

**O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI**

**“5A130101 – Matematika (Differensial tenglamalar)” yo`nalishi
magistranti**

**“NEYRON TORLARI TURG`UNLIGINI MATRITSA FUNKSIYA
USULI YORDAMIDA TEKSHIRISH”**

mavzusidagi magistrlik dissertatsiyasi

Magistratura talabasi: Ziyaitdinova M

Ilmiy rahbar: Mullajonov R.V

Andijon 2016

MUNDARIJA

Kirish.....	3-5
--------------------	------------

I-bob

HARAKAT TURG'UNLIGI TUSHUNCHASI

§1.1. Turg'unlik tushunchasi.....	6-10
§1.2. Lyapunovning to'g'ri usuli.....	11-22
§1.3. Lyapunovning matritsa – funksiyasi usuli.....	23-35

II-bob

NEYRON TOR HAQIDA TUSHUNCHA

§ 2.1. Neyron torlar haqida tushuncha.....	36-37
§ 2.2. Neyron torlarning tuzilishi.....	37-39
§ 2.3. Gibrid tarmoqlar.....	39-43

III-bob

NEYRON TORLARNING TURG'UNLIGI

§ 3.1. Neyron torlar matematik modelining tahlili.....	44-53
§3.2. Neyron tor turg'unligini Lyapunov matritsa funksiyasi usuli yordamida tekshirish.....	53-55
Xulosa.....	56
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	57-59

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi: Ma'lumki xayot harakatdan iborat, shuning uchun harakat bilan bog'liq bo'lgan masalalarni o'rganish va xal qilish katta ahamiyatga ega. Bundan tashqari, ko'plab murakkab jarayonlar yirik masshtabli sistemalar orqali modellashtiriladi. Markaziy nerv sistemasining funksiyasi hamma organ va to'qimalardagi retseptorlar ta'sirlanganda paydo bo'lgan afferent (markazga intiluvchi) impulsni qabul qilish, shu taassurotlarni analiz va sintez qilish, hamda periferik organlarga ta'sir etuvchi efferent (markazdan qochuvchi) impuls oqimlarini vujudga keltirishdan iborat. Markaziy nerv sistemasi organizmni tashqi muxitga moslanishini, hamma organlarni faoliyatini boshqarishni va birlashtirilishini ta'minlaydi. Nerv markazlari bilan organlar o'rtasida ikki tomonlama aloqa borligi uchun, markaziy nerv sistemasi turli organlarni faoliyatini idora qiladi. Bu sistemaning turg'unligini o'rganish muhim ekanligi mavzuning naqadar dolzarb ekanligini anglatadi.

Ishning maqsadi: Hopfield tipidagi neyron torlar sistemasi turg'unligining umumiy masalasini va Lyapunov matritsa funksiyasi usulini o'rganib, harakat turg'unligining yetarli shartlarini hosil qilish.

Tadqiqot usuli: Neyron torlar sistemasini dekompozitsiya qilish usuli, Lyapunovning to'g'ri usuli, Lyapunovning matritsa funksiyasi usuli.

Ilmiy yangiliklar: Dissertatsiyada quyidagi natijalar olinishi kutilmoqda:

- 1) neyron torlar modeli tahlil qilinadi;
- 2) neyron torlar sistemasi o'zaro muvozanatlashuvchi qism sistemalarga nisbatan dekompozitsiya qilinadi;
- 3) neyron torlar turg'unligining yetarli shartlari xosil qilinadi;

Amaliy va nazariy ahamiyati: Ishning nazariy jihatdan ahamiyati shundan iboratki, unda olingan nazariy natijalar yangi bo'lib, dissertatsiyadan ilmiy izlanishlar olib borishda, shu va shunga yaqinroq bo'lgan mavzular bo'yicha mahsus kurslar o'qishda foydalanish mumkin.

Ishning aprobatyasi: E'lon qilingan ishlari: Mavzu bo'yicha 2015 yilning may oyida Andijon davlat universitetida bo'lib o'tgan yosh olimlar va talabalarning "XXI – asr intellektual avlod asri" shiori ostida o'tkazilgan ilmiy-amaliy anjumanda, matematika kafedrası seminarlarida ma'ruzalar qilingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi: Dissertatsiya kirish, 3 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Ishning umumiy hajmi 58 betdan iborat.

Dissertatsiyaning qisqacha mazmuni. Ushbu magistrlik dissertatsiyasining kirish qismida mavzuning dolzarbligi, ishning maqsadi, tadqiqot usuli, ilmiy yangiliklar, amaliy va nazariy ahamiyati, aprobatyasi, dissertatsiyaning tuzilishi, hajmi va qisqacha mazmuni bayon qilinadi. Birinchi bobda harakat turg'unligi tushunchasi haqida so'z ketadi. Bunda turg'unlik tushunchasi, turg'unlik ta'rifi, Lyapunovning to'g'ri usuli va Lyapunov matritsa funksiya usullari ko'rib chiqilgan. Ikkinchi bob neyron torlarga bag'ishlangan bo'lib, markaziy nerv sistemasining funksiyasi hamma organ va to'qimalardagi retseptorlar ta'sirlanganda paydo bo'lgan afferent (markazga intiluvchi) impulslarni qabul qilish, shu taassurotlarni analiz va sintez qilish, hamda periferik organlarga ta'sir etuvchi efferent (markazdan qochuvchi) impuls oqimlarini vujudga keltirishdan iborat bo'lgan neyron torlar organiladi. Markaziy nerv sistemasi organizmni tashqi muxitga moslanishini, hamma organlarni faoliyatini boshqarishni va birlashtirilishini ta'minlaydi. Nerv markazlari bilan organlar o'rtasida ikki tomonlama aloqa borligi uchun, markaziy nerv sistemasi turli organlarni faoliyatini idora qiladi. Markaziy nerv sistemasining tuzilishi va funksiyasi haqidagi hozirgi zamon tasavvurlarining asosini neyron nazariyasi tashkil etadi. Bu nazariyaning rivojlanishida ispan neyrogistologi R.Kaxal va ingiliz fiziologi Ch.Sheringtonlar ishlarining ahamiyati katta. Uchinchi bob dissertatsiyaning asosiy bobi bo'lib, bunda neyron torlar turg'unligi o'rganiladi.

Neyron torlar matematik modeli bir nechta ko'rinishda bo'lib, biz quyidagi chiziqsiz, avtonom oddiy differensial tenglama

$$\dot{x} = -H(x)(-Tx + S(x) - I)$$

bu yerda

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in (-1, 1)^n, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

$H(x) - \forall x \in (-1, 1)^n$ da aniqlangan $n \times n$ tartibli matritsa funksiya,

$T = [\sigma_{ij}]$ $n \times n$ o'lchovli o'zgarmas matritsa

$S(x) = (S_1(x_1), \dots, S_n(x_n))^T$ bu yerda $S_i : (-1, 1) \rightarrow R, \quad i = \overline{1, n}$

$I = (I_1, \dots, I_n)^T$ o'zgarmas haqiqiy vektor.

ko'rinishidagi Hopfield modeli o'rganiladi.

I BOB

HARAKAT TURG'UNLIGI TUSHUNCHASI

§ 1. Turg'unlik tushunchasi.

Turg'unlik so'zi lotincha «stable» so'zidan olingan bo'lib, «mustahkam o'rnatilgan», «mustahkam turuvchi» degan ma'noni anglatadi. Turg'unlik nazariyasi birinchi bo'lib mexanikadagi qaralayotgan sistema muvozanati xolatini o'rganishda paydo bo'lgan. 1644 yil E.Torichelli umumiy holda og'irlik kuchi ta'siri ostida bo'lgan jismlar sistemasi muvozanat xolatining turg'unligi kriterisini yaratdi. 1788 yil esa J Lagranj ixtiyoriy konservativ sistemalar muvozanat xolati turg'unligining yetarli shartlarini aniqlovchi teoremani isbotladi. 19-asrning o'rtalariga kelib fan va texnikada turg'unlikning umumiy masalasi yuzaga keldi, ya'ni sistemaning faqat muvozanat xolati emas, balki harakat xolatining turg'unligi masalasi paydo bo'ldi. Masalan, bug` mashinasiga o'rnatilgan markazdan qochuvchi regulyator katta bo'lmagan quvvatda dvigatelning berilgan aylanish tezligini turg'un holda saqlaydi. Ammo quvvat ortishi bilan bu xolat buziladi. 1868 yili K.Maksvel, 1876-77 yillari I.A.Vashnegradskiy va boshqa olimlar o'z ishlarida yuqoridagiga o'xshash masalalarni hal etish uchun harakat turg'unligining kriteriysini aniqlash kerakligini ko'rsatishdi. 19-asrning oxiriga kelib harakat turg'unligini umumiy holda o'rganish boshlandi. 1877-1881 yillarida E.DJ.Rauss bu sohada birinchi monografiyani yozdi. 1882 yil esa N.E.Jukovskiy doktorlik dissertatsiyasini shu mavzuda yozdi. Bu olimlarning olgan natijalari hozirgi kunda ham o'z ahamiyatini yo'qotgan emas. 1892 yili A.M.Lyapunov «Harakat turg'unligining umumiy masalalari haqida» mavzusidagi doktorlik dissertatsiyasini yoqlab, turg'unlik nazariyasi sohasida yangi davr ochib berdi. Bunda uning asosiy xizmatlari quyidagilar bo'ldi:

1. Harakat turg'unligining qat'iy ta'rifi berildi.

2. Birinchi yaqinlashish bo'yicha turg'unlikni tekshirish masalasini to'la yechimi berildi.

3. Harakat turg'unligini tekshirishni ikki usuli berildi.

Harakat turg'unligi nazariyasi fizika, ximiya, astronomiya, biologiya va boshqa sohalarida keng qo'llanishga ega bo'lib, texnika uchun o'ta muhim ahamiyatga ega.

Sistema xolatini bildiruvchi o'zgaruvchilarni yi lar bilan belgilaymiz. Bu o'zgaruvchilar koordinatalar, tezliklar, toklar, kuchlanishlar va xokazolar yoki shu miqdorlarning funksiyalari bo'lishi mumkin. Faraz qilaylik, o'zgaruvchilar soni chekli bo'lib, qaralayotgan sistemaning harakati birinchi tartibli xosilalarga nisbatan echilgan differensial tenglamalar sistemasi bilan ifodalansin

$$\dot{y}_i = Y(t, y_1, y_2, \dots, y_n)_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.1)$$

bu yerda Y_i funksiyalar sistema yechimining mavjudlik va yagonalik shartlarini qanoatlantiradi. Turg'unligi tekshirilishi kerak bo'lgan harakatni toyimagan harakat deb ataymiz. (1) sistemaning har bir xususiy yechimiga bitta harakat mos keladi va aksincha. Shuning uchun toyimagan harakatga (1) sistemaning

$$t=t_0 \text{ da } y_i=f_i(t_0), \quad i=1,2,.. n \quad (1.2)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi

$$y_i=f_i(t) \quad i=1,2,.. n \quad (1.3)$$

xususiy yechimi mos kelsin deb olamiz. y_i o'zgaruvchilarga moduli bo'yicha yetarli kichik bo'lgan orttirmalar berib, (2) boshlang'ich shartlarni quyidagicha o'zgartiramiz

$$t=t_0 \text{ da } y_i=f_i(t_0)+\varepsilon_i, \quad i=1,2,.. n \quad (1.4)$$

(1.1) sistemaning (1.4) boshlang'ich shartlaridagi yechimiga mos harakatlarni toyigan harakat deb aytamiz. (1.4) dagi orttirmalar esa toyishlar deyiladi. Aniqlik uchun y_i o'zgaruvchilarning toyigan harakatga mos keluvchi qiymatlarini $y_i(t)$ bilan, toyimagan harakatga mos keluvchi qiymatlarini esa $f_i(t)$ bilan belgilab

$$x_i(t) = y_i(t) - f_i(t), i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

ayirmalarni tuzamiz. Bunday aniqlangan o'zgaruvchilar y_i o'zgaruvchilarning og'ishlari yoki variatsiyalari deyiladi.

Agar barcha og'ishlar nolga teng ya'ni

$$x_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.6)$$

bo'lsa, toyigan harakat toyimagan harakat bilan ustma-ust tushadi. Buning geometrik ma'nosi shuki, n -o'lchovli fazoda y_i o'zgaruvchilar M nuqtani aniqlaydi. Toyigan harakatlar uchun M nuqta qandaydir chiziq chizadi. Toyimagan harakatga esa qo'zg'almas nuqta, koordinata boshi mos keladi. Demak, toyigan harakatlarni toyimagan harakatlardan og'ishi $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ miqdorlar bilan aniqlanadi. Agar $x_i(t)$ miqdorlar moduli bo'yicha yetarli kichik bo'lsa, u holda ularning kvadratlari yig'indisi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (1.7)$$

ham yetarli kichik bo'lib, hech bo'lmaganda bitta x_i miqdorning kattalashishi bilan (1.7) ham kattalashadi va aksincha. Shuning uchun toyigan harakatni toyimagan harakatdan og'ish o'lchovi sifatida (1.6) ni olish mumkin. (1.7) esa M nuqtadan koordinata boshigacha bo'lgan masofa kvadratini ifodalaydi. Toyigan harakat ta'rifidan, (1.4) va (1.5) dan

$$t = t_0 \text{ da } x_i = x_{0i} v + \varepsilon_i \quad (1.8)$$

ni xosil qilamiz. Demak og'ishlarning boshlang'ich qiymatlari toyishlarni ifodalaydi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topish mumkin bo'lsaki, unda

$$\sum_{i=1}^n x_{0i}^2 < \delta \quad (1.9)$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha x_{0i} toyishlar va ixtiyoriy $t > t_0$ lar uchun

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < \varepsilon \quad (1.10)$$

shart bajarilsa, toyimagan harakat turg'un, aks holda turg'unmas deyiladi.

