

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT
UNIVERSITETI**

**MEXANIKA – MATEMATIKA FAKULTETI
“Matematik fizika va funksional analiz” kafedrası**

Tolipova Xumora

**5130100 - matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr
darajasini olish uchun**

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

**Mavzu: “*Subgarmonik funksiyaning asosiy
xossalari va Riss tasviri*”**

Ilmiy rahbar:

dots. E.N.Sattorov

Bitiruv malakaviy ishi matematik fizika va funksional analiz kafedrasida bajarildi. Kafedraning 2015 – yil “ ” majlisida muhokama qilindi va himoyaga tavsiya etildi (bayonnoma)

Fakultet dekani:

dots. X.Ro'zimuradov

Kafedra mudiri:

dots. A.M.Xalxo'jayev

Bitiruv malakaviy ishi YaDAKning 2015 – yil 22 – iyundagi majlisida himoya qilindi va <<__>> ball bilan baholandi (bayonnoma __).

YaDAK raisi: _____

A'zolar: _____

Samarqand – 2015

A.Navoiy nomidagi SamDU mexanika-matematika fakul'teti matematika bo'limining
IV-kurs talabasi Tolipova Xumoraning **“Subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari va Riss
tasviri”** mavzusidagi malakaviy bitiruv ishiga

T A Q R I Z

Malakaviy bitiruv ishi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan bir qiymatli analitik funksiya bilan uzviy bog'liq bo'lgan subgarmonik funksiyalarning asosiy xossalari va integral tasvirini o'rganishga bag'ishlangan.

Malakaviy bitiruv ishi kirish va ikkita bobdan iborat bo'lib, 1-bobda garmonik funksiya tushunchasi, bir qiymatli analitik funksiya bilan bog'lanishi, subgarmonik funksiyaning asosiy elementar xossalariidan bir sifatida bir qiymatli analitik funksiyaning moduli yoki modulining logarifmi ham subgarmonik funksiya dan iborat ekanligiga alohida e'tibor bilan o'rganilgan.

II-bobida funksonal analizning asosiy tushunchalaidan biri hisoblangan chiziqli funksonal, o'lchov, Lebeg integrali va shu asosda subgarmonik funksiyaning organishda markaziy o'rin egallaydigan Riss tasviri o'rganilgan.

Bu bir tomondan kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining asosiy tushunchalarini chuqurroq o'rganib mustaqil tarzda boshqa masalalarni yechishga qo'llash imkoniyatini bersa, ikkinchi tomondan bu orttirilgan tajribalar asosida umumiy o'rta ta'lim, akademik litsey va kasb-unar kollejlarda bu bilimlarni keng qamrovda qo'llay olish imkoniyatiga ega bo'linadi.

Malakaviy bitiruv ishi yaxshi bajarilgan. Talaba Tolipova Xumoraning o'z ustida ishlashi, puxta matematik bilimga ega ekanligi va mehnatsevarligi ma'lum bo'ldi.

Ushbu ish malakaviy bitiruv ishlari uchun qo'yilgan barcha talablarga javob beradi va uning bajaruvchisi Tolipova Xumoraning bilimini 18 ball bilan baholash mumkin.

SamDU matematik analiz kafedrası dotsenti

Z.Ashurova

A.Navoiy nomidagi SamDU mexanika-matematika fakul'teti matematika bo'limining
IV-kurs talabasi Tolipova Xumoraning **“Subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari va Riss
tasviri”** mavzusidagi malakaviy bitiruv ishiga

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi o'zining qo'llanish jihatidan haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasiga qaraganda ko'proq imkoniyatga ega. Funksiyani differensiallanuvchanlik xossasi orqali ifodalanuvchi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan bir qiymatli analitik funksiya qo'llanishi jihatidan muhim ahamiyatga egadir. Bir qiymatli analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari o'zaro qo'shma garmonik funksiya sifatida bog'langan bo'lib, funksialar nazariyasining asosiy tushunchalarini rivojlantirish va matematik fizika tenglamalari uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishda muhim o'rin egallaydi.

Ushbu malakaviy bitiruv ishi subgarmonik funksiyaning asosiy xossalarini o'rganish va uni integral ko'rinishda (Riss tasviri) tasvirlash mavzusiga bag'ishlangan bo'lib, kirish va ikkita bobdan iborat.

Birinchi bobning birinchi paragrafida kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi umumiy kursidan ma'lum bo'lgan bir qiymatli analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari Koshi-Riman shartini qanoatlantirishi tushunchasi asosiy ma'lumot sifatida misollar asosida o'rganilgan.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida subgarmonik funksiyalarni o'rganishga olib kelinadigan va uzviy bog'liq garmonik funksiya tushunchasi, bir qiymatli analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari Koshi-Riman shartidan qo'shma garmonik funksiyalar sifatida tasvirlanishiga doir misollar yechib ko'rsatilgan.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida subgarmonik funksiyaning ta'rifi va elementar misollar keltirilgan.

Birinchi bobning to'rtinchi paragraflarida esa subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari o'rganilgan.

Ikkinchi bobda subgarmonik funksiyaning integral tasvirini o'rganishda asosiy tushunchala o'lchov, chiziqli funksional va Lebeg integrali tushunchalari o'ganilgan. Shu asosda subgarmonik funksiyaning kompaktda N'yuton potentsiali va garmonik ko'phad ko'rinishida tasviri isbotlangan.

Malakaviy bitiruv ishini bajarishda talaba X.Tolipova yil davomida berilgan topshiriqlarni o'z vaqtida bajardi va o'ziga nisbatan ma'suliyatni his qilishini ko'rsata oldi.

Ushbu ish malakaviy bitiruv ishlari ushlari uchun qo'yilgan barcha talablarga javob beradi va uning bajaruvchisi Tolipova Xumoraning bilimini 28 ball bilan baholash mumkin.

Fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

E.N.Sattorov

MUNDARIJA

Kirish	3
--------------	---

I-BOB. I-BOB. GARMONIK VA SUBGARMONIK FUNKSIYALAR TUSHUNCHASI HAMDA ASOSIY XOSSALARI

§ 1.1. Garmonik funksiya analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari sifatida. Koshi-Riman sharti.	
§1.2. Qo'shma garmonik funksiyalar va garmonik funksiyaning sodda xossalari	
§ 1.3. Subgarmonik funksiyaning ta'rifi va elementar misollar	
§ 1.4 Subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari	

II-BOB. SUBGARMONIK FUNKSIYANING RISS TASVIRI

§ 2.1. O'lchov va integrallash	
§ 2.2. Chiziqli funksional va Lebeg integrali	
§ 2.3. Subgarmonik funksiyaning Riss tasviri haqidagi teorema va uning isboti.....	

