

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН
ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 14.07.2016.ФМ.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

НАМАНГАН МУХАНДИСЛИК-ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

АПАКОВ ЮСУПЖОН ПУЛАТОВИЧ

**УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ КАРРАЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛИ
ТЕНГЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИГА ДОИР ВА УЧ ЎЛЧОВЛИ
ФАЗОДАГИ АЙРИМ МАСАЛАЛАР**

**01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)**

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской диссертации
Content of abstract of doctoral dissertation

Апаков Юсупжон Пулатович

Учинчи тартибли карралаи характеристикали тенгламалар назариясига
доир ва уч ўлчовли фазодаги айрим масалалар..... 3

Апаков Юсупжон Пулатович

К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками и
некоторые задачи в трехмерном пространстве 25

Apakov Yusupjon Pulatovich

To the theory of the third order equations with multiple characteristics and
some problems in three dimensional space 47

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works..... 69

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН
ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 14.07.2016.FM.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

НАМАНГАН МУХАНДИСЛИК-ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

АПАКОВ ЮСУПЖОН ПУЛАТОВИЧ

**УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ КАРРАЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛИ
ТЕНГЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИГА ДОИР ВА УЧ ЎЛЧОВЛИ
ФАЗОДАГИ АЙРИМ МАСАЛАЛАР**

**01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)**

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида 30.09.2014/В2014.3-4.ФМ87 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Наманган муҳандислик - педагогика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (<http://ik-fizmat.nuu.uz>) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:

Джураев Тухтамурад Джураевич

физика-математика фанлари доктори, академик

Расмий оппонентлар:

Дженалиев Мувашархан Танабаевич

физика-математика фанлари доктори, профессор

Ўринов Ахмаджон Қўшоқович

физика-математика фанлари доктори, профессор

Хасанов Акназар Бекдурдиевич

физика-математика фанлари доктори, профессор

Етакчи ташкилот:

«Амалий математика ва автоматлаштириш институти». Федерал давлат бюджет илмий ташкилоти (Россия Федерацияси).

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги 14.07.2016.ФМ.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг «___»_____2016 йил соат___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (_____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2016 йил «___» _____ кунини тарқатилди.
(2016 йил «___» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А.А. Абдушукуров

Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ғ.И. Ботиров

Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш котиби, ф.-м.ф.н.

М.С. Салоҳиддинов

Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., профессор, академик

Кириш (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида қатор фундаментал муаммолар физик жараённинг юқори аниқликдаги математик моделларини куришни, уларни тадқиқ қилишнинг янги усулларини ишлаб чиқишни ҳамда олинган натижаларни амалиётга жорий этишни талаб этмоқда. Амалиёт талабларидан келиб чиқиб, юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясига, хусусан учинчи тартибли хусусий ҳосилали ва аралаш типли дифференциал тенгламалар назариясига бўлган эътибор кучайди. Учинчи тартибли тенгламалар орасида қаррали характеристикали тенгламалар ўзига хос жиҳатлари билан алоҳида ўрин эгаллайди. Чекли амплитудага эга бўлган дисперсион муҳитдаги кичик тўлқинни тадқиқ қилишда, модел сифатида Kortevega de Vries тенгламаси деб аталувчи чизиксиз тенглама, яъни учинчи тартибли қаррали характеристикали вақт бўйича биринчи ҳосилага эга бўлган тенгламадан фойдаланилади, бу тенглама учун яратилган назария қаррали характеристикали тенгламаларнинг бошқа синфи, учинчи тартибли қаррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламани тадқиқ қилишга асос сифатида хизмат қилди. Учинчи тартибли қаррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенглама билан боғлиқ жараёнларнинг мураккаблиги, етарли даражадаги аналитик усулларнинг тўла шаклланмаганлиги сабабли, ушбу тенгламалар билан боғлиқ тадқиқотларни ривожлантириш муҳим аҳамият касб этади.

Мамлакатимиз олимлари томонидан учинчи тартибли қаррали характеристикали вақт бўйича биринчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун салмоқли натижаларга эришилган. Бу тенгламанинг юқори тартибли бўлган ҳоли учун махсус функциялар орқали ифодаланувчи фундаментал ечим қурилиб, уни хосса ва хусусиятлари ўрганилган ва чегаравий масалалар ечилган. Учинчи тартибли қаррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун L.Cattabriga тамонидан қурилган фундаментал ечимдан фойдаланиб чегаравий масалалар ўрганилган. Аралаш типли ва юқори тартибли қўшма ва аралаш-қўшма тенгламалар учун эса халқаро миқёсда тан олинган натижаларга эришилган. Учинчи тартибли қаррали характеристикали вақт бўйича иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун махсус функциялар орқали ифодаланувчи фундаментал ечим қуриш ва уни хосса ва хусусиятларини ўрганиш ва у ёрдамида чегаравий масалаларни ечиш муаммога янгича ёндашувни талаб қилади.

Чизиксиз акустика масалалари, космик плазманинг гидродинамик назарияси, чизиксиз тўлқин ҳамда ғовак қатлам билан чегараланган каналдаги суюқликнинг оқими ва бошқа жараёнлар билан боғлиқ кўп сонли тадқиқотлар учинчи тартибли қаррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган ҳамда аралаш параболо - гиперболик типдаги тенгламалар билан боғлиқ тадқиқотларни янада такомиллаштиришнинг муҳимлиги билан изоҳланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2006 йил 7 августдаги ПҚ-436-сон «Фан ва технологияларни ривожлантиришни мувофиқлаштириш ва бошқаришни такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ҳамда 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида» Қарорлари ва мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи¹. Учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосиллага эга бўлган тенгламаларга фундаментал ечим куриш, потенциаллар назарияси ва уларнинг хусусиятларини ўрганиш, чекли ва чексиз соҳаларда турли чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, University of Bologna, University of Turinto (Италия), Фатих университети (Туркия), Вильнюс университети (Литва), Москва давлат университети, Новосибирск давлат университети, Башқирдистон давлат университети, Шимолий - Шарқий федерал университет ва Кабардин-Балкар давлат университети, Россия Фанлар академиясининг Математика институти, Амалий математика ва автоматлаштириш институти Россия Фанлар академиясининг Кабардин-Болкар илмий марказида олиб борилмоқда.

Аралаш типли дифференциал тенгламалар назариясига оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан қуйидаги илмий натижалар олинган: аралаш эллиптико-гиперболик типли тенгламага чегаравий масалалар ечиш назарияси яратилган (University Turinto, Италия); чегарада бузилувчи эллиптико-гиперболик тенглама учун чегаравий масалалар ечилган (Uppsala University, Швеция); аралаш эллиптико-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласига экстремум принципи исботланган (Москва давлат университети, Россия Фанлар академияси Математика институти); аралаш эллиптико-гиперболик тенглама учун нолокал масалалар ишланган (Амалий математика ва автоматлаштириш институти Россия Фанлар академиясининг Кабардин-Болкар илмий маркази, Москва давлат университети, Новосибирск давлат университети, Самара давлат университети); аралаш типли тенгламалар учун спектрал масаланинг

¹Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: Arkiv Mathematics Astronomis, www.springer.com/mathematics/journal/11512; Rendiconti del seminario matimatico della univ di Padava; Communes Partial Differential Equations; Успехи математических наук, www.mathnet.ru/umn; Математические заметки, www.mathnet.ru/mz, Сибирский математический журнал, www.springer.com; Сибирский журнал индустриальной математики, www.math.nsc.ru/publishing/SIBJIM/sibjim.html, Дифференциальные уравнения, www.link.springer.com/journal/10625 манбалар асосида ишлаб чиқилган.

хос сон ва хос функциялари топилган (Москва давлат университети, Математика ва математик моделлаштириш институти, Қозоғистон); юқори тартибли қўшма ва аралаш-қўшма типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишнинг усуллари ишлаб чиқилган (Россия Фанлар академияси Сибир бўлими Математика институти, Амалий математика ва автоматлаштириш институти Кабардин-Болкар илмий маркази, Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институти); аралаш эллиптико-параболик ва параболо-гиперболик тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечиш усуллари топилган (Россия Фанлар академияси Сибир бўлими Математика институти, Амалий математика ва автоматлаштириш институти Кабардин-Болкар илмий маркази, Математика ва математик моделлаштириш институти (Қозоғистон), Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институти); уч ўлчовли чекли соҳада аралаш эллиптико-гиперболик тенглама учун чегаравий масалалар ечилган (University of California, University of state Merilin (АҚШ), Россия Фанлар академияси Сибир бўлими Математика институти); аралаш эллиптико-гиперболик тенглама учун уч ўлчовли чексиз соҳада чегаравий масалаларни Фурье интеграл алмаштириши ёрдамида ечиш усули ишлаб чиқилган (Россия Фанлар академияси Сибир бўлими Математика институти, Кабардин-Болкар давлат университети, Москва давлат университети, Самара давлат университети, Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институти).

Дунёда бугунги кунда, каррали характеристикали ва аралаш типли тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар бўйича бир қатор: жумладан, муайян жараённинг янада мутаносиб равишда ўзида акс эттирувчи математик моделларини яратиш ва уларни ифодаловчи масалаларни ечиш; чегаравий масалаларнинг аналитик ечимларини куриш; сонли моделларнинг турғун алгоритмларини тузиш; кўп ўлчовли фазовий масалаларни ечиш каби устивор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилга эга тенгламаларга фундаментал ечим куриш ва уларнинг хоссаларини ўрганиш, потенциаллар назариясини ривожлантириш, чегаравий масала ечишга доир биринчи натижалар Н.В.Блок, Е.Дел Веччио лар ишларида олинган. Кейинчалик бу натижалар L.Cattabriga ишларида ривожлантирилган. А.А.Дезин томонидан каррали характеристикали тенгламаларнинг функционал анализ усули тадқиқ қилинган. Т.Д.Джураев, С.Абдиназаров ва уларнинг ўқувчиларининг ишларида чегаравий масалалар потенциаллар усулидан фойдаланиб L.Cattabriga томонидан қурилган фундаментал ечим ёрдамида ўрганилган.

Гидродинамик жараёнларда муҳим ўрин эгалловчи чизиқсиз тўлқинлар назарияси, учинчи тартибли каррали характеристикали чизиқсиз тенглама билан ифодаланишини биринчи мартаба Joseph Bussinisk томонидан олинган. Бироқ, жараённинг тўлиқ таҳлили Diederik Korteweg ва Gustav de Vries томонидан амалга оширилган. Бу соҳадаги илмий изланишларнинг

амалий жиҳатдан муҳимлиги В.Н.Диесперов, О.С.Рыжов ва Ю.В.Засоринларнинг ишларида асосланган. В. Галактионовнинг ишларида каррали характеристикали чизиксиз тенгламанинг автомодел ечими ўрганилган. А.Ashyraliev, N.Aggez, F.Hazenci лар эса каррали характеристикали тенгламаларни сонли усулларда ечиш билан шуғулланган.

Қўшма типдаги ва каррали характеристикали тенгламалар учинчи тартибли тенгламаларнинг асосий вакиллари ҳисобланади. Учинчи тартибли тенгламалар назариясининг асослари А.В.Бицадзе, М.С.Салахиддинов, Т.Д.Джураев, В.Н.Врагов, Т.Ш.Калменов, М.Т.Дженалиев ва уларнинг ўқувчилари томонидан ишлаб чиқилган.

Уч ўлчовли чекли соҳада аралаш эллиптико-гиперболик тенглама учун чегаравий масалалар М.Н.Protter, М.Шнаеидер, А.В.Бицадзе, А.М.Нахушев В.П.Диденко, Г.Д.Каратопраскиев, В.Н.Врагов, Н.Г.Сарокиналар томонидан ўрганилган. Биринчи маротаба аралаш эллиптико - гиперболик тенглама учун уч ўлчовли чексиз соҳада Фурьенинг интеграл алмаштириши ёрдамида чегаравий масалалар А.В.Бицадзе томонидан тадқиқ қилинган. Чексиз цилиндрик соҳада эллиптико-гиперболик тенгламалар учун бир қатор масалалар А.М.Нахушев, С.М.Пономарев, М.С.Салоҳитдинов ва Б.Исломовлар томонидан ўрганилган. А.М.Ежов ва С.П.Пулькиннинг ишларида аралаш эллиптико-гиперболик типли тенглама учун максимум принципи асосида изланаётган ечимнинг априор баҳоси топилиши ва Фурьенинг тескари алмаштириши мавжудлиги учун зарурий шартлар аниқланган. Параболо-гиперболик типли тенгламалар учун уч ўлчовли фазода чегаравий масалалар Т.Д.Джураев, А.Сопуев, Ю.П.Апаков ва Б.Исломовлар томонидан қаралган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Наманган муҳандислик - педагогика институти 07 - рақамли «Хусусий ҳосилали юқори тартибли дифференциал тенгламалар назарияси» мавзусидаги илмий тадқиқот ишлари режасига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун аналитик ва фундаментал ечимлар қуриш ҳамда уч ўлчовли фазода параболо-гиперболик тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

аналитик ва фундаментал ечим қуришни учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун махсус функциялар ёрдамида амалга ошириш;

Фурье усулининг конструктив қуриш назариясини учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун ишлаб чиқиш;

потенциаллар назариясини учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун ривожлантириш;

учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар учун Грин функцияларини қуриш ва масалалар ечишда қўллаш;

учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган бузилувчи тенглама учун чегаравий масалаларни ечиш назариясини ишлаб чиқиш;

уч ўлчовли фазода параболо-гиперболик тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларининг бир қийматли ечимга эга эканлигини кўрсатиш;

уч ўлчовли фазодаги Фурьенинг тўғри ва тескари интеграл алмаштиришини чегаравий масалаларни ечишда асослаш.

Тадқиқотнинг объекти учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар ва уч ўлчовли фазода параболо-гиперболик тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун аналитик ва фундаментал ечим қуриш назарияси ва уч ўлчовли фазода параболо-гиперболик тенгламалар учун чегаравий масалалар тадқиқотидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физиканинг максимум принципи, энергия интеграллари, интеграл тенгламалар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

аналитик ва фундаментал ечимларни учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун махсус функциялар ёрдамида қурилган;

илк бора учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун чегаравий масалаларни Фурье усулида ечиш алгоритми ишлаб чиқилган;

потенциаллар назарияси учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун тўлиқ асосланган;

учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар ечишда Грин функциялари қурилган;

учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган бузилувчи тенглама учун чегаравий масалаларни ечишга Фурье алгоритми тадбиқ қилинган;

уч ўлчовли фазода параболо - гиперболик тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстедт масалаларининг бир қийматли ечимга эга эканлиги кўрсатилган;

уч ўлчовли фазода чегаравий масалаларни ечишда Фурьенинг тўғри ва тескари интеграл алмаштириши мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари аниқланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси ҳосил қилинган аналитик ечимлардан физик жараёларнинг сифат кўрсаткичини аниқлашда ва сонли ҳисоблашларда фойдаланиш мумкинлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун аналитик ва фундаментал ечим, потенциаллар назарияси, Фурье усулини конструктив қуриш ва уч ўлчовли фазода аралаш параболо - гиперболик тенгламаларга қўйилган масалаларни ечишда математик анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физика усуллари қўллаш билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламаларга аналитик ва махсус функциялар орқали қурилган фундаментал ечимлар ва Фурье усулининг алгоритми билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти учинчи тартибли каррали характеристикали тенглама орқали фойдаланувчи физик жараён ва ҳодисаларнинг моделларига тадбиқ этишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламага қўйилган чегаравий масаланинг ошкор ҳолдаги ечим қуриш усулидан «Эластиклик ва пластикликнинг фундаментал муаммолари» мавзусидаги 114030440003 рақамли хорижий грантида учинчи тартибли тенгламага қўйилган янги коррект масаланинг ечишда қўлланилган (Сибир давлат аэрокосмик университетининг 2016 йил 10 майдаги 38/1208-сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланиши аналитик ечимини ҳосил қилиш имконини берган;

Грин функцияси қуриш ёрдамида қўйилган масаланинг қурилган ечимидан «Учинчи тартибли тенгламаларга вақт бўйича интегралли шартлар билан чегаравий масалалар» мавзусидаги 1.3.1 рақамли Мақсадли Федеорал Дастурни амалга оширишда «Инновацион Россия илмий ва илмий-педагогик кадрлар» (2009-2013), хорижий грантда учинчи тартибли тенгламага қўйилган янги чегаравий масаланинг ечимини қуришда фойдаланилган (Шимолий-Шарқий федерал университетининг 2016 йил 5 майдаги 71-277-сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланиши масаланинг ечимини интеграл тенгламага келтиришга хизмат қилган;

чегаравий масалани ечишда учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенглама учун таклиф этилган Фурье усулининг алгоритмидан «Аралаш типли нолокал дифференциал тенгламалар ва уларни динамик системаларда қўлланилиши» мавзусидаги (2013-2015) давлат рақами 01201361965, хорижий грантда янги чегаравий масалаларни ечишда фойдаланилган (РФА Амалий математика ва

автоматлаштириш институтининг 2016 йил 4 майдаги 01-12/84-сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланиши қўйилган масаланинг ошкор ҳолдаги ечимини куришга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқотнинг натижалари илмий-амалий анжуманларда муҳокама қилинган шу жумладан: «Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама ва анализ, информатиканинг турдош муаммолари» (Тошкент, 2004), «Математик физика ва информатиканинг технологиянинг замонавий муаммолари» (Тошкент, 2005), «Дифференциал тенгламалар, операторлар назарияси ва космик технологияларнинг замонавий муаммолари» (Олма-ота, 2006), «Нолокал чегаравий масалалар ва математик биология, информатика ва физиканинг турдош муаммолари» (Нальчик, 2006), «Third Congress of the World Mathematical Society of Turkicsh Countries» (Almaty, 2009), «Амалий математика ва информатиканинг технологияларнинг долзарб муаммолари - Ал-Хорезми-2009» (Тошкент, 2009), «Differential equations and their applications» (Panevėžys, Lithuania, 2009), «IV Congress of the Turkic World Mathematical Society» (Baku, 2011), «Амалий математика ва информатиканинг технологияларнинг долзарб муаммолари-Ал-Хорезми-2012» (Тошкент, 2012), «Амалий математика ва информатиканинг технологияларнинг долзарб муаммолари - Ал-Хорезми-2014» (Самарқанд, 2014), «Математик анализнинг долзарб муаммолари» (Ургенч, 2012), «Дифференциал тенгламалар ва уни тадбиқларининг замонавий муаммолари» (Тошкент, 2013) «Математик физиканинг ноклассик тенгламалари ва уларнинг тадбиқлари» (Тошкент, 2014), «Математик физиканинг замонавий усуллари ва тадбиқлари» (Тошкент, 2015) каби анжуманларда маъруза кўринишида баён этилган ҳамда апробациядан ўтказилган. Тадқиқотнинг натижалари Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтининг «Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг замонавий муаммолари» Республика илмий семинарида (Тошкент, 2006-2011), Ўзбекистон Миллий университетининг «Ҳисоблаш математикаси ва математик физиканинг замонавий муаммолари» илмий семинарида (Тошкент, 2010-2011) муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 45 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 13 та мақола, жумладан, 7 та хорижий ва 6 та республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация таркиби кириш, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 186 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ўтказилган тадқиқотларнинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиқ берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Учинчи тартибли каррали характеристикали тенгламага фундаментал ечим қуриш**» деб номланувчи биринчи боби фундаментал ечим қуришга бағишланган. Чизиксиз акустика ва космик плазманинг гидродинамик назарияси ҳамда ғовак жисмларда суюқликнинг сизиш жараёни моделлари масалалари хусусий хосилали учинчи тартибли дифференциал тенглама орқали ўрганилади.