Agar toyimagan harakat turg'un bo'lib, ixtiyoriy toyigan harakatlar yetarli kichik toyishlarda toyimagan harakatga intilsa, ya'ni

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \quad (1.11)$$

shart bajarilsa, toyimagan harakat asimptotik turg'un deyiladi. Lekin bu shartning o'zi asimptotik turg'unlik uchun yetarli emas.

Ba'zan turg'unlik ixtiyoriy toyishlarda emas balki qandaydir shartlarga bo'ysunuvchi toyishlarda bo'lishi mumkin. Bunday turg'unlik shartli turg'unlik deb ataladi.

Toyigan harakat tenglamalarini aniqlash uchun (1.5) dan

$$y_i(t) = f_i(t) + x_i(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

larni aniqlab, (1.1) ga olib borib qo'yamiz va quyidagilarni xosil qilamiz

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = Y_i(f_1 + x_1, \dots, f_n + x_n, t), \quad i = \overline{1, n}$$

Bu tenglamalarning o'ng tomonlarini x_i larning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyamiz.

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = Y_i(f_1, \dots, f_n, t) + \left(\frac{dY_i}{dx_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{dY_i}{dx_n} \right)_0 x_n + X_i^*,$$

bu yerda $X_i^* = x_i$ og'ishlarning birdan yuqori bo'lgan darajalariga bog'liq xadlari yig'indisi.

Bundan, $f_i(t)$ funksiyalar (1.1) ni qanoatlantirishini e'tiborga olib, quyidagini xosil qilamiz.

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + X_i^*, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.12)$$

bu yerda $a_{ij} = \left(\frac{dY_i}{dx_j} \right)_0$, $i, j = \overline{1, n}$. (1.12) toyigan harakat tenglamalarining o`ng tomonidagi xadlarini  $X_i$  bilan belgilab, avtonom bo`lmagan toyigan harakat tenglamalari uchun

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad i = \overline{1, n} \quad (1.13)$$

ni, avtonom toyigan harakat tenglamalari uchun esa

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = \overline{1, n} \quad (1.14)$$

ni xosil qilamiz.

Qulaylik uchun toyigan harakat tenglamalari sodda qilib sistema deb ataladi.

Shuning uchun (1.13) avtonom bo`lmagan, (1.14) avtonom sistemalar deyiladi..

(1.13) va (1.14) tenglamalarni vektor ko`rinishda mos ravishda quyidagicha yozish mumkin.

$$\dot{x} = X(x, t) \quad (0.13'), \quad \dot{x} = X(x) \quad (0.14')$$

Toyigan harakat tenglamalarining natijalaridan ko`rinadiki, X_i -funksiyalar $x=0$ da nolga aylanadi

$$X_i(0, t)=0, \quad X(0)=0 \quad (1.15)$$

Toyigan harakat tenglamalarining o`ng tomoni M nuqta tezligi proektsiyalariga teng.

§ 2. Lyapunovning to'g'ri usuli.

Lyapunovning to'g'ri usulini o'rganishni

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq M, \quad M > 0, \quad M = \text{const} \quad (2.1)$$

sohada aniqlangan

$$V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

xaqiqiy funksiyani qarashdan boshlaymiz. Bu funksiya (2.1) sohada bir qiymatli, uzluksiz va $x=0$ da nolga aylanadi, ya'ni

$$V(0) = 0 \quad (2.2)$$

Agar V funksiya (2.1) sohada noldan boshqa faqat bir xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda y o'zgarmas ishorali (mos ravishda musbat yoki manfiy) deyiladi. Agar o'zgarmas ishorali funksiya faqat $x=0$ dagina nolga aylansa, u holda bu funksiya aniq ishorali (mos ravishda musbat aniqlangan yoki manfiy aniqlangan) deyiladi. Ham musbat, ham manfiy qiymatlarni qabul qiladigan funksiyalar esa o'zgaruvchi ishorali funksiyalar deyiladi.

Harakat turg'unligini aniqlash uchun ishlatiladigan, bunday kiritilgan funksiyalar Lyapunov funksiyalari deyiladi.

Agar qaralayotgan xaqiqiy funksiya $V(x,t)$ oshkor xolatda t vaqtga bog'liq bo'lsa, u holda (2.1) soha o'rniga

$$t \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq M, \quad M = \text{const}, \quad t_0 = \text{const}, \quad t_0 > 0, \quad M > 0 \quad (2.3)$$

soha qaralib, (2.2) shart

$$V(0,t) = 0 \quad (2.4)$$

shart bilan almashtiriladi.

Agar (2.3) sohada aniqlangan, uzluksiz va (2.4) shartni qanoatlantiruvchi $V(x,t)$ funksiya yetarli katta t_0 va yetarli kichik $M > 0$ uchun noldan boshqa faqat bir xil ishorali qiymatlar qabul qilsa, bu funksiyani o'zgarmas ishorali deymiz.

Oshkor holda t vaqtga bogʻliq boʻlgan $V(x,t)$ funksiya uchun t vaqtga bogʻliq boʻlmagan $w(x)$ musbat aniqlangan funksiya mavjud boʻlib, yetarli katta t_0 va yetarli kichik M uchun (2.3) sohada

$$V(x,t) \geq w(x) \quad (2.5)$$

shart bajarilsa, bu funksiya musbat aniqlangan

$$-V(x,t) \geq w(x) \quad (2.6)$$

shart bajarilsa, manfiy aniqlangan deyiladi.

Bu aytilganlardan koʻrinadiki, $x=0$ nuqtada musbat aniqlangan funksiya minimumga, manfiy aniqlangan funksiya maksimumga ega boʻladi. Oʻzgarmas ishorali funksiyalar esa ekstremumga ega boʻlmaydi.

Misol 1.1. $V=x_1^2+x_2^2$ funksiya x_1 va x_2 oʻzgaruvchilarning ixtiyoriy noldan farqli qiymatlarida musbat boʻlib, faqat $x_1=x_2=0$ dagina nolga aylanadi. Bundan koʻrinadiki, bu funksiya musbat aniqlangan.

$0x_1x_2V$ fazoda bu funksiyaning grafigi $0x_1x_2$ tekislikning bir tomonida yotib, bu tekislikka faqat 0 nuqtadagina urinadi.

Misol 1.2. $V=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=(x_1-x_2)^2$ manfiy qiymatlarni qabul qilmaydi, ammo koordinata boshidan tashqari $x_1=x_2$ toʻgʻri chiziqda ham nolga aylanadi. Shuning uchun bu funksiya musbat, lekin musbat aniqlangan emas.

Bu xolatda $V=(x_1-x_2)^2$ funksiyaning $0x_1x_2V$ fazodagi grafigi $0x_1x_2$ tekislikning bir tomonida yotadi, ammo bu tekislikka faqat koordinata boshida emas, balki $x_1=x_2$ toʻgʻri chiziq boʻyicha urinadi.

Endi ishorasi aniqlangan V funksiyaning Makloren qatoriga yoyamiz.

Ishorasi aniqlangan funksiya ta'rifidan $V(0)=V(0,t)=0$ boʻlib, koordinata boshida bu funksiya ekstremumga ega boʻlgani uchun $\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)_0 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

boʻlib yoyilma

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ki} x_k x_i + \dots \quad (2.7)$$

ko`rinishida bo`ladi, bu yerda

$$c_{ki} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_i} \right)_0 \quad (2.8)$$

(2.7) dan ko`rinadiki,  $V$  ishorasi aniqlangan funksiya  $x_1, x_2, \dots, x_n$  o`zgaruvchilarning darajalari bo`yicha qatorga yoyilmasida birinchi darajali xadlar qatnashmaydi.

Faraz qilaylik,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ki} x_k x_i, \quad c_{ik} = c_{ki} \quad (2.9)$$

kvadratik forma faqat $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ dagina nolga aylanib, musbat qiymatlarni qabul qilsin. U holda (2.7) dan ko`rinadiki,  $V$  funksiya  $x_i$  larning yetarli kichik qiymatlarida yuqori tartibli xadlarga bog`liq bo`lmagan holda musbat qiymatlarni qabul qilib,  $x_1=x_2=\dots=x_n=0$  dagina nolga aylanadi. Shuning uchun (2.9) kvadratik forma musbat aniqlangan bo`lsa V funksiya ham musbat aniqlangan bo`ladi.

Agar (2.3) shartlarda $|V(x,t)|$ ning qiymati qandaydir chekli musbat son dan ortib ketmasa, $V(x,t)$ funksiya yuqoridan chegaralangan deyiladi. Ixtiyoriy vaqtga oshkor holda bog`liq bo`lmagan $V(x)$ funksiyalar uzluksiz bo`lgani uchun M ning yetarli kichik qiymatlarida y yuqoridan chegaralangandir.

V chegaralangan funksiya cheksiz kichik yuqori limitga yo`l qo`yadi deyiladi, agarda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$t \geq t_0, \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 < \delta \quad (2.10)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $\delta > 0$ topilib

$$|V| < \varepsilon \quad (2.11)$$

bo'lsa, qo'pol qilib aytganda cheksiz kichik yuqori limitning ma'nosi shuki, $V(x,t)$ funksiya modulini ixtiyoriy $t \geq t_0$ da barcha x_i larning modullarini kamaytirish xisobiga keragicha kichik qilib olish mumkin, t vaqtga oshkor holda bog'liq bo'lmagan $V(x)$ funksiyalar cheksiz kichik yuqori limitga ega bo'ladi.

Misol uchun quyidagi funksiyalarni qaraymiz:

$$1) \sin^2[(x_1^2 + \dots + x_n^2)t] \quad 2) (x_1^2 + \dots + x_n^2)\sin^2 t \quad 3) t(x_1^2 + \dots + x_n^2) - 2\cos t x_1 x_2$$

Bu funksiyalarning 1) va 2) lari chegaralangan va musbat ammo ulardan faqat 2 chisi cheksiz yuqori limitga yo'l qo'yadi. Bu ikkala funksiya ham aniq ishorali emas, chunki ular t ning cheksiz ko'p qiymatlarida nolga aylanadi, 3) funksiya esa musbat aniqlangan, ammo u chegaralanmagan, shuning uchun cheksiz kichik yuqori limitga ega emas.

Nihoyat, $V(x)$ va $V(x,t)$ funksiyalardan

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{va} \quad \frac{dx_i}{dt} = x_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Sistemalar yordamida olingan xosilalar mos ravishda

$$V(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} x_n \quad (2.12)$$

$$V(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} x_n + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.13)$$

ko'rinishida bo'ladi. (2.9) kvadratik formaning koefitsientlaridan tuzilgan

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad c_{ki} = c_{ik} \quad (2.14)$$

kvadratik matritsani qaraymiz va uning bosh dioganali minorlarini tuzib chiqamiz.

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = |C| \quad (2.15)$$

Agar c_{ki} $i, k=1, 2, \dots, n$ o'zgarmas sonlar bo'lsa, chiziqli algebrada isbotlangan Silvestr kriteriysi o'rinli.

Silvestr kriteriysi. Xaqiqiy koefitsientli kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun uning koefitsientlaridan tuzilgan kvadratik, simmetrik matritsaning barcha bosh dioganali minorlari $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ larning musbat bo'lishi, ya'ni

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \quad (2.16)$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar V funksiya manfiy aniqlangan bo'lsa, $-V$ funksiya musbat aniqlangan bo'ladi va (2.16) shartlar

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{2k-1} < 0, \Delta_{2k} > 0 \quad (2.17)$$

ko'rinishini oladi.

Agar $c_{ki} = c_{ki}(x, t)$ ko'rinishida bo'lsa, (2.16) va (2.17) shartlar mos ravishda

$$\Delta_1 = c_{11} \geq \delta_1 > 0, \dots, \Delta_n = |c| \geq \delta_n > 0 \quad (2.18)$$

$$\Delta_1 \leq \delta_1 < 0, \dots, \Delta_{2k-1} \leq -\delta_{2k-1} < 0, \Delta_{2k} \geq \delta_{2k} > 0 \quad (2.19)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ -musbat sonlar.