Xulosa	
--------------	--

Foydalanilgan adabiyotlar

Kirish

1. Masalaning qo'yilishi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va matematik fizika tenglamalari fanlari orasidagi uzviy bog'lanishni ko'rsatuvchi asosiy tushunchalardan biri bu bir qiymatli analitik funksiya va uning haqiqiy hamda mavhum qismlaridir. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi kursida markaziy o'rin egallovchi bir qiymatli analitik funksiya uchun muhim tushunchalardan biri hisoblangan Koshining integral teoremasi va shu asosda Koshining integral formulasi yordamida bir qiymatli analitik funksiyaning soha chegarasida berilgan qiymati bo'yicha sohaga davom ettirish masalasi qaraladi. Ikkinchi tomondan bu asosiy tushunchalarni haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida bir qiymatli analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari bo'lgan garmonik funksiyalar Laplas tenglamasini yechimi sifatida qaraladi, Garmonik va subgarmonik funksiyalar sinfining muhim bo'g'liqligi hamda integral ko'rinishlari muhimdir. Subgarmonik funksiyalarning F.Riss, integral tasvi, kompaktda Niyuton potentsiali va garmonik ko'phadning yig'indisi masalasini o'rganishda bu funksiyalarning xossalari alohida ahamiyat kasb etadi.

2.Mavzuning dolzarbligi. Garmonik va subgarmonik funksiyalar sinfi haqiqiy va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida asosiy bog'lanishni ta'minlaydi. Bir tomondan kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida bir qiymatli analitik funksiyaning asosiy xossalari kelinsa, ikkinchi tomondan matematik fizikaning elliptik tipdagi tenglamalari uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni yechishda asosiy xossalari foydalanish muhim o'rin tutadi. Subgarmonik funksiyaning integral ko'rinishdagi tasviri (Riss formulasi) muhimdir. Bundan ko'zda tutilgan maqsad subgarmonik funksiyaning chegaralangan sohada Niyuton potentsiali va garmonik ko'phad ko'rinishidagi tasviri muhim o'rin egallaydi. Ushbu malakaviy bitiruv ishida chegaralangan sohada subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari va integral tasvirini o'rganish garmonik va subgarmonik funksiyalar nazariyasini o'rganishda yanada ko'proq qulay imkoniyatlarga ega bo'lishligi ushbu mavzuning dolzarbligini ifodalaydi.

3.Ishning maqsadi va vazifalari. Bitifuv malakaviy ishning maqsadi kompleksli o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida asosiy hisoblangan bir qiymatli analitik (regulyar) funksiya tushunchasi bilan uzviy bog'liq bo'lgan subgarmonik funksiyalarni asosiy xossalari va integral ko'rinishini mukammal o'rganish va shu asosda bu funksiyalarni asosiy xossalardan foydalanish imkoniyatini orttirishdan iboratdir.

4.Ilmiiy tadqiqot usullari. Kompleksli o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi kursidagi Koshining integral teoremasi, Koshining integral formulalari kabi garmonik va subgarmonik funksiyalarning asosiy xossalari (cheksiz marotaba differensiallanuvchanligi, o'rta qiymat haqidagi teorema, Grin va Rissning integral formulalari), garmonik va subgarmonik funksiyalar sinfi nazariyasini kengroq o'rganishda bu xossalardan foydalanish.

5.Ishning ilmiy ahamiyati. Bitifuv malakaviy ishda olingan natijalar referativ xarakterda bo'lishiga qaramasdan kelgusida kompleksli o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, garmonik va subgarmonik funksiyalarning asosiy xossalardan matematik fizika tenglamalari uchun qo'yilgan chegaraviy masalalari yechishda qulaylik tug'duradi.

6.Ishning amaliy ahamiyati. Bitifuv malakaviy ishda olingan natijalar kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning haqiqiy va mavhum qismlari bo'lgan garmonik funksiyalar xossalari o'rganish orqali fizika, mexanika va matematik fizika tenglamalari uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarni kompleksli o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi elementlari orqali yechishda muhim ahamiyatiga ega.

7.Ishning tuzilishi. Bitifuv malakaviy ishi kirish, 2 ta bob, xulosa qismi va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Ushbu ish ... matnli sahifan tashkil topgan har bir bob paragraflarga ajratilgan va ular o'zining nomerlanish hamda belgilanishiga ega.

Ishning 1-bobida garmonik va subgarmonik funksiyalar tushunchasi va asosiy xossalari o'rganilgan. 2-bobda chegaralangan sohada, ya'ni kompaktda subgarmonik funksiyaning Riss tasviri hosil qilingn.

8. Olingan natijaning qisqacha mazmuni.

I-BOB. GARMONIK VA SUBGARMONIK FUNKSIYALAR TUSHUNCHASI HAMDA ASOSIY XOSSALARI

§ 1.1. Garmonik funksiya analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari sifatida. Koshi-Riman sharti.

$w = f(z)$ funksiya $z = z_0 \in C$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

0.1-ta'rif. Agar $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ nisbat $\Delta z \rightarrow 0$ da aniq chekli limitga ega bo'lsa, bu limitga $w = f(z)$ funksiyaning $z = z_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(z_0)$ belgilanadi, $w = f(z)$ funksiya $z = z_0$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Shunday qilib,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (0.1)$$

$w = f(z)$ funksiya E ($E \subset C$) sohada differensiallanuvchi deyiladi, agar shu sohaning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya shu nuqtada monogen funksiya deyiladi. Nuqtada monogen funksiya shu nuqtada hosilaga ega funksiya deyiladi.

0.2 -ta'rif. Agar $w = f(z)$ funksiya E ochiq to'plamning har bir nuqtasida monogen bo'lsa, u holda bu funksiya E to'plamda bir qiymatli analitik deyiladi.

0.3-ta'rif. $w = f(z)$ funksiya E ochiq to'plamning belgilab olingan nuqtasida bir qiymatli analitik deyiladi, agar u shu nuqtada va uning biror atrofida ham monogen bo'lsa (nuqta atrofi markazi shu nuqtada bo'lgan ochiq doira yoki shu nuqtani ichiga olgan ochiq to'plam).

0.1-teorema. E ochiq to'plamda aniqlangan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks o'zgaruvchili funksiyaning E to'plamda bir qiymatli analitik bo'lishi uchun $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar shu to'plamning har bir nuqtasida birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lib,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (0.2)$$

Koshi-Riman shartini qanoatlantirishi zarur. Agar $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar to'liq differensialga ega bo'lsa, $f(z)$ funksiya E ochiq to'plamning har bir nuqtasida bir qiymatli analitik bo'lishi uchun (0.2) Koshi-Riman shartini bajarilishi yetarli.

