x)$.

$y = f(x)$ ga nisbatan teskari $g(x)$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini I va III choraklar bissektrisasi atrofii-da 180° ga aylantirish natijasida hosil bo'ladi.

Aytaylik, Y_f to'plamda $u = F(y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga Y_f to'plamda bitta y :

$$f : x \rightarrow y \quad (y = f(x)),$$

va Y_f to'plamdagi bunday y songa bitta u :

$$F : y \rightarrow u \quad (u = F(y))$$

son mos qo'yiladi. Demak, X to'plamdan olingan har bir x songa bitta u son mos qo'yilib, yangi funksiya hosil bo'ladi: $u = F(f(x))$. Odatda bunday funksiyalar **murakkab funksiya** deyiladi.

3-marua: Tekislikda analitik geometriyaning sodda masalalari:
 ikki nuqta orasidagi masofa; kesmani berilgan nisbatda bo'lish;
 uchburchakning yuzini hisoblash.

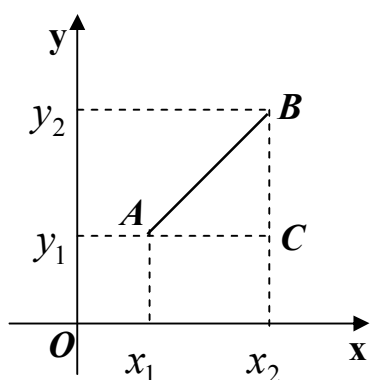
Reja:

1. Ikki nuqta orasidagi masofa.
2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
3. Uchburchak yuzasini hisoblash.

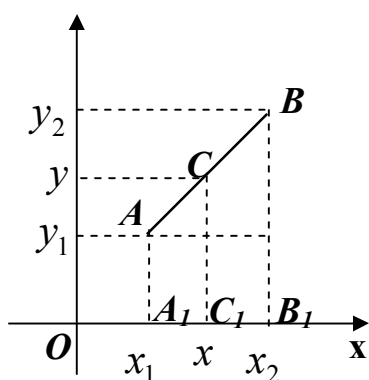
1. Ikki nuqta orasidagi masofa. Tekislikda berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topishtalab etilsin. Malum'ki, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$. ABC to'g'ri burchakli uchburchakdan, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, shunday qilib,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

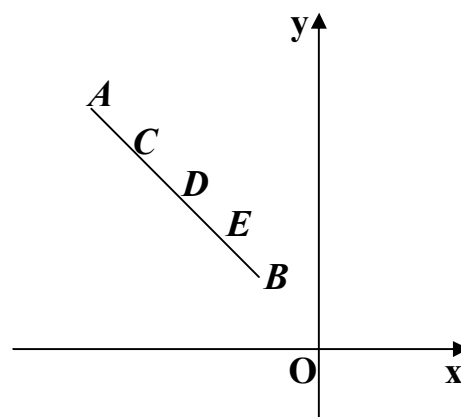
bo'ladi. (1) formulaga tekislikda berilgan ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi deyiladi (1-chizma).



1-chizma



2-chizma



3-chizma

2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. AB kesma berilgan bo'lib, uning uchlari $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo'lsin. AB kesmani $AC : BC = \lambda$ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. O'rta maktab

geometriyasidan ma'lumki (2-chizma),

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda ,$$

yoki

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$$

bo'lib,

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x$$

bo'lganligi uchun,

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda, \quad x - x_1 = \lambda (x_2 - x); \quad x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

bo'ladi. Xuddi shunday,

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Demak, C nuqtaning koordinatalari uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad (2)$$

formulani hosil qildik. (2) formulaga AB kesmani λ nisbatda bo'luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish formulasi deyiladi. Xususiyl holda $C(x, y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'lsa, u holda

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1 \text{ bo'lib, } x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Kesmani teng ikkiga bo'lish formulasi kelib chiqadi.

3. Uchburchak yusasini hisoblash. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida uchlari $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi quyidagi formula orqali topiladi:

$$S = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)] \quad (3)$$

Takrorlash uchun savollar.

1. Ikki nuqta orasidagi masofani hisoblash formulasi.
2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulasi qanday topiladi?
3. Uchburchak yusasi qanday hisoblanadi?

4-ma'ruza. To'g'ri chiziqlarning turli xil tenglamalari. To'g'ri chiziqlarga doir asosiy masalalar: ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, parallellik va perpendikularlik shartlari, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa, ikki parallel to'g'ri chiziq orasidagi masofa. Koordinatalarni almashtirish: qutb koordinatalari, parallel ko'chirish va o'qlarni burish.

Reja:

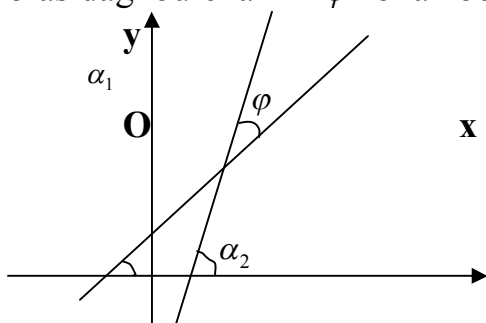
1. To'g'ri chiziqlarning turli xil tenglamalari.
2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, parallellik va perpendikularlik shartlari,
3. nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa, ikki parallel to'g'ri chiziq orasidagi masofa.
4. Koordinatalarni almashtirish: qutb koordinatalari, parallel ko'chirish va o'qlarni burish.

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k_2x + b_2$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bunda $k_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasin va ular orasidagi burchakni topish talab etilsin. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



9-chizma

Ya'ni, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (9-chizma) Ma'lumki,

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}$$

yoki

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \quad (4)$$

bo'ladi. (4) ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning tangensini topish formulasi deyiladi.

Masalan, $y = 3x + 1$, $y = 2x + 5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (4) formulaga asosan,

$$\varphi = \frac{3-2}{1+2 \cdot 3} = \frac{1}{7} \text{ bo'lib, } \varphi = \arctg \frac{1}{7} \approx \arctg 0.14 \approx 8^0, \varphi \approx 8^0$$

bo'ladi.

2. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari. To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, ular orasidagi burchak

$$\varphi = 90^0 \text{ bo'lib, } \operatorname{tg} 90^0 = \infty \text{ yoki } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

Kelib chiqadi, bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo'ladi, bunga ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti deyiladi.

To'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $\varphi = 0$ bo'lib, $\operatorname{tg} 0^0 = 0$, yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0, \quad k_2 - k_1 = 0, \quad k_1 = k_2$$

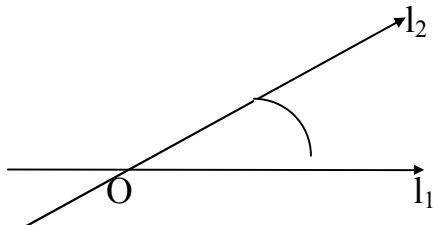
Kelib chiqadi.

$$k_1 = k_2$$

Tenglikka ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti deyiladi.

R tekislikda yotuvchi ixtiyoriy ikkita O nuqtada kesishuvchi l_1 va l_2 o'qni olib qaraylik.

l_1 va l_2 o'qlar orasidagi burchak deb, R tekislikda l_1 o'qni l_2 o'q bilan ustma-ust tushgo'nga qadar O nuqta atrofida burishdan hosil bo'lgan burchakka aytiladi.



Bu erda l_1 ni soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda burish musbat yo'nalish, soat strelkasi buyicha burilsa, - manfiy yo'nalish deb qabul qilingan. U holda

$$(l_1 \wedge l_2) \neq (l_2 \wedge l_1)$$

$(l_1 \wedge l_2) = \varphi$ deb belgilaymiz, bunda $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

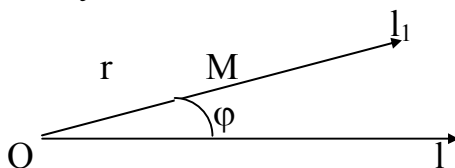
Dekart koordinatalardan tashqari ko'p ishlatiladigan sistemalardan biri — polyar koordinatalar sistemasidir.

Tekislikda l gorizontaal o'qni olib, uni polyar o'qi deb ataylik. Uning bosh

nuqtasi O — polyus deb ataladi.

Polyus bilan ustma-ust tushmaydigan ixtiyoriy M nuqtani olaylik. M nuqtani O polyus bilan tutashtiraylik va l_1 o'q deb belgilaylik.

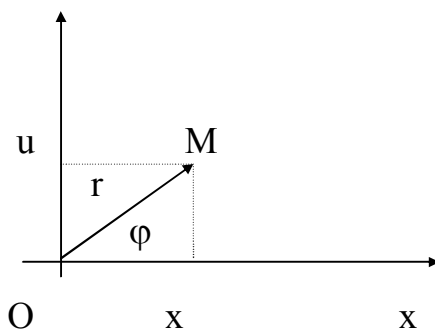
$(l_0 \wedge l_1) = \varphi$ deb belgilaylik va uni $M(\cdot)$ ning polyar burchagi deb ataymiz: $OM = r$ -M nuqtaning polyar radiusi deyiladi.



$M(\varphi; r)$ — nuqtaning polyar koordinatalari.

Ba'zi masalalarni echishda polyar va dekart koordinatalar sistemasida ishlashga to'g'ri keladi. SHuning uchun polyar va dekart koordinatalar sistemalari orasidagi bog'liklikni topaylik.

Aytaylik polyar o'q l bilan abtsissalar o'qi, polyus bilan koordinatalar boshi ustma-ust tushsin. U holda tekislikda olingan ixtiyoriy M nuqta polyar koordinatalar sistemasida $M(\varphi; r)$ koordinataga va Dekart koordinatalar sistemasida $M(x; u)$ koordinatalarga ega bo'lsin.



Chizmadan ko'rinib turibdiki, trigonometrik ta'rifga asosan

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

bundan $x = r \cos \varphi$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) dekart koordinatalarni polyar koordinatalari orkali ifodasidir.(4) formulani xar ikkala tomonini kvadratga kutaraylik:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= r^2 \cos^2 \varphi \\ y^2 &= r^2 \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$$

demak, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Endi $u = y = r \sin \varphi$ va $x = r \cos \varphi$ larni nisbatini topaylik

$$\frac{u}{x} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi; \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\text{Demak, } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

(5)

bu erda $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (5) polyar koordinatalari orkali ifodasidir.

Takrorlash uchun savollar.

1. To'g'ri chiziqning turli xil tenglamalarini ko'rsating.
2. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, paralellik va perpendikularlik shartlari.
3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa, ikki parallel to'g'ri chiziq orasidagi masofa.
4. Koordinatalarni almashtirish: qutb koordinatalari, parallel ko'chirish va o'qlarni burish.

5-ma'ruza. Ikkinchi tartibli chiziqlar: aylana, ellips, giperbola, parabola va ularning kanonik tenglamalari. Ikkinchi tartibli chiziqlar klassifikatsiyasi. Ikkinchi tartibli chiziqlarni kanonik ko'rinishga keltirish

Reja:

1. Ikkinchi tartibli chiziq va uning tenglamalari.
2. Aylana va uning tenglamasi.
3. Ellips va uning tenglamasi.
4. Giperbola va uning tenglamasi.
5. Parabola va uning tenglamasi.

Tayanch ibora va tushunchalar.

Ikkinchi tartibli chiziq, aylana, ellips, giperbola, parabola, ellips va giperbola yarim o'qlari, asimptota, kanonik tenglama, simmetriya markazi, simmetriya o'qi, ekstsetrisitet, fokus, direktrisa, parabola fokusi.

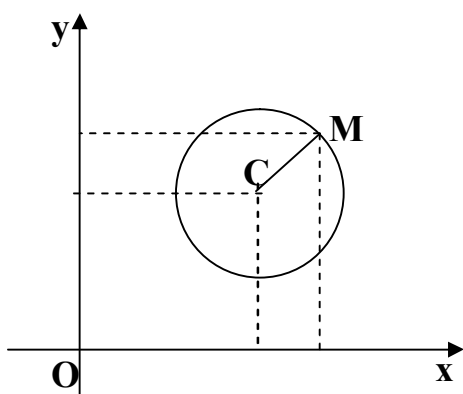
1. Ikkinchi tartibli chiziq uning tenglamasi. Ma'lumki, tekislikda to'g'ri chiziq x va y o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan birinchi darajali edi. Endi tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni o'rganamiz. Ikkinchi tartibli chiziqlar x va y o'zgaruvchi koordinatalarga nisbatan ikkinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

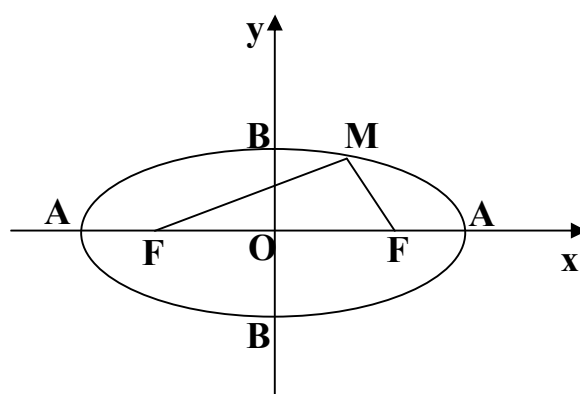
bo'ladi. (1) tenglamaga ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Quyida muayyan hollarda, ikkinchi tartibli chiziqlarning analitik ifodalarini topib, ularning xususiyatlarini o'rganamiz.

2. Aylana va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda biror $C(a, b)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rniga aylana deyiladi.

$M(x, y)$ aylanaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin (1-chizma). Aylana ta'rifiga ko'ra CM masofa o'zgarmas, bu masofani R bilan belgilaylik.



1-chizma



2-chizma

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulsiga asosan,

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \text{ëku} \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikning ikkala tarafini kvadratga ko'tarib,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

tenglamaga kelamiz.. Bu tenglamaning markazi $C(a, b)$ nuqtada, radiusi R ga teng aylananing kanonik tenglamasi deyiladi. (2) tenglikdan

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2 \text{ yoki}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

bo'ladi. Bu tenglama (1) tenglamaning $A = C$, $B = 0$ bo'lgan xususiy holidir..

Demak, aylana ikkinchi tartibli chiqdir.

1-misol. Ikkinchi tartibli chiziq $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Uning aylana ekanligini ko'rsating hamada markazini va radiusini toping.

Yechish. x va y li hadlar bo'yicha to'la kvadratlar ajratamiz:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 23 = 0,$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 23 = 0 \text{ yoki } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$$

bo'ladi. Bu aylananing kanonik tenglamasidir. Uning markazi $C(3; -2)$ nuqtada, radiusi $R = 6$ bo'ladi.

3. Ellips va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan

ikkita nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas miqdordan iborat bo'lgan nuqtalar geometric o'rniga ellips deyiladi. Berilgan nuqtalar F_1 va F_2 bo'lsin. Bu nuqtalarga ellipsning fokuslari deyiladi. O'zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilab, koordinatalar sistemasini shunday olamizki, OX o'qi fokuslardan o'tsin va koordinatalar boshi F_1F_2 masofaning o'rtasida bo'lsin (2-chizma). $M(x, y)$ ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (3)$$

bo'ladi. Ma'lumki, $F_1(+c; 0)$ va $F_2(-c; 0)$ bo'lib, ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamadan irratsionallikni yoo'qotib,

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ko'rinishga keltiramiz. $a^2 - c^2 = b^2$ bilan belgilaymiz. (chunki, $a > c$). Bu holda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

Tenglamani hosil qilamiz. (4) tenglamaga ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi.

Koordinatalar boshi, ellipsning simmetriya markazi, koordinatalar o'qi simmetriya o'qlari bo'ladi.

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0), \quad B_1(0, -b), \quad B_2(0, +b)$$

Nuqtalar ellipsning uchlari, $a = OA_2$ va $b = OB_2$ masofalar mos ravishda ellipsning katta va kichik yarim o'qlari deyiladi.

Shunday qilib, ellips ikkita simmetriya o'qiga, simmetriya markaziga ega bo'lgan yopiq egri chiziqdır.

$\varepsilon = c/a < 1$ kattalik ellipsning ekstsentrisiteti deyiladi. Aylanani ellipsning $a = b$, $\varepsilon = 0$ bo'lgan xususiy holi deb qarash mumkin.

$M(x, y)$ nuqtadan fokuslarga bo'lgan masofaga ellipsning fakol radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak,

$r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ bo'ladi.

2-misol. $16x^2 + 25y^2 = 400$ ellipsning yarim o'qlarini, fokuslarini va ekstsentrissetini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani 400 ga bo'lib,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Ko'rinishga keltiramiz. Bu tenglamadan $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ bo'lib, yarim o'qlari mos ravishda $a = 5$, $b = 4$ bo'ladi. Ma'lumki, $b^2 = a^2 - c^2$ bo'lib,

$c^2 = 25 - 16 = 9$, $c = \pm 3$ bo'ladi. Demak, fokuslari $F_1(3,0)$ va $F_2(-3,0)$

nuqtalarda bo'ldi. Ekstsentrissetini esa, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

4. Giperbola va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita (fokus) nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasi o'zgarmas miqdordan iborat bo'lgan nuqtalar geometrik o'rniga giperbola deyiladi (ko'satilgan ayirma absolyut qiymati bo'yicha olinb, u fokuslar orasidagi masofadan kichik va noldan farkli).

O'zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ va koordinat o'qlarini ellipsdagidek olib, $c^2 - a^2 = b^2$ belgilash kiritib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

Tenglamani hosil qilamiz. (5) tenglamaga giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi. Giperbolaning fokuslari $F_1(+c; 0)$ va $F_2(-c; 0)$ bo'ladi (3-chizma). Koordinatalar o'qi simmetriya o'qlari va koordinatalar boshi $O(0; 0)$ simmetriya markazidir. Giperbola koordinata o'qlarini $A_1(-a; 0)$ va $A_2(a; 0)$ nuqtalarda kesib o'tib, bu nuqtalarga haqiqiy uchlari va $a = OA_2$ masofa haqiqiy yarim o'qi deyiladi. $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari, $b = OB_2$ – mavhum yarim o'qi deyiladi.