Misol: 1.3. $V(x) = 1 + \sin^2 x_1 - \cos(x_1 - x_2)$ funksiyaning qaraylik. Uni x_1 va x_2 larning darajalari bo'yicha qatarga yoyib

$$V = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + \dots$$

ni xosil qilamiz. V funksiya kvadrat qismining matritsasi $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ bo'lib, bu matritsaning bosh dioganali minori $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$ Silvestr kriteriysiga asosan V funksiya nol nuqta atrofida musbat aniqlangan ammo to'la

tekislikda musbat aniqlangan emas, balki faqat musbat funksiyadir, chunki u $x_1=x_2=0$ dan boshqa $x_1=x_2=n\pi$ ($1,2,\dots,n$) da ham u nolga aylanadi.

$$\text{Misol 1.4. } V(x,t) = t(x_1^2 + x_2^2) - 2\cos t x_1 x_2$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa $\begin{bmatrix} t & -\cos t \\ -\cos t & t \end{bmatrix}$

bo`lib, uning bosh diogonal minorlari

$$\Delta_1=t, \Delta_2=t^2-\cos^2 t$$

Agar $t_0=1$ desak, u holda barcha $t>1$ uchun $\Delta_1 \geq 1 > 0$, $\Delta_2 \geq 1 - \cos^2 1 \approx 0,71 > 0$ bo`lib, Silvestrning umumlashgan kriteriysidagi shartlar, ya'ni (1.18) shartlar bajariladi. Shuning uchun qaralayotgan funksiya musbat aniqlangan.

Teorema 2.1 (Lyapunovning harakat turg'unligi haqidagi teoremasi)
Agar toyigan harakat differensial tenglamasi uchun aniq ishorali V funksiya topish mumkin bo`lib. Bu funksiyadan shu tenglamalar yordamida olingan xosila  $\dot{V}$  funksiya  $V$  funksiyaga qarama-qarshi ishorali bo`lgan o`zgarmas ishorali yoki aynan nolga teng bo`lsa, u holda toyimagan harakat turg'un bo`ladi.

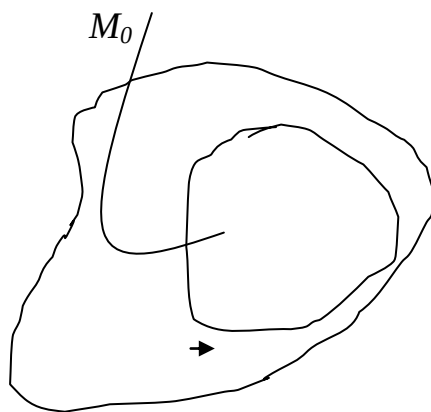
Isbot. Ixtiyoriy yetarli kichik musbat $\varepsilon > 0$ sonni tanlab, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \varepsilon$ sferani yasaymiz. Keyin shu ε sferaning ichida yotuvchi V (c sirtini quramiz. Buni doim qilish mumkin, chunki V funksiya uzluksiz va koordinata boshida nolga teng. Endi δ ni shunday tanlaymizki, unda $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \delta$ sfera $V=c$ sirtini ichida to`lalligicha yotib, u bilan umumiy nuqtaga ega bo`lmasin δ sfera ichida harakat boshlagan M nuqta xech qachon ε sferaga etib bormasligini ko`rsatamiz. Umumiylikni buzmasdan V funksiyaning musbat aniqlangan deb xisoblashimiz mumkin.

Teorema shartiga ko'ra $\dot{V} \leq 0$. U holda $V - V_0 = \int_{t_0}^t \dot{V} dt$ tenglikka asosan $V - V_0 \leq 0$ eku $V \leq V_0$ ga ega bo'lamiz. Bu tengsizlikdan ko'rinadiki, $t=t_0$ da M nuqta $V=V_0=c_1$ sirtida (agar $\dot{V} \equiv 0$ bo'lsa) yoki bu sirtning ichida (agar $\dot{V} < 0$ bo'lsa) yotadi.

Teorema 2.2. (Lyapunovning asimptotik turg'unlik haqidagi teoremasi)
Agar toyigan harakat differensial tenglamasi uchun aniq ishorali V funksiya topish mumkin bo'lib, bu funksiya shu tenglamalar yordamida olingan xosila $\dot{V}$ funksiya, V funksiya qarama-qarshi ishorali bo'lgan, aniq ishorali funksiya iborat bo'lsa, u holda toyimagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi.

Isbot. Teoremaning shartlari bajarilganda turg'unlik haqidagi Lyapunov teoremasining ham hamma shartlari bajariladi. Shuning uchun harakatlanayotgan nuqta $V=c_1$ sirtidan tashqariga chiqib ketmaydi. Ammo asimptotik turg'unlik haqidagi Lyapunov teoremasidagi shart kuchliroq ya'ni $\dot{V}$ xosila aynan nolga teng bo'lmay, faqat koordinata boshidagina nolga aylanadi. Shuning uchun M nuqta harakat boshlanishi bilanoq $V=c_1$ sirtning ichiga kiradi.

Umumiylikni buzmasdan V funksiyaning musbat aniqlangan deb xisoblash mumkin. Teoremaning shartiga ko'ra uning xosilasi $\dot{V}$ manfiy aniqlangan bo'ladi. $\dot{V} = \frac{dV}{dt} < 0$ tengsizlikdan V funksiyaning musbatligicha qolib, monoton kamayishi kelib chiqadi. Buning ma'nosi shuki V funksiya $c_2 > 0$ limitga ega. Boshqacha aytganda M nuqta tashqi tomondan $V=c_2$ limitik sirtga intiladi. $c_2=0$. Ya'ni $V=c_2$ sirt koordinata boshiga aylanishini ko'rsatamiz.



1-rasm

Faraz qilaylik, $c_2 \neq 0$ u holda $V=c_1$ va $V=c_2$ sirtlar bilan chegaralangan yopiq sohada teorema shartiga ko'ra $\dot{V}$ manfiy bo'ladi, $e(e>0)$ bilan uning shu sohadagi aniq yuqori chegarasini belgilasak, V faqat koordinata boshidagina nolga aylangani uchun $e \neq 0$ bo'ladi. Aniq yuqori chegarasini ta'rifga ko'ra

$$V \leq -e \quad V - V_0 = \int_{t_0}^t \dot{V} dt \quad \text{ayniyatdan foydalansak,} \quad V = V_0 + \int_{t_0}^t \dot{V} dt \quad \text{bo'lib,}$$

$$V \leq -e \quad \text{da} \quad V \leq V_0 + \int_{t_0}^t e dt \quad \text{xosil bo'ladi.}$$

Bundan $V \leq V_0 - e(t-t_0)$. Bu tengsizlikdan ko'rinadiki, vaqt o'tishi (ortishi) bilan V funksiya manfiy bo'ladi, buning bo'lishi mumkin emas, chunki teoremaning shartiga ko'ra V funksiya – musbat aniqlangan. Bu qarama-qarshilik $c_2 \neq 0$ degan farazni inkor etadi, ya'ni $c_2=0$ bo'lib, harakatlanayotgan nuqta koordinata boshiga asimptotik intiladi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Misol 2.5. Toyigan harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin.

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1 x_2 - x_1^3 - \frac{1}{2} x_1 x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + x_1 x_2 - x_1^2 - \frac{1}{2} x_1 x_2^2$$

Lyapunov funksiyasi

$$V = \frac{1}{2}(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$$

ko`rinishda bo`lib, u musbat aniqlangan chunki Silvestr kriteriysi shartlari bajariladi. Bu funksiyaning qaralayotgan sistema yordamidagi xosilasini xisoblab, quyidagini xosil qilamiz.

$$\dot{V} = -3x_1^4 + 2x_1^2x_2 - 2x_2^2$$

x_1^2 va x_2 larni o`zgaruvchi deb, bu funksiyaning matritsasini tuzamiz $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Bundan $\Delta_1 = -3 < 0$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 > 0$ Demak, $\dot{V}$ funksiyaning manfiy aniqlangan bo`lishligini barcha shartlari bajariladi, ya'ni Lyapunovning asimptotik turg'unlik haqidagi teoremasiga asosan  $x_1=x_2=0$  toymagan harakat asimptotik turg'un bo`ladi.

Lyapunovning asimptotik turg'unlik haqidagi teoremasida V funksiya va uning $\dot{V}$ xosilasiga juda yuqori talablar qo`yiladi. N.N.Krasovskiy  $\dot{V}$  xosilaga qo`yilgan talabni bir oz kuchsizlantirish mumkin ekanligini ko`rsatadi.

$V(x)$ funksiya dan $\frac{dx_i}{dt} = x_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$ sistema yordamida olingan

$V(x)$ xosila aniq ishorali emas, balki o`zgarmas ishorali bo`lsin. K orqali (1.1) sohadagi koordinata boshidan boshqa $\dot{V} = 0$ bo`ladigan nuqtalar ko`pxilligini belgilaymiz. K -ko`pxillik sirt, chiziq yoki ularning kombinatsiyasidan iborat bo`lishi mumkin.

Teorema 2.3. (Krasovskiy teoremasi):

Agar $\frac{dx_i}{dt} = x_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$ toyigan harakatning differensial

tenglamasi uchun (1.1) sohada musbat aniqlangan V funksiya mavjud bo`lib, uning xosilasi shu sohada quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa,

1. K dan tashqarida $\dot{V} < 0$

2. K da $\dot{V} = 0$, K-nuqtalar ko'pxilligi bo'lib,

$0 < t < \infty$ da sistemaning butun traektoriyasini o'zida saqlamaydi. U holda toyimagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi.

Misol 2.6. Toyigan harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1x_2 - x_2^3$$

Shunday musbat aniqlangan

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

funksiyani olamizki bu funksiya yuqoridagi sistema yordamida olingan xosilasi quyidagicha bo'ladi

$$\dot{V} = -(x_1 - x_2^2)^2$$

$\dot{V}$ xosila manfiy aniqlangan emas, balki manfiy xolos, shuning uchun unga Lyapunovning asimptotik turg'unlik haqidagi teoremasini qo'llab bo'lmaydi.

Krasovski teoremasini qo'llash uchun esa K ko'pxillikni $\dot{V}$ xosilani nolga tenglab aniqlaymiz:

$$\dot{V} = -(x_1 - x_2^2)^2 = 0 \quad \text{ëku} \quad F = x_1 - x_2^2 = 0$$

Bu Ox_1x_2 tekislikda parabolani ifodalaydi. F –ko'pxillik butun traektoriyalarni o'zida saqlamasligini ko'rsatamiz.

Buning uchun

$$\dot{x}_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \neq 0$$

ekanligini ko'rsatamiz. K da $x_1 = x_2^2$ ekanligidan

$$\dot{x}_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = (-x_1 + 3x_2^2) + (-x_1x_2 - x_2^3)(-2x_2) = 2x_2^2 + 4x_2^4$$

bu ifoda $x_2=0$ dan boshqa nuqtalarda nolga aylanmaydi. Shuning uchun $F=x_1-x_2^2=0$ to'plam butun traektoriyalarni o'zida saqlamaydi. Demak, Krasovskiy teoremasining hamma shartlari bajariladi.

1. V funksiya musbat aniqlangan.
2. $\dot{V}$ funksiya nolga K da teng bo'lib, K dan tashqarida manfiy.
3. K ko'pxillik butun traektoriyalarni o'zida saqlaydi, ya'ni qaralayotgan harakat asimptotik turg'un bo'ladi.

Lyapunov va Krasovskiy teoremalari asimptotik turg'unlikning kichik boshlang'ich toyishlardagi yetarli shartlarini ifodalaydi. E.A.Barbashin va N.N.Krasovskiylar tomonidan yaratilgan quyidagi teorema asimptotik turg'unlikning ixtiyoriy boshlang'ich toyishlardagi yetarli shartlarni aniqlaydi.

Teorema 2.4. (Barbashin-Krasovskiy teoremasi): Agar toyigan harakat differensial tenglamasi uchun

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty \quad (*)$$

shartni qanoatlantiruvchi musbat aniqlangan $V(x)$ funksiya mavjud bo'lib, undan bu tenglamalar yordamida olingan xosilasi barcha x larda quyidagi ikkita shartlarni qanoatlantirsa, u holda $x=0$ toyimagan harakat to'la ma'noda turg'un bo'ladi.

1. K dan tashqarida $\dot{V} < 0$

2. K da $\dot{V} = 0$

bu yerda K -sistemani $0 < t < \infty$ dagi butun traektoriyasini o'zida saqlamaydigan ko'pxillik. (*) shart hech bo'lmaganda bitta x_k koordinata cheksizlikka intilishini ko'rsatadi.

Misol 2.7. Toyigan harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y \\ \dot{y} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2y}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

musbat aniqlangan $V = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$ funksiyani olsak, uning berilgan harakat tenglamasi yordamida xisoblangan xosilasi

$$\dot{V} = -4 \left[\frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{y^2}{(1+x^2)^4} \right]$$

bo`lib, barcha (x,y) tekislikda manfiy aniqlangan.