0.1-misol. Quydagi $e^z, \cos z, \sin z, z^n, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ funksiyalar barcha z larda differensiallanuvchi bo'lib, butun kompleks tekisliklarda bir qiymatli analitik funksiyalardan iboratdir.

§ 1.2. da Qo'shma garmonik funksiyalar, ya'ni $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya D sohada differensiallanuvchi hamda $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda (0.2) Koshi-Riman shartining birinchi tengligini x bo'yicha, ikkinchi tengligini esa y bo'yicha differensiallab

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

hosil qilamiz. Bu tengliklarni qo'shib, xususiy hosilalarning uzluksizligidan

$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ va $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ hosilalarning tengligini hisobga olib,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0.3)$$

hosil qilamiz. Shunga o'xshash $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ni hosil qilamiz.

0.4-ta'rif. Haqiqiy o'zgaruvchili $u(x, y)$ funksiya D sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilaga ega bo'lib, (0.3) tenglamani qanoatlantirsa, $u(x, y)$ funksiyaga D sohada garmonik, (0.3) tenglamaga esa *Laplas tenglamasi* deyiladi.

Yuqoridagidan quyidagi teorema kelamiz.

0.2-teorema. D sohada bir qiymatli analitik $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyaning, $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$, $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]$ funksiyaning haqiqiy $u(x, y)$ va mavhum $v(x, y)$ qismi shu sohada garmonik funksiyalardan iboratdir. Bu ikkala

garmonik funksiyalar ixtiyoriy emas, ya'ni ular Koshi-Riman sistemasining yechimidir.

0.5-ta'rif. D sohada (0.2) Koshi-Riman sistemasining qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ va $v(x, y)$ garmonik funksiyalar o'zaro *qo'shma garmonik funksiyalar* deyiladi.

Demak, D ochiq to'plamda bir qiymatli analitik $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari shu to'plamda o'zaro qo'shma garmonik funksiyalardan iborat bo'ladi.

0.3-teorema. Bir bog'lamli D sohada ixtiyoriy $u(x, y)$ garmonik funksiya berilgan bo'lsa, u holda unga qo'shma garmonik $v(x, y)$, funksiya topish mumkin.

0.2-misol. [5] a) $u(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 4x + 5y - 7$ va b) $v(x, y) = x^3 - y^3$ funksiyalarni $D = R^2$ sohada garmoniklikka tekshiring.

Yechish. a) Dastlab $u(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 4x + 5y - 7$ funksiyaning $D = R^2$ sohada garmoniklikka tekshiramiz. Buning uchun undan birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$u_x = 2x - 3y + 4,$$

$$u_y = -3x - 2y + 5.$$

Ular yordamida Laplas tenglamasiga kerakli bo'lgan 2-tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$u_{xx} = 2, \quad u_{yy} = -2.$$

Bu holda barcha $(x, y) \in D = R^2$ uchun

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$$

bo'lib, berilgan funksiyalardan birinchisi $u(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 4x + 5y - 7$ funksiya tekislikning barcha nuqtalarida garmonik ekanligini hosil qilamiz.

b) Endi ularning ikkinchisi, ya'ni $v(x, y) = x^3 - y^3$ funksiyaning R^2 tekislikda garmoniklikka tekshiramiz. Bu funksiya uchun ham yuqoridagi kabi xususiy hosilalarni topamiz:

$$v_x(x, y) = 3x^2, \quad v_{xx}(x, y) = 6x,$$

$$v_y(x, y) = -3y^2, \quad v_{yy}(x, y) = -6y.$$

Ushbu funksiya uchun

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 6(x - y)$$

§ 1.3 da Subgarmonik funksiyaning ta'rifi va elementar misollar o'rganilgan

0.6-ta'rif [7]. $D \subset R^2$ sohada aniqlangan $U(x, y)$ funksiya D sohada *subgarmonik* deyiladi, agar

- a) $-\infty \leq U(x, y) < +\infty, (x, y) \in D$;
- b) $U(x, y)$ funksiya D sohada yuqoridan yarim uzluksiz;
- v) ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in D$ uchun shunday etarlicha kichik r musbat son topiladiki,

$$U(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r(x_0, y_0)} U(x, y) dS.$$

0.1-xossa. Agar $U_1(x, y), U_2(x, y), \dots, U_k(x, y)$ - D sohada subgarmonik funksiyalar va $t_1, t_2, \dots, t_k$ - nomanfiy butun sonlar bo'lsa, u holda $U(x, y) = \sum_{i=1}^k t_i U_i(x, y)$ ham D sohada subgarmonik funksiyadir.

0.2-xossa. Agar $U_1(x, y), U_2(x, y), \dots, U_k(x, y)$ - D sohada subgarmonik funksiyalar bo'lsa, u holda $U(x, y) = \sup_{i=1, \dots, k} U_i(x, y)$ ham D sohada subgarmonikdir.

0.3-xossa. Agar $U(x, y) \in C^2(D)$ funksiya D sohada, u holda $U(x, y)$ - subgarmonik funksiya bo'lishi uchun $\Delta U(x, y) \geq 0$ tengsizlikni bajarilishi zarur va yetarli.

§ 1.4.da Subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari

0.4-xossa. Agar $f(z)$ - $z = x + iy$ kompleks o'zgaruvchining tekis D sohasida bir qiymatli analitik funksiyasi bo'lsa, u holda $U(z) = \ln|f(z)|$ funksiya D sohasida subgarmonikdir.

0.4-teorema. Agar $U(x)$ funksiya D sohada subgarmonik, $\varphi(U)$ qavariq va $U(x)$, $x \in D$ funksiyaning qiymatlar sohasida o'ssin, yoki $U(x)$ funksiya D sohada garmonik, $\varphi(U)$ R da qavariq bo'lsa, u holda $\varphi[U(x)]$ funksiya D sohada subgarmonik bo'ladi.

0.1-natija. Agar $U(x)$ funksiya D sohada subgarmonik bolsa, u holda ixtiyoriy $\lambda > 0$ uchun $e^{\lambda U}$ va $[U^+(x)]^k$, $k \geq 1$ funksiyalar ham D sohada subgarmonik bo'ladi, bu yerda $U^+(x) = \max(U(x), 0)$.

0.2-natija. Agar $U(x)$ funksiya D sohada garmonik va $k \geq 1$ bolsa, u holda $|U(x)|^k$ funksiya D sohada subgarmonik bo'ladi,

0.3-natija. Agar $f(z)$ funksiya D sohada bir qiymatli analitik funksiyasi bo'lsa, u holda $\ln^+|f|^k$, $k \geq 1$ va $|f|^\lambda$, $\lambda > 0$ funksiyalar D sohasida subgarmonik bo'ladi, bu yerda $\ln^+|f| = \max(\ln|f|, 0)$.