Чекли амплитудага эга бўлган дисперсион мухитда кичик тўлқинни тадқиқ қилишда модел сифатида Korteveg de Vries тенгламаси деб аталувчи чизиксиз

$$u_y + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta = \text{const} \neq 0. \quad (1)$$

тенгламадан фойдаланилади. Юқоридаги (1) тенгламанинг чизикли бўлган ҳоли учун назария L.Cattabriga, L.Rodino, Т.Д.Джураев, С.Абдиназаров ва уларнинг ўқувчилари томонидан ишлаб чиқилган ва ривожлантирилган.

Базан кичик юзадаги оқим параметрларини кескин ўзгариши кучли тўлқинни хосил бўлишга олиб келади. Бундай ҳолда оқим параметрлари градиентаси шу қадар сезиларли бўладики, бунда оқимнинг чизиксизлигидан ташқари мухитнинг ёпишқоқлигини ва иссиқлик ўтказувчанлигини ҳам ҳисобга олишга тўғри келади. Бундай оқим қисқа тўлқинлар деб аталади. Қисқа тўлқинлар назариясига транстовушли оқим мисол бўла олади. Кейинги пайтда, адабиётларда бундай транстовушли тенгламалар, кўпчилик ҳолларда ёпишқоқ транстовушли тенглама, ёки содда ВТ-тенглама (вязким трансзвуковим уравнением) деб атаб келинаётганини таъкидлаб ўтамыз.

Умумий ҳолдаги

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}}, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial y^{q-1}} \right), \quad (2)$$

бунда $p > q$, $a = \text{const}$, тенгламага тўхталиб ўтамыз.

Бу тенгламани ўрганиш $p=3$, $q=1,2$ бўлган ҳолда дастлаб Н. Block ва Е. Del Vecchio ларнинг ишларида бошланган. Н. Block тамонидан биринчи бўлиб махсус топилган элементар ечимлар суперпозицияси ёрдамида Фурье алмаштиришини қўллаб манба кўринишидаги фундаментал ечимларни қуриш назарияси ишлаб чиқилган. L. Cattabriga томонидан (2) тенгламани $p=2n+1$, $q=2$ бўлган ҳолида юқоридаги усул умумлаштирилди ва

фундаментал ечим қурилди. Қурилган фундаментал ечим $n=1$ бўлган ҳолда қуйидаги кўринишга эга

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} f(t), \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} \varphi(t), \quad (3)$$

бунда

$$f(t) = \begin{cases} t^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_t^\infty \tau^{-3/2} f^*(\tau) d\tau + c^+ \right), & t > 0; \\ |t|^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_t^\infty |\tau|^{-3/2} f^*(\tau) d\tau + c^- \right), & t < 0; \end{cases}$$

$$\varphi(t) = |t|^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_{-\infty}^t |\tau|^{-3/2} \varphi^*(\tau) d\tau + c \right), \quad t < 0;$$

$$f^*(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2}\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2} + \lambda t\right) d\lambda, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$\varphi^*(t) = \int_0^\infty \left[\exp(\lambda t - \lambda^{3/2}) + \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2}\right) \right] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2} + \lambda t\right) d\lambda, \quad t < 0,$$

$$t = (x - \xi)|y - \eta|^{-2/3}, \quad c^+, c^-, c - \text{const.}$$

Фундаментал ечим учун қуйидаги баҳо топилган:

$$\left| \frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h \partial y^k} \right| < c_1 |y - \eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{-\frac{1}{2} \left[2h+3k-1 + \frac{3}{2} (1-(-1)^k) \right]}, \quad \text{бунда } (x - \xi)|y - \eta|^{-\frac{2}{3}} \rightarrow -\infty,$$

$$\left| \frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h \partial y^k} \right| < c_2 |y - \eta|^{-\frac{2h+3k-1}{3}} \exp(-c_3 t^3), \quad \text{бунда } (x - \xi)|y - \eta|^{-\frac{2}{3}} \rightarrow +\infty.$$

Кейинги вақтда учинчи тартибли каррали характеристикали тенгламани вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган ҳоли учун қатор ишлар пайдо бўлди. Булар тўғрисидаги маълумотни L.Cattabriga, L.Rodino, Т.Д.Джураев А.А.Дезин, В.Н.Диесперов, О.С.Рыжов, Ю.В.Засорин ва С.Абдиназаровларнинг ишларидан топиш мумкин.

Республикамизда учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламани ўрганиш Т.Д.Джураев, С.Абдиназаров ҳамда уларнинг ўқувчилари тамонидан ХХ-асрнинг етмишинчи йилларидан бошлаб, изланишлар олиб борилган. Шунинг таъкидлаш лозимки, бу ишларда чегаравий масалалар (3) фундаментал ечимдан фойдаланган ҳолда, потенциаллар усулида амалга оширилган.

Агар (3) фундаментал ечимга эътибор қаратсак, унда такрорий келувчи мураккаб кўринишдаги хосмас интегралларни кўрамиз, бундан эса ундан фойдаланишда такрорий хосмас интегрални ҳисоблаш ва ноъмалум ўзгармаслар билан боғлиқ бўлган табиий қийинчиликлар келиб чиқади. Бундан ташқари х-ўқнинг турли четларида турлича баҳо ҳосил қилинган.

Табиий савол туғилади: фундаментал ечимни янги содда кўринишда, таҳлил қилиш ва фойдаланиш учун қулай бўлган ҳолда қуриш мумкинми?

Албатта, янги кўринишдаги фундаментал ечимни куриш учун, аввалги муаллифлардан фаркли, бошқа усулларни қўллашга тўғри келади.

Диссертацияда учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламанинг фундаментал ечимнинг янги кўриниши ўхшашлик алмаштириши, яъни автомодел ечим куриш усулидан фойдаланиб қурилди.

Биринчи бобнинг биринчи парагрифида

$$L[u] = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

тенгламанинг фундаментал ечими қурилган.

Бу тенглама $t = xy^{-2/3}$ алмаштириш, сўнгра $u' = c\varphi(t)$ белгилаш ёрдамида қуйидаги кўринишни олади

$$\varphi'' - (4/9)t^2\varphi' - (10/9)t\varphi = 0.$$

Юқоридаги тенгламада $\varphi(t) = tZ(\xi)$, $\xi = (4/27)t^3$, алмаштириш бажариб

$$\xi Z'' + \left[(4/3) - \xi\right]Z' - (7/6)Z = 0, \quad (5)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу эса бузиловчи гипергеометрик тенгламанинг стандарт кўринишидан иборат.

Бу (5) тенгламани чизикли эркли ечимлари

$$Z_1(\xi) = \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad Z_2(\xi) = \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right),$$

кўринишда бўлади, бунда $\Psi(a, b; x)\Phi$ $\nleftrightarrow$ b - бузиловчи гипергеометрик функциялар.

Бу ечимдан фойдаланиб (4) тенгламанинг фундаментал ечимлари қуйидаги кўринишда қурилган

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} f(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} \varphi(t), \quad t < 0, \quad (6)$$

бунда

$$f(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} t \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \varphi(t) = \frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3\pi}} t \Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \tau = \frac{4}{27}t^3, \quad t = \frac{x - \xi}{|y - \eta|^{2/3}}.$$

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида бузиловчи гипергеометрик функциянинг маълум баҳолари ва дифференциаллаш формуласидан фойдаланиб қуйидаги баҳолар топилган:

$$\left|f^{*(\nu)}(t)\right| \leq C_{1\nu} |t|^{-\frac{5}{2}-\nu}, \quad |t| \rightarrow \infty, \quad \left|\varphi^{*(\nu)}(t)\right| \leq C_{2\nu} |t|^{-\frac{5}{2}-\nu}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left|f^{(\nu)}(t)\right| \leq C_{3\nu} |t|^{-\frac{1}{2}-\nu}, \quad |t| \rightarrow \infty, \quad \left|\varphi^{(\nu)}(t)\right| \leq C_{4\nu} |t|^{-\frac{1}{2}-\nu}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

фундаментал ечим учун

$$\left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} U(x, y; \xi, \eta)\right| \leq C_{hk} |y - \eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{-\frac{1}{2}\left\{2h+3k-1+\frac{3}{2}[-(-1)^k]\right\}}, \quad \text{бунда } |t| \rightarrow \infty.$$

$V(x, y; \xi, \eta)$ учун $t \rightarrow -\infty$ даги баҳо ҳам юқоридаги кўринишда бўлади.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида фундаментал ечимнинг чегаравий масалалар ечишда ишлатиладиган айрим хоссалари ўрганилган.

Теорема 1. Қуйидаги лимитик тенгликлар ўринли:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{5/2} f^*(t) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{5/2} f^*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{5/2} \varphi^*(t) = -\frac{9\Gamma^2(1/3)}{2\pi^3\sqrt{2}\Gamma(1/6)},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/2} f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-1/2} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-1/2} \varphi(t) = -\frac{192}{5^3\sqrt{2}\sqrt{3\pi}}.$$

Теорема 2. Ихтиёрий $\phi(x) \in C[a, b]$ ва $x_0 \in (a, b)$, бунда $-\infty < a < b < +\infty$ учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \eta \rightarrow y \pm 0}} \int_a^b U_\eta(x, y; \xi, \eta) \phi(\xi) d\xi = \pm \phi(x_0).$$

Теорема 3. $\omega(y) \in C[0, l]$, бунда $l = \text{const} < +\infty$, учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_0^l U_{xx}(x, y; \xi, \eta) \omega(\eta) d\eta = \begin{cases} -(2/3)\omega(y), & x > \xi, \\ (4/3)\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_0^l V_{xx}(x, y; \xi, \eta) \omega(\eta) d\eta = \begin{cases} 2\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi. \end{cases}$$

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфида L.Cattabriga томонидан қурилган фундаментал ечим, унда қатнашувчи ўзгармасларнинг фақат айрим аниқ қийматларидагина (4) тенгламани қаноатлантиришини аниқланган. Асимптотик усулда олинган фундаментал ечимнинг $t \rightarrow +\infty$ даги баҳоси бузиловчи гипергеометрик функция учун маълум бўлган баҳодан фарқ қилади.

Диссертациянинг «**Учинчи тартибли каррали характеристикали тенглама масалаларига Фурье усулини қўллаш**» деб номланувчи иккинчи боби чегаравий масалаларни ечишга Фурье усулини қўллашга бағишланган. Бизга маълум бўлишича, учинчи тартибли каррали характеристикали тенгламалар учун коррект чегаравий масалалар Фурье усулида ечилмаган.

Ушбу диссертацияда учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган ҳамда биринчи тур бузилишга эга бўлган тенгламаларга қўйилган чегаравий масалани ечишда Фурье усули қўлланилган. Бу усулнинг тўла алгоритми келтирилган. Фурье усулининг конструктив назарияси ишлаб чиқилган. Бу усулдан биринчи, иккинчи ва учинчи тур чегаравий масалаларни ечишда фойдаланилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида тўртбурчакли $D = \{(x, y) : 0 < x < p, 0 < y < l\}$ соҳа учун қуйидаги масалалар ечилган.

Масала A_1 . D соҳада (4) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ синфга тегишли, қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u(x, 0) = u(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$u(0, y) = \psi_1(y)$, $u(p, y) = \psi_2(y)$, $u_x(p, y) = \psi_3(y)$, $0 \leq y \leq l$,
бунда $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, ва $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ -маълум функциялар.

Масала A_2 . D сохада (4) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\bar{D})$ синфга тегишли, қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин

$$u_y(x, 0) = u_y(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$u(0, y) = \psi_4(y)$, $u(p, y) = \psi_5(y)$, $u_x(p, y) = \psi_6(y)$, $0 \leq y \leq l$,
бунда $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 4, 5$, ва $\psi_6(y) \in C^2[0, l]$ -маълум функциялар.

Теорема 4. A_1 ва A_2 масалалар биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди.

Теорема 4 энергия интегралини қўллаб исботланган.

A_1 -масалани ечимини қуйидаги қатор кўринишида қурилган

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{1n} e^{-k_n x} + e^{(1/2)k_n x} (C_{2n} \cos \nu_n x + C_{3n} \sin \nu_n x) \right] \sin \frac{\pi n}{l} y. \quad (7)$$

Теорема 5. Агар $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, ва $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$, ҳамда $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i'(0) = \psi_i'(l) = 0$, $i = 1, 2, 3$, бўлса, A_1 -масаланинг ечими мавжуд ва (7) кўринишга эга бўлади.

A_2 масала худди A_1 масала каби ечилади.

Иккинчи бобнинг иккинчи парагрифида (4) тенглама учун

$$D^+ = \{(x, y): 0 < x < \infty, 0 < y < l\}, \quad D^- = \{(x, y): -\infty < x < 0, 0 < y < l\},$$

соҳаларда коррект чегаравий масалалар ўрганилган.

Масала B_1 . D^+ сохада (4) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$ синфга тегишли, $x \rightarrow +\infty$ да x бўйича чегараланган иккинчи ҳосилага эга ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u(x, 0) = u(x, l) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ u(0, y) = \psi_1(y), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l, \quad (8)$$

бунда $\Gamma_1 = \partial D^+ - D^+$ соха чегараси, $\psi_1(y) \in C^3[0, l]$ -маълум функция.

Масала B_2 . D^- сохада (4) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D^-) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^- \cup \Gamma_2)$ синфга тегишли, $x \rightarrow -\infty$ да x бўйича чегараланган биринчи ва иккинчи ҳосилага эга ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u(0, y) = \psi_2(y), \quad u_x(0, y) = \psi_3(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l,$$

бунда $\Gamma_2 = \partial D^-$, D^- соха чегараси, $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 2, 3$ -маълум функциялар.

Теорема 6. B_1 ва B_2 масалалар биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди.

B_1 масаланинг ечими

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{-k_n x} \sin \frac{\pi n}{l} y, \quad (9)$$

B_2 масаланинг ечими

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{2n} e^{(1/2)k_n x} \cos \nu_n x + C_{3n} e^{(1/2)k_n x} \sin \nu_n x \right] \sin \frac{\pi n}{l} y, \quad (10)$$

кўринишга эга.

Теорема 7. Агар $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=1, 2, 3$ ва $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i''(0) = \psi_i''(l) = 0$, $i=1, 2, 3$, бўлса, B_1 ва B_2 масалаларнинг ечими мавжуд ҳамда мос равишда (9) ва (10) кўринишда бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфи чекли ва чексиз соҳада учинчи чегаравий масалани тадқиқ қилишга бағишланган.

Масала E_1 . D соҳада (4) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\bar{D})$ синфга тегишли, қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$\alpha u(x, 0) + \beta u_y(x, 0) = 0, \quad \gamma u(x, l) + \delta u_y(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad (11)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l,$$

бунда α, β ва γ, δ - ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлиб, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ - маълум функциялар.

Масала E_2 . D^+ соҳада (4) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$ синфга тегишли, $x \rightarrow +\infty$ да x бўйича чегараланган иккинчи ҳосилга эга бўлган, (11) ҳамда

$$u(0, y) = \psi_7(y), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l.$$

чегаравий шартни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Масала E_3 . D^- соҳада (4) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D^-) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^- \cup \Gamma_2)$ синфга тегишли, $x \rightarrow -\infty$ да x бўйича чегараланган биринчи ва иккинчи ҳосилга эга бўлган, (11) ҳамда

$$u(0, y) = \psi_8(y), \quad u_x(0, y) = \psi_9(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l,$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин

Теорема 8. Агар $\alpha\beta \leq 0$, $\gamma\delta \geq 0$ бўлса E_1 масала биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди.

E_1 масаланинг ечимини $u(x, y) = X(x)Y(y)$ кўринишда излаб, $Y(y)$ функцияни топиш учун Штурм-Лиувилли масаласига келамиз. Параметр λ нинг шундай қиймати топилсинки:

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad \alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0, \quad \gamma Y(l) + \delta Y'(l) = 0,$$

масала нолдан фарқли ечимга эга бўлсин.

Бу масалани ечиб, хос қиймат $\lambda_n = (\xi_n/l)^2$, топилган ва $\{\lambda_n\}$ ўсувчи кетма-кетлик ташкил этиши кўрсатилган. Унга мос хос функцияларни эса

$$Y_n(y) = (\alpha \sin \sqrt{\lambda_n} y - \beta \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} y) A_n,$$

кўринишда эканлиги, бу система $[0, l]$ кесмада ортогонал бўлиши исботланган.

E_1 масаланинг ечими қуйидаги кўринишда топилади

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} B_{1n}(x) + A_{2n} B_{2n}(x) + A_{3n} B_{3n}(x)] Y_n(y). \quad (12)$$

Куйидаги тасдиқ ўринли

Теорема 9. Агар $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=1, 2$ ва $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$, ҳамда $\alpha\psi_i(0) + \beta\psi'_i(0) = 0$, $\gamma\psi_i(l) + \delta\psi'_i(l) = 0$, $i=1, 2, 3$, бўлса E_1 масаланинг ечими мавжуд ва у (12) кўринишда бўлади.

E_2 масаланинг ечими

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{-k_n x} Y_n(y), \quad (13)$$

E_3 масалани ечими эса

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2}k_n x} \left[C_{2n} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(v_n x + \frac{\pi}{6}) + C_n \frac{2}{\sqrt{3}k_n} \sin v_n x \right] Y_n(x), \quad (14)$$

кўринишда топилади.

Теорема 10. Агар $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=7, 8, 9$, ҳамда $\alpha\psi_i(0) + \beta\psi'_i(0) = 0$, $\gamma\psi_i(l) + \delta\psi'_i(l) = 0$, $i=7, 8, 9$, бўлса E_2 , E_3 масаланинг ечими мавжуд ва мос равишда (13) ва (14) кўринишда бўлади.

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида биринчи тур бузилишга эга бўлган тенглама учун чегаравий масала ўрганилган.

$D^+ = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ соҳада

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - x^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad n > 0 \quad (15)$$

тенглама учун куйидаги масала тадқиқ қилинган.

Масала $B_1^n \cdot D_1^+$ соҳада (15) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$ синфга тегишли, $x \rightarrow +\infty$ бўлганда x бўйича чегараланган иккинчи ҳосиллага эга бўлган, куйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (16)$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad (18)$$

бунда $\psi(y) \in C^3[0, 1]$ -маълум функция.

Масала $B_2^n \cdot D_1^+$ соҳада (15) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$ синфга тегишли, $x \rightarrow +\infty$ бўлганда x бўйича чегараланган иккинчи ҳосиллага эга бўлган, (17), (18) ва $u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0$, шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бунда $\psi(y) \in C^3[0, 1]$ - маълум функция.

Теорема 11. B_1^n масала биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди.

Масаланинг ечимини $u(x, y) = Z(x)Y(y)$, кўринишда излаб, куйидаги оддий дифференциал тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$Z'''(x) + \lambda x^n Z(x) = 0, \quad Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad (19)$$

бунда $\lambda > 0$ - ўзгармас сон.

Келтирилган (15) тенгламани (16) шартни қаноатлантирувчи ечими

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(x) \sin \pi k y, \quad (20)$$

қўринишда бўлади, бунда $Z_k(x) = c_{1k} F_{1k}(x) + c_{2k} F_{2k}(x) + c_{3k} F_{3k}(x)$.