Giperbola ikkita asimtotalarga ega bo'lib, uning tenglamalari

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (6)$$

bo'ladi.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ kattalikka giperbolaning ekstsentrisseti debataladi

Giperbola uchlari $a = b$ bo'lsa, unga teng tomonli giperbola deyiladi va uning tenglamasi

$$x^2 - y^2 = a^2$$

bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Giperbolalarga o'zaro qo'shma giperbolalar deyiladi.

3-misol. $9x^2 - 16y^2 = 144$ giperbolaning yarim o'qlarini, fokuslarini, ekstsentrissetini hamda asimtotalarining tenglamalrini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani 144 ga bo'lib, tenglamani kanonik

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ko'rinishga keltiramiz. Bundan $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ bo'lib, haqiqiy

yarim o'q $a = 4$, mavhum yarim o'q $b = 3$ bo'ladi.

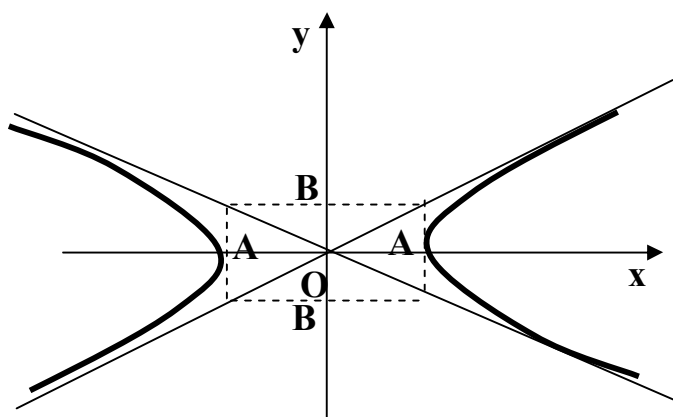
$c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 16 + 9$, $c = \pm 5$ bo'lub, fokuslari

$F_1(+5; 0)$, $F_2(-5; 0)$ nuqtalarda bo'ladi. Ekstsentrisset $\varepsilon = c/a = 5/4$.

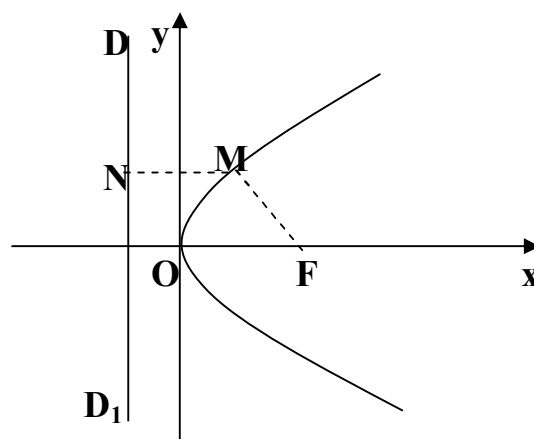
a va b larning qiymatini (6) asimptota tenglamasiga qo'yib,

$$y = \pm \frac{3}{4} x$$

Tenglamalarni hosil qilamiz. Bu asimptotalar tenglamasidir.]



3-chizma



4-chizma

5. Parabola va uning tenglamasi. Ta'rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan nuqta(fokus)gacha va berilgan to'g'ri chiziq(direktrisa)gacha masofalari o'zaro teng bo'lgan nuqtalar geometrik o'rniga parabola deyiladi.

Koordinatalar sistemasini shunday olamizki, OX o'qi F (fokus)dan o'tib, DD_1 direktrisa ga perpendikulyar, OY o'qi esa focus va direktrisaning o'rtasidan o'tsin (4-chizma). $M(x, y)$ parabolaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo'lsin. F nuqtadan DD_1 to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p ($p > 0$) bilan belgilaymiz. Bunda $F(p/2, 0)$ bo'lib, direktrisaning tenglamasi

$$x = -\frac{p}{2}$$

bo'ladi.

Ta'rifga asosan, $MN = MF$. $N(-\frac{p}{2}, y)$.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$x + p/2 = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

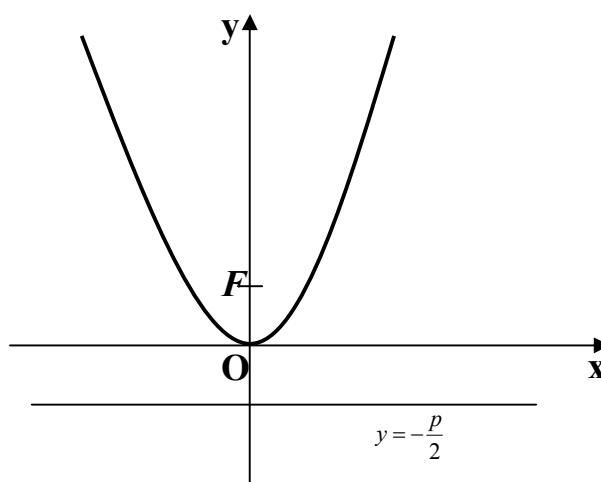
Bu tenglamadan irratsionallikni yoqotib,

$$y^2 = 2px \quad (7)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu abtsissalar o'qiga simmetrik parabolaning kanonik tenglamasi bo'ladi. Ordinatlarda o'qi simmetriya o'qi bo'lsa, parabola tenglamasi

$$x^2 = 2py (p > 0)$$

Ko'rinishda bo'ladi. Bu holda $y = -p/2$ direktrisa tenglamasi, $F = (0; p/2)$ nuqta fokus bo'ladi (5-chizma).



5-chizma

$M(x, y)$ nuqtadan $F(p/2; 0)$ fokusgacha masofaga fakol radius deyiladi va $r = x + p/2$. $M(x, y)$ nuqtadan $F(0, p/2)$ fokusgacha masofa $r = y + p/2$ bo'ladi.

4-misol. $y^2 = 12x$ parabolaning fokusini va direktrisasining tenglamasini toping. $M(3; 6)$ nuqtadan fokusgacha bo'lgan masofani aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamani (7) tenglama bilan solishtirib $2p = 12$, bundan $p = 6$, $p/2 = 3$. Shunday qilib, fokus $F(3; 0)$ nuqtada direktrisa tenglamasi $x = -3$ ekanligini topamiz. $M(3; 6)$ nuqta uchun $x = 3$, bo'lib, fakol radius $r = 3 + 3 = 6$, $r = 6$ bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli chiziqlar deb qanday chiziqlarga aytiladi?
2. Aylana, ellips, giperbola va parabola deb nimaga aytiladi va ularning kanonik tenglamalari qanday bo'ladi?
3. Ellips va giperbolalarning ekstsentrisiteti nimaga aytiladi?
4. Ekstsentrisitet aylana uchun nimaga teng?
5. Ellips va giperbolalarning fokal radiuslari nima?
6. Ellips va giperbolalarning simmetriya markazi va simmetriya o'qlari bormi?
7. Ellips va giperbolalarning Yarim o'qlari nimalardan iborat?

6-ma'ruza. Determinantlar va ularning xossalari.

REJA

1. *Determinantlar va ularning xossalari.*
2. *Determinantlar ustida amallar.*

Aytaylik, biror a, b, c, d sonlar berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ifoda 2-tartibli determinant va $ad-bc$ ayirma esa uning qiymati deyiladi.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1)$$

Bunda a, b, c, d –determinantning elementlari. a, b va c, d sonlar (1) determinantning mos ravishda birinchi va ikkinchi satrlarini a, c va b, d sonlar esa (1) determinantning mos ravishda birinchi va ikkinchi ustunlarini tashkil etadi.

Odatda determinantning elementlari 2ta indeks kuyildi xarflar bilan belgilanadi. bunda 1-indeks yo'lni ikkinchisi esa ustunni bildiradi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Xuddi shu'nga o'xshash uchinchi, turtinchi va x.k. n -tartibli determinant tushunchalari kiritiladi.

Ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ifoda 3-tartibli determinant,

$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11}$ uning qiymati deyiladi.

Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11}$$

(2)

a_{11}, a_{22}, a_{33} sonlar (2) determinantning bosh diagonal elementlari, a_{31}, a_{22}, a_{13} sonlar esa shu determinantning yordamchi diagonal elementlari deyiladi.

Determinantning xossalari.

Determinantlar qator xossalarga ega. qulaylik uchun bunday xossalarni 3-tartibli determinantlarga nisbatan keltiramiz.

Biror 3-tartibli

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

determinant berilgan bo'lsin.

1⁰. Determinantning yo'llarini ustunlarga, ustunlarini yo'llarga almashtirilsa, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

Isbot: Masalan (3) determinantning yo'llarini uning ustunlari bilan almashtirilsa, natijada ushbu

$$s' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi.

Uchinchi tartibli determinantning kiritilishiga ko'ra

$S = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$ bo'ladi. bu tenglikni (2) tenglik bilan solishtirib

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'lishini topamiz.

Huddi shonga o'xshash (3) determinantning boshqa yo'llarini uning mos ustunlari bilan almashtirish natijasida qiymati o'zgarmasligi ko'rsatiladi.

2⁰ Determinantning ixtiyoriy ikki yo'lini (ikki ustuni) o'zaro almashtirsak, determinantning qiymati o'zgarmasdan uning ishorasi karama-karshi ishoraga uzgaradi.

1-natija. Determinantning ikki yo'li (ustuni) bir xil bo'lsa, determinantning qiymati nol bo'ladi.

3⁰ Determinantning ixtiyoriy yo'lida (ustuni) turgan barcha elementlarini o'zgarmas k songa ko'paytirilsa, determinantning qiymati ham k ga ko'payadi.

Isbot. (3) determinantning 1-yo'lida turgan barcha elementlarini k ga ko'paytirish natijasida ushbu

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant xosil bo'ladi. 3-tartibli determinantning kiritilishiga ko'ra

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{13}a_{21}a_{32} + ka_{31}a_{12}a_{23} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{12}a_{21}a_{33} - ka_{11}a_{32}a_{23}$$

Bu tenglikni (2) bilan solishtirib

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'lishini topamiz.

4⁰. Determinantning biror yo'li (ustuni) dagi barcha elementlar nol bo'lsa, determinantning qiymati nol bo'ladi. Isboti 3⁰ dan kelib chiqadi.

5⁰. Determinantning ixtiyoriy ikki yo'li (ustuni) o'zaro proportsional bo'lsa, determinantning qiymati nolga teng bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantning birinchi va uchinchi yo'llari o'zaro proportsional bo'lsin. Unda

$$\frac{a_{11}}{a_{31}} = \frac{a_{12}}{a_{32}} = \frac{a_{13}}{a_{33}} \quad \text{bo'ladi.}$$

Agar bu nisbatni k bilan belgilasak,

$$a_{11}=ka_{31}, \quad a_{12}=ka_{32}, \quad a_{13}=ka_{33}$$

bo'lib

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Keltirilgan 1-natijaga ko'ra keyingi determinant nolga teng. Demak,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

6⁰. Agar (3) determinantning biror yo'li (ustuni) dagi elementlar ikki kushiluvchilar yigindisidan iborat bo'lsa, masalan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \alpha_1 & a_{22} + \alpha_2 & a_{23} + \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'lsa, u holda

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \alpha_1 & a_{22} + \alpha_2 & a_{23} + \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Bu xossa (2) munosabatdan, ya'ni 3-tartibli determinantning kiritilishidan kelib chiqadi.

2-natija. Agar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ning biror yo'li (ustuni) ni o'zgarmas k songa ko'paytirib, uni boshqa yo'li (ustuni) ga qo'shilsa determinant qiymati o'zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Endi determinantning minorlari hamda algebraik to'ldiruvchilari tushunchalarini kiritamiz. Yana soddalik uchun 3-tartibli determinantlarni qaraymiz.

Aytaylik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (3)$$

3-tartibli determinant berilgan bo'lsin. Bu determinantning biror a_{ik} ($i, k=1, 2, 3$) elementini olib, shu element turgan yo'lni hamda ustunni o'chiramiz. Berilgan determinantning qolgan elementlardan 2 - tartibli determinant xosil bo'ladi. O'nga determinantning minori deyiladi va M_{ik} kabi belgilanadi. Masalan (3) ning a_{13} elementi turgan yo'lni va ustunni uchirish

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

natijasida ikkinchi tartibli ushbu

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi. Bu berilgan determinantning elementining minoridir. Ravshanki (3) determinantning 9ta elementi bor. Biniborin minorlar ham 9 ta bo'ladi. Ushbu $(-1)^{i+k}M_{ik}$ miqdor (3) determinant a_{ik} elementining algebraik to'ldiruvchisi deyiladi va A_{ik} orqali belgilanadi.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik} \quad (4)$$

Masalan: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

Determinantning $a_{33}=3$ elementining algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

bo'ladi.

7⁰. Determinantning biror yo'li (ustuni) da turgan barcha elementlarining ularga

mos algebraik to'ldiruvchilari bilan ko'paytmasidan tashkil topgan yigindi shu determinantning qiymatiga teng.

Isbot: Bu xossani birinchi yo'l uchun isbotini keltiramiz. (3) determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ ning birinchi yo'lida turgan } a_{11}, a_{12}, a_{13}$$

elementining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}$$

$$\text{Unda } a_{11}A_{11}+a_{22}A_{22}+a_{33}A_{33}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

bo'ladi. (2) munosabatdan foydalanib

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \quad (4)$$

bo'lishini topamiz.

Boshqa hollarda ham shunga o'xshash isbotlanadi. Odatda (4) formula determinantning birinchi yo'l elementlari buyicha yoyilmasi deyiladi.

8⁰. Determinantning biror yo'li (ustuni) da turgan barcha elementlari bilan boshqa yo'l (ustun) da turgan mos elementlarning algebraik to'ldiruvchilari ko'paytmalaridan tashkil topgan yig'indi 0 ga teng bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar.

1. Determinantqanday xossalarga ega?
2. Determinantlar ustida amallar qanday bajariladi?

7-ma'ruza. Kramer qoidasi va Gauss usuli.
Yoqari tartibli determinantni hisoblash

REJA

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramar usuli.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.

Ikkita x_1 va x_2 noma'lumli chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

sistema ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi, bunda a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} – (1) sistema elementlari, b_1 , b_2 berilgan sonlardir.

Agar (1) dagi x_1 urniga x_1^0 sonni, x_2 urniga x_2^0 sonni kuyganda tenglamalarning xar biri ayniyatga aylansa, unda (x_1^0, x_2^0) juftlik (1) sistemaning yechimi deyiladi. (1) sistemani urganishda bu sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2)$$

determinant (uni (1) sistemani determinanti deyiladi) hamda bu determinantning birinchi va ikkinchi ustunlarini mos ravishda ozod xadlar bilan almashtirilgan ushbu

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \quad (3)$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21} \quad (4)$$

determinantlar muxim axamiyatga ega. (1) sistemani echish uchun avvalo busistemaning bitrinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchi tenglama sini esa a_{12} ga ko'paytirib, keyin xadlar kushib

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

bo'lishini topamiz. So'ngra (1) ning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchi tenglamasini esa a_{11} ga ko'paytirib keyin xadlab kushib

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 - a_{12}a_{21}x_2 = -a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{cases} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

bo'lishini topamiz. Natijada (1) teng kuchli bulgan ushbu

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - a_{21}b_1$$

sistemaga kelamiz. Bu sistema yuqoridagi (2), (3) va (4) munosabatlarni hisobga olganda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \Delta x_1 = \Delta_{x1} \\ \Delta x_2 = \Delta_{x2} \end{cases} \quad (1^1)$$

(1¹) sistemaning yechimi Δ, Δ_{x1} , Δ_{x2} larga boglik.

1⁰. $\Delta \neq 0$ bo'lsin. Bu holda (1) sistemadan

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} \quad (5)$$

bo'lishini topamiz. Bu topilgan x_1 va x_2 lar(1¹) tenglamaning yechimi buladi. (1) sistemaning yechimini topishning bu usuli Kramer usuli deyiladi.(5) formula esa Kramer formulasi deyiladi.

2⁰. $\Delta = 0$ bo'lib , Δ_{x1} va Δ_{x2} lardan xech bulmaganda bittasi noldan farkli bo'lsin .Bunda (1) sistema yechimga ega bulmaydi.Bu holda (1) birga-likda bulmagan sistema deyiladi .

3⁰. $\Delta = 0$, $\Delta_{x1} = 0$, $\Delta_{x2} = 0$,bo'lsin.Bu holda (1) sistema Yoki cheksiz kup yechimga ega buladi Yoki yechimga ega bulmaydi .Shuning uchun sistema bu holda noanik deyiladi .

Endi uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini karaymiz.Uchta x_1 , x_2 va x_3 noma'lumli chiziqli tenglamalardan iborat ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (6)$$

sistema uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi,bunda a_{11} a_{12} a_{13} a_{21} a_{22} a_{23} a_{31} a_{32} a_{33} -bu sistemaning koeffitsentlari , b_1 , b_2 , b_3 -berilgan sonlardir.Agar (6) dagi x_1 ning urniga x_1^0 sonni , x_2 ning urniga x_2^0 sonni , x_3 ning urniga x_3^0 sonni kuyganda tenglamalarning xar biri ayniyatga aylansa ,unda $(x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0)$ uchlik (6) sistemaning yechimi deyiladi.

Ushbu

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant berilgan (6) sistemaning determinanti deyiladi.Bu determinantning birinchi ,ikkinchi va uchinchi ustunlarini mos ravishda ozod xadlar bilan almashtirib

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_{x3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$

determinantlarni xosil kilamiz.