0.3-misol. $f(z) = e^z$ bir qiymatli analitik funksiya moduli

$$u(x, y) = |f(z)| = |e^z|$$

funksiyani subgarmoniklikka teshiring.

Yechish. $f(z) = e^z$ funksiya butun kompleks tekislikda bir qiymatli analitik funksiya ekanligi 1.1-misolda qaralganlar edi.

$$u(x, y) = |f(z)| = |e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = e^x$$

funksiya ikki marotaba uzluksiz differensiallanuvchi va hosilasi o'ziga teng bo'lib, barcha haqiqiy x -larda nomanfiydir. Demak, 2.3-xossaga va 2.3-natijaga ko'ra bu funksiya subgarmonikdir.

I-BOB. GARMONIK FUNKSIYA TUSHUNCHASI VA ASOSIY XOSSALARI

§ 1.1. Garmonik funksiya analitik funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari sifatida. Koshi-Riman sharti.

$w = f(z)$ funksiya $z = z_0 \in C$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1.1-ta'rif. ([1], 88-b.) Agar $\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ nisbat $\Delta z \rightarrow 0$ da aniq chekli limitga ega bo'lsa, bu limitga $w = f(z)$ funksiyaning $z = z_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(z_0)$ belgilanadi, $w = f(z)$ funksiya $z = z_0$ nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Shunday qilib,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \quad (1.1)$$

$w = f(z)$ funksiya D ($D \subset C$) sohada differensiallanuvchi deyiladi, agar shu sohaning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa.

Nuqtada differensiallanuvchi funksiya shu nuqtada monogen funksiya deyiladi. Nuqtada monogen funksiya shu nuqtada hosilaga ega funksiya deyiladi.

1.2 -ta'rif. Agar $w = f(z)$ funksiya D ochiq to'plamning har bir nuqtasida monogen bo'lsa, u holda bu funksiya D to'plamda bir qiymatli analitik deyiladi.

1.3-ta'rif. $w = f(z)$ funksiya D ochiq to'plamning belgilab olingan nuqtasida bir qiymatli analitik deyiladi, agar u shu nuqtada va uning biror atrofida ham monogen bo'lsa (nuqta atrofi markazi shu nuqtada bo'lgan ochiq doira yoki shu nuqtani ichiga olgan ochiq to'plam).

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya D ($D \subset C$) - ochiq to'plamda aniqlangan va shu to'plamning z nuqtasida monogen, ya'ni

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

mavjud va chekli bo'lsin. Boshqacha aytganda, limitning mavjudligi Δz ning nolga intilish yo'nalishidan bog'liq emas. Qaysi yo'nalish bo'ylab nolga intilmasin limit yagona $f'(z)$ -ga teng bo'lishi kerak.

Bu yerda $\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$ ($z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$)

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \quad \Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y).$$

Bunda nisbat quyidagicha yoziladi

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta z} + i \frac{v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta z} \quad (1.2)$$

Yuqorida aytilganidek

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta x}, \quad (\Delta y = 0); \quad (1.3)$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta y} \quad (\Delta x = 0). \quad (1.4)$$

(1.2)–chi tenglikda $\Delta y = 0$ deb Δx -ning nolga intiltiramiz, u holda chap tomonning limiti mavjud bo'lib, funksiyaning hosilasi $f'(z)$ ga tengdir. Demak, o'ng tomonning ham limiti mavjud. Birinchi hadning limiti ($\Delta y = 0$) Δx nolga intilganda $u(x, y)$ funksiyaning xususiy hosilasi bo'ladi. Ikkinchi hadning limiti esa $i \frac{\partial v}{\partial x}$ ga tengdir. Demak,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Xuddi shunga o'xshash (1.2) va (1.3) formulalardan $\Delta x = 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lganda quyidagi formulaga kelimiz

$$f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Bu ikkala formula birlashtirilsa, u holda

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

bundan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.5)$$

hosil qilinadi.

1.1-xulosa. Agar bir qiymatli $f(z)$ funksiya E ochiq to'plamda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda uning haqiqiy va mavhum qismi birinchi

tartibli xususiy hosilalarga ega. E ochiq to'plamning har bir nuqtasida bu hosilalar (1.5) sistemani qanoatlantiradi. Bu sistemaga **Koshi-Riman sharti** deyiladi.

Faraz qilaylik, ikkita haqiqiy o'zgaruvchili $u(x, y)$, $v(x, y)$ ($z = x + iy \in E$) funksiyalar D ochiq to'plamda berilgan bo'lib, bu funksiyalar shu to'plamda differensallanuvchi bo'lsin, ya'ni

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 + \beta_2,$$

bu yerda $\frac{\alpha_1}{\rho}, \frac{\alpha_2}{\rho}, \frac{\beta_1}{\rho}, \frac{\beta_2}{\rho} \rightarrow 0$, agar $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0$.

Bu funksiyalarning xususiy hosilalari (1.5) Koshi-Riman shartini qanoatlantirsin. U holda,

$$\Delta w = \Delta f = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y\right) + \gamma,$$

bu yerda $\gamma = \alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2$ bo'lib, $\rho \rightarrow 0$ da $\frac{\gamma}{\rho} \rightarrow 0$.

$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ni Koshi-Riman shartidan $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ bilan almashtiramiz. Bunda

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y\right) + \gamma = (\Delta x + i\Delta y) \frac{\partial u}{\partial x} + i(\Delta x - \frac{1}{i} \Delta y) \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma = \\ &= \Delta z \frac{\partial u}{\partial x} + i\Delta z \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma. \end{aligned}$$

Bu yerdan $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma}{\Delta z}$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Shartga ko'ra $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\Delta z} = 0$. Shuning uchun

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Demak, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ mavjud va $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ ga teng.

1.2-xulosa. Faraz qilaylik, D ochiq to'plamda ikkita haqiqiy o'zgaruvchili bir qiymatli $u(x, y)$ va $v(x, y)$ ($z = x + iy \in D$) funksiyalar berilgan bo'lib, ular shu to'plamda differensallanuvchi bo'lsin (agar berilgan funksiyalar shu to'plamda uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa bu shart bajariladi). Demak,

$u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning xususiy hosilalari D to'plamda (1.4) Koshi-Riman shartini qanoatlantirsa, u holda, bu funksiyalardan tuzilgan $f(z)$ kompleks o'zgaruvchili funksiya D to'plamda monogen bo'ladi, ya'ni $f(z)$ funksiya D to'plamda bir qiymatli analitikdir, bu yerda $2x = z + \bar{z}$, $2iy = z - \bar{z}$.

1.1 va 1.2 – xulosalarni umumlashtirib quyidagi teoremaga kelimiz.