Lyapunov teoremasiga asosan $x=0, y=0$ toyimagan harakat kichik boshlang`ich toyishlarda asimptotik turg`un bo`ladi. Ammo bunda Barbashin-Krasovskiyy teoremasini qo`llab bo`lmaydi, chunki  $(*)$  shart bajarilmaydi. Xaqiqitan,  $x \rightarrow \infty$  va  $y = \text{const}$  bo`lganda V funksiya cheksizlikka emas, balki $1+a^2$ ga intiladi, ya'ni yuqoridagi misol to`la ma'noda turg`un bo`la olmaydi.

Misol 1.8. Endi toyigan harakat tenglamasi quyidagicha bo`lgan sistemani qaraylik.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + y \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$

Bu sistema uchun $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ funksiyani olsak, bu funksiya musbat aniqlangan bo`lib, uning xosilasi  $\dot{V} = -x^4 - y^4 = -(x^4 + y^4) < 0$  manfiy aniqlangan. Bundan tashqari,  $\lim_{x \rightarrow \infty} V = \infty$  bo`lgani uchun Barbashin-Krasovskiyy teoremasiga asosan sistemaning $x=y=0$ yechimi to`la ma'noda turg`un.

§ 3. Lyapunovning matritsa-funksiyasi usuli

Lyapunovdan keyin olimlar (N.G.Chetaev, I.G.Malkin, N.N.Krasovski, V.M.Matrosov, A.A.Martinyuk va boshqalar) tomonidan Lyapunovning to'g'ri usuli rivojlantirildi va takomillashtirildi. Jumladan, V.M.Matrosov tomonidan 1962 yili Lyapunovning vektor funksiyasi usuli yaratilgan bo'lib, A.A.Martinyuk tomonidan 1979 yili Lyapunovning matritsa-funksiyasi usuli yaratildi.

Ma'lumki, Lyapunov funksiyasini qurish algoritmi mavjud emas, bu xol murakkab sistemalar uchun Lyapunov funksiyasini tanlashni qiyinlashtiradi. Sodda sistemalar uchun bunday qiyinchilik bo'lmaydi. Yuqorida aytilgan har ikkala usulning maqsadi murakkab sistemalar uchun tanlanadigan Lyapunovning skalyar funksiyasini qurishni qisman bo'lsa ham aloqitmlashdan iborat. Bunda qaralayotgan murakkab sistema bir nechta sodda qism sistemalarga dekompozitsiya qilinadi, so'ngra har bir qism sistema uchun Lyapunovning skalyar funksiyasi tuzilib, ular yordamida umumiy sistema uchun Lyapunovning skalyar funksiyasi tuziladi. Lyapunovning matritsa – funksiyasi usuli Lyapunovning vektor – funksiyasi usuliga qaraganda umumiyroq bo'lgani uchun Lyapunov matritsa-funksiyasi usulini ko'rib chiqamiz.

Bu usulning mohiyati quyidagicha: Avval qaralayotgan sistema dekompozitsiya qilinib, uning erkli qism sistemalari va bu erkin qism sistemalarni o'zaro bog'lovchi funksiyalar ajratiladi, ya'ni qaralayotgan sistema

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + f_i^*(x) \quad i=1,2,..,s \quad (3.1)$$

bu yerda $x^T=(x_1,x_2,..,x_s)$, $x_i \in R^{n_i}$, $x \in R^n$, $n_1 + n_2 + ... + n_s = n$ ko'rinishga keltiriladi va bu sistemaning $0 \in R^{n_i}$, $i=1,...,s$ xolatlari uchun $N_{ix} \subseteq R^{n_i}$ – ochiq bog'langan atroflar hamda $x=0$ nuqtaning $N_x \subseteq N_{1x} \times N_{2x} \times ... \times N_{sx}$ bog'langan atrofi mavjud bo'lsin deb olamiz.

$$\dot{x}_i = f_i(x_i), \quad i=1,2,..,s \quad (3.2)$$

tenglamalar erkin qism sistemalarni, $f_i^*(x)$ funktsiyalar esa bu erkin qism sistemalar orasidagi bog'lanishlarni ifodalaydi. So'ngra (3.1) va (3.2) sistemalar bilan birga quyidagi matritsa funktsiyani qaraymiz.

$$U(x) = \begin{bmatrix} v_{11}(x_1) & v_{12}(x_1, x_2) & v_{13}(x_1, x_3) & \dots & v_{1s}(x_1, x_s) \\ v_{21}(x_1, x_2) & v_{22}(x_2) & v_{23}(x_2, x_3) & \dots & v_{2s}(x_2, x_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{s1}(x_s, x_1) & v_{s2}(x_s, x_2) & v_{s3}(x_s, x_3) & \dots & v_{ss}(x_s) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

bu yerda $v_{ij}(x_i, x_j) = v_{ji}(x_j, x_i)$ bo'lib, $v_{ii}(x_i)$ funktsiyalar (3.2) erkin qism sistemalarga qarab tanlanadi. $v_{ij}(x_i, x_j)$ funktsiyalar esa, $f_i^*(x)$ funktsiyalarga qarab shunday tanlanadiki, unda $U(x)$ matritsa funktsiya musbat aniqlanganlik shartlarini qanoatlantiradi.

Endi $U(x)$ matritsa-funktsiya va $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)$ o'zgarmas vektor yordamida quyidagi skalyar funktsiyani tuzamiz.

$$V(x) = \eta^T U(x) \eta \quad (3.4)$$

Bu skalyar funktsiya musbat aniqlangan bo'lishi uchun $U(x)$ matritsa-funktsiya elementlarini quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz.

$$a) \quad v_{ii}(x_i) \geq a_{ii} \|x_i\|^2, \quad \forall (t, x_i) \in \mathfrak{T}_0 \times N_{ix}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$\mathfrak{T}_0 = [0, +\infty]$$

(*)

$$b) \quad v_{ij}(x_i, x_j) \geq a_{ij} \|x_i\| \|x_j\|, \quad \forall (t, x_i, x_j) \in \mathfrak{T}_0 \times N_{ix} \times N_{jx},$$

$$i, j = 1, 2, \dots, s, \quad i \neq j$$

Bu shartlar bajarilganda $V(x)$ skalyar funktsiya uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$V(x) \geq u^T H^T A H u \quad (3.5)$$

bu yerda

$$u = (\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_s\|)^T, \quad H = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s), \quad A = [a_{ij}]_{i,j=1}^s \quad (3.5)$$

tengsizlikdan ko`rinadiki,  $V(x)$  funksiya musbat aniqlangan bo`lishi uchun A o`zgarmas matritsa musbat aniqlangan bo`lishi yetarli. Shundan so`ng  $U(x)$  matritsa-funksiyaning  $v_{ij}(x_i, x_j)$  elementlaridan (3.1) sistema yordamida xosilalar olib, ularni yuqoridan baholaymiz. Faraz qilaylik, ular quyidagicha baholangan bo`lsin.

$$a) \quad (D_{x_i}^+ v_{ii}) f_i(x) \leq \rho_{1,i} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \rho_{1,i,j} \|x_i\| \|x_j\|, \quad \forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0}, \quad i, j \in [1, s].$$

$$b) \quad (D^+ v_{ii})^T f_i^*(x) \leq \rho_{2,i} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \rho_{2,i,j} \|x_i\| \|x_j\|, \quad \forall x_i \in N_{ix0}, \quad i \in [1, s],$$

$$c) \quad (D_{x_i}^+ v_{ij})^T f_i(x) \leq \rho_{3,i} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \rho_{3,i,j} \|x_i\| \|x_j\| + \rho_{4,j} \|x_j\|^2, \quad \forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0}, \quad i, j \in [1, s], \quad i < j.$$

$$d) \quad (D_{x_i}^+ v_{ij})^T f_i^*(x) \leq \rho_{5,i} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^s \rho_{4,i,j} \|x_i\| \|x_j\| + \rho_{6,j} \|x_j\|^2, \quad \forall x_i \in N_{ix0}, \quad i, j \in [1, s], \quad i < j.$$

$$e) \quad (D_{x_j}^+ v_{ij})^T f_i(x) \leq \rho_{7,i} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \rho_{5,i,j} \|x_i\| \|x_j\| + \rho_{8,j} \|x_j\|^2, \quad \forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0}, \quad i, j \in [1, s], \quad i < j$$

$$f) \quad (D_{x_j}^+ v_{ij})^T f_i^*(x) \leq \rho_{9,i} \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^s \rho_{6,i,j} \|x_i\| \|x_j\| + \rho_{10,j} \|x_j\|^2, \quad \forall x_i \in N_{ix0}, \quad i, j \in [1, s], \quad i < j.$$

(3,5) skalyar funksiya dan (3,1) sistema yordamida yuqoridagi tengsizliklarni qanoatlantiruvchi xosila uchun quyidagi tengsizlik xosil bo`ladi.

$$\dot{V}(x) \leq u^T G u \quad (3.6)$$

bu yerda

$$G = [g_{i,j}]_{i,j=1}^s, \quad g_{i,j} = g_{i,j}.$$

$$g_{ii} = [\eta_i^2(\rho_{1,i} + \rho_{2,i}) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^s \eta_i \eta_j (\rho_{3,i} + \rho_{4,j} + \rho_{5,i} + \rho_{6,j} + \rho_{7,i} + \rho_{8,j} + \rho_{9,i} + \rho_{10,j})].$$

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \eta_i^2 (\rho_{1,i,j} + \rho_{2,i,j}) + \eta_i \eta_j (\rho_{3,i,j} + \rho_{4,i,j} + \rho_{5,i,j} + \rho_{6,i,j})$$

(3.6) tengsizlikdan ko`rinadiki,  $\dot{V}(x)$  xosila manfiy aniqlangan bo`lishi uchun G-o`zgarmas matritsani manfiy aniqlangan bo`lishi yetarli.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema 3.1. Agar (3.1) sistema uchun elementlari (*) shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x)$ matritsa – funksiya mavjud bo`lib, quyidagi shartlar bajarilsa A-matritsa musbat aniqlangan. G- matritsa yarim manfiy aniqlangan.

U holda (3.1) sistemaning $x=0$ yechimi (toyimagan harakat) turg`un bo`ladi.

Isbot: $\eta^T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)$ vektor yordamida (3,3) matritsa–funksiyadan (3,5) tengsizlikni qanoatlantiruvchi (3,2) skalyar funksiyanı tuzamiz. Bu skalyar funksiya xosilasi uchun (3,6) baholashni xosil qilamiz. (3,5) tengsizlikdan va A matritsaning musbat aniqlanganligidan (3,4) funksiyaning musbat aniqlanganligi xosil bo`ladi, (3,6) baholashdan va G matritsaning yarim manfiy aniqlanganligidan esa (3,5) skalyar funksiyanı (3,1) sistema yordamida olingan xosila manfiy aniqlangan yoki aynan nolga teng bo`ladi. Bu shartlar esa sistema muvozanat xolatining turg`un bo`lishi uchun yetarli.

Teorema 3.2. Agar (3.1) sistema uchun elementlari (*) shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x)$ matritsa – funksiya mavjud bo`lib, quyidagi shartlar bajarilsa

A-matritsa musbat aniqlangan.

G- matritsa manfiy aniqlangan.

U holda (3.1) sistemaning $x=0$ yechimi (toyimagan harakat) asimptotik turg`un bo`ladi.

Isbot: $\eta^T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)$ vektor yordamida (3,3) matritsa-funksiyadan (3,5) tengsizlikni qanoatlantiruvchi (3,4) skalyar funksiyani tuzamiz. Bu skalyar funksiya xosilasi uchun (3,6) baholashni xosil qilamiz. (3,5) tengsizlikdan va A matritsaning musbat aniqlanganligidan (3,4) funksiyaning musbat aniqlanganligi xosil bo`ladi, (3,6) baholashdan va G matritsaning manfiy aniqlanganligidan esa (3,5) skalyar funksiya (3,1) sistema yordamida olingan xosila manfiy aniqlangan bo`ladi. Bu shartlar esa sistema muvozanat xolatining asimptotik turg`un bo`lishi uchun yetarli.

Misol 3.1. Ikkinchi tartibli ikkita qism sistemalardan tuzilgan to`rtinchi tartibli sistemani qaraymiz.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -0,5 & -2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0,5 & -3 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0,1 & -1 \\ 1 & 0,1 \end{pmatrix} x_1, \quad x_i \in R^2, \quad i=1,2\end{aligned}$$

Berilgan sistema uchun elementlari quyidagicha bo`lgan matritsa-funksiyani tuzamiz.

$$v_{ii}(x_i) = x_i^T \text{diag}\{2, 2\}x_i, \quad i = 1, 2, \quad v_{12} = (x_1, x_2) = v_{21}(x_2, x_1) = x_i^T \text{diag}\{0, 1, 0, 1\}x_2$$

Bu funksiya uchun quyidagilar o`rinli bo`ladi.

$$v_{ii}(x_i) \geq 2\|x_i\|^2 \quad \forall x_i \in N_{ix_0}, \quad i = 1, 2; \quad v_{12}(x_1, x_2) \geq -0,1\|x_1\|\|x_2\| \quad \forall (x_1, x_2) \in N_{1x_0} \times N_{2x_0}$$

Agar $\eta^T = (1, 1)$ bo`lsa, u holda A matritsaning ko`rinishi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -0,1 \\ -0,1 & 2 \end{pmatrix}$$

kabi bo`lib, u musbat aniqlangan bo`ladi. G matritsa elementlari esa

$$g_{11} = -2, \quad g_{22} = -3,59, \quad g_{12} = 0,214$$

ko`rinishida bo`ladi. G matritsaning bundek elementlaridan quyidagiga ega bo`lamiz.