Algebraik to'ldiruvchilar xossalaridan foydalanib (6) sistemani o'nga ekvivalent soddarak sistema bilan almashtiramiz. Buning uchun avvalo, berilgan sistema determinanti elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} & A_{12} &= - \begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} & A_{13} &= \begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix} \\
A_{21} &= - \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} & A_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} & A_{23} &= - \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix} \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{22}a_{23} \end{vmatrix} & A_{32} &= - \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix} & A_{33} &= \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Bu algebraik to'ldiruvchilar yordamida yuqoridagi Δ va Δ_{x1} va determinantlar kuydagicha yoziladi:

$$\begin{aligned}
\Delta &= a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} \\
\Delta_{x1} &= b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}
\end{aligned} \tag{8}$$

Endi (6) sistemani birinchi tenglamasini A_{11} ga, ikkinchi tenglamasini A_{21} ga va uchinchi tenglamasini A_{31} ga ko'paytirib, keyin xadlab qo'shsak, u holda $(a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31})x_1 + (a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31})x_2$

$$+ (a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31})x_3 = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \tag{9}$$

bo'ladi. Yuqoridagi (8) munosabatlardan hamda determinantning xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned}
a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} &= \Delta \\
a_{12} A_{11} + a_{22} A_{21} + a_{32} A_{31} &= 0 \\
a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31} &= 0 \\
b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} &= \Delta_{x1}
\end{aligned}$$

natijada (9) ushbu $\Delta_{x1} = \Delta_{x1}$ ko'rinishga keladi. Xuddi yuqoridagidek, (6) sistemaning birinchi tenglamasini A_{12} ga, ikkinchi tenglamasini A_{22} ga va uchinchi tenglamasini A_{32} ga ko'paytirib keyin xadlab qushib $\Delta_{x2} = \Delta_{x2}$ tenglama, (6) tenglamaning birinchisini A_{13} ga, ikkinchisini A_{23} ga va uchinchisini A_{33} ga ko'paytirib keyin ularni xadlab kushish natijasida

$$\Delta_{x3} = \Delta_{x3}$$

tenglama hosil bo'ladi.

Shunday qilib (6) sistemaga teng kuchli bulgan ushbu

$$\begin{aligned}
\Delta_{x1} &= \Delta_{x1} \\
\Delta_{x2} &= \Delta_{x2} \\
\Delta_{x3} &= \Delta_{x3}
\end{aligned}$$

sistemaga kelimiz .

Ravshanki (6¹) sistemaning yechimi Δ , Δ_{x1} , Δ_{x2} , Δ_{x3} larga bog'liq.

1. $\Delta \neq 0$ bo'lsin. Bu holda (6¹) sistemadan

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta} \tag{10}$$

bo'lishini topamiz. (6) sistemaning yagona yechimi bo'ladi. Bu holda (6) sistema birgalikda deyiladi va (10) munosabat Kramer formulasi deyiladi.

2. Δ_{x1} bo'lib, Δ_{x1} , Δ_{x2} , Δ_{x3} lardan hech bulmaganda bittasi noldan farkli bo'lsin. Bunda (6) sistema yechimga ega bulmaydi.

3. $\Delta=0$ bo'lib., $\Delta_{x1} = \Delta_{x2} = \Delta_{x3}$ bo'lsin. Bu holda (6) sistema Yoki cheksiz kup yechimga ega bo'ladi yoki yechimga ega bo'lmaydi.

1 Matritsalar haqida umumiy tushunchalar. Sistemani modellashtirishda matritsalar algebrasi degan tushuncha muhim ahamiyatga ega. Rejalashtirish muammolari, yalpi mahsulot, jami mehnat sarfi, narxni aniqlash va boshqa masalalar hamda ularda komp'yuterlarni qo'llash matritsalar algebrasini qarashga olib keladi. Ishlab chiqarishni rivojlantirish, moddiy ishlab chiqarish orasidagi mavjud bog'lanishlarni ifodalashda va boshqalarda, ma'lum darajada tartiblangag axborotlar sistemasiga asoslangan bo'lishi lozim. Bu tartiblangan axborotlar sistemasi muayyan jadvallar ko'rinishida ifodalangan bo'ladi. Misol o'rnida moddiy ishlab chiqarish tarmoqlari orasidagi o'zaro bog'liqlik axborotlari sistemasini qaraylik. Ishlab chiqarish 5 ta (masalan, mashinasozlik, elektroenergiya, metal, ko'mir, rezina ishlab chiqarish sanoatlari) tarmoqdan iborat bo'lsin. Bunda ular orasidagi o'zaro bog'liqlik 1-jadval bilan ifodalansin.

1-jadval.

Tarmoqlar	1	2	3	4	5
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Bu jadvalda a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) lar bilan, i -tarmoqning j - tarmoqqa etkazib beradigan mahsuloti miqdori belgilangan, chunonchi, a_{21} , a_{22} , ..., a_{25} lar 2-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga; a_{31} , a_{32} , ..., a_{35} lar esa 3-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga yetkazib beradigan mahsulotlari miqdorini bildiradi. a_{22} , a_{33} lar mos ravishda 2,3- tarmoqlarning o'z ehtiyojlariga sarfini ifodalaydi.

Yuqoridagilar o'xshash ishlab chiqarish mezon (normasi) axborotlari sistemasiga sonli misol qilaylik. Korxona 3 turdagi xom ashyo ishlatib 4 xildagi mahsulot ishlab chiqaradigan bo'lsin, bunda xom ashyo sarfi normasi sistemasi 2-jadval bilan berilgan bo'lsin.

2-jadval.

Xom ashyolar	Mahsulotlar			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-jadvalda masalan, 1-turdagi xom ashyo sarfi normasi mos ravishda 1,2,3,4-xildagi mahsulotlar ishlab chiqarish uchun 2,3,2,0 bo'ladi.

1 va 2 jadvallar, matematikada o'rganiladigan matritsalar tushunchasining misollari bo'la oladi. Matritsalar iqtisodiy izlanishlarda keng qo'llanilmoqda, xususan, ulardan foydalanish ishlab chiqarishni rejalashtirishni osonlashtirib, mehnat sarfini kamaytiradi, hamda rejaning har xil variantlarini tuzishni ixchamlashtiradi. Bundan tashqari har xil iqtisodiy ko'rsatkichlar orasidagi bog'liqlikni tekshirishni osonlashtiradi. Bu holatlar matritsalarini umumiy holda qarashga olib keladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramar usuli qanday kiritiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli qanday kiritiladi?

8-Ma'ruza. Ketma-ketlik va funktsiya limiti. Uzluksizlik, uzilish turlari.
Ajoyib limitlar

REJA:

1. Funktsiya limiti va uzluksizligi.
2. Uzilish turlari.
3. Uzluksiz funktsiyalarning xossalari (Ajoyib limitlar.)

Tayanch iboralar: limit nuqta, funktsiya uzluksizligi, argument ortirmasi, funktsiya orttirmasi, funktsiyani o'ngdan (chapdan) uzluksizligi, tekis uzluksizlik, funktsiyani uzulish nuqtasi, birinchi tur uzulish, ikkinchi tur uzulish.

1. Funksiya limiti va uzluksizligi ta'riflari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plam-ning limit nuqtasi bo'lsin. x_0 nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in X, x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlikni olib, funksiya qiymatlaridan iborat $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz.

3-ta'rif. (Geyne). Agar $n \rightarrow \infty$ da $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \in X, x_n \neq x_0$) bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n \rightarrow \infty$ da $f(x_n) \rightarrow b$ bo'lsa, b ga $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti** deyiladi va $x \rightarrow x_0$ da $f(x) \rightarrow b$ yoki

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

Eslatma. Agar $n \rightarrow \infty$ da

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \in X, x_n \neq x_0) \text{ va } y_n \rightarrow x_0 \quad (y_n \in X, y_n \neq x_0)$$

bo'ladigan turli $\{x_n\}, \{y_n\}$ ketma-ketliklar uchun $n \rightarrow \infty$ da $f(x_n) \rightarrow b_1, f(y_n) \rightarrow b_2$ bo'lib, $b_1 \neq b_2$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x \rightarrow x_0$ da limitga ega emas deyiladi.

Ba'zi aniqlashtirishlar limitini hisoblash.

1-misol. Ushbu $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ funksiyaning $x_0 = 4$ nuqtadagi limiti topilsin.

$$\blacktriangleleft \text{Quyidagi } \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4 \quad (x_n \neq 4, n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{ketma-ketlikni olaylik. Unda } f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n} \setminus$$

$$\text{bo'lib, } n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow 2 \text{ bo'ladi. Demak, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = 2. \blacktriangleright$$

4-ta'rif. (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilsaki, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti** deyiladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$.

3-misol. $f(x) = C = \text{const}$ ($C \in R$) bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ funksiyaning $x_0 = 1$ nuqtadagi limiti 2 ga teng ekani ko'rsatilsin.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ soniga ko'ra $\delta = \varepsilon$ deb olsak, u holda $|x - 1| < \delta$ ($x \neq 1$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x da

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$. ▶

5-misol. Faraz qilaylik, $X = R \setminus \{0\}$ da $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

bo'ladi.

◀ Ma'lumki, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ uchun

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan, funksiylarning juftligini hisobga olib, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ da

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

bo'lishini topamiz. Keyingi tengsizliklardan esa

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $\forall \varepsilon > 0$ ni olib, $\delta = \min\{\varepsilon; 1\}$ deyilsa, unda $\forall x, |x| < \delta, x \neq 0$ uchun

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \blacktriangleright$$

6-misol. Ushbu

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, \quad x \in R, \quad x_0 = 0$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ $a > 1$ bo'lgan holni qaraylik. Bu holda $f(x)$ funksiya qat'iy o'suvchi

bo'ladi:

$$\forall x_1, x_2 \in R, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2): \quad a^{x_1} < a^{x_2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ma'lumki, $n \rightarrow \infty$ da

$$a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1, \quad a^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

bo'lib, ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan

$$\exists n_1 \in N, \quad \forall n > n_1: \quad a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in N, \quad \forall n > n_2: \quad a^{-\frac{1}{n}} > 1 - \varepsilon$$

bo'ladi. Endi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, $\delta = \frac{1}{n_0}$ deyilsa, unda

$$\forall x, \quad |x - 0| < \delta \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n_0}$$

bo'lganda

$$a^{\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow |a^x - 1| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

$0 < a < 1$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ bo'lishini isbotlash o'quvchiga havola etiladi.



5-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$ uchun $f(x) > \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti $+\infty$ deb ataladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, ($x \neq 0$) funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 = +\infty$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

6-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ topilsaki, $\forall x \in X$, $x > \delta$ uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** $x_0 = +\infty$ **dagi limiti** deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

7-misol. Aytaylik, $X = (0, +\infty)$, $x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x}$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $\forall \varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ravshanki, $\forall x > 0$ uchun

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demak, $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ deyilsa, unda $\forall x > \delta$ uchun

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$$

bo'ladi. ►

8-misol. Faraz qilaylik,

$$f(x) = \frac{x^m}{a^x}, \quad a > 1, \quad m \in N, \quad X = R$$

bo'lsin. Unda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$$

bo'lishini isbotlaymiz.

◀ $\varepsilon > 0$ sonni olaylik. Ma'lumki, $n \rightarrow \infty$ da

$$\frac{(n+1)^m}{a^n} \rightarrow 0$$

bo'ladi. Unda

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 : \frac{(n+1)^m}{a^n} < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar $C = n_0$ deyilsa, unda $\forall x > C$ uchun

$$\left| \frac{x^m}{a^x} - 0 \right| = \frac{x^m}{a^x} < \frac{([x]+1)^m}{a^{[x]}} < \varepsilon$$

bo'ladi ($[x] \geq n_0 = C$). Demak, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$. ►

9-misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

munosabat isbotlansin.

4⁰. Funksiyaning o'ng va chap limitlari. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan, x_0 nuqta X ning chap limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0 - \gamma, x_0) \subset X \quad (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

7-ta'rif. Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa, b son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap limiti deyiladi va

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Biron oraliqda $f(x)$ funksiyani qaraylik. Bu oraliqqa tegishli bo'lgan x_0 nuqta uning limiti nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif 8. Agar $x \rightarrow x_0$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, bu limit $f(x_0)$ ga teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

bo'lsa u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ o'zgarmas son hamda $x \rightarrow x_0$ da $x - x_0 \rightarrow 0$ bo'lishini e'tiborga olib (1) tenglikni

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \rightarrow 0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

ko'rinishda yozamiz. Odatda $x - x_0$ ayirma argument ortirmasi deyiladi

$$\Delta x = x - x_0 \quad (2)$$

$f(x) - f(x_0)$ ayirma esa funksiya ortirmasi deyiladi va Δf yoki $\Delta f(x_0)$ kabi belgilanadi

$$\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \quad (3)$$

(2) tengsizlikdan topamiz: $x = x_0 + \Delta x$ Unda (3) tenglik ushbu

$$\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ko'rinishga keladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ortirmasi Δx bog'lik bular ekan. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, (1), (2), va (3) munosabatlardan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ kelib chiqadi. Bu esa funksiya uzluksizligini

quyidagicha ta'riflash xam mumkinligini ko'rsatadi.

Ta'rif 9. Agar argumentning x_0 nuqtadagi ortirmasi Δx nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning o'nga mos ortirmasi Δf nolga intilsa, ya'ni $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$ bo'lsa u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. Funksiya uzluksizligini quyidagicha ta'riflash xam mumkin.

Ta'rif 10. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda xam shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni konoatlantiruvchi barcha kiymatlarida

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflar ekvivalent ta'riflar bo'lib, vaziyatga qarab u yoki bu ta'rifdan foydalaniladi.

Ta'rif 11. Agar $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \right)$ bo'lsa u holda $f(x)$

funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Ta'rif 12. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lib, uning xar bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya X to'plamda uzluksiz deyiladi. Yo'qorida aytilganlar quyidagi xulosa kelib chikadi; agar $f(x)$ funksiya x_0 da nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda funksiya shu no'qtda xam chapdan uzluksiz bo'ladi va aksincha.

2. Funksiyaning uzulishi.

Biz yuqorida ko'rdikki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun:

1⁰. Uning shu x_0 nuqtaning biror atrofida (jumladan x_0 nuqtada) aniqlangan bo'lishi va

2⁰. $x \rightarrow x_0$ da o'ng va chap limitlarga ega bo'lib $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ bo'lishi zarur va etarli.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada 1⁰ va 2⁰ xossalardan xech bulmaganda birini bajarmasa, u holda funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega deyiladi.

Misol 1.

Ushbu $y = f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya uchun $x=0$ nuqtada yuqoridagi birinchi xossa bajarilmaydi. $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ bulgan holdagi x_0 nuqtadagi uzilish birinchi tur uzilish deyiladi. Bu holda $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

$F(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi boshqa uzilishlari $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$ holdan tashkari) ikkinchi tur uzilish deyiladi.

3-qism . Uzluksiz funksiyalarning xossalari.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X(X \subset R)$ to'plamda uzluksiz bo'lsa

$(f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, (g(x) \neq 0))$ funksiyalar xam X da uzluksiz bo'ladi.

$x = \varphi(t)$ funksiya $T \subset R$ to'plamda, $y = f(x)$ funksiya esa

$X = \{x : x = \varphi(t), t \in T\}$ to'plamda berilgan bo'lib ular yordamida $y = f(\varphi(t))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Agar $x = \varphi(t)$ funksiya $t \in T$ nuqtada, $y = f(x)$ funksiya mos x_0 nuqtada ($x_0 = \varphi(t_0)$) uzluksiz bo'lsa u holda $y = f(\varphi(t))$ murakkab funksiya t_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi .

Isbot. Funksiya uzluksizligi tarifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda xam shunday $\delta_1 > 0$ son topiladiki

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad (4)$$

Shuningdek, yuqoridagi $\delta_1 > 0$ son olinganda xam shunday $\delta > 0$ son topiladiki,

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta_1 \quad (5)$$

bo'ladi.

Agar $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| = |x - x_0|$, $|f(x) - f(x_0)| = |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))|$ ekanini etiborga olsak unda (4) va (5) munosabatlardek $|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon$ bo'lishini topamiz. Bu esa $f(\varphi(t))$ murakkab funksiyaning t_0 nuqtada uzluksizligini bildiradi.

3. Agar $y=f(x)$ funksiya x oraliqda aniqlangan, uzluksiz hamda manatom bo'lsa, u xloda bu funksiya qiymatlardan iborat $Y(Y = \{f(x) : x \in X\})$ oraliqda teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiya mavjud va u xam uzluksiz bo'ladi.

4. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib uning A va V nuqtalaridagi qiymatlari $f(a)$ va $f(b)$ karama-karshi ishorali bo'lsa u holda shunday S nuqtada ($a < c < b$) topiladiki $f(c)=0$ bo'ladi. (Boltsano-Koshi teoremasi)

5. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda chegaralangan ya'ni shunday o'zgarmas m va M sonlar topiladiki, $\forall x \in [a, b]$ da $m \leq f(x) \leq M$ bo'ladi. (Veyershtass teoremasi).

6. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda O'z-o'zini eng katta hamda eng kichik qiymatiga erishadi, ya'ni $[a, b]$ da shunday c_1 va c_2 nuqtalar topiladiki, $\forall x \in [a, b]$ da

$$f(c_1) \geq f(x), f(c_2) \leq f(x)$$

bo'ladi (Veyernitrass teoremasi).

$Y=f(x)$ funksiya x to'plamda berilgan bo'lsin.

Ta'rif 6. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda xam shunday $\delta > 0$ son topilsaki X to'plamning $|x' - x''| < \delta$ tengsizlikni konatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' nuqtalarida $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ funksiya X to'plamda tekiz uzluksiz deyiladi.

7. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi.

4. Elementar funksiylarning uzluksizligi.

$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$, darajali funksiya $\forall a \in \mathbb{R}$ nuqtada uzluksiz. $f(x) = \sin x$ funksiya $\forall a \in \mathbb{R}$ nuqtada uzluksiz. Haqiqatdan xam $\forall \varepsilon > 0$ ga ko'ra $\delta = \varepsilon$ deb olsak, $|x - a| < \delta$ tengsizlini qanotlantiruvchi barcha x larda

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|x-a|}{2} = |x-a| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chikadi.

Bu esa $f(x) = \sin x$ funksiyaning ta'rifiga ko'ra $\forall a \in \mathbb{R}$ nuqtada uzluksizligini bildiradi.

$f(x) = \cos x$ funksiya $\forall a \in R$ da uzluksiz.