1.1-teorema. D ochiq to'plamda aniqlangan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks o'zgaruvchili funksiyaning D to'plamda bir qiymatli analitik bo'lishi uchun $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar shu to'plamning har bir nuqtasida birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lib, (1.5) Koshi-Riman shartini qanoatlantirishi zarur. Agar $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar to'liq differensialga ega bo'lsa, $f(z)$ funksiya D ochiq to'plamning har bir nuqtasida bir qiymatli analitik bo'lishi uchun (1.5) Koshi-Riman shartini bajarilishi yetarli.

1.1-misol. Quyidagi e^z , $\cos z$, $\sin z$, z^n , chz , shz funksiyalar barcha z larda differensiallanuvchi bo'lib, butun kompleks tekisliklarda bir qiymatli analitik funksiyalardan iboratdir.

§ 1.2. Qo'shma garmonik funksiyalar va garmonik funksiyaning sodda xossalari

Eng avvalo bir qiymatli analitik va garmonik funksiyalar tushunchasi orasidagi bog'lanishni aniqlaymiz.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiya D sohada differensiallanuvchi hamda $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalar ikkinchi tartibgacha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda (1.5) formulaning birinchi tengligini x bo'yicha, ikkinchi tengligini esa y bo'yicha differensiallab

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

hosil qilamiz. Bu tengliklarni qo'shib, xususiy hosilalarning uzluksizligidan

$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ va $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ hosilalarning tengligini hisobga olib,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.6)$$

hosil qilamiz. Shunga o'xshash $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ ni hosil qilamiz.

1.4-ta'rif. [3] Haqiqiy o'zgaruvchili $u(x, y)$ funksiya D sohada ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, (1.6) tenglamani qanoatlantirsa, $u(x, y)$ funksiyaga D sohada garmonik, (1.6) tenglamaga esa Laplas tenglamasi deyiladi.

Xuddi shuningdek fazoda ham garmonik funksiyaning aniqlash mumkin, bunda

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

n o'lchovli $D \subset R^n$ sohada aniqlangan Laplas operatori.

1.2-misol. [5] a) $u(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 4x + 5y - 7$ va b) $v(x, y) = x^3 - y^3$ funksiyalarni $D = R^2$ sohada garmoniklikka tekshiring.

Yechish. a) Dastlab $u(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 4x + 5y - 7$ funksiyani $D = R^2$ sohada garmoniklikka tekshiramiz. Buning uchun undan birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$u_x = 2x - 3y + 4,$$

$$u_y = -3x - 2y + 5.$$

Ular yordamida Laplas tenglamasiga kerakli bo'lgan 2-tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$u_{xx} = 2, \quad u_{yy} = -2.$$

Bu holda barcha $(x, y) \in D = R^2$ uchun

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2) = 0$$

bo'lib, berilgan funksiyalardan birinchisi $u(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 4x + 5y - 7$ funksiya tekislikning barcha nuqtalarida garmonik ekanligini hosil qilamiz.

b) Endi ularning ikkinchisi, ya'ni $v(x, y) = x^3 - y^3$ funksiyani R^2 tekislikda garmoniklikka tekshiramiz. Bu funksiya uchun ham yuqoridagi kabi xususiy hosilalarni topamiz:

$$v_x(x, y) = 3x^2, \quad v_{xx}(x, y) = 6x,$$

$$v_y(x, y) = -3y^2, \quad v_{yy}(x, y) = -6y.$$

Ushbu funksiya uchun

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 6(x - y)$$

bo'lib, bu tenglikdan $v(x, y)$ funksiya R^2 tekislikning faqat $y = x$ nuqtalar to'plamida garmonik bo'lib, tekislikda garmonik bo'lmasligini hosil qilamiz.

Yig'indi va ayirmaning hosilasi hosilalar yigindisiga teng bo'lganligi uchun

$$\Delta(C_1 u \pm C_2 v) = C_1 \Delta u \pm C_2 \Delta v$$

tenglikka asosan garmonik funksiyalarning 1-sodda xossasini hosil qilamiz.

1.1-xossa [1]. *Biror sohada garmonik ikkita funksiyaning yig'indisi, ayirmasi va o'zgarma songa ko'paytmasi shu sohada yana garmonik funksiya bo'ladi.*

Haqiqatan ham agar u va v funksiyalar biror D sohada garmonik funksiyalar bo'lsa, u holda oxirgi tenglikning o'ng qismi nolga teng bo'ladi. Bu esa 1.1-ta'rifga binoan C_1 va C_2 o'zgarmaslar uchun $C_1 u(x) \pm C_2 v(x), x \in D$ funksiyaning D sohada garmonik ekanligini anglatadi.

1.2-xossa. Agar $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiy biror D sohada garmonik bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\lambda \in R$ va $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$ o'zgarmas sonlar uchun $w(x) = u(\lambda x + a)$ funksiya ham shu sohada garmonik funksiya bo'ladi.

Haqiqatan ham bunda $w(x) = u(\lambda x_1 + a_1, \lambda x_2 + a_2, \dots, \lambda x_n + a_n)$ funksiyaning xususiy hosilalarini murakkab funksiya hosilasi kabi hisoblab

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x_i^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t_i^2}, t_i = \lambda x_i + a_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

natijani olamiz. Bunga asosan esa

$$(\Delta w)(x) = \lambda^2 (\Delta u)(\lambda x + a)$$

ekanligiga ega bo'lamiz. Shartga asosan $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiy D sohada garmonik bo'lganligi uchun $\lambda x + a \in D$ bo'lganda

$$(\Delta u)(\lambda x + a) = 0$$

bo'ladi. U holda yuqoridagidan va 1.1-ta'rifga asosan $w(x) = u(\lambda x_1 + a_1, \lambda x_2 + a_2, \dots, \lambda x_n + a_n)$ funksiyaning ham D sohada garmonik ekanligi kelib chiqadi.

1.5-ta'rif ([4], [6]). Agar $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya cheksiz D sohaning koordinata boshidan chekli masofada ixtiyoriy x nuqtasida ikki marta uzliksiz diferensiallanuvchi bo'lib, Laplas tenglamasini qanoatlantirsa va yetarli katta $|x|$ lar uchun $|u(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n-2}}, |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, c = \text{const.}$ tengsizlik

bajarilsa $u(x)$ funksiya cheksiz D sohada **garmonok funksiya** deyiladi.