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0,214 \\ 0,214 & -3,59 \end{pmatrix}$$

G matritsa manfiy aniqlanganligidan sistemaning xq0 muvozanat xolati asimptotik turg'un bo'ladi.

Misol 1.10. Quyidagi yirik masshtabli sistemani qaraymiz

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1x + A_2y + A_3z \\ \frac{dy}{dt} &= B_1x + B_2y + B_3z \\ \frac{dz}{dt} &= C_1x + C_2y + C_3z \end{aligned}$$

bu yerda

$x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$, $z \in R^{n_3}$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$, $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ – o'zgarmas matritsalar. Bu sistemaga mos erkin qism sistemalar quyidagicha bo'ladi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1x \\ \frac{dy}{dt} &= B_2y \\ \frac{dz}{dt} &= C_3z \end{aligned}$$

Elementlari quyidagi ko'rinishda bo'lgan

$$U(z, y, z) = [v_{ij}(\cdot)], \quad i, j = 1, 2, 3$$

matritsa funksiyani tuzamiz

$$\begin{aligned} v_{11}(x) &= x^T P_{11}x, \quad v_{22}(x) = y^T P_{22}y, \quad v_{33}(x) = z^T P_{33}z, \quad v_{12}(x, y) = v_{21}(x, y) = x^T P_{12}y, \\ v_{13}(x, z) &= v_{31}(x, z) = x^T P_{13}z, \quad v_{23}(y, z) = v_{32}(y, z) = y^T P_{23}z \end{aligned} \quad (*)$$

bu yerda P_{ii} , $i = 1, 2, 3$ – musbat aniqlangan simmetrik matritsa,

P_{12} , P_{13} , P_{23} – o'zgarmas matritsalar.

(*) funksiyalar uchun quyidagilar o'rinli bo'ladi.

$$\begin{aligned}
v_{11}(x) &\geq \lambda_m(P_{11})\|x\|^2, \quad \forall x \in N_{x0}, \quad N_{x0} = \{x \in N_x, x \neq 0\}, \\
v_{22}(y) &\geq \lambda_m(P_{22})\|y\|^2, \quad \forall y \in N_{y0}, \quad N_{y0} = \{y \in N_y, y \neq 0\}, \\
v_{33}(z) &\geq \lambda_m(P_{33})\|z\|^2, \quad \forall z \in N_{z0}, \quad N_{z0} = \{z \in N_z, z \neq 0\}, \\
v_{12}(x, y) &\geq -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{12}P_{12}^T)\|x\|\|y\|, \quad \forall (x, y) \in N_{x0} \times N_{y0}, \\
v_{13}(x, z) &\geq -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{13}P_{13}^T)\|x\|\|z\|, \quad \forall (x, z) \in N_{x0} \times N_{z0}, \\
v_{23}(y, z) &\geq -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{23}P_{23}^T)\|y\|\|z\|, \quad \forall (y, z) \in N_{y0} \times N_{z0},
\end{aligned}$$

bu yerda $\lambda_m(P_{ii}) - P_{ii}$ matritsaning minimal xos qiymati, $i=1,2,3$.

$\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{12}P_{12}^T), \lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{13}P_{13}^T), \lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{23}P_{23}^T) - P_{12}, P_{13}, P_{23}$ matritsalarining normalari. $U(x, y, z)$ matritsa funksiya va $\eta \in R^3, \eta_i > 0, i=1,2,3$ o'zgarmas vektordan foydalanib quyidagi skalyar funksiyani tuzamiz.

$$V(x, y, z) = \eta^T U(x, y, z) \eta$$

Bu skalyar funksiya uchun quyidagi baholash o'rinli bo'ladi.

$$V(x, y, z) \geq u^T H^T P H u$$

bu yerda $u^T = (\|x\|, \|y\|, \|z\|)$, $H^T = H = \text{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

$$P = \begin{bmatrix} \lambda_m(P_{11}) & -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{12}P_{12}^T) & -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{13}P_{13}^T) \\ -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{12}P_{12}^T) & \lambda_m(P_{22}) & -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{23}P_{23}^T) \\ -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{13}P_{13}^T) & -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(P_{23}P_{23}^T) & \lambda_m(P_{33}) \end{bmatrix}$$

Endi berilgan sistema yordamida (*) funksiyalardan olingan xosilalarni baholab chiqamiz:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{11} &= \dot{x}^T P_{11} x + x^T P_{11} \dot{x} = (A_1 x + A_2 y + A_3 z)^T P_{11} x + x^T P_{11} (A_1 x + A_2 y + A_3 z) = x^T P_{11} A_1^T P_{11} x + \\
&+ y^T A_2^T P_{11} x + z^T A_3^T P_{11} x + x^T P_{11} A_1 x + x^T P_{11} A_2 y + x^T P_{11} A_3 z = x^T (P_{11} A_1 + A_1^T P_{11}) x + 2x^T P_{11} A_2 y + \\
&+ 2x^T P_{11} A_3 z \leq \lambda_m(P_{11} A_1 + A_1^T P_{11})\|x\|^2 + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{11} A_2 (P_{11} A_2)^T \|x\|\|y\| + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{11} A_3 (P_{11} A_3)^T \|x\|\|z\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{22} &= \dot{y}^T P_{22} y + y^T P_{22} \dot{y} = (B_1 x + B_2 y + B_3 z)^T P_{22} y + y^T P_{22} (B_1 x + B_2 y + B_3 z) = B_1^T x^T P_{22} y + \\
&+ B_2^T y^T P_{22} y + B_3^T z^T P_{22} y + y^T P_{22} B_1 x + y^T P_{22} B_2 y + y^T P_{22} B_3 z = y^T (P_{22} B_1 + B_1^T P_{22}) y + \\
&+ 2x^T P_{22} B_1 y + 2z^T P_{22} B_3 y \leq \lambda_m (P_{22} B_1 + B_1^T P_{22}) \|y\|^2 + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{22} B_1 (P_{22} B_1)^T) \|x\| \|y\| + \\
&+ 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{22} B_3 (P_{22} B_3)^T) \|z\| \|y\| \\
\dot{v}_{33} &= \dot{z}^T P_{33} z + z^T P_{33} \dot{z} = (C_1 x + C_2 y + C_3 z)^T P_{33} z + z^T P_{33} (C_1 x + C_2 y + C_3 z) = C_1^T x^T P_{33} + \\
&+ C_2^T y^T P_{33} z + C_3^T z^T P_{33} z + z^T P_{33} C_1 x + z^T P_{33} C_2 y + z^T P_{33} C_3 z = z^T (C_3^T P_{33} + C_3 P_{33}) z + \\
&+ 2x^T C_1 P_{33} z + 2z^T C_2 P_{33} y \leq \lambda_m (C_3^T P_{33} + C_3 P_{33}) \|z\|^2 + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{33} C_1 (P_{33} C_1)^T) \|x\| \|z\| + \\
&+ 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{33} C_2 (P_{33} C_2)^T) \|y\| \|z\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{v}_{12} &= \dot{x}^T P_{12} y + x^T P_{12} \dot{y} = (A_1 x + A_2 y + A_3 z)^T P_{12} y + x^T P_{12} (B_1 x + B_2 y + B_3 z) = x^T A_1^T P_{12} y + \\
&+ y^T A_2^T P_{12} y + z^T A_3^T P_{12} y + x^T P_{12} B_1 x + x^T P_{12} B_2 y + x^T P_{12} B_3 z = x^T \frac{1}{2} (P_{12} B_1 + (P_{12} B_1)^T) x + \\
&+ y^T \frac{1}{2} (A_2^T P_{12} + (A_2^T P_{12})^T) y + x^T (A_1^T P_{12} + P_{12} B_2) y + y^T P_{12}^T A_3 z + x^T P_{12} B_3 z = \\
&\frac{1}{2} x^T (P_{12} B_1 + B_1^T P_{12}^T) x + \frac{1}{2} y^T (A_2^T P_{12} + P_{12}^T A_2) y + x^T (A_1^T P_{12} + P_{12} B_2) y + y^T P_{12}^T A_3 z + x^T P_{12} B_3 z \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \lambda_m (P_{12} B_1 + B_1^T P_{12}^T) \|x\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_m (A_2^T P_{12} + P_{12}^T A_2) \|y\|^2 + \lambda_M^{\frac{1}{2}} ((A_1^T P_{12} + P_{12} B_2)(A_1^T P_{12} + P_{12} B_2)^T) \|x\| \|y\| + \\
&+ \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{12}^T A_3 (P_{12}^T A_3)^T) \|y\| \|z\| + \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{12} B_3 (P_{12} B_3)^T) \|x\| \|z\| \\
\dot{v}_{13} &= \dot{x}^T P_{13} z + x^T P_{13} \dot{z} = (A_1 x + A_2 y + A_3 z)^T P_{13} z + x^T P_{13} (C_1 x + C_2 y + C_3 z) = x^T A_1^T P_{13} z + \\
&+ y^T A_2^T P_{13} z + z^T A_3^T P_{13} z + x^T P_{13} C_1 x + x^T P_{13} C_2 y + x^T P_{13} C_3 z = \frac{1}{2} x^T (P_{13} C_1 + (P_{13} C_1)^T) x + \\
&+ \frac{1}{2} z^T (A_2^T P_{13} + (A_2^T P_{13})^T) z + x^T (A_2^T P_{13} + P_{13} C_3) z + y^T A_2^T P_{13} z + x^T P_{13} C_2 y = \frac{1}{2} x^T (P_{13} C_1 + P_{13}^T C_1^T) x + \\
&+ \frac{1}{2} z^T (A_2^T P_{13} + A_2 P_{13}^T) z + x^T (A_2^T P_{13} + P_{13} C_3) z + y^T A_2^T P_{13} z + x^T P_{13} C_2 y \leq \lambda_m (P_{13} C_1 + P_{13}^T C_1^T) \|x\|^2 + \\
&+ \lambda_m (A_2^T P_{13} + A_2 P_{13}^T) \|z\|^2 + \lambda_M^{\frac{1}{2}} ((A_2^T P_{13} + P_{13} C_3)(A_2^T P_{13} + P_{13} C_3)^T) \|x\| \|z\| + \lambda_M^{\frac{1}{2}} (A_2^T P_{13} (A_2^T P_{13})^T) \|y\| \|z\| + \\
&+ \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{13} C_2 (P_{13} C_2)^T) \|x\| \|y\| \\
\dot{v}_{23} &= \dot{y}^T P_{23} z + y^T P_{23} \dot{z} = (B_1 x + B_2 y + B_3 z)^T P_{23} z + y^T P_{23} (C_1 x + C_2 y + C_3 z) = B_1^T x^T P_{23} z + \\
&+ B_2^T y^T P_{23} z + B_3^T z^T P_{23} z + y^T P_{23} C_1 x + y^T P_{23} C_2 y + y^T P_{23} C_3 z = y^T (B_2 P_{23} + P_{23} C_3) z + \\
&+ x^T B_1^T P_{23} z + z^T B_3^T P_{23} z + y^T P_{23} C_1 x + y^T P_{23} C_2 y \leq \lambda_m P_{23} B_3^T \|z\|^2 + \lambda_m P_{23} C_2 \|y\|^2 + \\
&+ \lambda_M^{\frac{1}{2}} (B_2 P_{23} + P_{23} C_3) \|y\| \|z\| + \lambda_M^{\frac{1}{2}} B_1^T P_{23} \|x\| \|z\| + \lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{23} C_1 \|x\| \|y\|
\end{aligned}$$