$f(x) = \operatorname{tg} x$ funksiya $\forall a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k = 0, \pm 1, \dots)$ nuqtada uzluksiz

$f(x) = \operatorname{ctg} x$ funksiya $\forall a \neq k\pi, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ nuqtada uzluksiz

$f(x) = a^x (a \neq 1)$ ko'rsatkichli funksiya $\forall x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya x oraliqda berilgan uzluksiz va o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa bu funksiya qiymatalardan iborat.

$(Y = \{f(x) : x \in X\})$ oraliqda teskari $f^{-1}(y)$ funksiya mavjud bo'lib u uzluksiz va o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

7. $y = \arcsin x$ funksiyaning va uzluksizligini ko'rsatish uchun $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda

$y = \sin x$ funksiyaning karaymiz. Bu funksiya karalayotgan oraliqda o'suvchi va uzluksiz ekanini ravshan.

Demak bu funksiya uning qiymatlar to'plami $[-1, 1]$ oraliqda teskari funksiya mavjud bo'lib, u o'suvchi hamda uzluksiz bo'ladi.

Bu teskari funksiya $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$ orqali belgilanadi. u ni x orqali belgilash natijasida bu funksiya $y = \arcsin x$ ko'rinishda ifodalanadi.

5. Funktsiyalar limitini hisoblashda ulaning uzluksizligidan foydalanish

Faraz qilaylik, $x = \varphi(t)$ funksiya T to'plamda $y = f(x)$ funksiya esa $X = \{x : x = \varphi(t), t \in T\}$ to'plamda aniqlangan bo'lib ular Yordamida $y = f(\varphi(t))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Agar $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0$ limit mavjud bo'lib, $y = f(x) = f(\varphi(t))$ funksiya x_0

nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$ bo'ladi.

Keyingi limit munosabatni

$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\varphi(t)) = f(\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t))$ (6) ko'rinishda xam yozish mumkin. Bu

tenglikdan funksiyalarning limitni hisoblashda foydalaniladi.

Ajoyib limitlar.

Misol .1 . Ushbu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$ ($a > 0, a \neq 1$) limitni hisoblang

Avvalo limit ostidagi funksiyaning quyidagicha yozib olamiz

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Logarifmik funksiya uzluksiz bulganligi sababli (6) formulaga binoan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

Agar $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ekanini e'tiborga olsak, u holda $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ bo'lishini topamiz. Xususan, $a = e$ bo'lsa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ bo'ladi.

2. Ushbu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ ($a > 0, a \neq 1$) limitni xisoblang.

Avvalo $a^x - 1 = t$ deb olamiz. Unda $x = \log_a(1+t)$ bo'ladi. Ravshanki, $x \rightarrow 0$ da $t \rightarrow 0$.

Natijada $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)}$ tenglikka kelamiz. Yuqoridagi tenglikdan foydalanib topamiz. * $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\log_a e}$.

Ma'lumki, $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$. Demak, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ bo'ladi.

9-ma'ruza. Funktsiya Hosilasi. Hosilaning geometrik, iqtisodiy va mexanik ma'nolari. Hosila Hisoblash qoidalari. Hosilalar jadvali.

Reja:

1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida.
2. Funktsiya hosilasining ta'rifi.
3. Elementar funksiyalarning xosilalari.
4. Hosilaning geometric ma'nosi.

1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida

Oniy tezlik haqidagi masala. Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo'ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma'lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o'zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o'tilgan yo'lning shu yo'lni o'tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o'zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko'pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og'ir moddiy nuqtaning bo'shliqda og'irlik kuchi ta'sirida erkin tushishi masalasini qaraylik. Fizikadan ma'lumki, bo'shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2}t^2 \quad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu erda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o'tgan yo'l, g erkin tushish tezlanishi, $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$. Bu harakat notekis bo'lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo'lsin. OA yo'lning miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya'ni $t + \Delta t$ orttirma qabul qiladi. $t + \Delta t$ momentda nuqta B holatda bo'ladi. AB , vaqt Δt orttirma olgandagi yo'l orttirmasi, uni $AB = \Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t + \Delta t$ qo'yib,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2, \quad \text{bundan} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{yoki} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2).$$

Oxirgi tenglikni Δt ga bo'lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t) \quad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma'lumki, $\Delta S / \Delta t$ nisbat t va Δt ga bog'liq. Masalan: $\Delta t = 0,1$ sek, $t = 1$ sek bo'lganda,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 1 + 0,1) = 1,05g \text{ bo'lib, } t = 3 \text{ sek bo'lganda}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0,1) = 3,05g \text{ bo'ladi.}$$

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo'ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi oniy tezlik haqida gapirish kerak bo'ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma'lumki, t o'zgarmas bo'lganda, $\Delta S / \Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o'rtacha tezlik bo'lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma'lumki, Δt qancha kichik bo'lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o'rtacha tezlikning $\Delta t \rightarrow 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya'ni

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo'yidagi ko'rinishdagi limitni hisoblash kerak bo'ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (3)$$

(3) ko'rinishdagi limitni hisoblashga ko'p sondagi amaliy masalalarni yechishda to'g'ri keladi.

Umuman, o'zgaruvchi miqdor o'zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Shuning uchun (3) ko'rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo'ladi.

2. Funksiya hosilasining ta'rif. 1-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo'lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Bu limit

$$y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'ladi, bu limit mavjud bo'lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni differentiallashtirish deb ataladi.

Biz o'rganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflanmasin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

Chunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori bo'lsa, demak Q τ ning funksiyasi bo'ladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror o'tkazgich kesim yuzidan vaqt birligida o'tayotgan elektr miqdori bo'lsa, Q hosila tok kuchining o'zgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning o'zgaruvchi temperaturasi tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga asosan topishga bir necha misollar qaraymiz:

1-misol. $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila ta'rifiga asosan toping.

Yechish. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni hisoblaymiz.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

Shunday qilib, $y' = 3x^2$.

2-misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila ta'rifiga asosan, toping.

Yechish. argument x , Δx orttirma olganda, funksiya Δy orttirma oladi.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos(x + \Delta x / 2) \sin \Delta x / 2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)};$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \partial a \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x. \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x / 2)}{(\Delta x / 2)} = 1.$$

$$\text{Shunday qilib,} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x, \quad y' = (\sin x)' = \cos x$$

bo`ladi.

Umuman, x va y o`zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma`nolaridan voz kechsak, y dan x bo`yicha olingan hosila,  $y$  ning  $x$  ga bog`liq bo`lib o`zgarishining tezligini ifodalaydi.

4. Hosilaning geometrik ma`nosi. Hosila muhim geometrik ma`noga ega. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0, f(x_0))$ nuqtada o`tkazilgan urinmaning  $OX$  o`qining musbat yo`nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng.  $y = f(x)$  egri chiziqqa  $M_0(x_0, y_0)$  nuqtadan o`tkazilgan urinma tenglamasi

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

bo`ladi, bunda  $y_0 = f(x_0)$ . Funksiya grafigiga urinish nuqtasi  $M_0(x_0, y_0)$  da o`tkazilgan normalning tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), (f'(x_0) \neq 0)$$

bo`ladi.

3-misol. $y = \frac{x^3}{3} + 4$ egri chiziqqa abstsissasi $x_0 = 2$ nuqtada o`tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

$$\text{Yechish.} \quad y_0 = \frac{20}{3}, \quad y'(2) = 2^2 = 4, \quad y - \frac{20}{3} = 4(x - 2)$$

yoki

$3y - 20 = 12(x - 2)$, $12x - 3y - 4 = 0$, bu $M_0(2, 20/3)$ nuqtadan o'tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffitsienti

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{4}, \quad \text{demak,} \quad y - \frac{20}{3} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

yoki

$$12y - 80 = -3(x - 2), \quad 3x + 12y - 86 = 0$$

bo'lib, bu M_0 nuqtadan o'tkazilgan normalning tenglamasi bo'ladi.

Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali

1). Agar $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, ya'ni $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya bo'lsa, $y = f(u)$ funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha hosilasi

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

bo'ladi.

Agar $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ lar o'zaro teskari funksiyalar bo'lsa,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo'ladi.

2). Murakkab funksiya uchun hosilalar jadvali quyidagicha bo'ladi:

$$1) (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad n \in R, \quad u > 0;$$

$$2) (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$$

$$3) (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$4) (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$$

$$5) (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$6) (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$7) (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$8) (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$9) (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$10) (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$11) (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$12) (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$13) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$14) (u^v)' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Funksiya uzluksizligi ta'rifi.
2. Funksiyaning uzilishi.
3. Uzilish turlari.
4. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar .

10-ma'ruza. Differentsial. Differentsiallashtirish jadvali va hisoblash qoidalar.

Hosila tushunchasining iqtisoddagi tadbirlari.

Yuqori tartibli Hosila.

R E J A:

1. Yuqori tartibli hosila
2. Funksiya differentsial va uni geometrik ma'nosi.
3. Funksiya differentsialini xossalari.
4. Murakkab funktsiyaning differentsiali. Differentsial formasini invariantligi.
5. Funksiya differentsialini taqribiy hisobga tadbiri.

Yuqori tartibli xususiy hosilalar

Ikki uzgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilasi topilgandan so'ng xam ikki uzgaruvchili funktsiyasidan iboratdir. Bu funktsiya yana xususiy hosilaga egadir. Bu hosilani ikkinchi tartibli xususiy hosila deb ataladi:

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \quad \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

Xuddi shu kabi uchinchi tartibli xususiy hosilani topamiz. Buning uchun ikkinchi tartibli xususiy hosiladan yana bir marta hosila topiladi. Chunki, eki bir necha noma'lum buyicha olingan xususiy hosilalarni aralash deyiladi.

Uchinchi tartibli aralash hosilalar quyidagi kurinishga egadir:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xyx}(x, y); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f'''_{xyy}(x, y); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = f'''_{xyx}(x, y);$$

Teorema: Bitta funksiya uchun aralash xususiy hosila uchun, agar ular hosila olish tartibiga fark kilsa, ular uzaro tengdir.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

1. $y=f(x)$ funksiya $x=x$ nuqtada hosilga ega bo'lsin.

bu holda bu erda $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, agar $\Delta x \rightarrow 0$.

Demak, $\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$ Funksiya orttirmasini ikkita yigindi shaklda ifodalanadi. Birinchi yigindi. $f'_x(\Delta x)$ va Δx lar nolga bir xil tartibda intiladi, Δx nisbatan chizikli buladi, bu kismga funksiya orttirmasini bosh kismi deb Yuritiladi.

Ikkinchi yigindi, esa $\Delta x \rightarrow 0$ da Δx ga nisbatan tezrok intiladi, ya'ni Yo'qori darajali cheksiz kichik funksiya.

Demak, funksiya $x=x$ nuqtadagi orttirmasini Δx nisbatan chizikli bosh kism va Δx nisbatan Yo'qori darajali cheksiz kichik kushiluvchilar sifatida ifodalash mumkin bo'lsa, ya'ni

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$$

($A - \Delta x$ ga boglik bulmagan son, $\alpha(\Delta x) \Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$) Bu muloxazalardan quyidagi xulosaga kelamiz: Agar $f(x)$ funksiya $x=x$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, $x=x$ nuqtada differentsiallanuvchi buladi: $A = f'(x)$.

Agar $f(x)$ funksiya $x=x$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, $x=x$ nuqtada hosilaga ega buladi. Xakikatdan xam, $x=x$ nuqtada differentsiallanuvchi u holda,

$$\Delta y = \Delta x + \alpha(x) \Delta x, \alpha(\Delta x) \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$$

Demak, $x=x$ nuqtada funksiya differentsiallanuvchi va $x=x$ nuqtada funksiya hosilaga ega, tushunchalar ekvivalent tushunchalardan iboratdir.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x=x$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsin. $F(x)$ funksiyaning $x=x$ nuqtadagi differentsiali deb, uning orttirmasini Δx nisbatan bosh kismga aytiladi.

$Y=f(x)$ funksiyaning differentsiali dy Yoki $df(x)$ deb belgilanadi. Demak,

$$dy = f'(x) \Delta x$$

$\Delta u - dy = \alpha(\Delta x) \Delta x$ - cheksiz kichik, Δx ga nisbatan. Agar $u=x$ bo'lsa

$$dy = (x)' \Delta x = \Delta x \text{ teng.}$$

Erkli o'zgaruvchini differentsiali uning orttirmasiga teng.

$$U \text{ 'olda} \quad dy = f'(x) dx \quad dx = \Delta x \quad (1)$$

Shunday kilib $f(x)$ funksiyaning $x=x$ nuqtadagi hosilani erkli o'zgaruvchining kupaytmasiga teng ekan. (1) tenglikdan

ekanligi kelib chiqadi.

Demak, funksiyaning hosilasi uning differentsiallanuvchi erkli o'zgaruvchining differentsialiga nisbatan teng ekan.

$u=f(x)$ funksiyaning grafigini qaraylik. ΔMKL dan

$$KL = dy = \Delta y = f'(x) \Delta x \text{ Yoki } dy = y' \Delta x$$

Demak, $u=f(x)$ funksiyaning $x=x$ nuqtadagi differentsiali urinmaning ordinatasining orttirmasiga teng ekan.

2. Funksiya differentsialini xossalari.

$U=U(x)$ va $\varphi=\varphi(x)$ funksiyalar differentsiallanuvchi bo'lsin.

Xususiylashtirish holda: $d(Cu) = Cdu$

3. Murakkab funksiyaning differentsiali.

Aytaylik $u=f(x)$, $x=t$, ya'ni u erkli o'zgaruvchi t ning murakkab funksiyasidan iborat, x - oraliq argument, $x=t$ nuqtada $u=f(x)$, funksiya $x=x$ nuqtada ($t=t$ mos keluvchi) differentsiallanuvchi bo'lsin.

U 'olda $u=f(t)$ murakkab funksiya $t=t$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'ladi.

U 'olda $dy = y'_t dt$, murakkab funksiyaning differentsiallashtirish qoidasiga asosan $y'_t = y'_x x'_t$ Demak, chunki $dx = x'_t dt$ $x=t$ bo'lgan $u=f(x)$ murakkab funksiyaning differentsiali argument x erkli o'zgaruvchi bo'lgandagi kabi $dy = f'(x) dx$ ko'rinishga ega.

Bu xossaga differentsialning invariant formasi deyiladi.

(Bu erda shuni eslatib o'tish kerakki, agar x erkli o'zgaruvchi bo'lsa, $\Delta x = dx$, agar

x boshqa o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, $dx \neq \Delta x$, differentsialni invariantligi saqlanmaydi). (1) formuladan hosila uchun $f'(x)$ ifoda x argument erkli o'zgaruvchi bo'lmaganda ham o'z ko'rinishini saqlashi kelib chiqadi.

4. Funktsiya differentsialini tqribiy 'isobga tadbiqi.

Funksiya differentsialini taorifidan

$dy = f'(x) \Delta x$ -yaoni funksiya orttirmasini bosh qismidan iborat.

Ayrim masalalarni echishda $\Delta u \approx dy$ deb olinadi. ($f'(x) \Delta x \neq 0$ -qaralayotgan nuqtada.)

Bu 'olda absolyut xato

$A = |\Delta y - dy|$ ga teng.

Nisbiy xato.

ga teng.

$y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi qiymati va hosilasini qiymati noma'lum bo'lsin, U holda $x = x + \Delta x$ nuqtadagi qiymatini

$$f(x) \Delta x \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

11-ma'ruza. Aniqmas integral. Aniqmas integral jadvali. O'zgaruvchilarni almashtirish va bevosita integrallash. Ko'p uchraydigan integrallar

Reja:

1. Boshlang'ich funksiya va uning xossasi.
2. Aniqmas integral va uning xossalari.
3. O'zgaruchilarni almashtirib integrallash.
4. Bo'laklab integrallash qoidasi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integrallash, aniqmas integral xossalari, asosiy integrallar jadvali, o'zgaruchilarni almashtirib integrallash, bo'laklab integrallash qoidasi.

1. Boshlang'ich funksiya va uning xossasi. Ma'lumki matematikada amallar juft-juft bo'lib uchray keladi. Jumladan, qo'shish va ayirish, ko'paytirish va bo'lish, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini topishga yoki differensiallash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug'iladi.

Differensial hisobda funksiya berilgan bo'lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to'g'ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo'lsin. Ma'lumki, bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich (dastlabki) funksiyasi deyiladi.

Masalan, $y = f(x) = x^4$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ bo'ladi, chunki $F'(x) = (\frac{x^5}{5})' = x^4 = f(x)$ bo'ladi.

2. Aniqmas integral va uning xossalari. Ta'rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $F(x) + C$ (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas) funksiyalar to'plami shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bilan belgilanadi. Bu erda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o'zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang'ich funksiyalari to'plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas integralning xossalari:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differensial

esa integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{va} \quad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$f'(x)dx = f(x) + C \quad \text{va} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

Haqiqatan, 1-xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo'ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o'quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) $\int Kf(x)dx$ ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni $K = \text{const} \neq 0$ bo'lsa,

$$\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiylar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiylar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x) dx.$$

Asosiy integrallar jadvali. Berilgan funksiya asosan uning boshlang'ichini topish, berilgan funksiyaning differensiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differensial hisobda asosiy elementar funksiylarning, yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hamda murakkab funksiylarning hosilasini topishni o'rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiylarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiylarni integrallashda esa differensiallashdagidek umumiy qoidalar yo'q. masalan, ikkita elementar funksiylar boshlang'ichlarining ma'lum bo'lishiga qaramasdan, ular ko'paytmasining, bo'linmasining boshlang'ichini topishda aniq bir qoida yo'q.

Integrallashda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo'ladi. Funksiyaning integrallash

ya'ni boshlang'ich funksiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko'rsatadiki, ular yordamida ko'p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi asosiy integrallar jadvalini yoddan bilish zarur.