1.3-misol. a) $u(x) = 1$ funksiya $n = 2$ bo'lganda cheksiz D sohada garmonik funksiya bo'ladi. Agar $n > 2$ bo'lsa, u holda cheksiz D sohada garmonik funksiya bo'la olmaydi. Lekin bu funksiya ixtiyoriy n da chekli D sohada garmonik funksiya bo'la oladi.

b) $u(x, y) = x^2 + y^2 + 5$ funksiya hech bir soxada garmonik funksiya emas, chunki bu funksiya Laplas tenglamasini qanoatlantirmaydi:

$$\Delta u(x, y) = \Delta(x^2 + y^2 + 5) = 4 \neq 0.$$

1.4-misol. Agar $u = u(x, y)$ garmonik funksiya bo'lsa, u holda $u = u(ax + b, cy + d)$ funksiya ham garmonik bo'ladimi? Bu yerda a, b, c, d -o'zgarmas sonlar,

Yechish. Garmonik funksiyaning tariflarga ko'ra $u = u(x, y)$ - garmonik bo'lgani uchun bu funksiya ikki marta uzliksiz differensiallanuvchi bo'lib, quyidagi

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Laplas tenglamasini qanoatlantiradi.

Bundan $u = u(ax + b, cy + d)$ funksiya'ning ham ikkinchi tartibgacha xususiy xosilalari uzliksizdir. Endi bu funksiya'ni Laplas tenglamasini qanoatlamntirishini ko'rsatamiz.

Quyidagi tenglik o'rinli

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta u(ax + b, cy + d) = \frac{\partial^2 u(ax + b, cy + d)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(ax + b, cy + d)}{\partial y^2} = \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u(ax + b, cy + d)}{\partial (ax + b)^2} + c^2 \frac{\partial^2 u(ax + b, cy + d)}{\partial (cy + d)^2}. \end{aligned}$$

Bu yerdan ko'rinadiki agar $a = c$ bo'lsa $u = u(ax + b, cy + d)$ funksiya garmonik bo'ladi, $a \neq c$ da esa, garmonik emas.

Shunday qilib yuqoridagi tariflarga asosan analitik funksiya'ning **mavhum** va **haqiqiy** qismlari garmonik funksiyalar sinfiga tegishli bo'ladi.

1.5-misol: [5] $u_x(x, y) = xy + x^2 - y^2$ bo'lsa $u(x, y)$ garmonik funksiya'ni toping.

Yechish: $u(x, y)$ garmonik funksiya Laplas tenglamasini qanoatlantiradi, demak berilgan ifodadan va

$$u_{xx}(x, y) = y + 2x, \quad u(x, y) = \frac{x^2}{2}y + \frac{x^3}{3} - xy^2 + \varphi(y), \quad u_{yy}(x, y) = -2x + \varphi''(y)$$

larni etiborga olib quyidagiga $u_{xx} + u_{yy} = y + \varphi''(y) = 0$ ga ega bo'lamiz.

Bundan $\varphi(y) = -\frac{1}{6}y^3 + c_1 + yc_0$; funksiyaning topamiz, ya'ni yuqoridagilarga ko'ra $u(x, y)$ garmonik funksiya

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{6} + \frac{x^2y}{2} - xy^2 + c_1y + c_0$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

1.6-misol: $u_z = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2z$; bo'lsa, garmonik funksiya'ni toping.

Yechish: $u(x, y, z)$ garmonik funksiya $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ uch o'lchovli

Laplas tenglamasini qanoatlantiradi. Demak, berilgan $u_z = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2z$ ifodadan

$$u_z = e^x(x \cos y - y \sin y)z + z^2 + f(x, y)$$

ni olamiz, bu yerda $f(x, y)$ ixtiyoriy ikki marta uzliksiz differensiallanuvchi funksiya.

Yuqoridagi funksiya dan quyidagi xususiy hosilalarni topamiz:

$$u_{zz} = 2, \quad u_{xx} = [-e^x(x+2)\cos y + e^y y \sin y]z + f_{xx}$$

$$u_{yy} = [-e^x(x+2)\cos y + e^y y \sin y]z + f_{yy}$$

topamiz. Bu ifodalarni uch o'lchovli Laplas tenglamasiga qo'yib

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 2 + f_{xx} + f_{yy} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$f_{xx} + f_{yy} = -2$$

tenglamani yechimi

$$f(x, y) = g(x, y) + \varphi(x)$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $g(x, y)$ - ixtiyoriy garmonik funksiya.

$f(x, y) = g(x, y) + \varphi(x)$ ifodani oxirgi tenglamaga qo'yib

$$\varphi(x) = -x^2 cx + c_1$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $u(x, y, z)$ garmonik funksiya

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y)z + z^2 - x^2 + g(x, y)$$

ko'rinishga ega bo'lamiz.

Bir qiymatli analitik va gaymonik funksiyalar orasidagi bog'lanishdan quyidagi teorema kelamiz.

1.2-teorema [12]. D sohada bir qiymatli analitik $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ funksiyaning haqiqiy $u(x, y)$, $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ va mavhum $v(x, y)$, $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]$

qismi shu sohada garmonik funksiyalardan iboratdir. Bu ikkala garmonik funksiyalar ixtiyoriy emas, ya'ni ular Koshi-Riman sistemasining yechimidir.

1.6-ta'rif. D sohada (1.5) Koshi-Riman sistemasining qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ va $v(x, y)$ garmonik funksiyalar o'zaro qo'shma garmonik funksiyalar deyiladi.

Demak, D sohada bir qiymatli analitik $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari shu sohada o'zaro qo'shma garmonik funksiyalardan iborat bo'ladi.

Agar bir qiymatli analitik funksiyaning haqiqiy (yoki mavhum) qismi bir bog'lamli D sohada berilgan bo'lsa, u holda bu funksiyaning mavhum (haqiqiy) qismi o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida tiklanadi (topiladi).

1.3-teorema. Bir bog'lamli D sohada ixtiyoriy $u(x, y)$ garmonik funksiya berilgan bo'lsa, u holda unga qo'shma garmonik $v(x, y)$ funksiyani o'zgarmas aniqligida $v(x, y) + c$, $c = \text{const}$ ko'rinishda topish mumkin.