Теорема 12. Агар $\psi(y) \in C^3[0, 1]$, ҳамда $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$, бўлса, B_1^n масаланинг ечими мавжуд ва у (20) қатор қўринишида бўлади.

B_2^n масала B_1^n масала каби ечилади.

Диссертациянинг «Учинчи тартибли каррали характеристикали тенглама масалаларига Грин функцияси қуриш ва уларни қўллаш» деб аталувчи учинчи бобида чегаравий масалалар фундаментал ечимдан фойдаланиб, Грин функцияси қуриш усули ёрдамида ечилган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида акслантириш усулидан фойдаланиб биринчи чегаравий масала ечилган.

Масала K_1 . D соҳада (4) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\bar{D})$ синфга тегишли, қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq p, \\ u(0, y) &= \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l, \end{aligned} \quad (21)$$

бунда $\varphi_i(x) \in C[0, p]$, $i = 1, 2$, $\psi_j(y) \in C^3[0, l]$, $j = 1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ - маълум функциялар.

Теорема 13. K_1 -масала биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди.

Қуйидаги ёрдамчи масалани кўрамыз.

Масала K_{11} . D соҳада (4) тенгламани, (21) шартни қаноатлантирувчи $v(x, y)$ ечими қурилсин. Ёрдамчи масалани ечиш учун

$$\begin{aligned} Z(x, y; \xi, \eta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [U(x, 2ml + y; \xi, \eta) - U(x, 2ml - y; \xi, \eta)], \\ T(x, y; \xi, \eta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [V(x, y + 2ml; \xi, \eta) - V(x, 2ml - y; \xi, \eta)], \quad x - \xi < 0. \end{aligned} \quad (22)$$

функцияларни тузиб оламиз.

Теорема 14. $Z(x, y; \xi, \eta)$ ва $T(x, y; \xi, \eta)$ функциялар у аргументга нисбатан даврий функциялар бўлиб, уларни даври $2l$ га тенг, яъни

$$Z(x, y + 2l; \xi, \eta) = Z(x, y; \xi, \eta), \quad T(x, y + 2l; \xi, \eta) = T(x, y; \xi, \eta).$$

K_{11} - ёрдамчи масалани ечими

$$v(x, y) = -\frac{1}{2} \int_0^p Z_{\eta}(x, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^p Z_{\eta}(x, y; \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi, \quad (23)$$

қўринишда бўлади.

K_1 - масала ечимини $\mathcal{G}(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$, кўринишда қидирамиз, бунда $u(x, y)$ функция K_1 -масаланинг ечими, $v(x, y)$ функция эса (23) кўринишга эга. У ҳолда $\mathcal{G}(x, y)$ функция учун қуйидаги масалани ҳосил қиламиз:

$$\mathcal{G}_{xxx} - \mathcal{G}_{yy} = 0, \quad \mathcal{G}(x, 0) = \mathcal{G}(x, l) = 0, \quad (24)$$

$$\mathcal{G}(0, y) = \overline{\psi_1}(y), \quad \mathcal{G}(p, y) = \overline{\psi_2}(y), \quad \mathcal{G}_x(p, y) = \overline{\psi_3}(y).$$

(24)-масалани эса 2.1-параграфдаги A_1 масала каби ечилади.

$\mathcal{G}(x, y)$ ечимни ҳосил қилгач

$$u(x, y) = \mathcal{G}(x, y) + v(x, y), \quad (25)$$

ечимга эга бўламиз, бунда $\mathcal{G}(x, y)$ ва $v(x, y)$ ечимлар мос равишда (12) ва (23) кўринишда бўлади.

Қуйидаги теорема исботланди.

Теорема 15. Агар $\varphi_j(x) \in C[0, p]$, $j = 1, 2$, ва $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$, $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i'(0) = \psi_i'(l) = 0$, $i = 1, 2, 3$, K_1 -масаланинг ечими мавжуд ва у (25) кўринишда бўлади.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфда $D_\infty = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < l\}$ соҳада

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (26)$$

тенглама учун қуйидаги масала ўрганилган.

Масала B_1^* . D_∞ соҳада (26) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D_\infty) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_\infty \cup \Gamma_3)$ синфга тегишли, $x \rightarrow -\infty$ да чегараланган биринчи ҳосилага, $x \rightarrow \pm\infty$ да чегараланган иккинчи ҳосилага эга бўлган, қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad (28)$$

бунда $\varphi_i(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $i = 1, 2$, $g(x, y) \in C(D_\infty \cup \Gamma_3)$, $\Gamma_3 = \partial D_\infty - D_\infty$ соҳа чегарасидан иборат, бундан ташқари, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_i'(x) = 0$, $i = 1, 2$,

мувофиқлик шарти бажарилади.

Теорема 16. B_1^* - масала биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди.

Лемма 1. B_1^* масаланинг чексиз соҳадаги Грин функцияси

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [U(x, 2ml + y; \xi, \eta) - U(x, 2ml - y; \xi, \eta)], \quad (29)$$

кўринишга эга.

B_1^* масаланинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\eta}(x, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\eta}(x, y; \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \iint_{D_{\infty}} G(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (30)$$

Лемма 2. Айтайлик $|x| \rightarrow \infty$ да $\varphi_i(x)$ ва $g(x, y)$ функциялар y бўйича бир жинсли бўлиб,

$$\varphi_i(x) = O(|x|^{-\alpha}), \quad i=1, 2, \quad (\alpha > 1/3), \quad g(x, y) = O(|x|^{-\beta}), \quad (\beta > 3/2), \quad (31)$$

кўринишга эга бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ учун

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x_0, y) = \varphi_1(x_0), \quad \lim_{y \rightarrow l} u(x_0, y) = \varphi_2(x_0), \quad \text{тенглик ўринли бўлади.}$$

Теорема 17. Айтайлик $\varphi_i(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $i=1, 2$, $g(x, y) \in C(D_{\infty} \cup \Gamma)$ ва $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi'_i(x) = 0$, $i=1, 2$, ҳамда (31) тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда B_1^* масаланинг ягона ечими (30) формула билан топилади ва $G(x, y; \xi, \eta)$ -Грин функцияси (29) кўринишга эга бўлади.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида тўртбурчакли соҳада биринчи ва иккинчи чегаравий масалалар қурилган Грин функцияси ёрдамида ечилган.

Масала A_{31} . D соҳада (26) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ синфга тегишли қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирувчи

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < p, \quad (32)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 < y < l, \quad (33)$$

бунда $\varphi_i(x) \in C[0, p]$, $i=1, 2$, $\psi_j(y) \in C[0, l]$, $j=\overline{1, 3}$, $g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$,

бўлган, ҳамда

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \psi_1(0), \quad \varphi_1(p) = \psi_2(0), \quad \varphi'_1(p) = \psi_3(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(l), \\ \varphi_2(p) &= \psi_2(l), \quad \varphi'_2(p) = \psi_3(l), \quad g(x, 0) = g(x, l) = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

мувофиқлик шартлари ўринли бўладган ечими топилсин.

Масала A_{32} . D соҳада (26) тенгламанинг $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ синфга тегишли, (33) ва $u_y(x, 0) = \varphi_3(x)$, $u_y(x, l) = \varphi_4(x)$, $0 < x < p$, чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бунда

$$\varphi_i(x) \in C[0, p], \quad i=3, 4, \quad \psi_j(y) \in C[0, l], \quad j=\overline{1, 3}, \quad g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D}).$$

Теорема 18. A_{31} - масала биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди.

A_{31} масаланинг ечимини

$$\begin{aligned} 2u(x, y) &= \int_0^l G_{\xi\xi}(x, y, p, \eta) \psi_2(\eta) d\eta - \int_0^l G_{\xi\xi}(x, y, 0, \eta) \psi_1(\eta) d\eta - \\ &- \int_0^l G_{\xi}(x, y, p, \eta) \psi_3(\eta) d\eta + \int_0^p G_{\eta}(x, y, \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi - \end{aligned} \quad (35)$$

$$-\int_0^p G_\eta(x, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi - \iint_D G(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

кўринишда ҳосил қиламиз.

A_{31} масаланинг аввалги масалалардан фарқли равишда, интеграл тенглама орқали ифодааланган ошкор ҳолдаги ечимини ҳосил қилдик.

Шундай қилиб қуйидаги теорема исбот қилинди.

Теорема 19. Айтайлик $\varphi_i(x) \in C[0, p]$, $i=1, 2$, $\psi_j(y) \in [0, l]$, $j=\overline{1, 3}$, $g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$, бундан ташқари (34) мувофиқлик шарти бажарилсин, u ҳолда A_{31} -масаланинг ечими (35) кўринишда бўлади, бунда $G(x, y; \xi, \eta)$ - Грин функцияси (29) формула билан топилган.

A_{32} масала ҳам A_{31} масала каби ишланади.

Диссертациянинг «**Фазода аралаш параболо-гиперболик тенгламага чегаравий масалалар**» деб номланувчи тўртинчи бобининг биринчи парагрифида Трикоми масаласи уч ўлчовли фазода тип ўзгариш текислиги характеристик бўлмаган ҳолда ўрганилган.

Италиялик Ф. Трикоми томонидан асос солинган аралаш типли тенгламалар назарияси, ҳозирги даврга келиб хусусий ҳосилалари дифференциал тенгламалар назариясининг жадал ривожланаётган соҳасига айланди.

А.В.Бицадзе томонидан аралаш эллиптико - гиперболик тенглама учун уч ўлчовли чексиз соҳада Фурьенинг интеграл алмаштиришини қўллаш ёрдамида чегаравий масала ечилган.

Айтайлик Ω - евклид фазосида x, y, z уч ўлчовли фазонинг призматик соҳаси бўлсин.

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y + U_{zz}, & \text{в } \Omega^+, \\ U_{xx} - (-x)^m (U_{yy} + U_{zz}), & \text{в } \Omega^-, m > 0, \end{cases} \quad (36)$$

тенглама учун қуйидаги масалани кўрамиз.

Масала Т. Ω^+ ва Ω^- соҳаларда (36) тенгламанинг қуйидаги хоссаларга эга бўлган $U(x, y, z)$ регуляр ечими топилсин:

- 1) $U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega^\pm}) \cap [C^1(\Omega^+ \cup I) \cup C^1(\Omega^- \cup I)] \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$,
- 2) $U|_{s_1} = \Phi_1(x, z)$, $0 \leq x \leq h$; $U|_{s_2} = \Phi_2(y, z)$, $0 \leq y \leq 1$;
 $U|_{s_5} = \Psi(y, z)$, $0 \leq y \leq 1/2$; $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0$;

чегаравий шартларни

$$U(-0, y, z) = \alpha U(+0, y, z),$$

$$3) \quad U_x(-0, y, z) = \beta(y) U_x(+0, y, z) + \delta(y) U(+0, y, z) + P(y, z),$$

$$\alpha = \text{const}, (y, z) \in I, \lim_{z \rightarrow \pm\infty} P(y, z) = 0,$$

уланиш шартини қаноатлантирсин.

А.В.Бицадзе томонидан таклиф этилган усулни қўллаб, масала ечимини Фурье интегралли синфидан қидирамиз.

У ҳолда масала T эквивалент ҳолда текисликдаги масала T_λ га келади.

Масала T_λ нинг ечимининг ягоналиги максимум принципи асосида кўрсатилган. Ечимни мавжудлиги эса масала T_λ га эквивалент равишда $0 < m < 2$, $m = 2$, $m > 2$ ҳолларда алоҳида изланишни талаб этувчи Вольтерра типидagi иккинчи тур интеграл тенгламага келтирилган.

Тўртинчи бобнинг иккинчи парагрифида Геллерстед масаласи уч ўлчовли фазода тип ўзгариш текислиги характеристик бўлган ҳолда қаралган.

Ω^* - евклид фазосида x, y, z уч ўлчовли фазонинг призматик соҳаси бўлсин.

$$0 = \begin{cases} U_{xx} + U_{zz} - U_y, & \text{в } \Omega_1^*, \\ -(-y)^m (U_{xx} + U_{zz}) + U_{yy}, & \text{в } \Omega_k^*, \quad k = 2, 3, \quad m > 0, \end{cases} \quad (37)$$

тенглама учун қуйидаги масалани кўрамиз.

Масала G . Ω_k^* , $(k = \overline{1})$, соҳада (37) тенгламанинг қуйидаги хоссаларга эга бўлган $U(x, y, z)$ регуляр ечими топилсин:

$$1) \quad U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega_k^*}) \cap \left[C^1(\Omega_1^* \cup I_1 \cup I_2) \cup C^1(\Omega_2^* \cup I_1) \cup C^1(\Omega_3^* \cup I_2) \right] \cap \\ \cap C^2(\Omega_1^* \cup \Omega_2^* \cup \Omega_3^*), \quad k = \overline{1, 3};$$

2) $-\infty < z < +\infty$ да чегаравий

$$U|_{s_1} = \Phi_i(y, z), \quad 0 \leq y \leq h, \quad i = 1, 2, \quad U|_{s_4} = \Psi_1(y, z), \quad 0 \leq x \leq \varepsilon/2,$$

$$U|_{s_6} = \Psi_3(y, z), \quad \varepsilon \leq x \leq (1 + \varepsilon)/2, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0,$$

$$U(x, -0, z) = U(x, +0, z)$$

$$U_y(x, -0, z) = b_k(x)U_y(x, +0, z) + c_k(x)U(x, +0, z) + P_k(x, z),$$

$$\alpha = \text{const}, \quad (x, z) \in I_k, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} P_k(x, z), \quad k = 1, 2,$$

уланиш шартларни қаноатлантирсин.

Масала G ҳам масала T каби ўрганилади.

ХУЛОСАЛАР

Диссертация иши учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенглама учун аналитик ва фундаментал ечим ва потенциаллар назариясини ривожлантириш, ҳамда уч ўлчовли фазода аралаш параболо-гиперболик тенглама учун чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечимга эга эканлигини кўрсатишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. Аналитик ва фундаментал ечимлар учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун махсус функциялар ёрдамида қурилганлигини таъкидлаш лозим.

2. Илк бора учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун чегаравий масалаларни Фурье усулида ечиш алгоритми тўлиқ асосланганлигини эътироф этиш мумкин.

3. Потенциаллар назариясининг учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламалар учун тўлиқ асослари келтирилган.

4. Учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган тенгламаларга қўйилган чегаравий масалалар ечишда Грин функциялари қурилганлигини таъкидлаш лозим.

5. Учинчи тартибли каррали характеристикали вақт бўйича иккинчи ҳосилага эга бўлган бузилувчи тенглама учун чегаравий масалаларни ечишга Фурье алгоритми тадбиқ қилинганлигини таъкидлаш мумкин.

6. Уч ўлчовли фазода параболо - гиперболик тенгламалар учун Трикоми ва Геллерстед масалаларининг бир қийматли ечимга эга эканлиги исботланган.

7. Уч ўлчовли фазода чегаравий масалаларни ечишда Фурьенинг тўғри ва тескари интеграл алмаштириши мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари топилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ 14.07.2016.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК
ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

**НАМАНГАНСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ**

АПАКОВ ЮСУПЖОН ПУЛАТОВИЧ

**К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ В ТРЕХМЕРНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ**

**01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика
(физико-математические науки)**

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Ташкент – 2016

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № 30.09.2014/B2014.3-4.FM87

Докторская диссертация выполнена в Наманганском инженерно-педагогическом институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz>) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:

Джураев Тухтамурад Джураевич

доктор физико-математических наук, академик

Официальные оппоненты:

Дженалиев Муваширхан Танабаевич

доктор физико-математических наук, профессор

Уринов Ахмаджон Кушакович

доктор физико-математических наук, профессор

Хасанов Акназар Бекдурдиевич

доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация:

«Институт прикладной математики и автоматизации». Федеральное государственное бюджетное научное учреждение (Российская Федерация).

Защита диссертации состоится «___» _____ 2016 года в ____ часов на заседании Научного совета 14.07.2016.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №___). (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2016 года.

(протокол рассылки №_____ от «___» _____ 2016 года).

А.А. Абдушукуров

Председатель научного совета по присуждению
ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

Г.И. Ботиров

Ученый секретарь научного совета по присуждению
ученой степени доктора наук, к.ф.-м.н.

М.С. Салахитдинов

Председатель научного семинара при научном
совете по присуждению ученой степени доктора
наук, д.ф.-м.н., профессор, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решение ряда фундаментальных проблем в области различных прикладных наук на мировом уровне требует создания уточненных математических моделей изучаемых физических процессов, разработки новых методов их исследования и внедрения полученных результатов в практику. Исходя из потребности практики, повысилось внимание к теории уравнений высокого порядка, в частности, к теории уравнений в частных производных третьего порядка. Среди уравнений третьего порядка особое место занимают уравнения с кратными характеристиками именно благодаря своим специфическим характеристикам. Для изучения волн малой, но конечной амплитуды в дисперсионных средах в качестве модельного уравнения часто используют уравнение Кортевега - де Фриза, которое является нелинейным уравнением третьего порядка с кратными характеристиками, содержащим первую производную по времени. Разработанная теория для этих уравнений послужила импульсом для начала исследований и для других классов уравнений - уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторые производные по времени. В связи со сложностью процессов, связанных с вышеуказанными уравнениями и отсутствием разработанных в достаточной мере аналитических методов, исследование уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторые производные по времени, является одним из приоритетных направлений.

Учёными нашей страны получены весомые результаты в исследованиях уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих первую производную по времени. Для таких уравнений высокого порядка построены фундаментальные решения, выраженные через специальную функцию, изучены их свойства и поведение, также решены краевые задачи. Используя фундаментальное решение, построенное L.Cattabriga, исследованы краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторые производные по времени. По уравнениям смешанного типа и высокого порядка составного и смешанно-составного типа достигнуты определенные результаты, признанные во всем мире. Уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, требуют построения фундаментальных решений через специальную функцию, изучения их свойств и поведения и решения с их помощью краевых задач, а для этого необходим поиск новых подходов к решению этой проблемы.

Исследования процессов нелинейной акустики, гидродинамической теории космических плазм, нелинейного колебания, движения жидкости в канале, окруженном пористой средой и т.д. связаны с изучением уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторые производные по времени, а также задач для уравнений смешанного парабола

- гиперболического типа, чем и объясняется необходимость исследований этих уравнений.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в постановлениях Президента Республики Узбекистан номер ПП-436 от 7 августа 2006 года «О мерах по совершенствованию координации и управления развитием науки и технологии», а также номер ПП-916 от 15 июля 2008 года «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий производства» и в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации¹. Научные исследования по построению фундаментальных решений и теории потенциалов, изучению их свойств и различных краевых задач в конечных и бесконечных областях для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторые производные по времени, ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: Балонском университете, Туринском университете, (Италия), Университете Фатих, (Турция), Вильнюсском университете (Литва), Московском государственном университете, Новосибирском государственном университете, Башкирском государственном университете, Северо - Восточном федеральном университете и Кабардино-Балкарском государственном университете, Математическом институте Российской академия наук, Институте прикладной математики и автоматизации Кабардино - Балкарского научного центра Российской академия наук (Россия).