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad 2) \int dx = x + C; \quad 3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 6) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1); \quad 8) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad 10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$11) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C; \quad 12) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \ln x + \sqrt{x^2 - k} + C.$$

Bu formulalarning to'g'riligini, tekshirish tengliklarning o'ng tomonidagi ifodalar differensial integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko'rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

Integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 4 va 3 xossalariga asosan,

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \int x^3 dx + 5 \int \sin x dx - 9 \int dx$$

bo'ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1, \quad 5 \int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2), \quad -9 \int dx = -9(x + C_3). \quad \text{Demak,}$$

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3).$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o'zining ixtiyoriy o'zgarmasini qo'shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o'zgarmasni qo'shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o'zgarmalar bo'lsa,

$C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o'zgarmas bo'ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + C.$$

Integralning to'g'ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o'ng tomonini differensiallash bilan ko'rsatish mumkin. (buni bajarishni o'quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} \right) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} \right) dx &= \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{3} \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C \end{aligned}$$

bo'ladi.

3-misol. $\int \frac{3 dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) hossalariidan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int \frac{3dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 3 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + 3$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) + C.$$

4-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Jadvaldagi 9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Bu usul bilan integrallash bevosita integrallash deyiladi.

1. Misol: $\int \frac{dx}{3-x} = -\ln|3-x| + c$

2. Misol: $\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + c$

O'zgaruvchini almashtirish. Ko'p hollarda yangi o'zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x) = t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o'zgaruvchi bo'lib, o'zgaruvchi bo'lib, o'zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

ko'rinishda bo'ladi.

O'zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz :

1-misol. $\int (3x+1)^7 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x+1=t$ deb $3dx=dt$ yoki $dx=\frac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int (3x+1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x+1)^8}{24} + C$$

bo'ladi.

2-misol. $\int \sqrt[3]{1+x^2} x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $1 + x^2 = t$ o'zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2x dx = dt$ yoki $x dx = \frac{dt}{2}$ bo'lib,

$$\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1+x^2} + C$$

bo'ladi.

3-misol. $\int \cos mx dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $dx = \frac{1}{m} d(mx)$ o'zgartirish olib,

$$\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \int \cos mx d(mx) = \frac{1}{m} \sin mx + C$$

natijaga ega bo'lamiz. Bunday integrallashga bevosita integrallash deyiladi. Chunki $mx = t$ bilan o'zgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda o'zgaruvchini almashtirib o'tirmasdan uni fikrda bajardik.

4-misol. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x = t$ bilan yangi o'zgaruvchini almashtirib, $\frac{dx}{x} = dt$

ekanligini hisobga olsak,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

bo'ladi.

Шундай қилиб, оддий ҳолларда

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax + b), \dots$$

тенгликлардан фойдаланиб, ўзгарувчини алмаштиришни фикрда бажариб, бевосита интеграллаш ҳам мумкин.

Bo'laklab integrallash.

Bu usul ikki funksiyaning ko'paytmasini differentsiallash formulasidan kelib chiqadi. Faraz qilaylik, $u(x)$ va $v(x)$ lar x ning differentsiallanuvchi funksiyalari bo'lsin. Bu funksiyalar kupaytmasining differentsialini topamiz:

$$d(uv) = vdu + udv$$

bundan $udv = d(uv) - vdu$

Oxirgi tenglikning ikkala kismini integrallab, quyidagini topamiz:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

yoki

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Bu formulaga bulaklab integrallash formulasi deyiladi.

Ushbu I $\int x^m \sin x \, dx$; $\int x^m \cos x \, dx$; $\int x^m e^x \, dx$

tipdagi integrallar uchun $x^m = u$ qolgan ko'paytuvchilar dv belgilash qulaydir

II $\int x^m \ln x \, dx$; $\int x^m \arcsin x \, dx$; $\int x^m \arccos x \, dx$;

$\int x^m \arctg x \, dx$; $\int x^m \operatorname{arccotg} x \, dx$;

tipdagi integrallar uchun transtsendent ko'paytuvchi – u qolgan ko'paytuvchilar – dv deb belgilash qulaydir

III. $\int e^{ax} \sin bx \, dx$; $\int e^{ax} \cos bx \, dx$

tipdagi integrallar uchun qolgan ko'paytuvchilar $e^{ax} = u$, $\cos bx = dv$ deb olish qulaydir.

$$\text{Misol: } \int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \\ du = dx/x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot (1/x) \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

12-ma'ruza. Aniq integral, xossalari. Egri chiziqli trapetsiya yuzi. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralda integrallash usullari.

Reja:

1. Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida.
2. Aniq integralning ta'rifi va uning geometrik ma'nosi.
3. Aniq integralning asosiy xossalari.
4. Aniq integralni hisoblash. N'yuton-Leybnits formulasi.

Tayanch ibora va tushunchalar.

O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi, aniq integral, integral yig'indi, funksiyaning integrallanuvchanligi, aniq integralning asosiy xossalari, aniq

integralning kattaligi, N'yuton-Leybnits formulasi, aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish, bo'laklab integrallash.

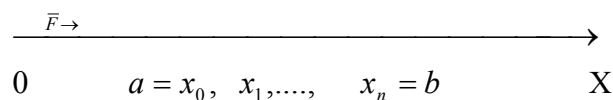
1. Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida. Aniq integral matematik tahlilning eng asosiy amallaridan biridir.

Yuzalarni, yoy uzunliklarini, hajmlarni, o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hamda iqtisodning bir qancha masalalari aniq integralga keltiriladi.

O'zgaruvchan kuchning bajargan ishi masalasi

Masala. Material nuqta F o'zgaruvchan kuch ta'sirida OX o'qi bo'yicha harakatlanayotgan bo'lsin. F kuch ta'sirida material nuqta a nuqtadan b nuqtaga o'tganda bajarilgan ishni hisoblang. F kuch x ning funksiyasi bo'ladi. $F(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin.

Yechish: $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar orqali $[x_{i-1}, x_i]$ qisman kesmalarga ajratamiz.



1-chizma.

Mexanikadan ma'lumki kuch o'zgarmas bo'lsa, bajarilgan ish $A = F \cdot l$, bunda F kuch miqdori, l - siljish uzunligi. Har bir qisman kesmada bittadan nuqta tanlaymiz. Bu nuqtalardagi kuchning qiymatini $F(c_i)$ larni hisoblaymiz ($i = 1, n$). Bunda har bir qisman kesmada bajarilgan ish

$$A_i = F(c_i) \Delta x_i$$

bo'ladi. $[a, b]$ kesmada bajarilgan ish taqriban

$$A \approx \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i$$

bo'ladi.

$\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ deb belgilasak, bajarilgan ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i \quad (1)$$

bo'ladi.

Shunday qilib, F o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash uchun (1) ko'rinishdagi cheksiz ko'p sonli cheksiz kichiklar yig'indisining limitini hisoblash kerak ekan. Bunday limitni hisoblashga juda ko'p sonli geometrik, texnik, texnologik va iqtisodiy jarayonlardagi masalalar keltiriladi.

2. Aniq integralning ta'rif va uning geometrik ma'nosi. Yuqoridagi masalani umumiy holda qaraymiz. kesmada uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. $[a, b]$ kesmani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, n$ qisman kesmalarga ajratamiz, har bir qisman kesmada bittadan $c_1, c_2, \dots, c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda $f(c_i)$ funksiya qiymatlarini hisoblab $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n$ yig'indini tuzamiz? bu yig'indiga $y = f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmadagi integral yig'indi deyiladi. $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash kiritamiz.

Ta'rif. $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ integral yig'indining $[a, b]$ kesmaning $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) qisman kesmalarga bo'linish usuliga va ularda $c_1, c_2, \dots, c_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \rightarrow 0$ dagi chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi aniq integrali deyiladi va

$$\int_a^b f(x) dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

bo'lib, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u integrallanuvchi ya'ni bunday funksiyaning aniq integrali mavjuddir.

3. Aniq integralning asosiy xossalari
Aniq integral quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) chekli sonli integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq

integrali qo`shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig`indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx;$$

2) o`zgarmas ko`paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx;$$

3) $[a, b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo`lsa,

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

bo`ladi;

4) $[a, b]$ kesmada $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

bo`ladi;

5) $c \in [a, b]$ kesmadagi biror nuqta bo`lsa,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

tenglik o`rinli bo`ladi;

6) m va M sonlar $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo`lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

tenglik o`rinli bo`ladi;

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$4. \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$4. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn$$

bo`ladi;

10) $y = f(x)$ $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo`lsa, bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi. Bunga o`rta qiymat haqidagi teorema deb ham aytiladi.

4. Aniq integralni hisoblash. N'yuton-Leybnits formulasi.

Aniq integralning ta'rifiga asosan, ya'ni cheksiz ko`p sondagi cheksiz kichiklar yig`indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog`lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x), [a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang`ich funksiyalaridan biri bo`lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2)$$

formula o`rinli bo`lib, bunga N'yuton-Leybnits formulasi deyiladi. Bundan foydalanib aniq integralning kattaligi hisoblanadi.

Shunday qo`yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang`ich funksiyanı topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to`laroq shug`ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o`z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

1-misol. $\int_1^4 x^2 dx$ integralni hisoblang.

$$\text{Yechish. } \int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang'ich funksiyasini oldik,

buning o'rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3} + C$ boshlang'ich funksiyasini olganda ham natija

bir xil bo'ladi. Haqiqatan, ham

$$\left(\frac{x^3}{3} + C \right) \Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

bo'ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo'lgan boshlang'ich funksiyaningni olamiz.

2-misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4} dx$ integralni hisoblang:

Yechish; $\sqrt{x+4} = t$ almashtirish olamiz, $x = t^2 - 4$, $dx = 2tdt$ bo'lib,

$x = 0$ bo'lganda, $\sqrt{0+4} = t$, $t = 2$, $\sqrt{5+4} = t$, $t = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\begin{aligned} \int_0^5 x\sqrt{x+4} dx &= \int_2^3 (t^2 - 4)t \cdot 2tdt = \int_2^3 (2t^4 - 8t^2) dt = 2 \int_2^3 t^4 dt - 8 \int_2^3 t^2 dt = 2 \frac{t^5}{5} \Big|_2^3 - 8 \frac{t^3}{3} \Big|_2^3 = \\ &= \frac{2}{5} (3^5 - 2^5) - \frac{8}{3} (3^3 - 2^3) = \frac{2}{5} \cdot 211 - \frac{8}{3} \cdot 19 = \frac{506}{15} = 33 \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

Demak, aniq integralda o'zgaruvchini almashtirilganda o'zgaruvchilar bo'yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o'zgaruvchiga qaytish kerak emas.

3-misol. $\int_0^\pi x \sin x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: Bo'laklab integrallash

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

formulasi

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos \pi + \sin x \pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin \pi - \sin 0 = \pi.$$

dan foydalanamiz:

13-maruza. Qatorlar. Musbat hadli qatorlarning yaqinlashuvshi alomatlari. Solishtirish, Dalambert, Koshi va Koshining integral alomatlari. Leybnits qatori. Absolyot va shartli yaqinlashuv. Darajali qatarlar..

Reja:

1. Sonli qatorlar
2. Musbat hadli qatorlarning yaqinlashuvshiligi
3. Taqqoslash alomati. Koshi, Dalambert alomatlari

Agar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ cheksiz haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsa, ulardan tuzilgan ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

ifodaga cheksiz qator (qisqacha-qator) deyiladi.

Qator qisqacha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ko'rinishda ham yoziladi.

Masalan, agar $a_n = \frac{1}{2^n}$ bo'lsa, u holda qator $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ ko'rinishda bo'ladi.

Endi quyidagi yig'indilarni tuzaylik:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots \quad (2)$$

(2) yig'indilarga qatorning xususiy (yoki qisman) yig'indilari deyiladi.

Ta'rif. Agar (1) qatorning n -xususiy yig'indisi s_n , $n \rightarrow \infty$ da $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ chekli limitga ega bo'lsa, u holda (1) qatorga yaqinlashuvchi qator deyilib s ga esa uning yig'indisi deyiladi va $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rif. Agar $n \rightarrow \infty$ da (1) qatorning n -xususiy yig'indisi s_n ning limiti cheksiz bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda (1) qator uzoqlashuvchi deyiladi.

$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ (3) geometrik progressiya faqat $|q| < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'lib, $|q| \geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Qator yaqinlashuvining zaruriy sharti:

Teorema. Agar $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning n -hadi n cheksizlikka intilganda nolga intiladi ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Eslatma. Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, albatta $n \rightarrow \infty$ da uning n -hadi nolga intiladi ya'ni $a_n \rightarrow 0$ bo'ladi. Agar $n \rightarrow \infty$ da qatorning n -hadi nolga intilmasa qator albatta uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $n \rightarrow \infty$ da qatorning n -hadi nolga intilsa ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ bo'lsa, bu qatorning yaqinlashishining muqarrarliligi kelib chiqmaydi.

Masalan. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

garmonik qator deb ataluvchi qatorning $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bo'lgani bilan bu qator uzoqlashuvchi. Buning uzoqlashuvchi ekanligini keyinroq Koshining integral alomati yordamida isbotlanadi.

Agar $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ qatorning hamma hadlari manfiy bo'lmagan sonlardan iborat bo'lsa, bunday qatorga musbat hadli qator deyiladi.

Musbat hadli qatorlarning yaqinlashishining etarli shartlarini ko'rib o'taylik.

1-teorema. (Birinchi taqqoslash alomati).

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \quad (4)$$

musbat hadli qatorlar berilgan bo'lib biror $n > N$ nomerdan boshlab $a_n \leq b_n$ (*)

tengsizlik bajariladigan bo'lsa, (4) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishligidan (1) qatorning yaqinlashuvchiligi yoki (1) qatorning uzoqlashuvchi bo'lishligidan (4) qatorning ham uzoqlashuvchi bo'lishligi kelib chiqadi.

Misol. $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots$ va

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots$$
 qatorlar berilgan bo'lsin.

Ravshanki

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n = b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ qator yaqinlashuvchi, demak}$$

1-teoreмага ko'ra birinchi qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2-teorema (Ikkinchi taqqoslash alomati)

Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k < \infty$ limit mavjud bo'lsa, u holda (1) va (4) qatorlar bir vaqtda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

Misol. $\sin 1 + \sin \frac{1}{2} + \dots + \sin \frac{1}{n} + \dots$ qatorni $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ qator bilan taqqoslaymiz.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \text{ nisbatni ko'ramiz. Ma'lumki, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1. \text{ Demak, berilgan}$$

qator uzoqlashuvchi.

3-Teorema. (D'alamber alomati). Agar $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ (1) qatorning $(n+1)$ -hadining n -hadiga nisbatan $n \rightarrow \infty$ da chekli limitga ega

bo'lsa, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ bo'lsa, u holda

- 1) $l < 1$ da qator yaqinlashadi;
- 2) $l > 1$ da qator uzoqlashadi.

Misol. Qatorni yaqinlashuvchiligini tekshiring:

$$\frac{2}{1^2} + \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^3}{3^2} + \dots + \frac{2^n}{n^2} + \dots$$

echish. Ma'lumki, $a_n = \frac{2^n}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1$$

Misol. Berilgan qatorni yaqinlashuvchiligini tekshiring:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{(\sqrt{2})^2} + \frac{5}{(\sqrt{2})^3} + \dots + \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} + \dots$$

echish. $a_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, $a_{n+1} = \frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Demak , qator yaqinlashuvchi.

4-Teorema. (Koshi alomati). Agar musbat hadli $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

qator uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ chekli limit mavjud bo`lib

1) $l < 1$ bo`lsa qator yaqinlashadi;

2) $l > 1$ bo`lsa qator uzoqlashadi.

Misol. Berilgan qatorni yaqinlashuvchiligini tekshiring:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \dots + \frac{1}{\ln^n(n+1)} + \dots$$

echish. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} = \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$

Demak , qator yaqinlashuvchi.

Misol. $\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \left(\frac{4}{3}\right)^9 + \dots + \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} + \dots$ qatorni yaqinlashuvchiligini

tekshiring.

echish. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$

qator uzoqlashuvchi.

5-Teorema (Koshining integral alomati). Bizga hadlari o`smaydigan

$$(a_n \geq a_{n+1}) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

musbat hadli qator va uzluksiz o`smaydigan ( $x \rightarrow \infty$  da  $f(x) \rightarrow 0$ ) monoton kamayuvchi  $f(x)$  funktsiya berilgan bo`lib

$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$ bo'lsa, u holda (1) qatorning yoki

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\int_1^{\infty} f(x) dx$

xosmas integralning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va kifoya.

Misol. Umumlashgan garmonik qator deb ataluvchi

$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ qatorni yaqinlashuvchanlikka tekshiring.

echish $a_1 = f(1) = 1, a_2 = f(2) = \frac{1}{2^p}, \dots, a_n = f(n) = \frac{1}{n^p}, \dots$ va $f(x) = \frac{1}{x^p}$

ekanligi ravshan, bu erda r-haqiqiy son.

Ushbu $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \lim_{n \rightarrow \infty} x^{-p+1} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{1-p} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{1-p} - 1) \quad (p \neq 1)$

xosmas integralni hisoblaymiz.

Agar $r > 1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-p} = 0$ va $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$ yaqinlashuvchi;

Agar $r < 1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-p} = \infty$ va $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ uzoqlashuvchi;

Agar $r = 1$ bo'lsa, u holda $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$ uzoqlashuvchi.

Shu sababli umumlashgan garmonik qator

$r > 1$ bo'lsa yaqinlashuvchi,

$r < 1$ bo'lsa uzoqlashuvchi va

$r = 1$ bo'lsa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \quad (5)$$

ko'rinishdagi qatorga ishoralari navbat bilan almashib keladigan qatorlar deyiladi.

Bu erda $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ musbat sonlar.

Teorema (Leybnits teoremasi). Agar ishorasi almashinib keluvchi

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$ qatorda

1) Qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi, ya'ni

$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots > u_n > \dots$ bo'lsa,

2) Qator umumiy hadi u_n $n \rightarrow \infty$ da nolga intilsa: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

u holda (5) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misol. $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$ qatorning yaqinlashuvchanligini

tekshiring.

echish. $\frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \frac{1}{4^2} > \dots > \frac{1}{(n+1)^2} > \dots$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$.

Demak, qator yaqinlashuvchi.
Ixtiyoriy hadli qatorlar:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots \quad (6)$$

Qatorning cheksiz ko'p musbat va cheksiz ko'p manfiy hadlari bo'lsa, u holda bu qatorga o'zgaruvchan ishorali qator yoki ixtiyoriy hadli qator deyiladi.