Bu qo'shma garmonik $v(x, y) + c$, $c = \text{const}$ funksiya tiklanadi va $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) + ic$ funksiya shu sohada bir qiymatli analitik bo'ladi, bu yerda $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Bu jarayon amaliyotda quyidagicha amalga oshiriladi. Faraz qilaylik, bir bog'lamli D sohada $u(x, y)$ - garmonik funksiya berilgan bo'lsin. Shu funksiya uchun qo'shma garmonik funksiyani $v(x, y)$ bilan belgilaymiz. U holda bu ikki qo'shma garmonik funksiyalar (4) Koshi-Riman shartini qanoatlantiradi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad z = x + iy \in D.$$

$$\text{Ikkinchi tomondan } dv(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Endi $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ ($M_0(x_0, y_0) \in D$), $z = x + iy \in D$, ($M(x, y) \in D$) nuqtalarni tutashtiruvchi va barcha nuqtalari bilan D sohaga qarashli bo'lgan bo'lakli silliq egri chiziq bo'ylab integrallaymiz. U holda

$$v(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c, \quad c = \text{const}, \quad (1.7)$$

bu yerda z_0 o'zgarimas nuqta, $z \in D$ o'zgaruvchi. (1.7) formulada egri chiziqli integralning qiymati egri chiziqni uchlari bo'lgan $M_0(x_0, y_0)$ va $M(x, y)$ nuqtalardan bog'liq bo'lib, bu nuqtalarni tutashtiruvchi egri chiziq (yo'l) dan bog'liq emas, chunki integral ostidagi funksiya to'la differensialdir. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ bir qiymatli analitik funksiya bo'lishi uchun haqiqiy va mavhum qismi birinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lishi va (1.5) Koshi-Riman shartini qanoatlantirishi (qo'shimcha $u(x, y)$ va $v(x, y)$ funksiyalarning differensiallanuvchanlik shartisiz) yetarlimi?

§ 1.3. Subgarmonik funksiyaning ta'rifi va elementar misollar

1.7-ta'rif [7]. $I = (a, b)$ intervalda aniqlangan haqiqiy bir o'zgaruvchi x argumentning haqiqiy funksiyasi $f(x)$ shu $I = (a, b)$ intervalda **qavariq** deyiladi, agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2$ va

$$l(x_1) \geq f(x_1), \quad l(x_2) \geq f(x_2) \quad (1.8)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $l(x)$ chiziqli funksiya uchun

$$l(x) \geq f(x) \quad (x_1 < x < x_2) \quad (1.9)$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

Xususiyl holda, x_1 va x_2 nuqtalarda $f(x)$ funksiya bilan mos keluvchi $l(x)$ chiziqli funksiya olinsa, u holda

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \quad (x_1 < x < x_2). \quad (1.10)$$

(1.10) tengsizlikning geometrik ta'liqini shundan iboratki, $f(x)$ funksiya grafigini ikki nuqtasini tutashtiruvchi ixtiyoriy kesuvchi bu grafikdan yuqorida yotadi.

1.8-ta'rif [7]. $D \subset R^2$ to'plamda aniqlangan haqiqiy qiymatli $f(x)$ funksiya shu to'plamda **yuqoridan yarim uzluksiz** deyiladi, agar quyidagi xossalarga ega bo'lsa:

a) $-\infty \leq f(x) < +\infty, x \in D;$

b) ixtiyoriy a , $-\infty < a < +\infty$ uchun $\{x | x \in D, f(x) < a\}$ to'plam D da ochiq.

$f(x)$ funksiya D to'plamda **quyidan yarim uzluksiz** deyiladi, agar $-f(x)$ funksiya shu to'plamda **yuqoridan yarim uzluksiz** bo'lsa. Agar $f(x)$ funksiya bir vaqtning o'zida ham yiqoridan, ham quyidan yarim uzluksiz bo'lsa, u **uzluksiz** deyiladi.

Matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan muhim tushuncha, ya'ni takroriy integralning karrali integralga tengligi haqidagi Fubini teoremasiga asosan garmonik funksiyaning ta'rifi sifatida o'rta qiymat haqidagi xossasini olish mumkin. Agar bu tenglikda mos holda $\leq$ belgisi qo'yilsa, u holda subgarmonik funksiyaning ta'rifini hosil qilamiz. Bu funksiyaning grafigi xuddi qavariq funksiyaning grafigi chiziqli funksiyaning grafigidan pastda joylashgani kabi garmonik funksiyaning grafigidan pastda yotadi. Haqiqatdan qavariq funksiya – bu bir o'zgaruvchili subgarmonik funksiya iboratdir.

1.9-ta'rif [7]. $D \subset R^2$ sohada aniqlangan $U(x, y)$ funksiya D sohada **subgarmonik** deyiladi, agar

- a) $-\infty \leq U(x, y) < +\infty$, $(x, y) \in D$;
- b) $U(x, y)$ funksiya D sohada yuqoridan yarim uzluksiz;
- v) ixtiyoriy $(x_0, y_0) \in D$ uchun shunday etarlicha kichik r musbat son topiladiki,

$$U(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r(x_0, y_0)} U(x, y) dS$$

1.3-xossa. Agar $U_1(x, y), U_2(x, y), \dots, U_k(x, y)$ - D sohada subgarmonik funksiyalar va $t_1, t_2, \dots, t_k$ - nomanfiy butun sonlar bo'lsa, u holda $U(x, y) = \sum_{i=1}^k t_i U_i(x, y)$ ham D sohada subgarmonik funksiyaadir.

1.4-xossa. Agar $U_1(x, y), U_2(x, y), \dots, U_k(x, y)$ - D sohada subgarmonik funksiyalar bo'lsa, u holda $U(x, y) = \sup_{i=1, \dots, k} U_i(x, y)$ ham D sohada subgarmonikdir.

1.5-xossa. Agar $U(x, y) \in \mathbb{C}^2(D)$ funksiya D sohada, u holda $U(x, y)$ - subgarmonik funksiya bo'lishi uchun $\Delta U(x, y) \geq 0$ tengsizlikni bajarilishi zarur va yetarli.

1.2-xulosa. Subgarmonik funksiyaning 1.8-ta'rif va 1.5-xossasidan ko'rinadiki qanday garmonik funksiya to'plami subgarmonik funksiyalar to'plamining qismini tashkil etar ekan. Demak, har qanday garmonik funksiya subgarmonik eran, teskarisi o'rinli emas.

1.7-misol. $U(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 6y - 8$ va b) $v(x, y) = x^3 - y^3$ funksiyalarni $D = R^2$ sohada subgarmoniklikka tekshiring.

Yechish. $U(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 6y - 8$ funksiya $D = R^2$ sohada aniqlangan va ikki marotaba uzluksiz xususiy hosilalarga ega ekanligidan 1.5-xossadan foydalanib subgarmoniklikka tekshiramiz. Buning uchun undan birinchi tartibli xususiy hosilalarni hisoblaymiz:

$$U_x = 2x + 3y - 4,$$

$$U_y = -3x + 2y + 6.$$

Bular yordamida Laplas tenglamasiga kerakli bo'lgan 2-tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$U_{xx} = 2, \quad U_{yy} = 2.$$

Bu holda barcha $(x, y) \in D = R^2$ uchun

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2 = 4 \geq 0$$

bo'lib, berilgan funksiya $U(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 6y - 8$ funksiya tekislikning barcha nuqtalarida subgarmonik ekanligiga ishonch hosil qildik.

1.8-misol. $U(x, y) = x^3 - y^3$ funksiyaning $D = R^2$ sohada subgarmoniklikka tekshiring.