Bu baholashlardan foydalanib

$$\dot{V}(x, y, z) = \eta^T \dot{U}(x, y, z) \eta$$

xosilani yuqoridan baholaymiz

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2 & \dot{\eta}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_{11} & \dot{v}_{12} & \dot{v}_{13} \\ \dot{v}_{21} & \dot{v}_{22} & \dot{v}_{23} \\ \dot{v}_{31} & \dot{v}_{32} & \dot{v}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \eta_1 \dot{v}_{11} + \eta_2 \dot{v}_{21} + \eta_3 \dot{v}_{31} & \eta_1 \dot{v}_{12} + \eta_2 \dot{v}_{22} + \eta_3 \dot{v}_{32} & \eta_1 \dot{v}_{13} + \eta_2 \dot{v}_{23} + \eta_3 \dot{v}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \\
&= \eta_1^2 \dot{v}_{11} + \eta_1 \eta_2 \dot{v}_{21} + \eta_1 \eta_3 \dot{v}_{31} + \eta_1 \eta_2 \dot{v}_{12} + \eta_2^2 \dot{v}_{22} + \eta_2 \eta_3 \dot{v}_{32} + \eta_1 \eta_3 \dot{v}_{13} + \eta_2 \eta_3 \dot{v}_{23} + \eta_3^2 \dot{v}_{33} = \\
&= \eta_1^2 \dot{v}_{11} + \eta_2^2 \dot{v}_{22} + \eta_3^2 \dot{v}_{33} + \eta_1 \eta_2 \dot{v}_{12} + \eta_1 \eta_3 \dot{v}_{13} + \eta_2 \eta_3 \dot{v}_{23} = \eta_1^2 (x^T (P_{11} A_1 + A_1^T P_{11}) x + 2x^T P_{11} A_2 y + \\
&+ 2x^T P_{11} A_3 z) + \eta_2^2 (y^T (P_{22} B_1 + B_1^T P_{22}) y + 2x^T P_{22} B_1 y + 2z^T P_{22} B_3 y) + \eta_3^2 (z^T (C_3^T P_{33} + C_3 P_{33}) z + \\
&+ 2x^T C_1 P_{33} z + 2z^T C_2 P_{33} y) + \eta_1 \eta_2 (\frac{1}{2} x^T (P_{12} B_1 + B_1^T P_{12}^T) x + \frac{1}{2} y^T (A_2^T P_{12} + P_{12}^T A_2) y + \\
&x^T (A_1^T P_{12} + P_{12} B_2) y + y^T P_{12}^T A_3 z + x^T P_{12} B_3 z) + \eta_1 \eta_3 (\frac{1}{2} x^T (P_{13} C_1 + P_{13}^T C_1^T) x + \\
&+ \frac{1}{2} z^T (A_2^T P_{13} + A_2 P_{13}^T) z + x^T (A_2^T P_{13} + P_{13} C_3) z + y^T A_2^T P_{13} z + x^T P_{13} C_2 y) + \eta_2 \eta_3 (y^T (B_2 P_{23} + P_{23} C_3) z + \\
&+ x^T B_1^T P_{23} z + z^T B_3^T P_{23} z + y^T P_{23} C_1 x + y^T P_{23} C_2 y) \leq \\
&\leq \eta_1^2 (\lambda_m (P_{11} A_1 + A_1^T P_{11}) \|x\|^2 + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{11} A_2 (P_{11} A_2)^T \|x\| \|y\| + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{11} A_3 (P_{11} A_3)^T \|x\| \|z\|) + \\
&\eta_2^2 (\lambda_m (P_{22} B_1 + B_1^T P_{22}) \|y\|^2 + \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{22} B_1 (P_{22} B_1)^T) \|x\| \|y\| + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{22} B_3 (P_{22} B_3)^T) \|z\| \|y\|) + \\
&\eta_3^2 (\lambda_m (C_3^T P_{33} + C_3 P_{33}) \|z\|^2 + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{33} C_1 (P_{33} C_1)^T) \|x\| \|z\| + 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{33} C_3 (P_{33} C_3)^T) \|y\| \|z\|) + \\
&+ \eta_1 \eta_2 (\frac{1}{2} \lambda_m (P_{12} B_1 + B_1^T P_{12}^T) \|x\|^2 + \frac{1}{2} \lambda_m (A_2^T P_{12} + P_{12}^T A_2) \|y\|^2 + \lambda_M^{\frac{1}{2}} ((A_1^T P_{12} + P_{12} B_2) (A_1^T P_{12} + P_{12} B_2)^T) \|x\| \|y\| + \\
&\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{12}^T A_3 (P_{12}^T A_3)^T) \|y\| \|z\| + \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{12} B_3 (P_{12} B_3)^T) \|x\| \|z\|) + \eta_1 \eta_3 (\lambda_m (P_{13} C_1 + P_{13}^T C_1^T) \|x\|^2 + \\
&+ \lambda_m (A_2^T P_{13} + A_2 P_{13}^T) \|z\|^2 + \lambda_M^{\frac{1}{2}} ((A_2^T P_{13} + P_{13} C_3) (A_2^T P_{13} + P_{13} C_3)^T) \|x\| \|z\| + \lambda_M^{\frac{1}{2}} (A_2^T P_{13} (A_2^T P_{13})^T) \|y\| \|z\| + \\
&+ \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{13} C_2 (P_{13} C_2)^T) \|x\| \|y\|) + \eta_2 \eta_3 (\lambda_m P_{23} B_3^T \|z\|^2 + \lambda_m P_{23} C_2 \|y\|^2 + \lambda_M^{\frac{1}{2}} (B_2 P_{23} + P_{23} C_3) \|y\| \|z\| + \\
&\lambda_M^{\frac{1}{2}} B_1^T P_{23} \|x\| \|z\| + \lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{23} C_1 \|x\| \|y\|) = \\
&= (\eta_1^2 (\lambda_m (P_{11} A_1 + A_1^T P_{11}) + \eta_1 \eta_2 (\frac{1}{2} \lambda_m (P_{12} B_1 + B_1^T P_{12}^T) + \eta_1 \eta_3 (\lambda_m (P_{13} C_1 + P_{13}^T C_1^T) \|x\|^2 + \\
&+ (\eta_2^2 \lambda_m (P_{22} B_1 + B_1^T P_{22}) + \eta_1 \eta_2 (\frac{1}{2} \lambda_m (A_2^T P_{12} + P_{12}^T A_2) + \lambda_m P_{23} C_2) \|y\|^2 + (\eta_3^2 \lambda_m (C_3^T P_{33} + C_3 P_{33}) + \\
&+ \lambda_m (A_2^T P_{13} + A_2 P_{13}^T) + \eta_2 \eta_3 \lambda_m P_{23} B_3^T) \|z\|^2 + (\eta_1^2 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{11} A_2 (P_{11} A_2)^T + \eta_2^2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{22} B_1 (P_{22} B_1)^T) + \\
&\eta_1 \eta_2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} ((A_1^T P_{12} + P_{12} B_2) (A_1^T P_{12} + P_{12} B_2)^T) + \eta_1 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{13} C_2 (P_{13} C_2)^T) + \eta_2 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{23} C_1) \|x\| \|y\| + \\
&+ (\eta_1^2 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{11} A_3 (P_{11} A_3)^T + \eta_3^2 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{33} C_1 (P_{33} C_1)^T) + \eta_1 \eta_2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{12} B_3 (P_{12} B_3)^T) + \\
&+ \eta_1 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} ((A_2^T P_{13} + P_{13} C_3) (A_2^T P_{13} + P_{13} C_3)^T) + \eta_2 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} B_1^T P_{23}) \|x\| \|z\| + (\eta_2^2 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{22} B_3 (P_{22} B_3)^T) \\
&+ \eta_3^2 2\lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{33} C_3 (P_{33} C_3)^T) + \eta_1 \eta_2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{12}^T A_3 (P_{12}^T A_3)^T) + \lambda_M^{\frac{1}{2}} A_2^T P_{13} (A_2^T P_{13})^T) + \eta_2 \eta_3 (\lambda_M^{\frac{1}{2}} (B_2 P_{23} + P_{23} C_3) \|y\| \|z\|
\end{aligned}$$

quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\begin{aligned}
\rho_{11} &= \eta_1^2 (\lambda_m (P_{11} A_1 + A_1^T P_{11})) + \eta_1 \eta_2 \left(\frac{1}{2} \lambda_m (P_{12} B_1 + B_1^T P_{12}^T) \right) + \eta_1 \eta_3 (\lambda_m (P_{13} C_1 + P_{13}^T C_1^T)) \\
\rho_{22} &= \eta_2^2 \lambda_m (P_{22} B_1 + B_1^T P_{22}) + \eta_1 \eta_2 \left(\frac{1}{2} \lambda_m (A_2^T P_{12} + P_{12}^T A_2) \right) + \lambda_m P_{23} C_2 \\
\rho_{33} &= \eta_3^2 \lambda_m (C_3^T P_{33} + C_3 P_{33}) + \lambda_m (A_2^T P_{13} + A_2 P_{13}^T) + \eta_2 \eta_3 \lambda_m P_{23} B_3^T \\
\rho_{12} &= \rho_{21} = \eta_1^2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{11} A_2 (P_{11} A_2)^T + \eta_2^2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{22} B_1 (P_{22} B_1)^T) + \\
&+ \frac{1}{2} \eta_1 \eta_2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} ((A_1^T P_{12} + P_{12} B_2)(A_1^T P_{12} + P_{12} B_2)^T) + \eta_1 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{13} C_2 (P_{13} C_2)^T) + \frac{1}{2} \eta_2 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{23} C_1 \\
\rho_{13} &= \rho_{31} = \eta_1^2 2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} P_{11} A_3 (P_{11} A_3)^T + \eta_3^2 2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{33} C_1 (P_{33} C_1)^T) + \eta_1 \eta_2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{12} B_3 (P_{12} B_3)^T) + \\
&+ \eta_1 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} ((A_2^T P_{13} + P_{13} C_3)(A_2^T P_{13} + P_{13} C_3)^T) + \eta_2 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} B_1^T P_{23} \\
\rho_{23} &= \rho_{32} = \eta_2^2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{22} B_3 (P_{22} B_3)^T) + \eta_3^2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{33} C_3 (P_{33} C_3)^T) + \frac{1}{2} \eta_1 \eta_2 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (P_{12}^T A_3 (P_{12}^T A_3)^T) + \\
&+ \frac{1}{2} \lambda_M^{\frac{1}{2}} A_2^T P_{13} (A_2^T P_{13})^T + \eta_2 \eta_3 \lambda_M^{\frac{1}{2}} (B_2 P_{23} + P_{23} C_3)
\end{aligned}$$

U holda xosila funksiya uchun quyidagi tengsizlik o`rinli bo`ladi

$$\dot{V} \leq \rho_{11} \|x\|^2 + \rho_{22} \|y\|^2 + \rho_{33} \|z\|^2 + \rho_{12} \|x\| \|y\| + \rho_{13} \|x\| \|z\| + \rho_{23} \|y\| \|z\|$$

Bu tengsizlikni quyidagicha yozishimiz mumkin

$$\dot{V} \leq u^T S u$$

bu yerda $S = [\rho_{ij}]$, $i, j=1, 2, 3$, $\rho_{ij} = \rho_{ji}$

S matritsa manfiy aniqlangan bo`lishi uchun

$$a) \rho_{11} < 0$$

$$b) \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{vmatrix} = \rho_{11} \rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0 \quad (**)$$

$$c) |S| = \rho_{11} \rho_{22} \rho_{33} + 2 \rho_{12} \rho_{23} \rho_{13} - \rho_{13}^2 \rho_{22} - \rho_{23}^2 \rho_{11} - \rho_{12}^2 \rho_{33} < 0$$

shartlarning bajarilishi yetarli. Bundan xulosa qilib shuni aytishimiz mumkinki, agar P matritsa musbat aniqlangan bo`lsa, (\*\*) shartlar bajarilganda S matritsa manfiy aniqlangan bo`lib, teorema 1.2 ning barcha shartlari bajariladi, ya'ni berilgan sistema muvozanat xolati asimptotik turg'un bo`ladi.