(6) qator hadlarining absolyut qiymatlaridan

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \dots + |u_n| + \dots \quad (7) \quad \text{qatorni tuzaylik.}$$

Teorema. Agar (7) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (6) qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ta'rif. (6) va (7) qatorlar bir paytda yaqinlashuvchi bo'lsa, (6) qatorga absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Ta'rif. Agar (6) qator yaqinlashuvchi bo'lib (7) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan (6) qatorga shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

Misol. Quyidagi qatorni ko'raylik:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

Leybnits alomatiga ko'ra bu qator yaqinlashuvchi, lekin qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator esa uzoqlashuvchi. Demak, qator shartli yaqinlashuvchi.

Misol. Quyidagi qatorni ko'ramiz:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots$$

echish. Bu qator absolyut yaqinlashuvchidir, chunki uning hadlari absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchidir ($r=2>1$).

Misol. O'zgaruvchan ishorali

$$\frac{\sin \alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

Qatorning yaqinlashishini tekshiring, buerda α -ixtiyoriy haqiqiy son.

echish. Berilgan qator bilan birga

$$\left| \frac{\sin \alpha}{1^2} \right| + \left| \frac{\sin 2\alpha}{2^2} \right| + \dots + \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| + \dots$$

qatorni qaraymiz. Bu qatorni yaqinlashuvchi

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad \text{qator bilan taqqoslaymiz.}$$

$$\text{Ravshanki, } \left| \frac{\sin n\alpha}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad n=1,2,\dots$$

Shu sababli taqqoslash alomatiga ko'ra absolyut hadli qatorlar yaqinlashuvchi. U holda yuqorida isbotlangan teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

14-maruza. Differentsial tenglamalar. Differentsial tenglamalarga keladigan biologic masalalar. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar. Uzgaruvshilari ajraladigan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar.

REJA:

1. Differentsial tenglamalarga keltiriladigan fizik, ximik masalalar.
2. Differentsial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari.
3. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar.
4. Uzgaruvshilari ajraladigan va unga keltiriladigan differentsial tenglamalar.

TAYaNCh IBORALAR

Massa, karshilik, moddiy nukta, tezlanish, ta'sir etuvchi kuch, proportsionallik koeffitsienti, differentsial tenglama, tartib, echim, integral, umumiy (xususiy) echimi, Koshi masalasi.

Tabiatshunoslik va texnikaning kupgina masalalari karalaetgan xodisa eki jaraenning urganaetgan noma'lum funktsiyani topishga keltiriladi. Masalan:

1-misol: Massasi m bulgan moddiy nukta ogirlik kuchi ta'sirida erkin tushmokda. Xavoning karshiligini xisobga olmay, bu moddiy nuktaning xarakat konunini toping.

Moddiy nuktaning vaziyati $OM=S$ koordinata bilan aniklanib, u t vaktga boglik xolda uzgaradi. Nyutonning ikkinchi konuniga asosan:

$$ma = F$$

m - moddiy nuktaning massasi

a - tezlanish

F - ta'sir etuvchi kuch

Moddiy nuktaga fakat ogirlik kuchi ta'sir etadi:

$$F = m \cdot g$$

g - ogirlik kuchi tezlanishi

a - tezlanish - ikkinchi tartibli xosila degani

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = mg \text{ eki } \frac{d^2 S}{dt^2} = g \quad (1)$$

(1) noma'lum funktsiyani ikkinchi tartibli xosilasi katnashgan tenglamadir.

Agar bu tenglamani t buyicha 2 marta integrallasak, biz izlaetgan funktsiyani topishimiz mumkin:

(2)

$$\frac{dS}{dt} = gt + c_1$$

(3)

$$S = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2$$

Bu erda s_1 va s_2 integrallash doimiysi katnashadi. Ularni nuktaning boshlangich xolati va boshlangich tezligini bilgan xolda aniklash mumkin, $t=0$ da moddiy nuktaning tezligi V_0 ga, uning sanok boshi 0dan uzokligi esa S_0 ga teng bulsin. $S_1=V_0$ ni (2)dan topamiz. $S_2=S_0$ ni (3)dan topamiz. U xolda xarakat konuni:

$$S = \frac{dt^2}{2} + V_0 t + S_0 \quad \text{buladi.}$$

2-Misol. Radiyning emirilishi shunday boradiki, emirilish tezligi radiyning boshlangich mikdoriga proportsional buladi. Agar 1600 yildan keyin mavjud radiy mikdorining yarmi kolishi ma'lum bulsa, radiy mikdorining yarmi kolishi ma'lum

bulsa, radiy mikdorining vakt utishi bilan uzgarish tezligi vakt buyicha xosiladan iboratdir:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

k - proportsionallik koeffitsienti

$$\frac{dx}{x} = kdt \quad (4)$$

$$d(\ln x) = d(kt) \Rightarrow \ln x = kt + c$$

c - ixtieriy uzgarmas son.

s ni topish uchun $t=0$ boshlangich momentda radiy mikdori $x=x_0$ deb faraz kilib, kuyidagini topamiz:

$$\ln x_0 = C$$

Shunday kilib, $\ln \frac{x}{x_0} = kt$ eki

$$x = x_0 e^{kt} \quad (5)$$

k -koeffitsientni $t=1600$ da $x=\frac{x_0}{2}$ bulish shartida topamiz.

$$\frac{1}{2} = e^{1600k}; \quad 1600k = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1600} = -0,00043$$

Demak, $x = x_0 e^{-0,00043t}$

Ta`rif: Erkli uzgaruvchi va noma`lum funktsiya xamda uning xosilalari eki differentsiallarini boglovchi munosabat differentsial tenglama deyiladi.

Agar noma`lum funktsiya fakat bitta uzgaruvchiga boglik bulsa, bunday differentsial tenglama oddiy differentsial tenglama deyiladi.

Agar noma`lum funktsiya ikki eki undan ortik uzgaruvchiga boglik bulsa, bunday differentsial tenglamani xususiy xosilali differentsial tenglama deyiladi.

Ta`rif: Differentsial tenglamaga kirgan xosilalarning eng yukori tartibi tenglamaning tartibi deyiladi.

$y'' - y' \cos x - x^2 y = 0$ - ikkinchi tartibli differentsial tenglama.

$x(1 - y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$ - birinchi tartibli differentsial tenglama.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (6)$$

bu erda x - erkli uzgaruvchi

y - noma`lum funktsiya

$y', y'', \dots, y^{(n)}$ - noma`lum funktsiyaning xosilalari

Ta`rif: Differentsial tenglamaning echimi eki integrali deb,

tenglamaga kuyganda uni ayniyatga aylantiradigan xar kanday differentsiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funktsiyaga aytiladi.

3-Misol. $y=3e^x$ va $y=4e^{-x}$ funktsiyalarning differentsial tenglamaning echimi buladimi eki yukmiU

a) $y=3e^x$; $y'=3e^x$; $y''=3e^x$.

$y''-y=0$, $3e^x-3e^x=0$; $0=0$ Demak, $y=3e^x$ tenglamaning echimi

b) $y=4e^{-x}$; $y'=-4e^{-x}$; $y''=4e^{-x}$.

$y''-y=0 \Rightarrow 4e^{-x}-4e^{-x}=0$; $\Rightarrow 0=0$ Demak, $y=4e^{-x}$ funktsiya xam berilgan differentsial tenglamaning echimidir.

Ta`rif: Differentsial tenglama echimining grafigi integral egri chizigi deyiladi.

Tenglamani echimini topish jaraenini differentsial tenglamani integrallash deyiladi.

$$F(x,y,y')=0 \quad (7)$$

Birinchi tartibli differentsial tenglamaning umumiy kurinishi deyiladi.

Uni y' ga nisbatan echish mumkin bulsa, uni kuydagicha ezish mumkin:

$$y'=f(x,y) \quad (8)$$

Eki

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy \quad (8')$$

bunday ezuvni simmetrik ezuv deb ataladi, chunki bunda x va u uzgaruvchilar teng xukuklidir.

Differentsial tenglamani bitta funktsiya emas, balki funktsiyalarning butun bir tuplami kanoatlantirishi mumkin.

$$Y_{x=x_0} = y_0 \quad (9)$$

Differentsial tenglama uchun boshlangich shart deyiladi.

Ta`rif: Birinchi tartibli differentsial tenglamaning umumiy echimi deb kuyidagi shartlarni kanoatlapntiruvchi

$$y=\varphi(x,c)$$

(bunda c- ixtieriy uzgarmas son) funktsiyaga aytiladi:

a) u ixtieriy uzgarmas c ning xar kanday kiymatida differentsial tenglamani kanoatlantiradi.

b) boshlangich $y_{x=x_0}=y_0$ shart xar kanday bulganda xam, ixtieriy uzgarmas s ning shunday s_0 kiymatini topish mumkinki, $y=\varphi(x,c_0)$ funktsiya boshlangich shartni kanoatlantiradi, ya`ni

$$y_0=\varphi(x_0,c_0)$$

Ta`rif: Differentsial tenglamaning umumiy echimidan ixtieriy - uzgarmasning mumkin bulgan kiymatlarida xosil kilinadigan echimlar xususiy echimlar deyiladi.

Bu ta`riflarni boshkacha kilib aytganda Koshi masalasi, ya`ni differentsial tenglamaning echimini mavjudligi deb va yagonaligi xakidadir.

Differentsial tenglamaning eng sodda turi bu uzgaruvchilari ajraladigan differentsial tenglamalardir.

$$P(x)dx + Q(y)dy \quad (1)$$

Bu tenglamani echimini topish uchun tenglikning chap tomonini va uning tomonini integrallash natijasida topiladi:

$$\int (P(x)dx + Q(y)dy) = \int 0 dx$$

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$$

Ixtieriy uzgarmasni berilgan tenglama uchun kulay bulgan istalgan kurinishda olish mumkin.

Misol1. $x dx + y dy = 0$

Integrallab differentsial tenglamaning umumiy echimini topamiz:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad | \cdot 2$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

Agar $2S = C_1^2$ desak, $x^2 + y^2 = C_1^2$ ga ega bulamiz. Bu markazi koordinata boshida etuvchi, radiusi S_1 ga teng bulgan kontsentrik aylonamer oilasidan iborat.

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) dy = 0 \quad (2)$$

kurinishdagi differentsial tenglamani noma'lumlari ajraladigan differentsial tenglama deyiladi.

Bu tenglamani umumiy integralini topish uchun tenglikni ikkala kismini $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$ ga bulib, uni noma'lumlarini ajratib olamiz:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0$$

Buni integrallab umumiy integral topiladi.

Eslatma: $y' = f_1(x)f_2(y)$ (3)

tenglama xam uzgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi. Buni

umumiy integralini topish uchun $y' = \frac{dy}{dx}$ shaklida ifodalab,

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

kurinishdagi differentsial tenglama xosil kilamiz. Tenglikni $\frac{dx}{f^2(y)}$ ga kupaytrish

natijasida uzgaruvchilarni ajratiladi:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$$

Endi xar ikkala tomonini integrallab, umumiy integralini topamiz:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + c$$

1-m isol:

$$x(1+y_2)dx - y_2(1+x_2)dy = 0$$

$$x(1+y_2)dx = y_2(1+x_2)dy$$

$$\frac{y^2}{1+y^2} dy = \frac{x}{1+x} dx$$

Integrallab,

$$\int \frac{y^2 + 1 - 1}{1 + y^2} dy = \int \frac{d(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2})}{1 + x^2}$$
$$\int dy - \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{1 + x^2}$$
$$y - \operatorname{arctgy} = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

Uzini tekshirish uchun savollar

1. Differentsial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. differentsial tenglamaning tartibi deb nimaga aytiladi?
3. Differentsial tenglamani echish nima?
4. Integral egri chizik nima?
5. Birinchi tartibli differentsial tenglamaning umumiy echimi deb nimaga aytiladi?
6. Xususiy echim nima? Birinchi tartibli tenglama uchun boshlangich shart nimadan iborat?

15-maruza. Uzgarmas koeffitsientli, chiziqli, bir jinsli differentsial tenglamalar.
Uzgarmas koeffitsientli chiziqli ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar.

REJA:

1. Uzgarmas koeffitsientli chizikli bir jinsli bulmagan differentsial tenglamalar.
2. Tenglamani echish usuli.

TAYaNCh IBORALAR

Ikkinchi tartibli chizikli bir jinsli bulmagan differentsial tenglama, umumiy echim, xususiy echim, tanlash metodi.

$$Y'' + py' + qy = f(x) \quad (8)$$

kurinishdagi tenglamalarni urganamiz.

Bu erda p, q – xakikiy sonlar; $f(x)$ - noma'lum funktsiya.

$$y = \bar{y} + y^* \quad \text{kurinishda kidiramiz.}$$

Bunda $\bar{y}$ - bir jinsli tenglamaning umumiy echimi.

Y^* - esa xususiy echim

Bir jinsli uzgarmas koeffitsientli differentsial tenglamani echimini oldingi mashgulotda topishni kurib chikkanmiz. Xususiy echimni esa tanlash metodi erdamida topamiz.

I. Agar ung tomonda $f(x)=P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ kupxaddan iborat bulsa. Bu xolda xususiy echimni

$$y^*=Q_n(x) x^r \quad (9)$$

kurinishda kidiramiz.

Bunda $Q_n(x)-P_n(x)$ kupxad kabi usha darajali kupxaddan iboratdir.

r - xarakteristik tenglamaning nolga teng ildizlar soni.

Misol1: $y'''+y'=5x+3$

1) Bir jinsli differentsial tenglama tuzamiz:

$$y'''+y'=0$$

Xarakteristik tenglamasi:

$$k^2+k=0 ; k(k+1)=0$$

$$k_1=0 ; k_2=-1 \text{ demak, } r=1$$

$$\bar{y} = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x};$$

$$2) \quad f(x)=5x+3$$

ya`ni $P_n(x)$ birinchi darajali kupxad, demak,

$$Q_n(x)=Ax+B \text{ buladi.}$$

Va berilgan bir jinsli bulmagan tenglama uchun echimni $y^*=(Ax+B)x^1$ shaklida kidiramiz.

Birinchi va ikkinchi tartibli xosilasini topib, tenglamaga kuyamiz:

$$(y^*)'=(Ax^2+Bx)'=2Ax+B ; (y^*)'=(2Ax+B)'=2A$$

$$2A+2Ax+B=5x+3$$

$$\begin{array}{l|l} x & 2A=5 \quad A=\frac{5}{2} \\ x^0 & 2A+B=3 \quad B=3-5=-2 \end{array}$$

$$\text{demak, } y^* = \left(\frac{5}{2}x - 2\right)x$$

$$\text{u xolda } y = \bar{y} + y^* = c_1 + c_2 e^{-x} + \left(\frac{5}{2}x - 2\right)x$$

2-Misol: $y''+3y'+2y=x^2$ tenglamani eching.

1) $y''+3y'+2y=0$ bir jinsli differentsial tenglama

Xarakteristik tenglamasi:

$$k^2+3k+2=0$$

$$k_1=-1 ; k_2=-2 \quad \text{demak, } r=0$$

2) $f(x) = x^2$ - ikkinchi darajali funktsiya

$$y^*=Ax^2+Bx+C$$

$$(y^*)'=2Ax+B ; (y^*)''=2A$$

Tenglamaga kuyamiz:

$$2A + 6Ax + 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = x^2$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 2A = 1 \quad A = \frac{1}{2} \\ x & 6A + 2B = 0 \quad 3 + 2B = 0 \quad B = -\frac{3}{2} \\ x^0 & 2A + 3B + 2C \quad 2C = -1 + 3 \cdot \frac{3}{2} = -1 + 4,5 = 3,5 \end{array}$$

$$y^* = 0,5x^2 - 1,5x + 3,5$$

Demak, $y = \bar{y} + y^* = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 0,5x^2 - 1,5x + 3,5$

II. Tenglamani qismida $f(x) = e^{ax} P_n(x)$

$P_n(x)$ – n chi kursatkichli kupxad.

A- kursatkichdagi xakikiy son bulsa, u xolda xususiychimni kuyidagi kurinishda kidiramiz:

$$y^* = Q_n(x) e^{ax} x^r \quad (10)$$

bunda, $Q_n(x)$ - n kursatkichli noma'lum koefitsientli kupxad.

R – kursatkichdagi a ga teng bulgan xarakteristik tenglamani ildizlar soniga teng.

Ilova - agar $a=0$ bulsa, Ichi xol xosil buladi.

3-Misol: $y'' - 2y' - 3y = (x+2)e^{3x}$

a) Bir jinsli tenglamani echamiz:

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

xarakteristik tenglamasi: $k^2 - 2k - 3 = 0$

$k_1 = -1$; $k_2 = 3$ demak, $r=1$ (chunki $a=3$)

$$\bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

b) $f(x) = (x+2)e^{3x}$

$$y^* = (Ax+B)e^{3x} x' = (Ax^2+Bx)e^{3x}$$

Birinci va ikkinchi tartibli xosilalarni topamiz:

$$\begin{aligned} (y^*)' &= [(Ax^2+Bx)e^{3x}]' = (2Ax+B)e^{3x} + 3(Ax^2+Bx)e^{3x} = \\ &= (3Ax^2 + (3B+2A)x+B)e^{3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y^*)'' &= (6Ax+3B+2A)e^{3x} + 3(3Ax^2+(3B+2A)x+B)e^{3x} - \\ &- (9Ax^2+(12A+3B)x+6B+2A)e^{3x} \end{aligned}$$

tenglamaga kuyamiz:

$$(9Ax^2 + (12A+3B)x + 6B+2A)e^{3x} - (6Ax^2 + (6B+4A)x + 2B)e^{3x} - (3Ax^2 + 3Bx)e^{3x} = (x+2)e^{3x}$$

$$(8A+6B)x + 4B+2A = (x+2)$$

$$\begin{array}{l|l} x & 8A+6B=1 \quad 8(1-2B)+6B=1 \quad 10B=7; B=0,7 \\ x_0 & 4B+2A=2 \quad 2B+A=1 \quad A=1-2 \cdot 0,7=1-1,4=-0,4 \end{array}$$

$$y^* = (0,7 - 0,4x)e^{3x} x$$

u xolda

III. Tenglamani qismida

$$f(x) = M \cos bx + N \sin bx$$

bunda, M, N, b - berilgan xakikiy sonlar.