В результате исследований уравнения смешанного типа в мире получен ряд результатов, в частности, разработана теория решения краевых задач для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа (Туринском университете, Италия); изучены краевые задачи для вырождающихся уравнений эллипτικο-гиперболического типа (Университете Уппсала, Швеция); доказан принцип максимума для эллипτικο-гиперболического уравнения (Московский государственный университет, Математическом институте Российской академия наук); исследованы нелокальные задачи для уравнений смешанного эллипτικο - гиперболического типа (Институт

¹ Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Arkiv Mathematics Astronomis, www.springer.com/mathematics/journal/11512; Rendiconti del seminario matimatico della univ di Padava; Communes Partial Differential Equations; Успехи математических наук, www.mathnet.ru/umn; Математические заметки, www.mathnet.ru/mz, Сибирский математический журнал, www.springer.com; Сибирский журнал индустриальной математики, www.math.nsc.ru/publishing/SIBJIM/sibjim.html, Дифференциальные уравнения, www.link.springer.com/journal/10625, также были использованы и другие источники

прикладной математики и автоматизации Кабардино - Балкарского научного центра Российской академия наук, Московский, Новосибирский, Самарский государственные университеты); найдены собственная число и собственная функция спектральной задачи для смешанного уравнения (Московский государственный университет, Институт математики и математического моделирования, Казахстан); разработан способ решения краевых задач для уравнений высокого порядка составного и смешанно-составного типов (Математическом институте Сибирского отделения Российской академия наук, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино - Балкарского научного центра Российской академия наук, Институт математики при Национальном университете Узбекистана); найдены способы исследования краевых задач смешанного эллипτικο-параболического и парабола-гиперболического уравнений (Математическом институте Сибирского отделения Российской академия наук, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино - Балкарского научного центра Российской академия наук, Институт математики и математического моделирования, Казахстан, Институт математики при Национальном университете Узбекистана); исследованы краевые задачи для смешанного эллипτικο-гиперболического уравнения в ограниченной области трехмерного пространства (Калифорнийском университете, Мэрилендском университете (США), Математическом институте Сибирского отделения Российской академия наук); разработаны способы решения краевых задач для смешанного эллипτικο-гиперболического уравнения в неограниченной области трехмерного пространства с помощью интегрального преобразования Фурье (Математическом институте Сибирского отделения Российской академия наук, Кабардино-Балкарский государственном университете, Московский государственном университете, Самарский государственном университете (Россия), Институт математики при Национальном университете Узбекистана).

На мировом уровне осуществляется ряд научно - исследовательских работ в приоритетных направлениях по теории уравнений смешанного типа и уравнений с кратными характеристиками, а именно: по созданию математической модели, более адекватно отражающей реальные процессы, и решение полученных граничных задач; построению аналитических решений граничных задач; созданию устойчивых алгоритмов числовых моделей; решению многомерных пространственных задач.

Степень изученности проблемы. Первые результаты по изучению уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторые производные по времени, построению фундаментальных решений, теории потенциалов и их свойств, исследованию краевых задач получены в работах Н.Block, E.Del Vecchio. Далее эти результаты были развиты в работах L.Cattabriga. В работе А.А. Дезина уравнения с кратными характеристиками исследованы методами функционального анализа. В трудах Т.Д.Джураева, С.Абдиназарова и их учеников исследовались

краевые задачи методом потенциалов с применением фундаментального решения, построенного в работе L.Cattabriga.

Нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками, играющее важную роль в теории нелинейных волн, в основном, гидродинамического происхождения, впервые было получено Ж. Вускинсом. Однако подробный анализ был проведен Д. Кортевегом и Г. де Фризом. С точки зрения приложения, важность этих исследований была обоснована в работах В.Н.Диесперова, О.С.Рыжова и Ю.В.Засорина. А в работах В. Галактионова изучены автомодельные решения для нелинейных уравнений с кратными характеристиками. A.Ashyraliev, N.Aggez, F.Hazenci занимались нахождением численного решения.

Уравнения составного типа и с кратными характеристиками являются основными представителями уравнений третьего порядка. Усилиями А.В.Бицадзе, М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева, В.Н.Врагова, Т.Ш.Кальменова, М.Т.Дженалиева и их учеников разработаны основы теории уравнений третьего порядка. Краевые задачи для смешанных эллипτικο-гиперболических уравнений в ограниченных трехмерных областях исследованы в работах M.N.Potter, M. Shnaeider, A.B.Бицадзе, А.М.Нахушева, В.П.Диденко, Г.Д.Каратопраклиева, В.Н.Врагова, Н.Г.Сорокиной. Впервые краевые задачи для смешанных эллипτικο - гиперболических уравнений в неограниченных трехмерных областях с помощью интегрального преобразования Фурье исследованы в работе А.В.Бицадзе. После этого появился ряд работ, где рассматриваются краевые задачи для уравнений эллипτικο - гиперболического типа в бесконечной цилиндрической области. Это работы А.М.Нахушева, С.М.Пономарева, М.С.Салахитдинова и Б.Исломова. В работе А.М.Ежова и С.П.Пулькина для уравнений эллипτικο - гиперболического типа на основе принципа максимума найдена априорная оценка для искомых решений и установлены необходимые условия существования обратного преобразования Фурье.

Краевые задачи для смешанных уравнений параболо - гиперболического типа в трехмерном пространстве рассматривались лишь в работах Т.Д.Джураева, А.Сопуева, Ю. П. Апакова, Б. Исломова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ 07- «Теория дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка» Наманганского инженерно - педагогического института.

Целью исследования являются разработка аналитической теории и построение фундаментальных решений для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, решения краевых задач для уравнений с кратными характеристиками и для смешанного параболо-гиперболического типа.

Задачи исследования:

построение теории разработки аналитических и фундаментальных решений для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, выполняется с помощью специальных функций;

построение конструктивной теории метода Фурье для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени;

развитие теории потенциалов для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени;

для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, построение и применение функции Грина к решению краевых задач;

разработка теории решения краевых задач для вырождающихся уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени;

доказательство однозначной разрешимости задач Трикоми и Геллерстедта для уравнения смешанного параболо - гиперболического типа в трехмерном пространстве;

обоснование методов прямого и обратного интегрального преобразования Фурье для решения краевых задач в трехмерном пространстве.

Объектом исследования являются уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторую производную по времени, и смешанные параболо - гиперболические уравнения второго порядка в трехмерном пространстве.

Предметом исследования являются построение теории аналитических и фундаментальных решений для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени, и исследования краевых задач для параболо - гиперболических уравнений в трехмерном пространстве.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, дифференциальных уравнений и принцип максимума, интеграл энергии и теория интегрального уравнения математической физики.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

построены аналитические и фундаментальные решения для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, с помощью специальных функций;

впервые разработан алгоритм решения краевых задач методом Фурье для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени;

полностью обоснована теория потенциалов для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени;

для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, построены функции Грина к решению краевых задач;

применен алгоритм решения краевых задач методом Фурье для вырождающихся уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени;

показана однозначная разрешимость задач Трикоми и Геллерстедта для смешанного парабола - гиперболического уравнения в трехмерном пространстве;

установлены необходимые и достаточные условия прямого и обратного интегрального преобразования Фурье для решения краевых задач в трехмерном пространстве.

Практические результаты исследования состоят в возможности применения аналитических решений при исследовании качественных свойств физических процессов и в численных вычислениях.

Достоверность результатов исследования. Для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, построенных аналитических и фундаментальных решений, теории потенциалов, алгоритма решения краевых задач методом Фурье, а также исследования задач для смешанных парабола - гиперболических уравнений достоверность обоснована методами математического анализа, дифференциальных уравнений и математической физики.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что получены аналитические и фундаментальные решения, построенные с помощью специальных функций, алгоритм метода Фурье для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени.

Практическое значение диссертационного исследования определяется применением полученных в работе научных результатов в изучении физических процессов, описываемых при помощи уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

построенные явные решения краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, были использованы для решения новых корректных краевых задач для уравнений третьего порядка в зарубежных грантах 114030440003 «Фундаментальные проблемы упругости и пластичности» (Сибирского государственного аэрокосмического университета 38/1208 от 10 мая 2016

года). Применение этих научных результатов позволило получить аналитическое решение задачи;

результаты по построению решения краевых задач с помощью функции Грина были использованы для построения решения новых граничных задач для уравнения третьего порядка, в теме за номером 1.3.1 в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013) и по теме «Краевые задачи с интегральным граничным условием по времени для уравнения третьего порядка» (Северо-Восточный федеральный университет, справка 71-277 от 5 мая 2016 года). Применение этих научных результатов послужили сведению решения задач к интегральному уравнению;

предложенный алгоритм решения краевых задач методом Фурье для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, был использован при решении новых краевых задач в зарубежных грантах по теме «Нелокальные дифференциальные уравнения смешанного типа и их применение к динамическим системам», госрегистрация: 01201361965 (2013-2015). (Институт прикладной математики и автоматизации РАН, справка 01-12/84 от 4 мая 2016 года). Применение этих научных результатов способствовало построению явных решений поставленных задач.

Апробация результатов исследования. Основные результаты исследования обсуждались на научно-практических конференциях, в том числе: «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики» (Ташкент, 2004), «Современные проблемы математической физики и информационных технологий» (Ташкент, 2005), «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий» (Алматы, 2006), «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (Нальчик, 2006), «Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries» (Almaty, 2009), «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хорезми-2009» (Ташкент, 2009), «Differential equations and their applications» (Panevėžys, Lithuania. 2009), «IV Congress of the Turkic World Mathematical Society» (Baku, 2011), «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хорезми-2012» (Ташкент, 2012), «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль - Хорезми-2014», (Самарканд, 2014), «Актуальные проблемы математического анализа» (Ургенч, 2012), «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 2013), «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2014), «Современные методы математической физики и их приложения», (Ташкент, 2015), выступления и доклады прошли широкую апробацию. Результаты исследования обсуждались на республиканском семинаре по дифференциальным уравнениям «Современные проблемы

теории дифференциальных уравнений в частных производных» Института Математики при Национальном Университете Узбекистана (Ташкент, 2006-2011), на семинаре «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» при Национальном Университете Узбекистана (Ташкент, 2010-2011).

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 45 научных работ, из них 13 входит в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе из них 7 опубликованы в зарубежных журналах и 6 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 186 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновываются актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии с исследованиями в приоритетных направлениях развития науки и технологий Республики Узбекистан, даётся обзор международных научных исследований по теме диссертации, раскрываются степень изученности проблемы и связь с научным направлением института, формулируются цели и задачи, а также объект и предмет исследования, излагаются научная новизна и практические результаты исследования, обосновывается достоверность полученных результатов, раскрывается ее теоретическая и практическая значимость, приведен список внедрений в практику результатов исследования и опубликованных работ, даются сведения об апробации полученных результатов и структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «**Построение фундаментальных решений для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками**», посвящена построению фундаментальных решений.

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, а также задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах.

Для изучения волн малой, но конечной амплитуды в дисперсионных средах в качестве модельного уравнения часто используют уравнение Кортевега - де Фриза

$$u_y + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta = \text{const} \neq 0. \quad (1)$$

В линейном случае теория уравнений (1) разработана и развита в трудах L.Cattabriga, L.Radino, Т.Д.Джураева, С.Абдиназарова и их учеников.

Часто довольно резкие изменения параметров потока происходят в узких областях, относящихся к ударным волнам. Градиенты параметров потока в

эту область могут быть настолько значительными, что наряду с нелинейным характером движения становится необходимым учитывать влияние вязкости и теплопроводности. Такие течения называются короткими волнами. К теории коротких волн относится теория трансзвуковых течений. Следует отметить, что в последнее время в литературе это уравнение все больше называют вязким трансзвуковым уравнением, или просто ВТ-уравнением.

Остановимся на уравнении для общего случая

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}}, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial y^{q-1}} \right), \quad (2)$$

где $p > q$, $a = \text{const}$. Это уравнение для случаев $p=3$, $q=1,2$ впервые были начаты исследованием в работах Н. Block и Е. Del Vecchio. Н. Block разработал способ построения фундаментального решения с помощью суперпозиции специально подобранных элементарных решений и, используя преобразования Фурье, построил решение типа источника. В работе L. Cattabriga эти результаты были обобщены для уравнения (2) в случае $p=2n+1$, $q=2$. Построенные фундаментальные решения при $n=1$ имеют вид

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} f(t), \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} \varphi(t), \quad (3)$$

здесь

$$f(t) = \begin{cases} t^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_t^\infty \tau^{-3/2} f^*(\tau) d\tau + c^+ \right), & t > 0; \\ |t|^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_t^\infty |\tau|^{-3/2} f^*(\tau) d\tau + c^- \right), & t < 0; \end{cases}$$

$$\varphi(t) = |t|^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_{-\infty}^t |\tau|^{-3/2} \varphi^*(\tau) d\tau + c \right), \quad t < 0;$$

$$f^*(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2}\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2} + \lambda t\right) d\lambda, \quad -\infty < t < +\infty,$$

$$\varphi^*(t) = \int_0^\infty \left[\exp(\lambda t - \lambda^{3/2}) + \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2}\right) \right] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2} + \lambda t\right) d\lambda, \quad t < 0,$$

$$t = (x - \xi) |y - \eta|^{-2/3}, \quad c^+, c^-, c = \text{const}.$$

Также для фундаментальных решений были получены следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h \partial y^k} \right| < c_1 |y - \eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{-\frac{1}{2} \left[2h+3k-1 + \frac{3}{2}(1-(-1)^k) \right]}, \quad \text{при } (x - \xi) |y - \eta|^{\frac{2}{3}} \rightarrow -\infty,$$

$$\left| \frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h \partial y^k} \right| < c_2 |y - \eta|^{\frac{2h+3k-1}{3}} \exp(-c_3 t^3), \quad \text{при } (x - \xi) |y - \eta|^{\frac{2}{3}} \rightarrow +\infty.$$

В последнее время появился ряд работ, в которых исследуются корректные краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени. Обзор этих исследований можно найти в работах L. Cattabriga, L. Rodino, Т.Д.Джураева, А.А.Дезина, В.Н.Диесперова, О.С.Рыжова, Ю.В. Засорина и С.Абдиназарова.

Изучение уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, в нашей республике началось в семидесятые годы XX столетия и развивалось в работах Т.Д.Джураева, С.Абдиназарова и их учеников. Отметим, что в этих работах краевые задачи исследованы методом потенциалов, с использованием фундаментальных решений (3).

Если обратим внимание на фундаментальные решения (3), то увидим, что они содержат громоздкие двойные несобственные интегралы, и тогда при исследованиях возникают существенные трудности, связанные с вычислением кратных интегралов. Поведение в разных концах оси x -ов разное. Кроме того, из-за произвольной константы в представлении формул возникает масса неудобств.

Естественно, возникает вопрос: можно ли построить новое, удобное представление для формул, позволяющих четко и легко провести качественный анализ решения? Чтобы получить новое представление для фундаментального решения, надо использовать другой метод построения.

В диссертации методом подобия, т.е. методом построения автомодельных решений, получено новое представление фундаментального решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени.

В первом параграфе первой главы строятся фундаментальные решения уравнения

$$L[u] = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

В уравнение (4), вводя новую переменную по формуле $t = xy^{-2/3}$ и обозначив $u' = c\varphi(t)$, имеем

$$\varphi'' - (4/9)t^2\varphi' - (10/9)t\varphi = 0.$$

Производя замену $\varphi(t) = tZ(\xi)$, $\xi = \frac{4}{27}t^3$, получим

$$\xi Z'' + \left[(4/3) - \xi\right]Z' - (7/6)Z = 0. \quad (5)$$

Это стандартная форма вырожденного гипергеометрического уравнения.

Линейно независимые решения уравнения (5) имеют вид

$$Z_1(\xi) = \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad Z_2(\xi) = \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right),$$

где $\Psi(a, b; x)$, $\Phi(a, b; x)$ - вырожденные гипергеометрические функции.

Тогда фундаментальные решения уравнения (4) имеют вид

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} f(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} \varphi(t), \quad t < 0, \quad (6)$$

где

$$f(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} t \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \varphi(t) = \frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3\pi}} t \Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \tau = \frac{4}{27} t^3, \quad t = \frac{x - \xi}{|y - \eta|^{\frac{2}{3}}}.$$

Во втором параграфе первой главы, с помощью известной оценки вырожденных гипергеометрических функций, а также формулы дифференцирования, получены следующие оценки:

$$|f^{*(\nu)}(t)| \leq C_{1\nu} |t|^{-(5/2)-\nu}, \quad |t| \rightarrow \infty, \quad |\varphi^{*(\nu)}(t)| \leq C_{2\nu} |t|^{-(5/2)-\nu}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

$$|f^{(\nu)}(t)| \leq C_{3\nu} |t|^{-(1/2)-\nu}, \quad |t| \rightarrow \infty, \quad |\varphi^{(\nu)}(t)| \leq C_{4\nu} |t|^{-(1/2)-\nu}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

фундаментального решения

$$\left| \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} U(x, y; \xi, \eta) \right| \leq C_{hk} |y - \eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{\frac{1}{2} \left\{ 2h+3k-1 + \frac{3}{2} [1-(-1)^k] \right\}}, \quad \text{при } |t| \rightarrow \infty.$$

Для функции $V(x, y; \xi, \eta)$ имеются аналогичные оценки при $t \rightarrow -\infty$.

В третьем параграфе первой главы изучены некоторые свойства фундаментального решения, которые необходимы при решении краевых задач.

Теорема 1. Имеют место следующие предельные равенства:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{5/2} f^*(t) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{5/2} f^*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{5/2} \varphi^*(t) = -\frac{9\Gamma^2(1/3)}{2\pi\sqrt[3]{2}\Gamma(1/6)},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/2} f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-1/2} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-1/2} \varphi(t) = -\frac{192}{5\sqrt[3]{2}\sqrt{3\pi}}.$$

Теорема 2. Для $\forall \phi(x) \in C[a; b]$ и $x_0 \in [a, b]$, где $-\infty < a < b < +\infty$, имеет место равенство:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \eta \rightarrow y \pm 0}} \int_a^b U_\eta(x, y; \xi, \eta) \phi(\xi) d\xi = \pm \phi(x_0).$$

Теорема 3. При $\omega(y) \in C[0, l]$, где $l = \text{const} < +\infty$, имеют место равенства:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_0^l U_{xx}(x, y; \xi, \eta) \omega(\eta) d\eta = \begin{cases} -(2/3)\omega(y), & x > \xi, \\ (4/3)\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_0^l V_{xx}(x, y; \xi, \eta) \omega(\eta) d\eta = \begin{cases} 2\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi. \end{cases}$$

В четвертом параграфе первой главы установлено, что фундаментальные решения, построенные в работе L.Cattabriga, удовлетворяют уравнению (4) только при определенных значениях констант. Оценки решения, полученного в этой работе асимптотическим методом, при $t \rightarrow +\infty$ отличаются от известной оценки вырожденной гипергеометрической функции.

Вторая глава диссертации, названная «Применение метода Фурье в задачах для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками», посвящена применению метода Фурье при решении краевых задач. Насколько нам известно, корректные краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье не исследованы.

В настоящей диссертационной работе при помощи метода Фурье исследованы краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторые производные по времени и имеющего вырождения первого рода. Дается полное описание алгоритма метода. Строится конструктивная теория метода Фурье. Разработанный способ применяется при решении краевых задач первого, второго, третьего родов.

В первом параграфе второй главы в прямоугольной области $D = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < l\}$ исследованы следующие задачи.

Задача A_1 . Найти решение уравнения (4) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x, 0) = u(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l,$$

где $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, а $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ - заданные функции.

Задача A_2 . Найти решение уравнения (4) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u_x(x, 0) = u_y(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u(0, y) = \psi_4(y), \quad u(p, y) = \psi_5(y), \quad u_x(p, y) = \psi_6(y), \quad 0 \leq y \leq l,$$

где $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 4, 5$, а $\psi_6(y) \in C^2[0, l]$ - заданные функции.