Yechish. Bu funksiyaning R^2 tekislikda subgarmoniklikka tekshirish uchun, xuddi 1.7-misoldagi kabi xususiy hosilalarni topamiz:

$$U_x(x, y) = 3x^2, \quad U_{xx}(x, y) = 6x,$$

$$U_y(x, y) = -3y^2, \quad U_{yy}(x, y) = -6y.$$

Ushbu funksiya uchun

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = 6(x - y) \geq 0$$

bo'lib, bu tengsizlikdan $U(x, y)$ funksiya R^2 tekislikning argumenrlarning $y \leq x$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida subgarmonik bo'ladi.

1.9-misol. 1.8-ta'rifdan ko'rish mumkinki $U(x) \equiv -\infty$ ham subgarmonik funksiyadir.

§ 1.4. Subgarmonik funksiyaning asosiy xossalari

1.3-xossa. Agar $f(z) - z = x + iy$ kompleks o'zgaruvchining tekis D sohasida bir qiymatli analitik funksiyasi bo'lsa, u holda $U(z) = \ln|f(z)|$ funksiya D sohasida subgarmonikdir.

1.4-teorema. Agar $U(x)$ funksiya D sohada subgarmonik, $\varphi(U)$ qavariq va $U(x)$, $x \in D$ funksiyaning qiymatlar sohasida o'ssin, yoki $U(x)$ funksiya D sohada garmonik, $\varphi(U)$ R da qavariq bo'lsa, u holda $\varphi[U(x)]$ funksiya D sohada subgarmonik bo'ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $U(x)$ funksiya D sohada garmonik bolsin. $\varphi(U)$ qavariq ekanligidan, u R da uzluksizdir, bundan kelib chiqadiki, $\varphi[U(x)]$ uzluksiz va cheklidir. Shunday qilib, subgarmonik funksiyaning a), b) shartlaribajariladi. Bundan tashqari,

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r(x_0, y_0)} U(x, y) dS,$$

$$\varphi[U(x_0, y_0)] = \varphi\left(\frac{1}{2\pi r} \int_{S_r(x_0, y_0)} U(x, y) dS\right) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r(x_0, y_0)} \varphi[U(x, y)] dS,$$

bu holatda subgarmonikligi isbotlandi.

Endi $U(x)$ funksiya D sohada subgarmonik, $\varphi(U)$ uzluksiz va $U(x)$, $x \in D$ funksiyaning qiymatlar sohasida R o'sadi ($U(x) = -\infty$ kiritiladi). U holda $\varphi[U(x)]$ funksiya yuqoridan yarim uzluksiz va R da $+\infty$ ga aylanmaydi. Demak,

1.8-ta'rifning v) shartini isbotlash qoldi. $\varphi[U(x)]$ funksiya o'suvchi, $U(x)$ subgarmonik, bundan

$$\varphi[U(x_0, y_0)] \leq \varphi\left(\frac{1}{2\pi r} \int_{S_r(x_0, y_0)} U(x, y) dS\right) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{S_r(x_0, y_0)} \varphi[U(x, y)] dS.$$

Bu teoremaning to'liq isbotini ta'minlaydi.

1.1-natija. Agar $U(x)$ funksiya D sohada subgarmonik bolsa, u holda ixtiyoriy $\lambda > 0$ uchun $e^{\lambda U}$ va $[U^+(x)]^k$, $k \geq 1$ funksiyalar ham D sohada subgarmonik bo'ladi, bu yerda $U^+(x) = \max(U(x), 0)$.

1.2-natija. Agar $U(x)$ funksiya D sohada garmonik va $k \geq 1$ bolsa, u holda $|U(x)|^k$ funksiya D sohada subgarmonik bo'ladi,

1.3-natija. Agar $f(z)$ funksiya D sohada bir qiymatli analitik funksiyasi bo'lsa, u holda $\ln^+|f|^k$, $k \geq 1$ va $|f|^\lambda$, $\lambda > 0$ funksiyalar D sohasida subgarmonik bo'ladi, bu yerda $\ln^+|f| = \max(\ln|f|, 0)$.

1.10-misol. $f(z) = e^z$ bir qiymatli analitik funksiya moduli

$$u(x, y) = |f(z)| = |e^z|$$

funksiyani subgarmoniklikka teshiring.

Yechish. $f(z) = e^z$ funksiya butun kompleks tekislikda bir qiymatli analitik funksiya ekanligi 1.1-misolda qaralganlar edi.

$$u(x, y) = |f(z)| = |e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = e^x$$

funksiya ikki marotaba uzluksiz differensiallanuvchi va hosilasi o'ziga teng bo'lib, barcha haqiqiy x -larda nomanfiydir. Demak, 1.3-xossaga va 1.3-natijaga ko'ra bu funksiya subgarmonikdir.

Foydalanilgan adabiyotlar :

1. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metodi teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo: Uchebnoe posobie dlya universitetov. – M.: Nauka, Gl.red.fiz.-mat. lit., 1987. – 688 s.
2. Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I. Lekcii po teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo: Ucheb. dlya vuzov. – M.: Nauka, Gl. red. fiz. – mat. lit., 1996. – 480 s.
3. Saloxiddinov M.S. Matematik fizika tenglamalari. T., «O'zbekistan», 2002, - 448 s.
4. Sobolev S.L. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1966. =434 s.
5. Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. M. 2006. – 312 s.
6. Tixonov A.P., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. 1989. - 679 s.
7. Xeyman U., Kennedi U Subgarmonicheskie funktsii. M.: Mir, 2004. -304 s.
8. Xudayberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Kompleks analiz. T. Universitet 1998. -200 b.
9. Sadullayev A., Xudoyberganov G., Mansurov X., Vorisov A., Tuychiyev T. Matematik analizdan misol va masalalar tuplami (Kompleks analiz) 3- qism «O'zbekiston » 2004. – 246 s.
10. Sirojiddinov S. X. , Salohiddinov M. S., Maqsudov Sh. Kompleks o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi. T. “O'qituvchi” 1979. – 386 s.
11. Evgrafov M.A. , Sidorov Yu. V. , Fedoryuk M. V. , Shabunin M.I. , Bejanov K. A. Sbornik zadach po teorii analiticheskix funktsiy. M. “Nauka ” 1972.
12. Sattorov E.N. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi. Uslibiy qo'llanma, Samarqand, SamDU, -2009, -154 b.
13. Internet resurslari: WWW.INTUIT.RU; <http://www.mcmee.ru>;

<http://lib.mexmat.ru>; <http://www.exponenta.ru>;

www.lib.homelinux.org/math/; www.eknigu.com/lib/Mathematics/;

www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC;

14. www.allmath.ru/highermath/