Xususiychimni

$$y^* = (A \cos bx + B \sin bx) x^r \quad (11)$$

kurinishda kidiriladi.

Bu erda A va B – noma'lum koeffitsientlar.

r - xarakteristik tenglamaning bi ga teng bulgan ildizlar sonigi teng.

Misol-4: $y''+4y'+5y=2\cos x-\sin x$ tenglamaning umumiy echimini toping.

1) Bir jinsli tenglama uchun $y''+4y'+5y=0$ xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$k^2+4k+5=0$$

$k_{12}=-2 \pm i$; bi - xarakteristik tenglamaning echimi emas, shuning uchun $r=0$

$$\bar{y} = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

2) $y^*=A\cos x+B\sin x$ kurinishda kidiramiz.

Birinchi va ikkinchi tartibli xosilalarni topamiz:

$$(y^*)' = -A\sin x + B\cos x ; \quad (y^*)'' = -A\cos x - B\sin x$$

Tenglamaga kuyamiz:

$$-A\cos x - B\sin x + 4(-A\sin x + B\cos x) + 5(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x - \sin x$$

$$(4A+4B)\cos x + (4B-4A)\sin x = 2\cos x - \sin x$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x \mid 4A+4B=2 \\ \sin x \mid 4B-4A=-1 \end{array} \right\} \text{ni echib, } B = \frac{1}{8}; A = \frac{3}{8} \text{ ni topamiz.}$$

$$\text{Demak, } y^* = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

U xolda,

$$y = \bar{y} + y^* = e^{-2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

5-misol: $y''+4y=5\sin 2x$ tenglamaning umumiy echimini toping.

1) $y''+4y=0$ bir jinsli tenglama uchun xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$k^2+4=0 ; k_{12}=\pm 2i \quad bi=2i=k_1 \neq k_2 \text{ bulgani uchun } r=1$$

$$\bar{y} = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

2) $f(x)=5\sin 2x$, demak

$y^*=(A\cos x+B\sin x)x$ kurinishda kidiramiz.

Birinchi va ikkinchi tartibli xosilalarni topib, uni tenglamaga kuyamiz:

$$(y^*)' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)x + (A\cos 2x + B\sin 2x)$$

$$(y^*)'' = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$

$$+(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x$$

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x + (4A\cos 2x + 4B\sin 2x)x =$$

$$= 5\sin 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 2x \mid 4B=0 \quad B=0 \\ \sin 2x \mid -4A=5 \quad A=-\frac{5}{4} \end{array} \right\}$$

$$\text{Demak, } y^* = \left(-\frac{5}{4}\cos 2x + 0 \cdot \sin 2x\right) \cdot x = -\frac{5}{4}x\cos 2x$$

$$\text{u xolda } y = \bar{y} + y^* = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{5}{4}x\cos 2x$$

IV. Kuyidagi teoremani karab chikaylik, chunki uni kupincha kulaniladi:

Teorema: Agar $y_1^* \quad y''+py+qy=f_1(x)$ tenglamaning xususiy echimi bulsa;

y_2^* esa $y'' + py' + qy = f_2(x)$ tenglamaning xususiy echimi bulsa, u xolda $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$ tenglamaning xususiy echimi $y_1^* + y_2^*$ buladi.

6-Misol: $y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$ tenglamaning umumiy echimni toping.

1) $y'' - 2y' + y = 0$ bir jinsli tenglamani xarakteristik tenglamasini tuzamiz:

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0 ; k_{12} = 1$$

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 x e^x ;$$

2) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ bunda $f_1(x) = 3e^x$; $f_2(x) = x + 1$

$f_1(x) = 3e^x$ funktsiya uchun $r_1 = 2$; $f_2(x) = x + 1$ funktsiyalar uchun esa $r_2 = 0$

Demak, a) $y_1^* = A e^x \cdot x^2$

$$(y_1^*)' = A e^x x^2 + 2A x e^x = A(x+2)x e^x ;$$

$$(y_1^*)'' = A(2x+2)e^x + A(x^2+2x)e^x =$$

$$= (Ax^2 + 4Ax + 2A)e^x$$

$$(Ax^2 + 4Ax + 2A)e^x - (2Ax^2 + 4Ax)e^x + A e^x x^2 = 3e^x$$

$$Ax^2 + 4Ax + 2A - 2Ax^2 - 4Ax + Ax^2 = 3e^x$$

$$2A = 3$$

$$A = \frac{3}{2}$$

$$y_1^* = \frac{3}{2} x^2 e^x ;$$

b) $y_2^* = Bx + c$; $(y_2^*)' = B$; $(y_2^*)'' = 0$

$$0 - 2B + Bx + c = x + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} x \mid B = 1 \\ x_0 \mid -2B + C = 1 \end{array} \right\} \quad C = 3 ; y_2^* = x + 3$$

Demak, $y = \bar{y} + (y_1^* + y_2^*) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x + x + 3$

Uzini tekshirish uchun savollar:

1. Uzgarmas koeffitsientli chizikli bir jinsli bulmagan ikkinchi tartibli differentsial tenglama, $f(x) = P_n(x)$ bulgan xol uchun, xususiy echimni topish koidasini baen kiling.

2. Bir jinslimas differentsial tenglama uchun $f(x) = e^{ax} P_n(x)$ bulgan xol uchun, xususiy echimini topish koidasini baen kiling. Misollar keltiring.

3. Uzgarmas koeffitsientli chizikli bir jinsli bulmagan differentsial tenglamaning xususiy echimini tenglamaning ung tomoni

$$f(x) = M \cos bx + N \sin bx$$

kurinishda bulgan xol uchun topish koidasini ifodalang.

Misollar keltiring.

16-maruza. Kombinatorika va uning turlari: o'rinlashtirishlar, o'rin almashtirishlar va guruhlashlar. Hodisalar ehtimoli va matematik statistika elementlari. Extimollik ta'rifi va xossalari, turlari

REJA

1. Ehtimollar nazariyasining predmeti
2. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi
3. Hodisalar ustida amallar.
4. Tasodifiy hodisalar. Hodisalar algebrasi

1. Ehtimollar nazariyasining predmeti

Ehtimollar nazariyasi “tasodifiy tajribalar”, ya’ni natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlarni o‘rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o‘zgarmas (ya’ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo‘lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi tasodifiy hodisa ro‘y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko‘p marta takrorlash mumkin bo‘ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o‘tishida natijalari turlicha bo‘lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro‘y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo‘lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro‘y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiyatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o‘yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarixini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo‘lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog‘liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug‘ullanadi. Tasodiflar insoniyatni doimo qiziqtirib kelgan. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli o‘laroq nisbatan qisqa, ammo o‘ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy ma’lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o‘rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to‘g‘ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o‘lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o‘lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug‘urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo‘lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarni o‘rganishdan emas, balki eng sodda qimor o‘yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo‘lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623-1662),

Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o'yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojidadagi katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog'liqdir. Unga, ehtimollar nazariyasining eng muhim qonuniyati, deb hisoblanuvchi "katta sonlar qonuni" tegishlidir. Ehtimollar nazariyasi rivojidadagi yana bir muhim qadam de Muavr (1667-1754) nomi bilan bog'liqdir. Bu olim tomonidan normal qonun (yoki normal taqsimot) deb ataluvchi muhim qonuniyat mavjudligi sodda holda asoslanib berildi. Keyinchalik, ma'lum bo'ldiki, bu qonuniyat ham, ehtimollar nazariyasida muhim rol o'ynar ekan. Bu qonuniyat mavjudligini asoslovchi teoremlar "markaziy limit teoremlar" deb ataladi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishida katta hissa mashhur matematik Laplasga (1749-1827) ham tegishlidir. U birinchi bo'lib ehtimollar nazariyasi asoslarini qat'iy va sistematik ravishda ta'rifladi, markaziy limit teoremasining bir formasini isbotladi (Muavr-Laplas teoremasi) va ehtimollar nazariyasining bir necha tadbirlarini keltirdi. Ehtimollar nazariyasi rivojidadagi etarlicha darajada oldinga siljish Gauss (1777-1855) nomi bilan bog'liqdir. U normal qonuniyatga yanada umumiy asos berdi va tajribadan olingan sonli ma'lumotlarni qayta ishlashning muhim usuli – "kichik kvadratlar usuli"ni yaratdi. Puasson (1781-1840) katta sonlar qonunini umumlashtirdi va ehtimollar nazariyasini o'q uzish masalalariga qo'lladi. Uning nomi bilan ehtimollar nazariyasida katta rol o'ynovchi taqsimot qonuni nomlangandir. XVII va XIX asrlar uchun ehtimollar nazariyasining keskin rivojlanishi va u bilan har tomonlama qiziqish xarakterlidir. Keyinchalik ehtimollar nazariyasi rivojiga V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L. Chebishev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.M.Lyapunov (1857-1918), A.Ya. Xinchin (1894-1959), V.I.Romanovskiy (1879-1954), A.N.Kolmogorov (1903-1987) va ularning shogirdlari bebaho hissa qo'shdilar. O'zbekistonda ehtimollar nazariyasi bo'yicha butun dunyoga taniqli ilmiy maktabni yuzaga kelishida T.A. Sarimsoqov (1915-1995) va S.X. Sirojiddinov (1920-1988) larning muhim rollarini alohida ta'kidlab o'tish joizdir.

2. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi

Dastlab ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri "tasodifiy hodisa" tushunchasini keltiramiz. Natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajriba o'tkazilayotgan bo'lsin. Bunday tajribalar ehtimollar nazariyasida tasodifiy deb ataladi.

Tasodifiy hodisa(yoki hodisa) deb, tasodifiy tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisaga aytiladi.

Hodisalar, odatda, lotin alifbosining bosh harflari $A, B, C, \dots$ lar bilan belgilanadi. Tajribaning har qanday natijasi elementar hodisa deyiladi va ω orqali belgilanadi.

Tajribaning natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami elementar hodisalar fazosi deyiladi va Ω orqali belgilanadi.

1-misol. Tajriba nomerlangan kub(o'yin soqqasi)ni tashlashdan iborat bo'lsin. U holda tajriba 6 elementar hodisadan hodisalar $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ lardan iborat bo'ladi. ω_i hodisa tajriba natijasida i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ochko tushishini bildiradi.

Bunda elementar hodisalar fazosi: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga muqarrar hodisa deyiladi.

Elementar hodisalar fazosi muqarrar hodisaga misol bo'la oladi.

Aksincha, umuman ro'y bermaydigan hodisaga mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi va u $\emptyset$ orqali belgilanadi.

1-misolda keltirilgan tajriba uchun quyidagi hodisalarni kiritamiz:

$A = \{5 \text{ raqam tushishi}\};$

$B = \{\text{juft raqam tushishi}\};$

$C = \{7 \text{ raqam tushishi}\};$

$D = \{\text{butun raqam tushishi}\};$

Bu yerda A va B hodisalar tasodifiy, C hodisa mumkin bo'lmagan va D hodisa muqarrar hodisalar bo'ladi.

3. Hodisalar ustida amallar.

Tasodifiy hodisalar orasidagi munosabatlarni keltiramiz:

A va B hodisalar yig'indisi deb, A va B hodisalarning kamida bittasi(ya'ni A, yoki B, yoki A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat $C = A \cup B$ ($C = A + B$) hodisaga aytiladi.

A va B hodisalar ko'paytmasi deb, A va B hodisalar ikkalasi ham (ya'ni A va B birgalikda) ro'y berishidan iborat $C = A \cap B$ ($C = A \cdot B$) hodisaga aytiladi.

A hodisadan B hodisaning ayirmasi deb, A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermasligidan iborat $C = A \setminus B$ ($C = A - B$) hodisaga aytiladi.

A hodisaga qarama-qarshi $\bar{A}$ hodisa faqat va faqat A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi(ya'ni $\bar{A}$ hodisa A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradi). $\bar{A}$ ni A uchun teskari hodisa deb ham ataladi.

Agar A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subseteq B$ ko'rinishida yoziladi.

Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar teng(teng kuchli) hodisalar deyiladi va $A = B$ ko'rinishida yoziladi.

2-misol. A, B va C -ixtiyoriy hodisalar bo'lsin. Bu hodisalar orqali quyidagi hodisalarni ifodalang: $D = \{\text{uchchala hodisa ro'y berdi}\}; E = \{\text{bu hodisalarning kamida bittasi ro'y berdi}\}; F = \{\text{bu hodisalarning birortasi ham ro'y bermadi}\}; G = \{\text{bu hodisalarning faqat bittasi ro'y berdi}\}.$

Hodisalar ustidagi amallardan foydalanamiz: $D = A \cap B \cap C$ ($D = A \cdot B \cdot C$);

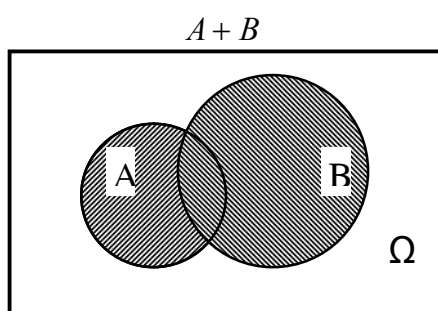
$E = A + B + C; F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}; G = A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C.$

Demak hodisalarni to'plamlar kabi ham talqin etish mumkin ekan.

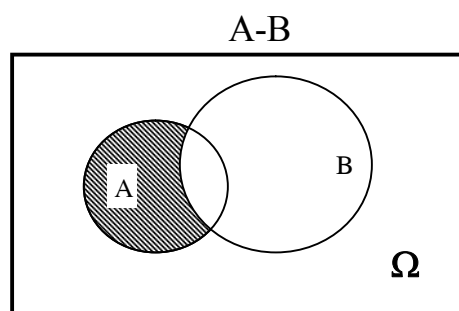
Belgilash	To'plamlar nazariyasidagi talqini	Ehtimollar nazariyasidagi talqini
Ω	Fazo (asosiy to'plam)	Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa
$\omega, \omega \in \Omega$	ω fazo elementlari	ω elementar hodisa
$A, A \subseteq \Omega$	A to'plam	A hodisa
$A \cup B, A + B$	A va B to'plamlarning	A va B hodisalar yig'indisi (A va

	yig'indisi, birlashmasi	B ning kamida biri ro'y berishidan iborat hodisa)
$A \cap B, A \cdot B$	A va B to'plamlarning kesishmasi	A va B hodisalar ko'paytmasi (A va B ning birgalikda ro'y berishidan iborat hodisa)
$A \setminus B, A - B$	A to'plamdan B to'plamning ayirmasi	A hodisadan B hodisaning ayirmasi (A ning ro'y berishi, B ning ro'y bermasligidan iborat hodisa)
$\emptyset$	Bo'sh to'plam	Mumkin bo'lmagan hodisa
$\overline{A}$	A to'plamga to'ldiruvchi	A hodisaga teskari hodisa (A ning ro'y bermasligidan iborat)
$A \cap B = \emptyset, A \cdot B = \emptyset$	A va B to'plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birgalikda emas
$A \subseteq B$	A to'plam B ning qismi	A hodisa B ni ergashtiradi
$A = B$	A va B to'plamlar ustma-ust tushadi	A va B hodisalar teng kuchli

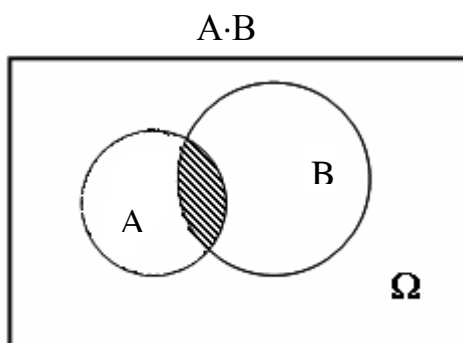
Hodisalar va ular ustidagi amallarni Eyler-Venn diarammalari yordamida tushuntirish(tasavvur qilish) qulay. Hodisalar ustidagi amallarni 1-5 rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.



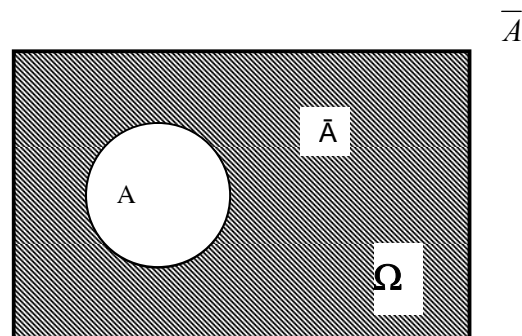
1-rasm.



2-rasm.

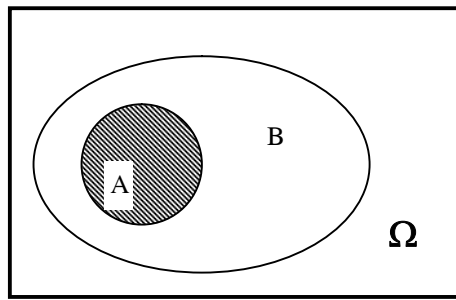


3-rasm.



4-rasm.

$$A \subseteq B$$



5-rasm.

Hodisalar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

3. $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$;
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
5. $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
6. $A + A = A$, $A \cdot A = A$;
7. $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$, $A + \emptyset = A$, $A \cdot \emptyset = \emptyset$;
8. $A + \bar{A} = \Omega$, $A \cdot \bar{A} = \emptyset$;
9. $\bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$, $\bar{\bar{A}} = A$;
10. $A - B = A \cdot \bar{B}$;
11. $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ va $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$ - de Morgan ikkilamchilik prinsipi.

3-misol.

a) $(A + B) \cdot (A + \bar{B})$ ifodani soddalashtiring.