Теорема 4. Задача A_i , $i = 1, 2$ не может иметь более одного решения.

Теорема 4 доказана методом интегралов энергии.

Решение задачи A_1 построим в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{1n} e^{-k_n x} + e^{(1/2)k_n x} (C_{2n} \cos \nu_n x + C_{3n} \sin \nu_n x) \right] \sin \frac{\pi n}{l} y. \quad (7)$$

Теорема 5. Если $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, а $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$, причем $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i''(0) = \psi_i''(l) = 0$, $i = 1, 2, 3$, то решение задачи A_1 существует и представляется рядом (7).

Задача A_2 исследуется так же, как и задача A_1 .

Второй параграф второй главы посвящен исследованию корректных краевых задач для уравнения (4) в областях

$$D^+ = \{(x, y): 0 < x < \infty, 0 < y < l\}, \quad D^- = \{(x, y): -\infty < x < 0, 0 < y < l\}.$$

Задача B₁. Найти решение уравнения (4) в области D^+ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$, имеющее ограниченную вторую производную по x при $x \rightarrow +\infty$ и удовлетворяющего следующим краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u(x, l) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ u(0, y) = \psi_1(y), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$ – граница области D^+ , $\psi_1(y) \in C^3[0, l]$ – заданная функция.

Задача B₂. Найти решение уравнения (4) в области D^- из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^-) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^- \cup \Gamma_2)$, имеющее ограниченные первую и вторую производные по x при $x \rightarrow -\infty$ и удовлетворяющее краевым условиям при $-\infty < x < 0$ (8) и

$$u(0, y) = \psi_2(y), \quad u_x(0, y) = \psi_3(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l,$$

где $\Gamma_2 = \partial D^-$ – граница области D^- , $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 2, 3$ – заданные функции.

Теорема 6. Задачи B_1 и B_2 не могут иметь более одного решения.

Решение задачи B_1 имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{7n} e^{-k_n x} \sin \frac{n\pi}{l} y. \quad (9)$$

Решение задачи B_2 имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{2n} e^{(1/2)k_n x} \cos v_n x + C_{3n} e^{(1/2)k_n x} \sin v_n x \right] \sin \frac{n\pi}{l} y. \quad (10)$$

Теорема 7. Если функции $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2, 3$, причем $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i''(0) = \psi_i''(l) = 0$, $i = 1, 2, 3$, то решение задач B_1 и B_2 существует и представляется рядами (9) и (10) соответственно.

Третий параграф второй главы посвящен исследованию третьей краевой задачи в конечных и бесконечных областях.

Задача E₁. Найти решение уравнения (4) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\bar{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\begin{aligned} \alpha u(x, 0) + \beta u_y(x, 0) = 0, \quad \gamma u(x, l) + \delta u_y(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \\ u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь α , β и γ , δ – произвольные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, функции $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ – заданные функции.

Задача E₂. Найти решение уравнения (4) в области D^+ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$, имеющее ограниченную вторую производную по x при $x \rightarrow +\infty$ и удовлетворяющее краевым условиям (11),

$$u(0, y) = \psi_7(y), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Задача E_3 . Найти решение уравнения (4) в области D^- из класса $C_{x,y}^{3,2}(D^-) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^- \cup \Gamma_2)$, имеющее ограниченную первую и вторую производные по x при $x \rightarrow -\infty$ и удовлетворяющее краевым условиям (11),

$$u(0, y) = \psi_8(y), \quad u_x(0, y) = \psi_9(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Теорема 8. Если $\alpha\beta \leq 0, \gamma\delta \geq 0$, то задача E_1 не может иметь более одного решения.

Решение задачи E_1 ищем в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Тогда для нахождения функции $Y(y)$ приходим к задаче типа Штурма-Лиувилля: найти те значения параметра λ , при которых существует нетривиальное решение задачи:

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad \alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0, \quad \gamma Y(l) + \delta Y'(l) = 0.$$

Решая эту задачу, находим собственные значения в виде $\lambda_n = (\xi_n/l)^2$ и $\{\lambda_n\}$, которые образуют возрастающую последовательность.

Соответствующие собственные функции имеют вид $Y_n(y) = (\alpha \sin \sqrt{\lambda_n} y - \beta \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} y) A_n$, и доказано, что система собственных функций ортогональна в сегменте $[0, l]$.

Решение задачи E_1 находим в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} B_{1n}(x) + A_{2n} B_{2n}(x) + A_{3n} B_{3n}(x)] Y_n(y). \quad (12)$$

Доказана следующая

Теорема 9. Если функции $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, а $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$, причем $\alpha\psi_i(0) + \beta\psi_i'(0) = 0$, $\gamma\psi_i(l) + \delta\psi_i'(l) = 0$, $i = 1, 2, 3$, то решение задачи E_1 существует и представляется рядом (12).

Решение задачи E_2 представим в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{-k_n x} Y_n(y), \quad (13)$$

а задачи E_3 в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2} k_n x} \left[C_{2n} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(v_n x + \frac{\pi}{6}) + C_n \frac{2}{\sqrt{3} k_n} \sin v_n x \right] Y_n(x). \quad (14)$$

Теорема 10. Если $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 7, 8, 9$, причем $\alpha\psi_i(0) + \beta\psi_i'(0) = 0$, $\gamma\psi_i(l) + \delta\psi_i'(l) = 0$, $i = 7, 8, 9$, то решение задач E_2 , E_3 существует и представляется в виде формул (13), (14) соответственно.

Четвертый параграф второй главы посвящен исследованию краевых задач для уравнения, имеющего вырождение первого рода.

В области $D_1^+ = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$ для уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - x^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad n > 0 \quad (15)$$

исследуем следующие задачи.

Задача B_1^n . Найти решение уравнения (15) в области D_1^+ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D_1^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1^+ \cup \Gamma_1)$, имеющее ограниченную вторую производную по x при $x \rightarrow +\infty$ и удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (16)$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad (18)$$

где $\psi(y) \in C^3[0,1]$ - заданные функция.

Задача B_2^n . Найти решение уравнения (15) в области D_1^+ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D_1^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1^+ \cup \Gamma_1)$, имеющее ограниченную вторую производную по x при $x \rightarrow +\infty$ и удовлетворяющее краевым условиям (17), (18) и $u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0$, где $\psi(y) \in C^3[0,1]$ - заданные функция.

Теорема 11. Задача B_1^n не может иметь более одного решения.

Решение поставленной задачи ищем в виде

$$u(x, y) = Z(x)Y(y).$$

Тогда для уравнения (15) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$Z'''(x) + \lambda x^n Z(x) = 0, \quad Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad (19)$$

где $\lambda > 0$ - произвольное число.

Решение уравнения (15), удовлетворяющее условию (16), имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(x) \sin \pi k y, \quad (20)$$

где $Z_k(x) = c_{1k} F_{1k}(x) + c_{2k} F_{2k}(x) + c_{3k} F_{3k}(x)$.

Теорема 12. Если функция $\psi(y) \in C^3[0,1]$, кроме того, $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$, то решение задачи B_1^n существует и представляется рядом (20).

Задача, B_2^n исследуется так же, как и задача B_1^n .

В третьей главе диссертации, названной «**Построение и применение функции Грина в задачах для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками**», краевые задачи исследуются с использованием фундаментального решения и построением функции Грина.

В первом параграфе третьей главы, используя метод отражения, построено решение первой краевой задачи.

Задача K_1 . Найти решение уравнения (4) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (21)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l,$$

где $\varphi_i(x) \in C[a, b], i = 1, 2$, а функции $\psi_j(y) \in C^3[0, l], j = 1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ - заданные функции.

Теорема 13. Задача K_1 не может иметь более одного решения.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача K_{11} . Построить функцию $v(x, y)$, удовлетворяющую в области D уравнению (4) и условиям (21).

Для решения вспомогательной задачи построены функции

$$Z(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [U(x, 2ml + y; \xi, \eta) - U(x, 2ml - y; \xi, \eta)], \quad (22)$$

$$T(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [V(x, y + 2ml; \xi, \eta) - V(x, 2ml - y; \xi, \eta)], \quad x - \xi < 0.$$

Теорема 14. Функции $Z(x, y; \xi, \eta)$ и $T(x, y; \xi, \eta)$ являются периодическими относительно аргумента y с периодом $2l$, т.е.

$$Z(x, y + 2l; \xi, \eta) = Z(x, y; \xi, \eta), \quad T(x, y + 2l; \xi, \eta) = T(x, y; \xi, \eta).$$

Решение вспомогательной задачи K_{11} имеет вид

$$v(x, y) = -\frac{1}{2} \int_0^p Z_\eta(x, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^p Z_\eta(x, y; \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Решение задачи K_1 ищем в виде $\mathcal{G}(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$,

где $u(x, y)$ – решение задачи K_1 , $v(x, y)$ и имеет вид (23).

Тогда для $\mathcal{G}(x, y)$ получим следующую задачу:

$$\mathcal{G}_{xxx} - \mathcal{G}_{yy} = 0, \quad \mathcal{G}(x, 0) = \mathcal{G}(x, l) = 0, \quad (24)$$

$$\mathcal{G}(0, y) = \overline{\psi_1}(y), \quad \mathcal{G}(p, y) = \overline{\psi_2}(y), \quad \mathcal{G}_x(p, y) = \overline{\psi_3}(y).$$

Задачу (24) можно решить, как задачу A_1 в параграфе 2.1.

Определив функцию $\mathcal{G}(x, y)$, находим:

$$u(x, y) = \mathcal{G}(x, y) + v(x, y), \quad (25)$$

где $\mathcal{G}(x, y)$ и $v(x, y)$ соответственно имеют вид (12) и (24).

Доказана следующая

Теорема 15. Если $\varphi_j(x) \in C[0, p], j = 1, 2$, и функции $\psi_i(y) \in C^3[0, l], i = 1, 2, \psi_3(y) \in C^2[0, l], \psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i''(0) = \psi_i''(l) = 0, i = 1, 2, 3$, то решение задачи K_1 существует и представимо в виде (25).

Во втором параграфе третьей главы в области

$D_\infty = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, 0 < y < l\}$ для уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (26)$$

изучается

Задача B_1^* . Найти решение уравнения (26) в области D_∞ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D_\infty) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_\infty \cup \Gamma_3)$, имеющее по x ограниченную первую производную при $x \rightarrow -\infty$, вторую производную при $x \rightarrow \pm\infty$ и удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, y) = 0, \quad (28)$$

где $\varphi_i(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $i=1, 2$, $g(x, y) \in C(D_\infty \cup \Gamma_3)$, $\Gamma_3 = \partial D_\infty$ – граница области D_∞ , кроме того, выполняются условия согласования

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i'(x) = 0, \quad i=1, 2.$$

Доказана следующая

Теорема 16. Задача B_1^* не может иметь более одного решения.

Лемма 1. Функция Грина задачи B_1^* для бесконечной области имеет вид

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [U(x, 2ml + y; \xi, \eta) - U(x, 2ml - y; \xi, \eta)]. \quad (29)$$

Решение задачи B_1^* имеет вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x, y; \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \iint_{D_\infty} G(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (30)$$

Лемма 2. Пусть функции $\varphi_i(x)$ и $g(x, y)$ при $|x| \rightarrow \infty$ имеют представления

$$\varphi_i(x) = O(|x|^{-\alpha}), \quad i=1, 2, \quad (\alpha > 1/3), \quad g(x, y) = O(|x|^{-\beta}), \quad (\beta > 3/2), \quad (31)$$

однородные относительно y . Тогда для любого $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ имеет место

$$\text{равенство} \quad \lim_{y \rightarrow 0} u(x_0, y) = \varphi_1(x_0), \quad \lim_{y \rightarrow l} u(x_0, y) = \varphi_2(x_0).$$

Теорема 17. Пусть $\varphi_i(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $i=1, 2$, $g(x, y) \in C(D_\infty \cup \Gamma)$ и

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i'(x) = 0, \quad i=1, 2, \quad \text{а также выполняются условия (31).}$$

Тогда единственное решение задачи B_1^* имеет вид (30), где функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ определяется формулой (29).

В третьем параграфе третьей главы, с помощью построения функции Грина в прямоугольной области, исследованы первая и вторая краевые задачи.

Задача A_{31} . Найти решение уравнения (26) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < p, \quad (32)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 < y < l, \quad (33)$$

где $\varphi_i(x) \in C[0, p], i=1, 2, \psi_j(y) \in C[0, l], j=\overline{1, 3}, g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$, кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \psi_1(0), \quad \varphi_1(p) = \psi_2(0), \quad \varphi_1'(p) = \psi_3(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(l), \\ \varphi_2(p) &= \psi_2(l), \quad \varphi_2'(p) = \psi_3(l), \quad g(x, 0) = g(x, l) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Задача A_{32} . Найти решение уравнения (26) в области D из класса $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям (33) и

$$u_y(x, 0) = \varphi_3(x), \quad u_y(x, l) = \varphi_4(x), \quad 0 < x < p,$$

где $\varphi_i(x) \in C[0, p], i=3, 4, \psi_j(y) \in C[0, l], j=\overline{1, 3}, g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$.

Теорема 18. Задача A_{31} не может иметь более одного решения.

Решение задачи A_{31} дается в виде:

$$\begin{aligned} 2u(x, y) &= \int_0^l G_{\xi\xi}(x, y, p, \eta) \psi_2(\eta) d\eta - \int_0^l G_{\xi\xi}(x, y, 0, \eta) \psi_1(\eta) d\eta - \\ &\quad - \int_0^l G_{\xi}(x, y, p, \eta) \psi_3(\eta) d\eta + \int_0^p G_{\eta}(x, y, \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi - \\ &\quad - \int_0^p G_{\eta}(x, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi - \iint_D G(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (35)$$

Итак, мы получили решение задачи A_{31} в явном виде, в отличие от других задач, в которых решение задачи A_{31} сводилось к интегральным уравнениям.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 19. Пусть $\varphi_i(x) \in C[0, p], i=1, 2, \psi_j(y) \in C[0, l], j=\overline{1, 3}, g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$, а также выполняются условия (35). Тогда решение задачи A_{31} имеет вид (35), функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ определяется формулой (29).

Задача, A_{32} исследуется так же, как и задача A_{31} .

Теория уравнений смешанного типа, основоположником которой является итальянский математик Ф.Трикоми, в настоящее время превратилась в один из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Впервые краевые задачи для смешанных эллиптическо - гиперболических уравнений в бесконечных трехмерных областях с помощью преобразования Фурье исследованы в работе А.В.Бицадзе.

В первом параграфе четвертой главы диссертации, названной «**Краевые задачи для уравнений смешанного параболо - гиперболического типа в**

пространстве», исследован трёхмерный аналог задачи Трикоми с нехарактеристическими плоскостями изменения типов.

Пусть Ω - бесконечная призмобразная область трёхмерного евклидова пространства переменных x, y, z .

Для уравнения

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y + U_{zz}, & \text{в } \Omega^+, \\ U_{xx} - (-x)^m (U_{yy} + U_{zz}), & \text{в } \Omega^-, \quad m > 0, \end{cases} \quad (36)$$

рассмотрим следующую задачу.

Задача T. Найти регулярное решение $U(x, y, z)$ уравнения (36) в областях Ω^+ и Ω^- , обладающее следующими свойствами

$$1) U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega^\pm}) \cap [C^1(\Omega^+ \cup I) \cup C^1(\Omega^- \cup I)] \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-),$$

2) удовлетворяет краевым условиям

$$U|_{s_1} = \Phi_1(x, z), \quad 0 \leq x \leq h; \quad U|_{s_2} = \Phi_2(y, z), \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U|_{s_5} = \Psi(y, z), \quad 0 \leq y \leq 1/2; \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0;$$

3) удовлетворяет условиям склеивания

$$U(-0, y, z) = \alpha U(+0, y, z),$$

$$U_x(-0, y, z) = \beta(y) U_x(+0, y, z) + \delta(y) U(+0, y, z) + P(y, z),$$

$$\alpha = \text{const}, \quad (y, z) \in I, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} P(y, z) = 0.$$

Следуя идее А.В.Бицадзе, решение поставленной задачи будем искать в классе функций, представимых интегралом Фурье.

Тогда задача T эквивалентно сведётся к плоской задаче T_λ .

Единственность решения задачи T_λ доказывается методом принципа максимума. Существование единственного решения задачи T_λ эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое в случае $0 < m < 2$, $m = 2$, $m > 2$ требует отдельного исследования.

Во втором параграфе четвертой главы исследован трёхмерный аналог задачи Геллерстедта с характеристическими плоскостями изменения типов.

Пусть Ω^* - бесконечная призмобразная область трёхмерного евклидова пространства переменных x, y, z .

Для уравнения

$$0 = \begin{cases} U_{xx} + U_{zz} - U_y, & \text{в } \Omega_1^*, \\ -(-y)^m (U_{xx} + U_{zz}) + U_{yy}, & \text{в } \Omega_k^*, \quad k = 2, 3, \quad m > 0, \end{cases} \quad (37)$$

исследованы следующие задачи.

Задача G. Найти регулярное решение уравнения (37) в областях Ω_k^* , $(k = \overline{1, 3})$, обладающее свойствами:

$$1) U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega_k^*}) \cap [C^1(\Omega_1^* \cup I_1 \cup I_2) \cup C^1(\Omega_2^* \cup I_1) \cup C^1(\Omega_3^* \cup I_2)] \cap \\ \cap C^2(\Omega_1^* \cup \Omega_2^* \cup \Omega_3^*), \quad k = \overline{1, 3};$$

2) удовлетворяет краевым условиям при $-\infty < z < +\infty$

$$U|_{s_1} = \Phi_i(y, z), \quad 0 \leq y \leq h, \quad i = \overline{1, 2}, \quad U|_{s_4} = \Psi_1(y, z), \quad 0 \leq x \leq \varepsilon/2,$$

$$U|_{s_6} = \Psi_3(y, z), \quad \varepsilon \leq x \leq (1 + \varepsilon)/2, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0,$$

3) удовлетворяет условиям склеивания

$$U(x, -0, z) = \alpha U(x, +0, z),$$

$$U_y(x, -0, z) = b_k(x)U_y(x, +0, z) + c_k(x)U(x, +0, z) + P_k(x, z),$$

$$\alpha = \text{const}, \quad (x, z) \in I_k, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} P_k(x, z), \quad k = \overline{1, 2}.$$

Задача G исследуется так же, как и задача T .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена развитию теории фундаментальных решений и теории потенциала, построению конструктивной теории метода Фурье для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, а также доказательству однозначной разрешимости краевых задач для смешанных параболических уравнений в трехмерном пространстве.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Построены аналитические и фундаментальные решения для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, с помощью специальных функций.

2. Впервые разработан алгоритм решения краевых задач методом Фурье для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени.

3. Полностью обоснована теория потенциалов для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени.

4. Для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени, построены функции Грина к решению краевых задач.

5. Применен алгоритм решения краевых задач методом Фурье для вырождающихся уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, содержащих вторую производную по времени.

6. Доказана однозначная разрешимость задач Трикоми и Геллерстедта для смешанного параболического уравнения в трехмерном пространстве.

7. Установлены необходимые и достаточные условия прямого и обратного интегрального преобразования Фурье для решения краевых задач в трехмерном пространстве.