Misol 3.2. Quyidagi Lure sistemasini qaraylik

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + q_1 f_1(\sigma_1) = f_1^* \\ \frac{dy}{dt} &= A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + q_2 f_2(\sigma_2) = f_2^* \\ \frac{dz}{dt} &= A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + q_3 f_3(\sigma_3) = f_3^*\end{aligned}$$

bu yerda

$$\sigma_i = c_{i1}^T x + c_{i2}^T y + c_{i3}^T z, \quad \frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i} \in [0, k_i], \quad i = 1, 2, 3, \quad \sigma_i \in (-\infty, +\infty).$$

Faraz qilaylik, bu sistema uchun ham yuqorida qaralgan misoldagi kabi matritsa–funksiya tuzilgan bo`lib, u erdagi baholashlar o`rinli bo`lsin. Bu funksiyalardan berilgan sistema yordamida olingan to`la xosila quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$\dot{V}(x, y, z) \leq u^T S u$$

bu yerda $S = [s_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, σ_{ii} , $i = 1, 2, 3$ lar mos ravishda quyidagi matritsalarining maksimal xos qiymatlari.

$$\begin{aligned}& \eta_1^2 \{A_{11}^T P_{11} + P_{11} A_{11} + P_{11} (q_1 k_1^* c_{11}^T) + (q_1 k_1^* c_{11}^T)^T P_{11}\} + 2\eta_1 \eta_2 \{P_{12} A_{21} + P_{12} (q_2 k_2^* c_{21}^T)\} + 2\eta_1 \eta_3 \{P_{13} A_{31} + \\ & P_{13} (q_3 k_3^* c_{31}^T)\} \\ & \eta_2^2 \{A_{22}^T P_{22} + P_{22} A_{22} + P_{22} (q_2 k_2^* c_{22}^T) + (q_2 k_2^* c_{22}^T)^T P_{22}\} + 2\eta_1 \eta_2 \{A_{12}^T P_{12} + (q_1 k_1^* c_{12}^T)^T P_{12}\} + 2\eta_2 \eta_3 \{P_{23} A_{32} + \\ & P_{23} (q_3 k_3^* c_{32}^T)\} \\ & \eta_3^2 \{A_{33}^T P_{33} + P_{33} A_{33} + P_{33} (q_3 k_3^* c_{33}^T) + (q_3 k_3^* c_{33}^T)^T P_{33}\} + 2\eta_1 \eta_3 \{A_{13}^T P_{13} + (q_1 k_1^* c_{13}^T)^T P_{13}\} + 2\eta_2 \eta_3 \{A_{23}^T P_{23} + \\ & (q_2 k_2^* c_{23}^T)^T P_{23}\}\end{aligned}$$

, $\sigma_{ij}, i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ lar mos ravishda quyidagi matritsalarining normalari.

$$\begin{aligned}& \eta_1^2 \{P_{11} A_{12} + P_{11} (q_1 k_1^* c_{12}^T) + \eta_2^2 \{P_{22} A_{21} + P_{22} (q_2 k_2^* c_{21}^T)\} + \eta_1 \eta_2 \{A_{11}^T P_{12} + P_{12} A_{22} + (q_1 k_1^* c_{11}^T)^T P_{12} + \\ & P_{12} (q_2 k_2^* c_{22}^T)\} + \eta_1 \eta_3 \{P_{13} A_{32} + P_{13} (q_3 k_3^* c_{32}^T) + \eta_2 \eta_3 \{P_{23} A_{31} + P_{23} (q_3 k_3^* c_{31}^T)\} \\ & \eta_1^2 \{P_{11} A_{13} + P_{11} (q_1 k_1^* c_{13}^T)\} + \eta_3^2 \{P_{33} A_{31} + P_{33} (q_3 k_3^* c_{31}^T)\} + \eta_1 \eta_2 \{P_{12} A_{23} + P_{12} (q_2 k_2^* c_{23}^T)\} + \\ & + \eta_1 \eta_3 \{P_{13} A_{33} + A_{11}^T P_{13} + P_{13} (q_3 k_3^* c_{33}^T) + (q_1 k_1^* c_{11}^T)^T P_{13}\} + \eta_2 \eta_3 \{A_{21}^T P_{23} + (q_2 k_2^* c_{21}^T)^T P_{23}\} \\ & \eta_2^2 \{P_{22} A_{23} + P_{22} (q_2 k_2^* c_{23}^T)\} + \eta_3^2 \{P_{33} A_{32} + P_{33} (q_3 k_3^* c_{32}^T)\} + \eta_1 \eta_2 \{A_{13}^T P_{12} + (q_1 k_1^* c_{13}^T)^T P_{12}\} \\ & + \eta_1 \eta_3 \{A_{12}^T P_{13} + (q_1 k_1^* c_{12}^T)^T P_{13}\} + \eta_2 \eta_3 \{A_{22}^T P_{23} + P_{23} A_{22} + (q_2 k_2^* c_{22}^T)^T P_{23} + P_{23} (q_3 k_3^* c_{33}^T)\}\end{aligned}$$

bu yerda

$$k_i^* = \begin{cases} \sigma_i q_i^T P_{ij} x > 0, \text{ (yoki } \sigma_i q_i^T P_{ij} y > 0, \text{ yoki } \sigma_i q_i^T P_{ij} z > 0) & \text{da } k_i \\ \text{qolg an hollarda} & 0 \end{cases}$$

Bu baholashlar quyidagicha xulosa qilishimiz imkonini beradi: Agar P matritsa musbat aniqlangan bo`lib,  $S$  matritsa manfiy aniqlangan bo`lsa, u holda Lure tipidagi sistema muvozanat xolati asimptotik turg`un bo`ladi.

Misol 3.3. Misol 3.2 dagi matritsalarining ko`rinishi quyidagicha bo`lsin

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad A_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 2,3 & 0 \\ 0 & 2,3 \end{pmatrix}; \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad q_2 = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \end{pmatrix}; \quad U(x, y, z)$$

$$c_{11} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad c_{12} = \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad c_{13} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}; \quad c_{21} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad c_{22} = \begin{pmatrix} 0,01 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad c_{23} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix};$$

$$c_{31} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix}; \quad c_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,01 \end{pmatrix}; \quad c_{33} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,1 \end{pmatrix}. \quad k_i = 1; \quad i = 1, 2, 3.$$

matritsa – funksiyaning elementlarini

$$v_{11}(x) = x^T \text{diag}[1,1]x; \quad v_{22}(y) = y^T \text{diag}[1,1]y; \quad v_{33}(z) = z^T \text{diag}[1,1]z$$

$$v_{12}(x, y) = x^T \text{diag}[0,1;0,1]y; \quad v_{13}(x, z) = x^T \text{diag}[0,1;0,1]z; \quad v_{23}(y, z) = y^T \text{diag}[0,1;0,1]z.$$

ko`rinishda tanlasak, ular uchun

$$v_{11}(x) \geq \|x\|^2; \quad v_{22}(y) \geq \|y\|^2; \quad v_{33}(z) \geq \|z\|^2;$$

$$v_{12}(x, y) \geq -0,1\|x\|\|y\|; \quad v_{13}(x, z) \geq -0,1\|x\|\|z\|; \quad v_{23}(y, z) \geq -0,1\|y\|\|z\|.$$

baholar o`rinli bo`lib,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 1 & -0,1 \\ -0,1 & -0,1 & 1 \end{bmatrix}$$

matritsa musbat aniqlangan bo`ladi.

Agar $\eta = (1,1,1)$ bo`lsa u holda tanlab olingan  $v_{ij}(\cdot)$ ;  $i, j \in [1,3]$  elementlarga ko`ra S matritsa quyidagi qiymatlarni qabul qiladi

$$S = \begin{cases} k_i^* = 0 \quad \partial a & \begin{bmatrix} -5,2 & 0,16 & 0,2 \\ 0,16 & -0,34 & 0,15 \\ 0,2 & 0,16 & -0,2 \end{bmatrix} \\ k_i^* = k_i = 1 \quad \partial a & \begin{bmatrix} -5,202 & 0,18 & 0,03 \\ 0,18 & -0,3402 & 0,012 \\ 0,03 & 0,012 & -0,202 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ikkala holda ham S matritsa manfiy aniqlangan bo`ladi. Bundan esa teorema 1.2 ga asosan qaralayotgan sistemaning  $x=y=z=0$  muvozanat xolati asimptotik turg'un bo`ladi.

II–BOB

NEYRON TOR HAQIDA TUSHUNCHA

§ 2.1. Neyron torlar haqida tushuncha.

Markaziy nerv sistemasining funksiyasi hamma organ va toʻqimalardagi retseptorlar ta'sirlanganda paydo boʻlgan afferent (markazga intiluvchi) impulslarni qabul qilish, shu taassurotlarni analiz va sintez qilish, hamda periferik organlarga ta'sir etuvchi efferent (markazdan qochuvchi) impuls oqimlarini vujudga keltirishdan iborat.

Markaziy nerv sistemasi organizmni tashqi muxitga moslanishini, hamma organlarni faoliyatini boshqarishni va birlashtirilishini ta'minlaydi.

Nerv markazlari bilan organlar oʻrtasida ikki tomonlama aloqa borligi uchun, markaziy nerv sistemasi turli organlarni faoliyatini idora qiladi.

Markaziy nerv sistemasining tuzilishi va funksiyasi haqidagi hozirgi zamon tasavvurlarining asosini neyron nazariyasi tashkil etadi. Bu nazariyaning rivojlanishida ispan neyrogistologi R.Kaxal va ingliz fiziologi Ch.Sheringtonlar ishlarining ahamiyati katta.

Nerv sistemasi 2 xil xujayralar: nerv va glial xujayralardan tuzilgan. Glial xujayralar nerv xujayralariga nisbatan 8,9 barobar koʻp, lekin bu xujayralarda faqat neyronlar orqali informatsiyani oʻtkazish bilan bogʻliq boʻlgan hamma jarayonlar bajariladi.

Bundan kelib chiqadiki, nerv sistemasining asosiy strukturaviy elementi nerv xujayrasi yoki neyrondir.

Nerv xujayrasi ta'sirni qabul qilib, uni qayta ishlab navbatdagi xujayraga yoki organga beradi. Har bir neyronning somasi yoki tanasi bilan oʻsiklari bor. Akson-uzun oʻsik boʻlib, qoʻzgʻalishni nerv xujayrasining tanasidan boshqa xujayralarga yoki organlarga oʻtkazadi. Aksionning xususiyati shuki, xujayra tanasidan faqat bitta uzun oʻsik chiqadi. Nerv xujayrasining tanasidan aksion chiqqan joy akson tepachasi deyiladi. Nervning kalta oʻsiklari dentritlar

deyiladi. Ular boshqa neyronlardan kelgan impulslarni qabul qiladi va qo'zg'alishni nerv xujayrasining tanasiga o'tkazadi.

Markaziy nerv sistemasida neyronlarning tanalari bosh miya katta yarim sharlari po'stlog'ida, po'stloq ostidagi tuzilmalar, miya sopi, miyacha va orqa miyaning kulrang moddasida to'plangan. Neyronlarning melin bilan qoplangan o'siklari bosh miya bilan orqa miyaning turli bo'limlaridagi oq moddani xosil qiladi. Nerv xujayrasining tanasi va o'siklari membrana bilan qoplangan.

Retseptor neyronlari qo'zg'alishni qabul qilib periferik retseptorlardan markaziy nerv sistemasiga o'tkazadi. Bu neyronlar har xil sezgilarni xosil qiluvchi impulslarni etkazib bergani uchun ko'pincha sensor yoki sezuvchi neyronlar deyiladi.

Effektor neyronlar periferik organ va to'qimalarga impuls yuboradi. Bu neyronlarni motor yoki harakat neyronlari deyiladi.

Kontakt, orqali yoki kiritma neyronlar markaziy nerv sistemasida eng katta guruh bo'lib, retseptor va effektor xujayralarini bir biriga bog'laydi. Ular yuzaga chiqaradigan effektni xususiyatiga qarab qo'zg'atuvchi va tormozlovchi neyronlarga bo'linadi. Umuman olganda inson faoliyatining rivojlanishida neyron torlar katta ahamiyatga ega bo'lib, ularning dinamik xossalarini, jumladan turg'unligi masalasini o'rganish hozirgi zamonning aktual masalalaridan biridir.

§ 2.2. Neyron torlarning tuzilishi.

Biologik neyron. har xil turdagi nerv hujayralari umumiy atama - neyron ostida birlashadi. Neyron tirik organizmlardagi elektr faolikka ega bo'lgan hujayralarning alohida turi bo'lib, uning asosiy vazifasi organizmni operativ boshqarishga mo'ljallangandir. Neyron membrana qobig'iga olingan yadro va sitoplazmadan iborat bo'lgan hujayra tanasidan tashkil topgan. Neyron, shuningdek, kirishlar (dendridlar) va chiqishlar (akson va uning uchi) daraxtini o'z ichiga oladi. Aksonning uchlardagi tarmoqlanish boshqa hujayralarga

sinaptik aloqalar (sinaplar) orqali ulanadi. Aksondan yangi novdalar - kollaterlar chikadi, ular boshqa hujayralarga ulanib ketadi.

Dendrit daraxtining kiruvchi signallari (postinaptik potentsiallar) aksonning boshlang'ich segmentlari yo'lida o'lchanadi va yig'iladi, bu yerda chiquvchi impuls (yoki impuls) generatsiyalanadi. Uning jadalligi, natijada, kiruvchi signallarning o'lchangan yig'indisiga bog'liq bo'lgan funksiyadir. Chiquvchi signal aksonning shoxlaridan o'tib, akson bilan boshqa neyronlarning dendrit daraxtlarini birlashtiruvchi sinapslariga borib etadi. Sinapslar orqali signal qo'shni neyronlar uchun yangi kiruvchi signalga o'tadi. Bu kiruvchi signal sinapslarning turiga qarab, musbat va manfiy (qo'zg'atuvchi yoki tormozlovchi) bo'lishi mumkin. Sinaps tomonidan generatsiyalanuvchi kiruvchi signalning qiymati sinapsdan o'tuvchi signalning bir xil qiymatida ham har xil bo'lishi mumkin. Ulardagi bunday farq vazn orqali aniqlanuvchi sinapsning samaradorligi bilan bog'liqdir. oxirgisi, sinapsning harakati davomida o'zgarishi mumkin.

Neyronlarni uch guruhga ajratish mumkin: retseptorli, oraliq va effektorli. Retseptorli neyronlar miyaga sensorli axborotning kiritilishini ta'minlaydi. Ular sezgi organlariga kelib tushadigan signallarni (ko'z pardasidagi optik signallar, quloqning qabul qiluvchi qismidagi akustik signallar) o'z aksonlarining elektrik impulsatsiyasiga o'tkazadi. Effektorli neyronlar ularga kelib tushadigan signallarni ijro etuvchi organlarga uzatadi. Ularning aksonlaridagi uchlarda ijro etuvchi organli, masalan, neyronlarning qo'zg'alishi mushaklarning qisqarishiga o'tadigan mushakli maxsus sinaptik ulanishlar mavjud bo'ladi. Oraliq neyronlar retseptorlardan kelib tushadigan axborotni qayta ishlaydi va effektorlar uchun boshqaruv signallarini shakllantiradi. Ular markaziy nerv sistemasini tashkil qiladi.