Yuqoridagi xossalardan foydalanamiz:

$$(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A \cdot A + A \cdot \bar{B} + B \cdot A + B \cdot \bar{B} = A + A \cdot (\bar{B} + B) + \emptyset = A + A \cdot \Omega = A + A = A$$

Demak, $(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A$ ekan.

b) $A + B = A + \bar{A} \cdot B$ formulani isbotlang.

$$\begin{aligned} A + B &= (A + B) \cdot \Omega = A \cdot \Omega + B \cdot \Omega = A \cdot \Omega + B \cdot (A + \bar{A}) = A \cdot \Omega + (A + \bar{A}) \cdot B = \\ &= A \cdot \Omega + A \cdot B + \bar{A} \cdot B = (\Omega + B) \cdot A + \bar{A} \cdot B = \Omega \cdot A + \bar{A} \cdot B = A + \bar{A} \cdot B. \end{aligned}$$

4. Tasodifiy hodisalar. Hodisalar algebrasi

Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalarini keltiramiz.

Natijasi tasodifiy bo'lgan biror tajriba o'tkazilayotgan bo'lsin. Ω -tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami elementar hodisalar fazosi deyiladi; tajribaning natijasi ω esa elementar hodisa deyiladi.

Agar Ω chekli yoki sanoqli to'plam bo'lsa (ya'ni elementlarini natural sonlar yordamida nomerlash mumkin bo'lsa), u holda uning ixtiyoriy qism to'plami A tasodifiy hodisa (yoki hodisa) deyiladi: $A \subseteq \Omega$.

Ω to'plamdagi A qism to'plamga tegishli elementar hodisalar A hodisaga qulaylik yaratuvchi hodisalar deyiladi.

Ω to'plam muqarrar hodisa deyiladi. $\emptyset$ -bo'sh to'plam mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi.

S- Ω ning qism to'plamlaridan tashkil topgan sistema bo'lsin.

Agar

- a) $\emptyset \in S, \Omega \in S$;
 b) $A \in S$ munosabatdan $\overline{A} \in S$ kelib chiqsa;
 c) $A \in S$ va $B \in S$ munosabatdan $A + B \in S, A \cdot B \in S$ kelib chiqsa S sistema algebra tashkil etadi deyiladi.

Ta'kidlash joizki, $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}, A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ ekanligidan 3 shartdagi $A + B \in S$ va $A \cdot B \in S$ munosabatlardan ixtiyoriy bittasini talab qilish yetarlidir.

4-misol. $S = \{\emptyset, \Omega\}$ sistema algebra tashkil etadi: $\emptyset + \Omega = \Omega, \emptyset \cdot \Omega = \emptyset, \overline{\emptyset} = \Omega, \overline{\Omega} = \emptyset$.

Agar 3 shart o'rniga quyidagilarni talab qilsak $A_n \in S, n = 1, 2, \dots$, munosabatdan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ kelib chiqsa S sistema σ -algebra deyiladi.

Agar Ω chekli yoki sanoqli bo'lsa, Ω -to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan hodisalar sistemasi algebra tashkil etadi.

5. Ehtimollikning klassik ta'rifi.

Ω chekli n ta teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsin. A hodisaning ehtimolligi deb, A hodisaga qulaylik yaratuvchi elementar hodisalar soni k ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n} \quad (1)$$

Klassik ta'rifdan foydalanib, ehtimollik hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi. Shuning uchun kombinatorikaning ba'zi elementlari keltiramiz. Kombinatorikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikki muhim qoida mavjud.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ chekli to'plamlar berilgan bo'lsin.

Qo'shish qoidasi: agar A to'plam elementlari soni n va B to'plam elementlari soni m bo'lib, $A \cdot B = \emptyset$ (A va B to'plamlar kesishmaydigan) bo'lsa, u holda $A + B$ to'plam elementlari soni $n+m$ bo'ladi.

Ko'paytirish qoidasi: A va B to'plamlardan tuzilgan barcha (a_i, b_j) juftliklar to'plami $C = \{(a_i, b_j) : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ ning elementlari soni $n \cdot m$ bo'ladi.

n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan tanlashda ikkita sxema mavjud: qaytarilmaydigan va qaytariladigan tanlashlar. Birinchi sxemada olingan elementlar qayta olinmaydi (orqaga qaytarilmaydi), ikkinchi sxemada esa har bir olingan element har qadamda o'rniga qaytariladi.

I. Qaytarilmaydigan tanlashlar sxemasi

Guruhlashlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (2)$$

C_n^m sonlar Nyuton binomi formulasining koeffitsientlaridir:

$$(p+q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + \dots + q^n.$$

O'rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan o'rinlashtirishlar soni

quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (3)$$

O‘rin almashtirishlar soni: n ta elementdan n tadan o‘rinlashtirish o‘rin almashtirish deyiladi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n = n! \quad (4)$$

O‘rin almashtirish o‘rinlashtirishning xususiy holidir, chunki agar (3)da $n=m$ bo‘lsa $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ bo‘ladi.

II. Qaytariladigan tanlashlar sxemasi

Qaytariladigan guruhlashlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan qaytariladigan guruhlashlar soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \quad (5)$$

Qaytariladigan o‘rinlashtirishlar soni: n ta elementdan m ($0 < m \leq n$) tadan qaytariladigan o‘rinlashtirishlari soni quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\overline{A}_n^m = n^m \quad (6)$$

Qaytariladigan o‘rin almashtirishlar soni: k xil n ta elementdan iborat to‘plamda 1-element n_1 marta, 2-element n_2 marta, ..., k -element n_k marta qaytarilsin va $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ bo‘lsin, u holda n ta elementdan iborat o‘rin almashtirish $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$ orqali belgilanadi va u quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (4)$$

Endi ehtimollik hisoblashga doir misollar keltiramiz.

5-misol. Telefon nomerini terayotganda abonent oxirgi ikki raqamni eslay olmadi. U bu raqamlar har xil ekanligini eslab, ularni tavakkaliga terdi. Telefon nomeri to‘g‘ri terilganligi ehtimolligini toping.

Oxirgi ikki raqamni A_{10}^2 usul bilan terish mumkin. $A = \{\text{telefon nomeri to‘g‘ri terilgan}\}$ hodisasini kiritamiz. A hodisa faqat bitta elementdan iborat bo‘ladi (chunki kerakli telefon nomeri bitta bo‘ladi). Shuning uchun klassik ta‘rifga ko‘ra $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90} \approx 0.011$.

6-misol. 100 ta lotoreya biletlarlaridan bittasi yutuqli bo‘lsin. Tavakkaliga olingan 10 lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi ehtimolligini toping.

100 ta lotoreya biletlaridan 10 tasini C_{100}^{10} usul bilan tanlash mumkin. $B = \{10 \text{ lotoreya biletlari ichida yutuqlisi bo‘lishi}\}$ hodisasi bo‘lsa, $N(B) = C_1^1 \cdot C_{99}^9$ va

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_1^1 \cdot C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

7-misol. Pochta bo‘limida 6 xildagi otkritka bor. Sotilgan 4 ta otkritkadan: a) 4 tasi bir xilda; b) 4 tasi turli xilda bo‘lishi ehtimolliklarini toping.

6 xil otkritkadan 4 tasini $\overline{C}_6^4$ usul bilan tanlash mumkin. a) $A = \{4 \text{ ta bir}$

xildagi otkritka sotilgan} hodisasi bo'lsin. A hodisani elementar hodisalari soni otkritkalar xillari soniga teng, ya'ni $N(A)=6$. Klassik ta'rifga ko'ra $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{C_6^4} = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$ bo'ladi. b) $B=\{4 \text{ ta har xil otkritka sotilgan}\}$

hodisasi bo'lsin, u holda $N(B) = C_6^4$ ga teng va $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C_6^4}{C_6^4} = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$.

Klassik ehtimollik quyidagi xossalarga ega:

- d) $P(\emptyset) = 0$;
- e) $P(\Omega) = 1$;
- f) $0 \leq P(A) \leq 1$;
- g) Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $P(A + B) = P(A) + P(B)$;
- h) $\forall A, B \in \Omega$ uchun $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Isboti. 1) $N(\emptyset) = 0$ bo'lgani uchun klassik ta'rifga ko'ra $P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$.

2) Klassik ta'rifga ko'ra $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$.

3) Ihtiyoriy A hodisa uchun $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ ekanligidan $0 \leq P(A) \leq 1$ bo'ladi.

4) Agar $A \cdot B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $N(A + B) = N(A) + N(B)$ va $P(A + B) = \frac{N(A + B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B)$.

5) $A + B$ va B hodisalarni birgalikda bo'lmagan ikki hodisalar yig'indisi shaklida yozib olamiz:

$A + B = A + B \cdot \bar{A}$ (1.3 – misol), $B = B \cdot \Omega = B \cdot (A + \bar{A}) = A \cdot B + B \cdot \bar{A}$, u holda 4-xossaga ko'ra $P(A + B) = P(A) + P(B \cdot \bar{A})$ va $P(B) = P(A \cdot B) + P(B \cdot \bar{A})$. Bu ikki tenglikdan $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ kelib chiqadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ehtimollar nazariyasining predmeti nimadan iborat?
2. Tasodifiy hodisalar, ularning klassifikatsiyasi.
3. Hodisalar ustida qanday amallar aniqlangan?
4. Tasodifiy hodisalar. Hodisalar algebrasi ta'rifi.
5. Ehtimollikning klassik ta'rifi.

17-maruza. Tasodifiy hodisalar. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni. Taqsimot funktsiyasi va uning xossalari. Diskret va uziliksiz tasodifiy miqdarning sonli xarakteristikalar va ularning xossalari

REJA:

1. Diskret tasodifiy miqdorlar
2. Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalar
3. Ba'zi diskret taqsimot qonunlari

Tajriba natijasiga ko'ra biror qiymatlar to'plamidan tasodifiy ravishda bitta qiymat qabul qiladigan o'zgaruvchi miqdorga **tasodifiy miqdor** deb ataladi.

Agar tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlar chekli yoki cheksiz ketma-ketlik ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor **deskret tasodifiy miqdor** deyiladi.

Biror chekli yoki cheksiz sonli oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor **uzluksiz tasodifiy miqdor** deb ataladi.

Deskret tasodifiy miqdorlar. X tasodifiy miqdorning **taqsimot qonuni** deb uning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari x_i va mos $p_i = P(X = x_i)$ ($\sum_i p_i = 1$) ehtimolliklari majmuiga aytiladi. Har qanday tasodifiy miqdor o'zinnig taqsimot qonuni bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Deskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni jadval, formula yoki grafik ko'rinishida berilishi mumkin.

Taqsimot qonunining $M_i(x_i, p_i)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqdan iborat grafigi **taqsimot poligoni** deyiladi.

Agar X tasodifiy miqdor $x_1, x_2, \dots$ qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, \dots$ ehtimolliklar bilan qabul qiladigan deskret tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda uning **taqsimot funksiyasi** quyidagicha aniqlanadi:

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_i < x} p_i$$

Bu yerda x_i ning x dan kichik bo'lgan qiymatlarining ehtimolliklari yig'indisi olinadi.

Quyida $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}$ diskret tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ko'rinishi keltirilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ p_1 & x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \leq x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & x_3 < x \leq x_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & x_4 < x \leq x_5 \\ 1 & x > x_5 \end{cases}$$

X diskret tasodifiy miqdorning $[a; b]$ oraliqdan qiymat qabul qilish ehtimolligi $P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p_i$ bo'ladi.

Masala: 10 ta detal ichida 8 ta nostandarti bor. Tasodifiy ravishda 2 ta detal tanlab olindi. Tanlab olingan detallar orasidagi standart detallar sonining taqsimot qonunini tuzing va poligonini yasang.

Yechish: X diskret tasodifiy miqdor – tanlangan 2 ta detal orasidagi standartlari soni. U $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ qiymatlarni qabul qiladi. X ning mumkin bo'lgan qiymatlari ehtimolliklarini topamiz.

$N = 10$; $n = 8$; $m = 2$; $k = 0, 1, 2$; bo'lganda:

$$P\{X = k\} = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}; \quad P\{X = 0\} = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45};$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}; \quad P\{X = 2\} = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45};$$

Izlanayotgan taqsimot qonunini:

$$\begin{array}{l} X: \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 2 \\ P: \quad 1/45 \quad 16/45 \quad 28/45 \end{array}$$

Deskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Matematik kutilma tasodifiy miqdor o'rtacha qiymatining sonli xarakteristikasi sifatida xizmat qiladi.

Deskret tasodifiy miqdorning **matematik kutilmasi** deb uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini mos ehtimolliklariga ko'paytmasining yig'indisiga aytiladi.

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari sanoqli bo'lsa, u holda

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

Matematik kutilmasining xossalari:

1. $MC = C$; 2. $M(CX) = C \cdot MX$; 3. $M(X + Y) = MX + MY$;

Ikki tasodifiy miqdor bog'liqsiz deyiladi, agar ulardan birining taqsimot qonuni ikkinchusining qanday qiymat qabul qilganligiga bog'liq bo'lmasa va aksincha.

Tasodifiy miqdor qabul qila oladigan qiymatlarining o'zining matematik kutilmasi atrofida qanchalik sochilganini baholash uning **dispersiyasi** va **o'rtacha kvadratik chetlanishi** xizmat qiladi.

Dispersiya. X tasodifiy miqdorning **dispersiyasi** deb uning matematik kutilmasidan chetlanishi kvadrating matematik kutilmasiga aytiladi.

$$DX = M[X - MX]^2 = MX^2 - (MX)^2$$

Deskret tasodifiy miqdor uchun

$$DX = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - MX)^2 \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \cdot p_k - (MX)^2$$

Dispersiyaning xossalari. 1. $DC = 0$; 2. $D(CX) = C^2 DX$;

3. $D(X \pm Y) = DX + DY$

O'rtacha kvadratik chetlanish. X tasodifiy miqdorning **o'rtacha kvadratik chetlanishi** deb dispersiyadan olingan kvadratik ildizga aytiladi.

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}.$$

X tasodifiy miqdorning **modasi** deb, tasodifiy miqdorning eng ehtimolliroq qiymatiga, ya'ni eng katta ehtimollik $p^* = \max_i(p_i)$ ga mos kelgan x^* qiymatiga aytiladi.

Masala: Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X tasodifiy miqdorning MX , DX va σX sonli xarakteristikalari topilsin:

$$\begin{array}{l} X: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ R: \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,3 \quad 0,1 \end{array}$$

Yechish:

$$\begin{aligned} MX &= 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,1 = 3,1 \\ MX^2 &= 1 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,3 + 5^2 \cdot 0,1 = 10,9 \\ DX &= MX^2 - (MX)^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29; \\ \sigma(X) &= \sqrt{DX} = \sqrt{1,29} = 1,1357. \end{aligned}$$

Masala: $MX = 5$; $DX = 7$; $Z = 4X + 3$; $M(Z) = ?$; $D(X) = ?$

Yechish: $M(4X + 3) = M(4X) + M(3) = 4 \cdot MX + 3 = 4 \cdot 5 + 3 = 23$

$$D(4X + 3) = 4^2 DX + 0 = 16 \cdot 7 = 112.$$

Ba'zi deskret taqsimot qonunlari

Tekis taqsimlangan deskret tasodifiy miqdor deb, chekli sondagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari teng ehtimolliklar $p_n = \frac{1}{n}$ bilan qabul qiluvchi tasodifiy miqdorga aytiladi. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutulishi qabul qiladigan qiymatlarining o'rtacha arifmetigiga teng.

Masala: X tasodifiy miqdor o'yin soqqasi tashlanganda ustki yog'da tushgan ochkolar soni va Y tasodifiy miqdor tanga tashlanganda gerb tomoni bilan tushsa 1, raqam tomoni bilan tushsa 0 qiymat qabul qiluvchi tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari tuzilsin.

Yechish: $\begin{pmatrix} X: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ P: & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} Y & 0 & 1 \\ P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Binominal taqsimot. n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligi o'tkazilayotganida biror A hodisa ro'y berishi yoki bermasligi mumkin. A hodisaning ro'y berish ehtimolligi p tajribadan tajribaga o'zgarmas bo'lib qoladi. Teskari hodisaning ehtimolligi esa $q = 1 - p$ gat eng. Tajribalarning o'zaro bog'liq emasligi har tajribada A hodisaning ro'y berish yoki bermasligi qolgan tajribalar natijalariga bog'liq emasligini bildiradi.

X deskret tasodifiy miqdor n ta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida A hodisaning ro'y berishlar soni p esa A hodisaning ehtimolligi bo'lsin, ya'ni Bernulli sxemasi o'rinli bo'lsin. Ana shu tasodifiy miqdor n va p parametrli **binominal taqsimot qonuniga** bo'ysunadi:

$$P(X = k) = P_k(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}; \quad k = \overline{1, n}.$$

Binominal taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX = np; \quad DX = npq.$$

Masala: Bir shaharda 30% aholi ish joyiga shaxsiy avtotransportida borishi afzal ko'radi. Tasodifiy ravishda 8 nafar odam tanlab olindi. X - shaxsiy avtomobilni afzal ko'radiganlar soni. Uning taqsimot qonunini toping.

Yechish: X ning mumkin bo'lgan qiymatlari $0, 1, 2, \dots, 8$; ularda mos kelgan ehtimolliklar

$$P(X = k) = P_8(k) = C_8^k \cdot 0,3^k \cdot 0,7^{8-k}; \quad k = \overline{0, 8}.$$

Puasson taqsimot qonuni

Puasson taqsimot qonuni ko'pincha ma'lum vaqt yoki uzunlik oralig'ida hodisaning ro'y berishlar soni ustida gap borganda va ehtimollik juda kichik bo'lganda ishlatiladi.

Masalan, 10 daqiqa davomida telefon stansiyasiga qilingan qo'ng'roqlar soni; 1 soat davomida YOQSH ga kelgan mashinalar soni.

Puasson taqsimot qonuni bilan taqsimlangan X deskret tasodifiy miqdor $0, 1, 2, \dots$ qiymatlarni $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ ehtimolliklar bilan qabul qiladi. Bu yerda $\lambda = np$.

Puasson taqsimotining matematik kutilmasi va dispersiyasi:

$$MX = \lambda; \quad DX = \lambda.$$