**SCIENTIFIC COUNCIL 14.07.2016.FM.01.01 ON AWARD
OF SCIENTIFIC DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES
AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

NAMANGAN ENGINEERING PEDAGOGICAL INSTITUTE

APAKOV YUSUPJON PULATOVICH

**TO THE THEORY OF THE THIRD ORDER EQUATIONS WITH
MULTIPLE CHARACTERISTICS AND SOME PROBLEMS IN THREE
DIMENSIONAL SPACE**

**01.01.02 – Differential equations and mathematical physics
(Physical and mathematical sciences)**

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent – 2016

The subject of doctoral dissertation is registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number № 30.09.2014/B2014.3-4.FM87.

Doctoral dissertation is carried out at Namangan Engineering Pedagogical Institute.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian and English) is placed on web page of Scientific Council (<http://ik-fizmat.nuu.uz>) and information - educational portal «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Scientific consultant:

Dzhuraev Tuxtamurad Dzhuraevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academic

Official opponents:

Dzhenaliev Muvasharkhan Tanabaevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
professor

Urinov Akhmadjon Kushokovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
professor

Khasanov Aknazar Bekdurdievich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
professor

Leading organization:

«Institute of applied mathematics and automation».
Federal state budget scientific organization (Russian Federation).

Defense will take place «___» _____ 2016 at ___ at the meeting of Scientific Council number 14.07.2016.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str.,4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №_____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «___» _____ 2016 year.
(Mailing report №_____ on «___» _____ 2016 year).

A.A. Abdushukurov

Chairman of scientific council on award of scientific
degree of doctor of sciences D.F.M.S., professor

G.I. Botirov

Scientific secretary of scientific council on award of
scientific degree of doctor of sciences C.F.M.S.

M.S. Salakhitdinov

Chairman of scientific seminar under scientific council
on award of scientific degree of doctor of sciences,
D.F.M.S., academician

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The urgency and relevance of the theme of dissertation. The solution of a number of fundamental problems in the field of various applications on a global level requires the establishment of science refined mathematical models of physical processes under study, the development of new methods of research and implementation of the results into practice. Based on the needs of practice, increased attention to the theory of equations of high order, in particular, to the theory of partial differential equations of the third order. Among the third-order equations occupy a special place of the equation with multiple characteristics thanks to its specific characteristics. To study the small but finite amplitude waves in dispersive media as a model equation is often used Korteweg - de Vries equation, which is a nonlinear equation of the third order with multiple characteristics, comprising a first derivative with respect to time. The developed theory for these equations was the impetus for starting research and for other classes of equations - third-order equations with multiple characteristics, containing the second derivatives with respect to time. Due to the complexity of the processes associated with the above equations and the lack of sufficiently developed analytical methods, the study of third-order equations with multiple characteristics, containing the second derivatives with respect to time, is one of the priority areas.

The scientists of our country obtained significant results in studies of third-order equations with multiple characteristics, comprising a first derivative with respect to time. For such high-order equations constructed fundamental solutions, expressed in terms of special functions, studied their properties and behavior, also solved the boundary value problems. Using the fundamental solution built L.Cattabriga, we investigated boundary value problems for a third order equations with multiple characteristics, containing the second derivatives with respect to time. According to the equations of the mixed type and the composite high-order and mixed-composite type achieved certain results recognized in the world. The equations of the third order with multiple characteristics, containing the second derivatives with respect to time, require the construction of fundamental solutions through a special function, the study of their properties and behavior and decisions with their help, boundary value problems, and this requires a search for new approaches to solving this problem.

Research processes of nonlinear acoustics, the hydrodynamic theory of cosmic plasmas, nonlinear vibrations, fluid flow in the channel, surrounded by a porous medium, etc. associated with the study of a third-order equation with multiple characteristics, containing the second derivatives with respect to time, as well as problems for equations of mixed parabolic - hyperbolic type, which explains the need to study these equations.

Research in this thesis to some extent are the challenges identified in the Republic of Uzbekistan Presidential Decree nubmer. PR-436 of 7 August 2006 "On measures to improve the coordination and management of the development of science and technology", the number PP-916 from July 15, 2008 "On additional

measures to stimulate innovative projects and technologies" and other normative-legal acts of fundamental sciences.

Relevant research priority areas of science and developing technology of the republic. This work was performed in accordance with the priority areas of science and technology of the Republic of Uzbekistan and I. IV. "Mathematics, Mechanics and Informatics".

A review of international research on the topic of dissertation¹. On construction of the fundamental solutions of the third order equations with multiple characteristics which have second time derivative, on study of the theory of potentials and their properties, and on investigation of various boundary value problems in bounded and unbounded domains wide researches is carried out in scientific centers and universities of the leading countries, in particular, Bologna University, Turino University (Italy), Fatih University (Turkey), Vilnius University (Lithuania), Moscow state University, Novosibirsk state University, Bashkiria state University, North - Eastern Federal University and Kabardino - Balkar state University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Institute of applied mathematics and automation of Kabardin - Balkar scientific centre of the Russian Academy of Sciences (Russia).

As a result of the study of mixed type equations in the world, a number of results have been obtained, including the following scientific results: the theory of boundary value problems for equations of mixed elliptic-hyperbolic type is created (Turino University, Italy); the boundary value problems for degenerate equations of elliptic - hyperbolic type are solved (Uppsala University, Sweden); the maximum principle for elliptic-hyperbolic equations is proved (Moscow State University, Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences); nonlocal problems for the mixed elliptic - hyperbolic type equations are worked out (Institute of applied mathematics and automation of Kabardin - Balkar scientific center of the Russian Academy of Sciences, Moscow state University, Novosibirsk state University, Samara state University); eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem for mixed elliptic-hyperbolic equations are found (Moscow state University, Institute of mathematics and mathematical modeling, Kazakhstan); methods of solutions of the boundary value problems for high order mixed and mixed-composite type equations are worked out (Institute of mathematics, Siberian branch of the Russian Academy of Sciences, Institute of applied mathematics and automation of Kabardin - Balkar scientific centre of the Russian Academy of Sciences, Institute of mathematics at National University of Uzbekistan); the methods of solution of the boundary value problem of mixed elliptic-parabolic and parabola-hyperbolic equations are obtained (Institute of mathematics, Siberian branch of the Russian Academy of Sciences, Institute of applied mathematics and

¹ Review of foreign scientific research on the theme of the dissertation is worked out based on the sources: Arkiv Mathematics Astronomis, www.springer.com/mathematics/journal/11512; Rendiconti del seminario matimatico della univ di Padava; Communes Partial Differential Equations; Uspekhi matematicheskikh nauk, www.mathnet.ru/umn; Mathematical notes, www.mathnet.ru/mz, Siberian mathematical journal, www.springer.com; Siberian urnal of industrial mathematics, www.math.nsc.ru/publishing/SIBJIM/sibjim.html, Differential equations, www.link.springer.com/journal/10625.

automation of Kabardin - Balkar scientific centre of the Russian Academy of Sciences, Institute of mathematics and mathematical modeling (Kazakhstan), Institute of mathematics at the National University of Uzbekistan); the boundary value problems for mixed elliptic-hyperbolic equation in a bounded region of three-dimensional space are solved (University of California, University of Maryland, United States, Institute of mathematics, Siberian branch of the Russian Academy of Sciences); the method of solution of the boundary value problems for mixed elliptic-hyperbolic equation in an unbounded region of three-dimensional space is worked out by using the integral Fourier transforms (Institute of mathematics, Siberian branch of the Russian Academy of Sciences, Kabardino-Balkaria state University, Moscow state University, Samara state University, Russia, Institute of mathematics at National University of Uzbekistan).

Nowadays in the world a number of priority scientific research have been carried out on the theory of boundary value problems for mixed type equations and equations with multiple characteristics: namely, research on main directions such as creation of more adequate mathematical models of certain process and solution of problems describing them; construction of analytical solutions of the boundary value problems; creation of stable algorithms of numerical models; solution of multi-dimensional problems.

The degree of study of the problem. The first results on construction of fundamental solutions of third order equations with multiple characteristics, containing second derivatives with respect to time and investigation of their properties, development of the potential theory and on solution of the boundary problems were obtained in works by H. Block and E. Del Vecchio. Later these results were developed in the works of L. Cattabriga. In the work of A.A.Dezin, equations with multiple characteristics are analyzed by the methods of functional analysis. In the works of T.D. Dzhuraev and S. Abdinazarov and their followers, the boundary value problems are investigated by the potential method and using the fundamental solution which constructed in the work of L. Cattabriga.

Nonlinear equations of third order with multiple characteristics, which play an important role in the theory of nonlinear waves, mainly in hydrodynamic processes, was first obtained by Joseph Bussinisk. However, a detailed analysis was conducted Diederik Korteweg and Gustav de Vries. The importance of these studies from the practical point of view were based on the works of V.N. Diederik, O. S. Ryzhov and V. Zaslavskiy. And auto model solutions of the nonlinear problem with multiple characteristics were investigated in the works of V. Galaktionov. A. Ashyraliev, N. Aggezh and F. Hazenci have engaged in finding numerical solutions of equations with multiple characteristics.

The equations of composite type with multiple characteristics are the main representatives of third order equations. The foundation of the theory of third order equations are worked out by A.V. Bitsadze, M.S. Salakhitdinov, T.D. Dzhuraev, V.N. Vragov, T.Sh. Kalmenov, M.T.Dzhenaliev and their followers.

Boundary value problems for mixed elliptic -hyperbolic equations of three - dimensional domains have been investigated by N.M.Protter, M.Shnaeider,

A.V.Bitsadze, A.M.Nakhushev, V.P.Didenko, G.D. Karatoprakliev, V.N.Vragova, N.G Sorokina. Firstly, the boundary value problems for mixed elliptic - hyperbolic equations in infinite three - dimensional domains, with the help of the Fourier transform, were studied in the work of A.V. Bitsadze. A series of problems for elliptic-hyperbolic equations in an infinite cylindrical domain were considered by A.M. Nakhushev, A.M. Ezhov and S.P. Pulkin, S.M. Ponomarev, M.S. Salakhitdinov and B. Islomov. In the works of A. M. Ezhova and S. P.Pulkin a priori estimate of searching solution for elliptic - hyperbolic type equation on the basis of the maximum principle was obtained and the necessary conditions for the existence of the inverse Fourier transform was determined. Boundary value problems for mixed parabolic - hyperbolic equations in a three - dimensional space were considered in the works of T.D. Dzhuraev, A. Sopuev, Yu.P. Apakov and B. Islomov.

Communacation of the theme of dissertation with the scientific- research works of higher educational institution, which is the dissertation conducted in:

The dissertation work was performed in accordance with the plan of scientific research number 07 entitled “The theory of high order partial differential equations” of Namangan engineering pedagogical institute.

The aim of research work is to construct the fundamental and analytic solutions for the third order equations with multiple characteristics which have second order derivative in time and in three dimensional space to solve the boundary value problems for parabola hyperbolic equations.

The tasks of research work:

to construct the analytical and fundamental solutions for equations of third order with multiple characteristics containing the second derivative in time with the help of special functions;

to work out the constructive construction theory of Fourier method for the third order equations with multiple characteristics containing the second derivative in time;

to develop the potential theory for equations of the third order with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time;

to construct the Green functions for equations of the third order with multiple characteristics containing the second derivative in time and to apply them for solution of problems;

to elaborate the theory of solution of boundary value problems for degenerate equations of the third order with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time;

to prove uniquely solvability of Tricomi and Gellerstedt's problems for mixed parabolic - hyperbolic equation in the three - dimensional space;

the necessary and sufficient conditions for the existence of the direct and inverse Fourier transform for solution of the boundary value problems in three-dimensional space are found

The object of the research work is third order equations with multiple characteristics containing the second derivative in time and parabolic-hyperbolic equations in the three-dimensional space.

The subject of the research work is to study the theory of construction of fundamental and analytic solutions for the third order equations with multiple characteristics containing the second derivative in time and investigation of the boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations in three-dimensional space.

Methods of research work. In the dissertation methods of mathematical analysis, differential equations and maximum principle of mathematical physics, energy integral and the theory of integral equations are used.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the theory of analytical and fundamental solutions for equations of third order with multiple characteristics containing the second derivative in time has been constructed with the help of special functions;

for the first time the algorithm of solution for the boundary value problems by the Fourier method is worked out for the third order equations with multiple characteristics containing the second derivative in time;

the potential theory for equations of third order with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time is developed;

in the solution of the boundary value problems, stated for equations of third order with multiple characteristics containing the second derivative in time, the Green functions are constructed;

the Fourier algorithm is applied to the solution of the boundary value problems for equations of third order with multiple characteristics containing the second derivative in time;

the unique solvability of Tricomi and Gellerstedt's problems for mixed parabolic - hyperbolic equation in three-dimensional space is shown;

the necessary and sufficient conditions of existence of the direct and inverse Fourier integral transforms in solution of the boundary value problems in three - dimensional space are justified.

Practical results of the work consist of the possibility of applying analytical solutions in the study of qualitative properties of physical processes and numerical experiments.

The reliability of the results in the constructive construction of analytic and fundamental solutions, potential theory and Fourier method for the third-order differential equations with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time and in the solution of the boundary value problems stated for mixed parabolic-hyperbolic equations in three dimensional space is justified by application of the methods of mathematical analysis, differential equations and mathematical physics.

Theoretical and practical significance of the study. The scientific significance of the research results consists in that the scientific results obtained in the research can be used in the theory of third-order equations with multiple

characteristics containing the second derivative with respect to time, in hydrodynamics, and plasma physics.

The practical significance of the dissertation research is determined by using the obtained scientific results in the study of physical processes expressed in terms of a third-order equation with multiple characteristics.

Implementation of the research results. The obtained scientific results of the dissertation work are applied in practice in the following directions:

the methods of solving boundary value problems for third-order equations with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time was used to solve the new correct problem stated for third order equation in the project number 114030440003 entitled “Fundamental problems of elasticity and plasticity” (the Siberian State Aerospace University, reference No. 38/1208 issued on the of May 10, 2016). This result allowed to obtain an analytical solution, a new well-posed problem;

the results obtained in the thesis on the construction of the Green's function and the solutions obtained using the Green's function for third order equations with multiple characteristics, containing the second derivative with respect to time, were used for a number of theme 1.3.1 as part of the Federal Target Program "Research and scientific-pedagogical personnel innovative Russia "for 2009-2013. on "Boundary problem with integral boundary condition in time for the third-order equation" (North-Eastern Federal University, reference number 71- 277 of May 5, 2016). This result allowed to obtain a new solution to the boundary problem has been reduced to an integral equation;

the proposed algorithm for solving the correct boundary-value problems using the Fourier method for third order equations with multiple characteristics containing the second derivative in time, were used to solve similar boundary value problems on “Nonlocal differential equations of mixed type and their application to dynamical systems” № state reg.: 01201361965 for 2013-2015 years. (Institute of applied mathematics and automation, Russian Academy of Sciences, reference No. 01-12/84 issued on the of May 4, 2016). This result allowed to obtain explicit solution of the posted problem.

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were presented and discussed at the following scientific and practical conferences: “Partial differential equations and related problems of analysis and informatics” (Tashkent, 2004), “Modern problems of mathematical physics and information technology” (Tashkent, 2005), “Modern problems of differential equations, operator theory and space technologies” (Almaty, 2006), «Nonlocal boundary value problems and related problems of mathematical biology, informatics and physics” (Nalchik, 2006), «Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries» (Almaty, 2009), “Actual problems of applied mathematics and information technology – Al Khorezmi-2009” (Tashkent, 2009), «Differential equations and their applications» (Panevežys, Lithuania. 2009), «IV Congress of the Turkic World Mathematical Society» (Baku, 2011), “Actual problems of applied mathematics and information technology – Al Khorezmi-2012” (Tashkent,

2012), “Actual problems of mathematical analysis” (Urgench, 2012), “Modern problems of differential equations and their applications” (Tashkent, 2013), “Non-classical equations of mathematical physics and their applications” (Tashkent, 2014). The present work was discussed at the Republic seminar on “Modern problems of the theory of partial differential equations” of the Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan (Tashkent, 2006-2011), at the seminar “Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics” of the National University of Uzbekistan (Tashkent, 2010-2011).

Publication of the research results. On theme of dissertation 45 scientific papers have been published, 13 of them are in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for Protection of doctoral theses, including 7 papers in international scientific journals and 6 of them published in national scientific journals.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of the introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the dissertation is 186 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE RESEARCH PAPER

In the introduction substantiates the importance and relevance of the thesis theme in accordance with research in the priority directions of development of science and technology of the Republic of Uzbekistan, provides an overview of international research on the topic of the thesis, reveals the degree of knowledge of the problem and relations with the scientific direction of the Institute, formulates goals and objectives, as well as the object and subject of the study, described scientific novelty and practical results of the study substantiates the validity of the results, reveals its theoretical and practical significance, given a list of applications in practice of results of research and published works, information about the testing of the obtained results and structure of the thesis are given.

The First chapter of the thesis, entitled «**Construction of the fundamental solutions for third-order equations with multiple characteristics**», dedicated to the construction of the fundamental solutions.

Partial differential equations of the third order are considered in the solution of problems of theory of nonlinear acoustics and hydrodynamic theory of cosmic plasma, as well as modeling of fluid filtration in porous media.

The Korteweg - de Vries equation

$$u_y + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta = \text{const} \neq 0. \quad (1)$$

is often used as a model equation to study the small waves, but finite amplitude in a dispersion medium. In the linear case, the theory of equations of the form (1) has been elaborated and developed in the works by L.Cattabriga, T.D. Dzhuraev, S. Abdinazarov and their followers.

Often rather drastic changes of flow parameters occur in narrow areas relevant to shock waves. Gradients of flow parameters in this area can be so significant that, along with the non-linear nature of the movement becomes necessary to consider the influence of viscosity and thermal conductivity. Such flows are called short waves. The theory of short waves belongs to the theory of transonic flows. It should be noted that in the recent literature this equation more often has been called viscous transonic equation, or just the VT-equation.

In general case, let us consider the equation

$$\frac{\partial^p u}{\partial x^p} + a \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}}, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial y^{q-1}} \right), \quad (2)$$

when $p > q$, $a = \text{const}$.

Studying this equation when $p = 3$, $q = 1, 2$ were started in the works of H. Block and E. Del Vecchio. In this connection, H. Block has developed a method for constructing the fundamental solution with the help of superposition of specially selected elementary solutions, and, using the Fourier transform, he has found a solution of the source type. In a work by L. Cattabriga, these results were generalized for the equation (2) in the case of $p = 2n + 1$, $q = 2$. For $n = 1$, constructed fundamental solutions have the form of

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} f(t), \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{1/3} \varphi(t), \quad (3)$$

here

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} t^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_t^\infty \tau^{-3/2} f^*(\tau) d\tau + c^+ \right), & t > 0; \\ |t|^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_t^\infty |\tau|^{-3/2} f^*(\tau) d\tau + c^- \right), & t < 0; \end{cases} \\ \varphi(t) &= |t|^{1/2} \left(\frac{3}{2} \int_{-\infty}^t |\tau|^{-3/2} \varphi^*(\tau) d\tau + c \right), \quad t < 0; \\ f^*(t) &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2}\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2} + \lambda t\right) d\lambda, \quad -\infty < t < +\infty, \\ \varphi^*(t) &= \int_0^\infty \left[\exp(\lambda t - \lambda^{3/2}) + \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2}\right) \right] \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{3/2} + \lambda t\right) d\lambda, \quad t < 0, \\ t &= (x - \xi) |y - \eta|^{-2/3}, \quad c^+, c^-, c = \text{const}. \end{aligned}$$

Also for the fundamental solutions the following estimates were obtained:

$$\left| \frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h \partial y^k} \right| < c_1 |y - \eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{-\frac{1}{2} \left[2h+3k-1 + \frac{3}{2} (1-(-1)^k) \right]}, \quad \text{when } (x - \xi) |y - \eta|^{-\frac{2}{3}} \rightarrow -\infty,$$

$$\left| \frac{\partial^{h+k} U}{\partial x^h \partial y^k} \right| < c_2 |y - \eta|^{-\frac{2h+3k-1}{3}} \exp(-c_3 t^3), \quad \text{when } (x - \xi)|y - \eta|^{-\frac{2}{3}} \rightarrow +\infty.$$

In recent years, a number of papers appeared, where the well - posed boundary value problems for third-order equations with multiple characteristics are studied, containing the second derivative with respect to time. An overview of these studies can be found in the works of L. Cattabriga, L. Rodino, T. D. Dzhuraev, A. A. Dezin, V. N. Diesperov, O. S. Ryzhov, Y. V. Zasorin and S. Abdunazarova.

The systematic study of third-order equations with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time in our country began in the seventies of the twentieth century and developed intensively in the works of T. D. Dzhuraev, S. Abdunazarova and their followers. Note that in these works the boundary value problem were investigated by the method of potentials using the fundamental solution (3).

If one pays attention to the fundamental solution (3), we can see that they contain cumbersome double improper integrals, and therefore significant difficulties have arisen in their study related to the calculation of multiple integrals. Behavior in different parts of the axis Ox is different. In addition, owing to the arbitrary constants in the representation of formulas there is a lot of inconvenience.

Naturally, the following question arises: is it possible to build a new, convenient idea for formulas that could clearly and easily give a qualitative analysis of the solutions? To obtain a new representation for fundamental solutions, it is necessary to use a different method of construction.

In the dissertation, using the method of similarity, i.e. with the help of constructing automodel solutions, a new representation is constructed for the fundamental solution of a third-order equation with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time.

In the first paragraph of the first chapter, fundamental solutions are constructed for the equation

$$L[u] = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

In equation (4) by introducing a new variable on the formula $t = xy^{-2/3}$ and denoting $u' = c\varphi(t)$, we have

$$\varphi'' - (4/9)t^2\varphi' - (10/9)t\varphi = 0.$$

by replacing $\varphi(t) = tZ(\xi)$, $\xi = \frac{4}{27}t^3$, we obtain

$$\xi Z'' + \left[(4/3) - \xi \right] Z' - (7/6)Z = 0. \quad (5)$$

This is the standard form of a degenerate hypergeometric equation.

Linearly independent solutions of the equation (5) have the form

$$Z_1(\xi) = \Phi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right), \quad Z_2(\xi) = \Psi\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \xi\right),$$

where $\Psi(a, b; x)$, $\Phi(a, b; x)$ - are degenerate hypergeometric functions.

Then fundamental solutions of the equation (4) have the form

$$U(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} f(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad V(x, y; \xi, \eta) = |y - \eta|^{\frac{1}{3}} \varphi(t), \quad t < 0, \quad (6)$$

where

$$f(t) = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3\pi}} t \Psi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \varphi(t) = \frac{36\Gamma(1/3)}{\sqrt{3\pi}} t \Phi\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}; \tau\right), \quad \tau = \frac{4}{27} t^3, \quad t = \frac{x - \xi}{|y - \eta|^{\frac{2}{3}}}.$$

The second paragraph of the first chapter is devoted to obtaining estimates of the fundamental solution. Using known estimates of degenerate hypergeometric functions and the differentiation formula, we obtain the following estimates

$$|f^{(\nu)}(t)| \leq C_{1\nu} |t|^{-\frac{5}{2}-\nu}, \quad |t| \rightarrow \infty, \quad |\varphi^{(\nu)}(t)| \leq C_{2\nu} |t|^{-\frac{5}{2}-\nu}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

$$|f^{(\nu)}(t)| \leq C_{3\nu} |t|^{-\frac{1}{2}-\nu}, \quad |t| \rightarrow \infty, \quad |\varphi^{(\nu)}(t)| \leq C_{4\nu} |t|^{-\frac{1}{2}-\nu}, \quad t \rightarrow -\infty, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

for the fundamental solution

$$\left| \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} U(x, y; \xi, \eta) \right| \leq C_{hk} |y - \eta|^{\frac{1-(-1)^k}{2}} |x - \xi|^{\frac{1}{2} \left\{ 2h+3k-1 + \frac{3}{2} [1-(-1)^k] \right\}}, \quad \text{when } |t| \rightarrow \infty.$$

There are similar estimates for the function $V(x, y; \xi, \eta)$ at $t \rightarrow -\infty$.

In the third paragraph of the first chapter, some properties of the fundamental solution are studied, which are necessary for solving boundary value problems.

Theorem 1. The following limit equalities

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{5/2} f^*(t) = \frac{3}{4\sqrt{\pi}}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{5/2} f^*(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{5/2} \varphi^*(t) = -\frac{9\Gamma^2(1/3)}{2\pi\sqrt[3]{2}\Gamma(1/6)},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1/2} f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-1/2} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |t|^{-1/2} \varphi(t) = -\frac{192}{5\sqrt[3]{2}\sqrt{3\pi}}$$

take place.

Theorem 2. For $\forall \phi(x) \in C[a; b]$ and $x_0 \in [a, b]$, where $-\infty < a < b < +\infty$, the equality

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \eta \rightarrow y \pm 0}} \int_a^b U_\eta(x, y; \xi, \eta) \phi(\xi) d\xi = \pm \phi(x_0)$$

holds.

Theorem 3. For $\omega(y) \in C[0, l]$ where $l = \text{const} < +\infty$, the following equalities take place:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_0^l U_{xx}(x, y; \xi, \eta) \omega(\eta) d\eta = \begin{cases} -(2/3)\omega(y), & x > \xi, \\ (4/3)\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_0^l V_{xx}(x, y; \xi, \eta) \omega(\eta) d\eta = \begin{cases} 2\omega(y), & x < \xi, \\ 0, & x = \xi. \end{cases}$$

In the fourth paragraph of the first chapter it is established that fundamental solutions, constructed in the work by L.Cattabriga, satisfy the equation only for certain values of the constants. Estimates of the solution obtained in this work with the help of the asymptotic method differ at $t \rightarrow +\infty$ from the well-known estimate of the degenerate hypergeometric function.

The second chapter of the dissertation entitled «**Application of the Fourier method in problems for third-order equations with multiple characteristics**» consists of four paragraphs. As far as we know, the well - posed boundary value problems for the equations of the third order with multiple characteristics have not been studied by the Fourier method.

In the present dissertation, boundary problem for third-order equations with multiple characteristics containing second derivatives with respect to time are first investigated with the help of the Fourier method. A complete description of the algorithm method is given. The constructive theory of the Fourier method is constructed.

The developed method is used for solving boundary value problems of the first, second, and third kinds.

In the dissertation, the well - posed boundary value problems in an infinite domain are posed and studied for third-order equations with multiple characteristics having degenerations of the first kind.

In the first paragraph of the second chapter, the following problems are studied in the rectangular domain $D = \{(x, y): 0 < x < p, 0 < y < l\}$:

Problem A_1 . To find a solution of the equation (4) in the domain D from the class $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, satisfy the following boundary conditions

$$u(x, 0) = u(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l,$$

where $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, and $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ - are given functions.

Problem A_2 . To find a solution of the equation (4) in the domain D from the class $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, satisfying the following boundary conditions

$$u_y(x, 0) = u_y(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u(0, y) = \psi_4(y), \quad u(p, y) = \psi_5(y), \quad u_x(p, y) = \psi_6(y), \quad 0 \leq y \leq l,$$

where $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 4, 5$, and $\psi_6(y) \in C^2[0, l]$ - are given functions.

Theorem 4. Problem A_i , $i = 1, 2$ can not have more than one solution.

Theorem 4 is proved by the method of energy integrals.

We will construct the solution of Problem A_1 in the form of the series

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2} k_n x} (C_{2n} \cos \nu_n x + C_{3n} \sin \nu_n x) \right] \sin \frac{\pi n}{l} y. \quad (7)$$

Theorem 5. If $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=1, 2$, and $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$, in addition $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i''(0) = \psi_i''(l) = 0$, $i=1, 2, 3$, then the solution of Problem A_1 exists and is represented by the series (7).

Problem A_2 is investigated similar to Problem A_1 .

The second paragraph of the second chapter is devoted to study of correct boundary value problems for the equation (4) in domains

$$D^+ = \{(x, y): 0 < x < \infty, 0 < y < l\}, \quad D^- = \{(x, y): -\infty < x < 0, 0 < y < l\}.$$

Problem B_1 . Find a solution of the equation (4) in the domain D^+ from the class $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$, having bounded second derivative for x at $x \rightarrow +\infty$ and satisfying the boundary conditions

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u(x, l) = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ u(0, y) = \psi_1(y), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l, \end{aligned} \quad (8)$$

where $\Gamma_1 = \partial D^+$ – domain boundary D^+ , $\psi_1(y) \in C^3[0, l]$ – are given function.

Problem B_2 . To find a solution of the equation (4) in the domain D^- from the class $C_{x,y}^{3,2}(D^-) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^- \cup \Gamma_2)$, having bounded first and second derivatives for x at $x \rightarrow -\infty$ and satisfying the boundary conditions at $-\infty < x < 0$ (8) and

$$u(0, y) = \psi_2(y), \quad u_x(0, y) = \psi_3(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l,$$

where $\Gamma_2 = \partial D^-$ – domain boundary D^- , $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=2, 3$ – are given functions.

Theorem 6. Problems B_1 and B_2 can not have more than one solution.

The solution of Problem B_1 have the form

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{7n} e^{-k_n x} \sin \frac{n\pi}{l} y. \quad (9)$$

The solution of Problem B_2 have the form

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{2n} e^{\frac{1}{2} k_n x} \cos v_n x + C_{3n} e^{\frac{1}{2} k_n x} \sin v_n x \right] \sin \frac{\pi n}{l} y. \quad (10)$$

Theorem 7. If functions $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=1, 2, 3$, and in addition $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i''(0) = \psi_i''(l) = 0$, $i=1, 2, 3$, then solutions of problems B_1 and B_2 exist and have the form of series (9) and (10), respectively.

The third section of the second chapter is devoted to the study of the third boundary value problem in finite and infinite domains.

Problem E_1 . Find a solution of the equation (4) in the domain D from the class $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ satisfying the following boundary conditions

$$\begin{aligned} \alpha u(x, 0) + \beta u_y(x, 0) = 0, \quad \gamma u(x, l) + \delta u_y(x, l) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \\ u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l \end{aligned} \quad (11)$$

here α , β , and γ , δ are arbitrary constants, in addition $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, and $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ - are given functions.

Problem E_2 . Find a solution of the equation (4) in the domain D^+ from the class $C_{x,y}^{3,2}(D^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^+ \cup \Gamma_1)$, having bounded second derivative for x at $x \rightarrow +\infty$ and satisfy boundary conditions (11),

$$u(0, y) = \psi_7(y), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Problem E_3 . Find a solution of the equation (4) in the domain D^- from the class $C_{x,y}^{3,2}(D^-) \cap C_{x,y}^{2,1}(D^- \cup \Gamma_2)$, having bounded first and second derivatives for x at $x \rightarrow -\infty$ and satisfy boundary conditions (11),

$$u(0, y) = \psi_8(y), \quad u_x(0, y) = \psi_9(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Theorem 8. If $\alpha\beta \leq 0$, $\gamma\delta \geq 0$, then Problem E_1 can not have more than one solution.

We look for a solution of Problem E_1 in the form of $u(x, y) = X(x)Y(y)$.

Then to find the function $Y(y)$, we come to the problem of the Sturm-Liouville type: to find the values of the parameter λ , for which there exists a nontrivial solution of the problem:

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad \alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0, \quad \gamma Y(l) + \delta Y'(l) = 0.$$

Solving this problem, we find the eigenvalues in the form $\lambda_k = (\xi_k/l)^2$, $\{\lambda_n\}$ form an increasing sequence.

Corresponding Eigenfunctions have the form

$Y_n(y) = (\alpha \sin \sqrt{\lambda_n} y - \beta \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} y) A_n$, and it is proved that the system of Eigenfunctions is orthogonal in the segment $[0, l]$.

We look for a solution of Problem E_1 in the following form

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{1n} B_{1n}(x) + A_{2n} B_{2n}(x) + A_{3n} B_{3n}(x)] Y_n(y). \quad (12)$$

It is proved the following

Theorem 9. If $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i=1, 2$, and $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$, in addition $\alpha\psi_i(0) + \beta\psi_i'(0) = 0$, $\gamma\psi_i(l) + \delta\psi_i'(l) = 0$, $i=1, 2, 3$, then the solution of Problem E_1 exists and has the form of the series (12).

We present the solution of Problem E_2 in the form of

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{-k_n x} Y_n(y), \quad (13)$$

and the solution of Problem E_3 - in the form of

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2} k_n x} \left[C_{2n} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(v_n x + \frac{\pi}{6}) + C_n \frac{2}{\sqrt{3} k_n} \sin v_n x \right] Y_n(x). \quad (14)$$

Theorem 10. If $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 7, 8, 9$, moreover $\alpha\psi_i(0) + \beta\psi_i'(0) = 0$, $\gamma\psi_i(l) + \delta\psi_i'(l) = 0$, $i = 7, 8, 9$, then solutions of problems E_2 , E_3 exist and have the form of (13), (14) respectively.

The fourth paragraph of the second chapter is devoted to the study of boundary value problems for equations having degeneration of the first kind.

We study the following problems in the domain D^+ for the equation

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - x^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad n > 0 \quad (15)$$

Problem B_1^n . Find a solution of the equation (15) in the domain D_1^+ from the class $C_{x,y}^{3,2}(D_1^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1^+ \cup \Gamma_1)$, having bounded second derivative for x at $x \rightarrow +\infty$ and satisfying the following boundary conditions

$$u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (16)$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = 0, \quad (18)$$

where $\psi(y) \in C^3[0, 1]$ - are given function.

Problem B_2^n . Find a solution of the equation (15) in D_1^+ from the class $C_{x,y}^{3,2}(D_1^+) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1^+ \cup \Gamma_1)$, having bounded second derivative for x at $x \rightarrow +\infty$ and satisfying the boundary conditions (17), (18) and $u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0$, where $\psi(y) \in C^3[0, 1]$ - are given function.

Theorem 11. Problem B_1^n can not have more than one solution.

We look for a solution of the stated problem in the form of

$$u(x, y) = Z(x)Y(y).$$

Then we obtain the following system of ordinary differential equations for the equation (15):

$$Z'''(x) + \lambda x^n Z(x) = 0, \quad Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \quad (19)$$

where $\lambda > 0$ is arbitrary number.

The solution of the equation (15), satisfying the condition (16), has the form of

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(x) \sin \pi k y \quad (20)$$

where $Z_k(x) = c_{1k} F_{1k}(x) + c_{2k} F_{2k}(x) + c_{3k} F_{3k}(x)$.

Theorem 12. If functions $\psi(y) \in C^3[0, 1]$, and moreover $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$, then the solution of Problem B_1^n exists and has the form of the series (20).

Problem B_2^n is studied similar to Problem B_1^n .

In the third chapter of the dissertation, entitled «**Construction and application of the Green's function in problems for third-order equations with**

multiple characteristics», boundary value problems have been studied using the fundamental solutions and the construction of the Green's function.

In the first paragraph of the third Chapter, using the reflection method, a solution of the first boundary value problem is constructed.

Problem K_1 . Find a solution of the equation (7) in the domain D from the class $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ satisfying the boundary conditions:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq p, \quad (21)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq l$$

where $\varphi_i(x) \in C[a, b]$, $i=1, 2$, and functions $\psi_j(y) \in C^3[0, l]$, $j=1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$ - are given functions.

Theorem 13. Problem K_1 cannot have more than one solution.

Theorem 13 is proved by the method of energy integrals. Consider the following auxiliary

Problem K_{11} . Construct a function $v(x, y)$ satisfying the equation (4) and condition (21) in D .

To solve the auxiliary problem, the functions

$$Z(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [U(x, 2ml + y; \xi, \eta) - U(x, 2ml - y; \xi, \eta)], \quad (22)$$

$$T(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [V(x, y + 2ml; \xi, \eta) - U(x, 2ml - y; \xi, \eta)], \quad x - \xi < 0$$

are constructed.

Theorem 14. Functions $Z(x, y; \xi, \eta)$ and $T(x, y; \xi, \eta)$ are periodical with respect to the argument y with the period $2l$, i.e.

$$Z(x, y + 2l; \xi, \eta) = Z(x, y; \xi, \eta), \quad T(x, y + 2l; \xi, \eta) = T(x, y; \xi, \eta).$$

The solution of Problem K_{11} has the form of

$$v(x, y) = -\frac{1}{2} \int_0^p Z_\eta(x, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^p Z_\eta(x, y; \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi. \quad (23)$$

We look for a solution of Problem K_1 in the form of

$$\mathcal{G}(x, y) = u(x, y) - v(x, y)$$

where $u(x, y)$ is the solution of Problem K_1 , $v(x, y)$ has the form of (23).

Then we obtain the following problem for $\mathcal{G}(x, y)$:

$$\mathcal{G}_{xxx} - \mathcal{G}_{yy} = 0, \quad \mathcal{G}(x, 0) = \mathcal{G}(x, l) = 0, \quad (24)$$

$$\mathcal{G}(0, y) = \bar{\psi}_1(y), \quad \mathcal{G}(p, y) = \bar{\psi}_2(y), \quad \mathcal{G}_x(p, y) = \bar{\psi}_3(y).$$

The problem (24) can be solved as Problem A_1 in the paragraph 1.1.

Defining the function $\mathcal{G}(x, y)$, we obtain:

$$u(x, y) = \mathcal{G}(x, y) + v(x, y) \quad (25)$$

where $\mathcal{G}(x, y)$ and $v(x, y)$ have the form of (12) and (23), respectively.

The following theorem has been proved

Theorem 15. If $\varphi_j(x) \in C[0, p]$, $j = 1, 2$, and functions $\psi_i(y) \in C^3[0, l]$, $i = 1, 2$, $\psi_3(y) \in C^2[0, l]$, $\psi_i(0) = \psi_i(l) = \psi_i'(0) = \psi_i'(l) = 0$, $i = 1, 2, 3$, then the solution of Problem K_1 exists and is represented in the form of (25).

In the second paragraph of the third chapter, in the domain $D_\infty = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < l\}$ for the equation

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y) \quad (26)$$

the following problem is studied.

Problem B_1^ .* Find a solution of the equation (26) in D_∞ from the class $C_{x,y}^{3,2}(D_\infty) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_\infty \cup \Gamma_3)$, with the bounded first derivative with respect to x at $x \rightarrow -\infty$, and the second derivative at $x \rightarrow \pm\infty$ and satisfying the following boundary conditions

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, y) = 0, \quad (28)$$

where $\varphi_i(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $i = 1, 2$, $g(x, y) \in C(D_\infty \cup \Gamma_3)$, $\Gamma_3 = \partial D_\infty -$ is the boundary of D_∞ , moreover, matching conditions is performed

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i'(x) = 0, \quad i = 1, 2$$

Theorem 16. Problem B_1^* can not have more than one solution.

Lemma 1. For an infinite domain, the Green's function of Problem B_1^* has the form of

$$G(x, y; \xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [U(x, 2ml + y; \xi, \eta) - U(x, 2ml - y; \xi, \eta)]. \quad (29)$$

A solution of Problem B_1^* has the form of

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x, y; \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} G_\eta(x, y; \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \iint_{D_\infty} G(x, y; \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (30)$$

Lemma 2. Let the functions $\varphi_i(x)$ and $g(x, y)$ at $|x| \rightarrow \infty$ have the following representations:

$$\varphi_i(x) = O(|x|^{-\alpha}), \quad i = 1, 2, \quad \left(\alpha > \frac{1}{3}\right), \quad g(x, y) = O(|x|^{-\beta}), \quad \left(\beta > \frac{3}{2}\right), \quad (31)$$

homogeneous with respect to y . Then for any $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, the equalities

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x_0, y) = \varphi_1(x_0), \quad \lim_{y \rightarrow l} u(x_0, y) = \varphi_2(x_0), \quad \text{hold.}$$

Theorem 17. Let $\varphi_i(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $i = 1, 2$, $g(x, y) \in C(D_\infty \cup \Gamma)$, and $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_i'(x) = 0$, $i = 1, 2$, and the conditions (31) are also fulfilled. Then

the unique solution of Problem B_1^* has the form of (30), where the Green function $G(x, y; \xi, \eta)$ is defined by the formula (29).

In the third paragraph of the third chapter, using the constructed Green's functions, the first and second boundary value problems are investigated in a rectangular domain.

Problem A_{31} . Find a solution of the equation (26) in the domain D from the class $C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ satisfying the boundary conditions:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(x, l) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < p, \quad (32)$$

$$u(0, y) = \psi_1(y), \quad u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad 0 < y < l, \quad (33)$$

where $\varphi_i(x) \in C[0, p]$, $i = 1, 2$, $\psi_j(y) \in C[0, l]$, $j = \overline{1, 3}$, $g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$,

moreover, the following matching conditions:

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1(p) = \psi_2(0), \quad \varphi_1'(p) = \psi_3(0), \quad \varphi_2(0) = \psi_1(l), \quad (34)$$

$$\varphi_2(p) = \psi_2(l), \quad \varphi_2'(p) = \psi_3(l), \quad g(x, 0) = g(x, l) = 0.$$

Problem A_{32} . Find a solution of the equation (26) in the domain D from the class $u(x, y) \in C_{x,y}^{3,2}(D) \cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$ satisfying the boundary conditions (33) and

$$u_y(x, 0) = \varphi_3(x), \quad u_y(x, l) = \varphi_4(x), \quad 0 < x < p$$

where $\varphi_i(x) \in C[0, p]$, $i = 3, 4$, $\psi_j(y) \in C[0, l]$, $j = \overline{1, 3}$, $g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$.

Theorem 18. Problem A_{31} cannot have more than one solution.

The solution of the problem A_{31} is given in the form

$$\begin{aligned} 2u(x, y) = & \int_0^l G_{\xi\xi}(x, y, p, \eta) \psi_2(\eta) d\eta - \int_0^l G_{\xi\xi}(x, y, 0, \eta) \psi_1(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^l G_{\xi}(x, y, p, \eta) \psi_3(\eta) d\eta + \int_0^p G_{\eta}(x, y, \xi, l) \varphi_2(\xi) d\xi - \\ & - \int_0^p G_{\eta}(x, y, \xi, 0) \varphi_1(\xi) d\xi - \iint_D G(x, y, \xi, \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (35)$$

So, we obtain the solution of Problem A_{31} explicitly, unlike other problems, in which the solution of Problem A_{31} was reduced to integral equations.

Thus, we have proved the following theorem

Theorem 19. Let $\varphi_i(x) \in C[0, p]$, $i = 1, 2$, $\psi_j(y) \in C[0, l]$, $j = \overline{1, 3}$, $g(x, y) \in C_{x,y}^{0,2}(\overline{D})$, and conditions (34) are also valid. Then solution of Problem A_{31} has the form of (35), where the Green function $G(x, y; \xi, \eta)$ is defined by the formula (29).

Problem A_{32} is investigated as well as Problem A_{31} .

In the first paragraph of the fourth chapter of the dissertation, entitled «Boundary value problems for mixed parabolic – hyperbolic equations in the

space», the three-dimensional analog of the Tricomi problem with recharacterizations change planes types is studied.

The theory of equations of mixed type, which is initiated by the Italian mathematician F. Tricomi, has now grown into one of the rapidly developing fields of modern theory of partial differential equations.

At first, boundary value problems for mixed elliptic - hyperbolic equations in infinite three-dimensional domains with the help of the Fourier transform were studied in the work by A.V. Bitsadze.

Let Ω be an infinite конечная prismatic domain of the three-dimensional Euclid space of variables x, y, z .

For the equation

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y + U_{zz} & \text{in } \Omega^+, \\ U_{xx} - (-x)^m (U_{yy} + U_{zz}) & \text{in } \Omega^+, m > 0, \end{cases} \quad (36)$$

consider the following

Problem T. Find a regular solution $U(x, y, z)$ of the equation (36) in domains Ω^+ and Ω^- with the following properties:

$$1) U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega^\pm}) \cap [C^1(\Omega^+ \cup I) \cup C^1(\Omega^- \cup I)] \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-),$$

2) it satisfies the boundary conditions:

$$U|_{S_1} = \Phi_1(x, z), \quad 0 \leq x \leq h; \quad U|_{S_2} = \Phi_2(y, z), \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U|_{S_5} = \Psi(y, z), \quad 0 \leq y \leq 1/2; \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0;$$

3) it satisfies the adhesion conditions:

$$U(-0, y, z) = \alpha U(+0, y, z),$$

$$U_x(-0, y, z) = \beta(y) U_x(+0, y, z) + \delta(y) U(+0, y, z) + P(y, z),$$

$$\alpha = \text{const}, \quad (y, z) \in I, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} P(y, z) = 0.$$

Following the idea by A.V. Bitsadze, we look for a solution of this problem in the class of functions representable by the Fourier integral.

Then Problem T is equivalently reduced to the plane problem T_λ .

Uniqueness of the solution for Problem T_λ is proved by the maximum principle. Existence of the unique solution for Problem T_λ is equivalently reduced to the Volterra integral equation of the second kind, which requires a separate investigation for the cases $0 < m < 2$, $m = 2$, $m > 2$.

In the second paragraph of the fourth chapter, the three-dimensional analogue of the Gellerstedt problem is investigated.

Let Ω^* be an infinite cylindrical domain of a three-dimensional Euclid space of variables x, y, z .

For the equation

$$0 = \begin{cases} U_{xx} + U_{zz} - U_y, & \text{in } \Omega_1^*, \\ -(-y)^m (U_{xx} + U_{zz}) + U_{yy}, & \text{in } \Omega_k^*, \quad k = 2, 3, \quad m > 0, \end{cases} \quad (37)$$

the following problems are studied.

Problem G. Find a regular solution of the equation (37) in domains Ω_k^* ($k = \overline{1,3}$) with the following properties:

$$1) \quad U(x, y, z) \in C(\overline{\Omega_k^*}) \cap \left[C^1(\Omega_1^* \cup I_1 \cup I_2) \cup C^1(\Omega_2^* \cup I_1) \cup C^1(\Omega_3^* \cup I_2) \right] \cap \\ \cap C^2(\Omega_1^* \cup \Omega_2^* \cup \Omega_3^*), \quad k = \overline{1,3};$$

2) for $-\infty < z < +\infty$, it satisfies the boundary conditions:

$$U|_{S_1} = \Phi_i(y, z), \quad 0 \leq y \leq h, \quad i = 1, 2, \quad U|_{S_4} = \Psi_1(y, z), \quad 0 \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$U|_{S_6} = \Psi_3(y, z), \quad \varepsilon \leq x \leq \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0,$$

$$U|_{S_1} = \Phi_i(y, z), \quad 0 \leq y \leq h, \quad i = 1, 2, \quad U|_{S_4} = \Psi_1(y, z), \quad 0 \leq x \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$U|_{S_6} = \Psi_3(y, z), \quad \varepsilon \leq x \leq \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U(x, y, z) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} U_z(x, y, z) = 0,$$

3) it satisfies the gluing conditions:

$$U(x, -0, z) = \alpha U(x, +0, z),$$

$$U_y(x, -0, z) = b_k(x)U_y(x, +0, z) + c_k(x)U(x, +0, z) + P_k(x, z),$$

$$\alpha = \text{const}, \quad (x, z) \in I_k, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} P_k(x, z), \quad k = 1, 2.$$

Problem G is investigated as well as Problem T.

CONCLUSION

The dissertation work is devoted to development of the theory of fundamental solutions and theory of potential, construction of the constructive theory of the Fourier method for third-order equations with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time, as well as proof of the unique solvability of boundary value problems for mixed parabolic-hyperbolic equations in a three-dimensional space

The main results of the research are the following.

1. The theory of analytical and fundamental solutions for equations of third order with multiple characteristics containing the second derivative in time are constructed with the help of special functions.

2. For the first time the algorithm of solution for the boundary value problems by the Fourier method is worked out for the third order equations with multiple characteristics containing the second derivative in time.

3. The potential theory for equations of the third order with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time is fully justified.

4. The Green functions are constructed to solution of boundary value problems for equations of the third order with multiple characteristics containing the second derivative in time.

5. The Fourier algorithm is applied to solution of the boundary value problems, for degenerate equations of third order with multiple characteristics containing the second derivative with respect to time.

6. The uniquely solvability of Tricomi and Gellerstedt's problems for mixed parabolic - hyperbolic equation in three-dimensional space is proved.

7. The necessary and sufficient conditions for the existence of the direct and inverse Fourier transform for solution of the boundary value problems in three-dimensional space are found.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Dzhuraev T. D. and Apakov Yu. P. Gellerstedt's problem for a parabolic-hyperbolic equation in three-dimensional space // Differential equations, translated from Russian, consultants bureau. New York, 1990. - Vol. 26. - № 3, -pp. 322-330. (11. Springer. IF=0.344).
2. Иргашев Ю. Апаков.Ю.П. Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа// Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2006. - № 2, - С.44-51.(01.00.00; № 6).
3. Апаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ в неограниченных областях// Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. - Ташкент, 2006. - № 3.- С. 17-20. (01.00.00; № 7).
4. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2007. - № 1. - С.14-23. (01.00.00; № 6).
5. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета, Серия «Физико-математические науки». - Самара, 2007.-№ 2(15). - С.18-26. (5. Global Impact Factor. IF=0.876).
6. Джураев Т.Д Апаков Ю.П. Об одном методе построения фундаментальных решений уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан.-Ташкент, 2007.-№ 4.- С. 3-6. (01.00.00; №7).
7. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом Фурье в областях с некомпактными границами // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2008. - № 1.- С.14-22. (01.00.00; № 6).
8. Dzhuraev T.D. and Apakov Yu.P. On the theory of the third- order equation ith multiple characteristics containing the second time derivative // Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, 2010. - Vol. 62, - № 1. - pp. 43-55. (40. Research Gate. IF=0.30).
9. Apakov Yusufjon P. Construction of Green's Function for One Problem of Rectangular Region // Malaysian Journal of Mathematical Sciences, - Kuala-Lumpur, 2010. - Vol. 4(1). - № 1. - pp. 1-16. (41. SCImago. IF=0.245).
10. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics //Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. -Vol. 16. - № 3.- pp. 255-269. (40. Research Gate. IF=1.18).
11. Apakov Yu.P. A Three- Dimensional Analog of the Tricomi Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation. //Journal of Applied and Industrial

- Mathematics. Springer, New York, 2012. - Vol. 6. - № 1, - pp. 1-11. (41. SCImago. IF=0.176).
12. Apakov Yu.P. On the solution of a boundary-value problem for a third- order equation with multiple characteristics// Ukrainian Mathematical Journal. Springer, New York, June, 2012. - Vol. 64, - № 1.- pp. 1-11. (40. Research Gate. IF=0.30).
13. Апаков Ю.П. Трехмерный аналог задачи Трикоми с параллельными плоскостями изменения типов // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2015. - № 4.- С. 19-26. (01.00.00; № 6).

II бўлим (II часть; II part)

14. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. Метод подобия для построения фундаментальных решений уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ // Доклады Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. - Нальчик, 2007. - Т.9, - № 1, - С.38-44.
15. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. - Нальчик, 2008. - № 2 (22), - С. 147-151.
16. Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю. Краевая задача в бесконечной области для уравнения третьего порядка, имеющего вырождение первого рода // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». - Санкт - Петербург, 2008. - № 4. С. 41 - 50. <http://www.neva.ru/jornal>, <http://www.math.spbu.ru/diffjournal/J/apakov/>
17. Apakov Yu.P. On a method of solving the problem for a third order equation with multiple characteristics // Mathematica Macedonica. -Skopje, 2008. - Vol. 6, - pp. 21-28.
18. Apakov Yu.P. On a problem for a third order equation with multiple characteristics in the infinite domain // Romai Journal. –Bucharest, 2011. - Vol 7. - № 1. -pp. 1-12.
19. Apakov Yu.P. The mixed boundary value problem for a third order equation with multiple characteristics// Sakarya Dergisi, Üniversitesi. Fen Edebiyat. - Sakarya, 2011. - № 1. - pp. 33-45.
20. Apakov Yusupjon P. On a Method for Solving Boundary Problems for Third-order Equation with Multiple Characteristics // Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations. Operator Theory: Advances and Applications, Springer. -Basel, 2011. - Vol. 216, - pp. 65-78.
21. Dzhuraev T.D., Apakov Yu.P. On a boundary value problem for the viscous transonic equation // World Mathematical Society of Turkic Countries. Reports of the Third Congress. Volume 1. June 30 – July 4, 2009. Al-Farabi Kazakh National University.- Almaty, 2009.- pp. 282-287.
22. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On the Green Function for One Boundary Value Problem in the Infinite Domain // Differential equations and their applications (data'2009). Dedicated to Professor M. Sapagovas 70th Anniversary:

- Proceedings of the international conference. September 10-12, 2009, Kaunas Univer. of Tehnology.- Panevežys, Lithuania, 2009.- pp.106-116.
23. Апаков Ю.П. Краевая задача для вязкого трансзвукового уравнения прямоугольной области // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий- Аль-Хорезми - 2009: Труды Межд. конф. 18-21 сентября 2009 г. - Ташкент, 2009.- С.53-57.
 24. Апаков Ю.П. Об одной задаче для уравнения параболо- гиперболического типа //Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики: Труды Межд. науч. конф. 16-19 ноября 2004. В 2-х т. Т. I. – Ташкент, 2004. - С.31-33.
 25. Апаков Ю.П. Трехмерный аналог задачи Геллерстедта для параболо-гиперболического уравнения //Современные проблемы математической физики и информационных технологий: Труды Межд. конф. 18-24 апреля 2005. В 3-х т. Т. I, - Ташкент, 2005. - С. 245-246.
 26. Апаков Ю.П. Метод подобия для построения основных решений уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий: Тезисы докладов Межд. науч. конф. 20-22 сентября, 2006.- Алматы, 2006.- С. 26-27.
 27. Джураев Т.Д. Апаков Ю.П. Построение фундаментальных решений уравнения $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ методом подобия // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Матер. III Межд. конф. 5-8 декабря, 2006.- Нальчик: НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2006.- С. 107-109.
 28. Апаков Ю.П. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Матер. III Межд. конф. 5-8 декабря, 2006.- Нальчик: НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2006.- С. 37-39.
 29. Apakov Yu.P. About solvability of the boundary value problems for third-order equations with multiple characteristics in infinite domains // Mathematical Modeling and Analysis: Abstracts of the 12 the International Conference. May 30-June 2, 2007.-Trakai, Litvania, 2007.-p. 6.
 30. Апаков Ю.П. О решении одной краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Тез. докл. Межд. конф. 28 мая -2 июня, 2007.- Новосибирск, 2007. - С. 65-66.
 31. Apakov Yu.P. On solving method of boundary value problem's for the equations $U_{xxx} - U_{yy} = 0$ // II Turkish World mathematics symposium: Abstracts of the symposium. 4-7 july, 2007.- Universities Sakarya, 2007. - pp. 68-69.
 32. Апаков Ю.П. Об одном свойстве фундаментальных решений уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Матер. Межд. Российско - Азербайджанского симпозиума. 12-17 мая 2008 .-Нальчик,

- Эльбрус: 2008. НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. - С. 31-34.
33. Апаков Ю.П. Об однозначной разрешимости одной задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференциальные уравнения, функциональные пространства и теория приближений: Тезисы докл. Межд. конф. 5-12 октября 2008. -Новосибирск, 2008. - С. 98.
34. Апаков Ю.П. Об одном методе решения краевой задачи для квазиэллиптического уравнения // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. Тезисы докл. Межд. конф. 16-18 июня 2009. МГУ, - Москва, 2009. - С. 129-130.
35. Dzhuraev T.D., Apakov Yu.P. On a boundary value problem for the viscous transonic equation // World mathematical society of Turkic countries: Abstracts of third congress of the vol.1. June 30-july 4, 2009. - Almaty, 2009. - p. 195.
36. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. О решении одной краевой задачи для квазиэллиптического уравнения // Украинский математический конгресс-2009. Институт математики АН Украина. 27-29 август 2009, - Киев, 2009. <http://www.imath.riev.ua/~congress2009/>
37. Apakov Yu.P. Three dimensional analogy of Tricomi problem // Mathematical Modeling and Analysis. Abstracts 15 the International Conference May 26-29, 2010, Druskininkai, Lithuania, www.vgtu.lt/mma/mma2010.
38. Апаков Ю.П. О решении одной краевой задачи для вязкого трансзвукового уравнения // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Матер. Второй Межд. Российско - Казахского симпозиума. 23-27 мая 2011.- Нальчик, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 2011. - С. 26-29.
39. Apakov Yu.P. Solution of a boundary value problem for the viscous transonic equation // IV Congress of the Turkic World Mathematical society. Book of Abstracts, 1-3 jule 2011, -Baku, Azerbaijan, 2011. -p. 166.
40. Апаков Ю.П. Трехмерный аналог задачи Геллерстедта с параллельными плоскостями изменения типов // Матер. Респуб. науч. конф. «Актуальные проблемы математического анализа». 9-10 ноября 2012. 1-част. УргГУ, Ургенч, 2012. - С. 43-44.
41. Апаков Ю.П. Трехмерный аналог задачи Трикоми с параллельными плоскостями изменения типов // Тезисы Межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий- Аль-Хорезми-2012» . 19-22 декабря 2012. НУУз,- Ташкент, 2012. - С. 54.
42. Апаков Ю.П. Об одной задаче для парабло- гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Тезисы докл. Респуб. Науч.конф. с участием ученых стран СНГ. «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», 21 - 23 ноября 2013. НУУз,- Ташкент, 2013. -С. 32-33.
43. Апаков Ю.П. Об одной краевой задаче для парабло- гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Тезисы докл. Респ. науч. конф.

- «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», 23-25 октября 2014. ТашГУ, - Ташкент, 2014. - С. 128-129.
44. Апаков Ю.П. Трехмерный аналог задачи Трикоми с тремя плоскостями изменения типов // Тезисы докл.Меж. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий- Аль- Хорезми-2014», 15-17 сентября 2014. СамГУ.- Самарканд, 2014. - С.36-37.
45. Апаков Ю.П. Об одной краевой задаче для параболо- гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Тезисы республиканской научной конференции «Современные методы математической физики и их приложения», 15-17 мая 2015. НУУз. - Ташкент, 2015. - С.144-145.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.
«_____» _____ 2016 йил.

Босишга рухсат этилди: «_____» _____ 2016 йил.
Бичими 60x84 1/16, «Times New Roman»
гарнитурда рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табағи 5. Адади: 100. Буюртма №

Ўзбекистон Республикаси ИИБ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ» ДУК