Bitta neyronning sinapslari soni yuztadan mingtagacha bo'lgan oraliqda tebranadi. Neyronning membrana holati (uning elektr potentsiali) sinapslarga kelib tushadigan signallarning kattaligi va davomiyligiga bog'liqdir. Membrananing potentsiali ma'lum bir boshlang'ich qiymatga (taxminan 40 Mb)

erishsa, nerv impulsi - aksonning nerv tolalari bo'ylab tarqaluvchi faollashtirish to'liqini paydo bo'ladi. Tola bo'ylab uzatiluvchi qo'zg'alish elektrokimyoviy jarayondir; uning tarqalish tezligi tolaning diametriga bog'liq bo'ladi va 1 mG's dan 150 mG's gacha bo'lgan oraliqda yotadi. Impulsni o'tkazgandan so'ng, notekis tola noqo'zg'aluvchanlik holatida (refraktor davri) bo'ladi, ya'ni, qo'zg'alish kuchi qanchalik bo'lmasin, nerv signallarini o'tkazmaydi.

§ 2.3. Gibrid tarmoqlar

Sun'iy ong tizimlarining har bir turi o'zining o'qitish, umumlashtirish hamda xulosalarni ishlab chiqish imkoniyatlari bo'yicha xususiy xossalariga ega bo'lib, u ayrim ko'rinishdagi masalalar sinfini yechish imkoniyatini bersada, boshqalarni uning yordamida yechib bo'lmaydi.

Masalan neyron tarmoqlar timsollarni tanib olish masalalari uchun qulay bo'lsada, ular buni tanib olishni qanday qilib amalga oshirishi masalasini aniqlash uchun o'rinli emasdir. Ular avtomatik ravishda bilim olishi mumkin, lekin ularni o'qitish jarayoni anchagina sekin sodir bo'ladi, o'qitilgan tarmoqni tahlil qilish esa juda qiyindir (o'qitilgan tarmoq odatda foydalanuvchi uchun - qora qutidir). Bunda o'qitish jarayonini tezlashtirish uchun biror bir aprior axborotni (ekspertning bilimi) neyron tarmoqqa kiritib bo'lmaydi.

Noravshan mantiqli tizim ular yordamida xosil qiluvchi xulosalarni tushuntirish uchun qulay bo'lsada, ular xulosa mexanizimida qo'llaniladigan bilimlarni avtomatik ravishda egallay olmaydilar. Mukammal to'plamlarni alohida sohalarga bo'lish odatda bunday tizimlardagi kiruvchi o'zgaruvchilarning sonini chegaralaydi.

Umuman aytganda, nazariy jihatdan, noravshan mantiqli tizimlar hamda suniy neyron tarmoqlar bir-biriga ekvivalent bo'lsada, yuqorida bayon etilganlarga ko'ra, amaliyotda ularning shaxsiy afzalliklari hamda kamchiliklari bordir. Mazkur mulohazadan noravshan mantiq apparati asosida xulosa chiqarilib, mos tegishlilik funksiyalari xatolikning teskari tarqalishi algoritmi singari, neyron tarmoqlarni o'qitish algoritmlaridan foydalanilgan holda,

moslashtiriladigan gibril tarmoq apparatida foydalanish maqsadga muvofiq ekanligi ko'rsatildi. Bunday tizimlar nafaqat aprior axborotdan foydalanadi, balki yangi bilimlarni egallab, foydalanuvchi uchun mantiqiy jihatdan shaffof hisoblanadi.

Gibril tarmoqlarning asosiy tushunchalari va ta'riflari

Gibril tarmoqlarning mazmunini tushuntirish uchun ikkita kirish va faqat bitta chiqishga ega bo'lgan sodda neyron tarmoqni ko'rib chiqamiz.

Bu yerda kiruvchi x_i signallar w_i vaznlar bilan «o'zaro ta'sirlashib»,

$$p_i = x_i w_i, \quad i = 1, 2$$

ko'paytmani hosil qiladi.

Bunday xususiy axborot (ko'paytma) yig'ish amalidan foydalangan holda umumlashtirilib, natijada netneyronning kirishi hosil bo'ladi:

$$\text{net} = p_1 + p_2 = w_1 x_1 + w_2 x_2.$$

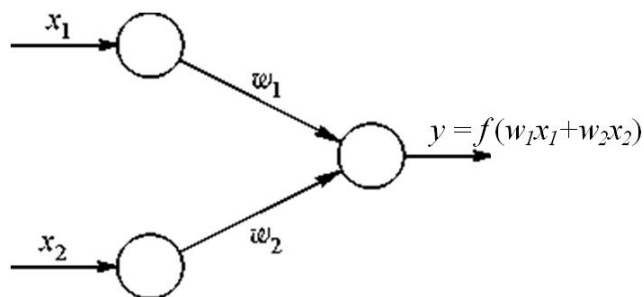
Neyronning chiqishi ma'lum bir faollashtiruvchi funksiya yordamida netkirishini almashtirish natijasida hosil bo'ladi:

$$y = f(\text{net}) = f(w_1 x_1 + w_2 x_2).$$

Masalan sigmoid turida:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Ko'paytirish, yig'ish amallari hamda sigmoidsimon faollashtirish funksiyasi qo'llanilgan bir neyronli tarmoqni standart neyron tarmoq deb ataymiz.



2 - rasm. Elementar neyron tarmoqlar

t-norma yoki t - konorma singari boshqa amallarni qo'llash natijasida gibril deb ataluvchi neyron tarmoqqa kelamiz.

Ta'rif. Gibril neyron tarmoq - bu ravshan signalli, vaznlar va faollashtiruvchi funksiyali, lekin t-norma, t-konormadan foydalangan holda x_i, w_i, p_1 va p_2 lar umumlashtirilgan neyron tarmoqdir.

Gibril neyron tarmoqning kirishlari, chiqishlari hamda vaznlar- $[0;1]$ kesmaga tegishli bo'lgan haqiqiy sonlardir.

Elementar gibril neyron tarmoqlarning quyidagi misollarini ko'rib chiqaylik.

«VA» noravshan neyron. Mazkur holatda x_i signallar ҳамда w_i vaznlar uchburchaksimon konorma yordamida umumlashtiriladi:

$$p_i = S(w_i, x_i), \quad i = 1, 2,$$

chiqish esa uchburchaksimon normani qo'llagan holda hosil bo'ladi:

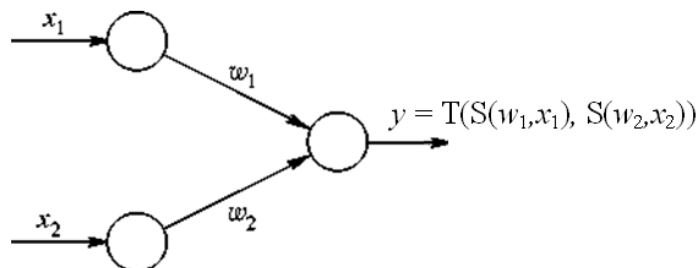
$$y = \text{AND}(p_1, p_2) = T(p_1, p_2) = T(S(w_1, x_1), S(w_2, x_2)).$$

Agar

$$T = \min, S = \max$$

deb olsak, u holda «VA» noravshanneyron min-max kompozitsiyasini amaliyotga tadbiq etadi:

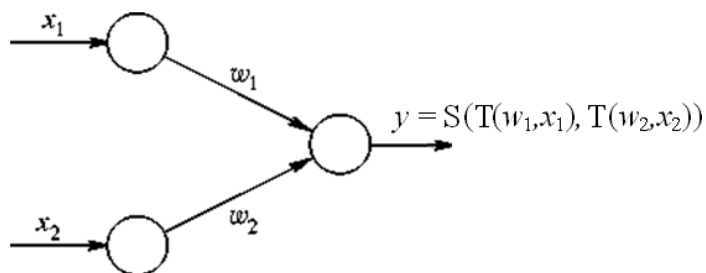
$$y = \min(w_1 \vee x_1, w_2 \vee x_2).$$



3 - rasm «VA» gibrid neyronning tuzilmasi

«YoKI» noravshan neyron. x_i signallar va w_i va z_n lar bu yerda uchburchaksimon norma yordamida umumlashtiriladi:

$$p_i = T(w_i x_i), \quad i = 1, 2.$$



4 - rasm. «YoKI» noravshanneyron

Chiqish esa uchburchaksimon normadan foydalangan holda hosil bo'ladi:

$$y = \text{OR}(p_1, p_2) = S(p_1, p_2) = S(T(w_1, x_1), T(w_2, x_2)).$$

Agar $T = \min$; $S = \max$ deb olsak, u holda «YoKI» noravshan neyron max-min kompozitsiyasini amaliyotga tadbiq etadi:

$$y = \max(w_1 \wedge x_1, w_2 \wedge x_2).$$

III - BOB

NEYRON TORLARNING TURG'UNLIGI

§ 3.1. Neyron torlar matematik modelining tahlili.

Quyidagi chiziqsiz, avtonom oddiy differensial tenglamani qaraymiz:

$$\dot{x} = -H(x)(-Tx + S(x) - I) \quad (3.1)$$

bu yerda

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in (-1, 1)^n, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

$H(x) - \forall x \in (-1, 1)^n$ da aniqlangan $n \times n$ tartibli matritsa funksiya,

$T = [\sigma_{ij}]$ $n \times n$ o'lchovli o'zgarmas matritsa

$$S(x) = (S_1(x_1), \dots, S_n(x_n))^T \quad \text{bu yerda} \quad S_i : (-1, 1) \rightarrow R, \quad i = \overline{1, n}$$

$I = (I_1, \dots, I_n)^T$ o'zgarmas xaqiqiy vektor.

(3.1) tenglama Hopfield modelining umumlashganidan tashkil topgan bo'lib, neyron torlarning matematik modeli sifatida qaraladi. Bu sistema uchun quyidagi masalalar tahlil qilinadi:

a) (3.1) sistema ixtiyoriy $t > 0$ uchun yagona yechimga ega.

b) (3.1) sistema uchun E energetik funksiyani

$$E(x) = -\frac{1}{2} x^T T x + \sum_{i=1}^n \int_0^x S_i(\rho) d\rho - x^T I \quad (3.2)$$

bu yerda

$$E(-1, 1)^n \rightarrow R, \quad DE : (-1, 1)^n \rightarrow L(R, R^n), \quad DE(x, y) = \nabla E(x)^T y$$

($\nabla E(x)$ E ning gradienti bo'lib,

$$\nabla E(x) = \left(\frac{\partial E(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial E(x)}{\partial x_n} \right)^T = -Tx + S(x) - I \quad \text{va} \quad E(x) \text{ dan (3.1) sistema}$$

yordamida olingan xosila

$$D_{(1)}E(x) = \nabla E(x)^T (-H(x)(-Tx + S(x) - I)) = -\nabla E(x)^T H(x) \nabla E(x) \text{ ga teng}$$

bo`ladi, ko`rinishida olinadi va t ortganda $E(x)$ funksiya monoton kamayadi.

c) (3.1) sistema uchun muvozanat nuqtalar chekli sonda bo`ladi.

d) Agar (3.1) sistema uchun $\tilde{x}$ muvozanat xolat turg`un bo`lsa, u holda u asimptotik turg`un bo`ladi.

e) $\tilde{x}$ turg`un (asimptotik) muvozanat xolat  $E(x)$  funksiyaning minimum nuqtasi bo`ladi.

f) n o`lchovli fazoda  $2^n$  ta sohalarning har birida (3.1) sistemaning asimptotik turg`un muvozanat nuqtalari mavjud.

Bu keltirilgan masalalarni qarab chiqish uchun quyidagi farazlarni kiritamiz:

Faraz (A): (3.1) sistema uchun quyidagilar bajarilsin:

a) Ixtiyoriy $x \in (-1,1)^n$ uchun $H(x)$ matritsa funksiya simmetrik va musbat aniqlangan.

b) T matritsa simmetrik.

c) Ixtiyoriy $i, 1 \leq i \leq n$ uchun $S_i(-1,1) \rightarrow R$ funksiya monoton o`svuchi bo`lib,

$$S_i(0) = 0, \quad -S_i(-x_i) \quad \text{va} \quad S_i^{-1} : R \rightarrow (-1,1), \quad S_i''(x_i) = \frac{d^2(S_i(x_i))}{dx_i^2}$$

funksiyalar mavjud.

Bu farazlardan quyidagilar kelib chiqadi:

1) $x \neq 0 \quad \partial a \quad x_i S_i(x_i) > 0$ bo`ladi.

2) $\lim_{\rho \rightarrow 1} S_i(\rho) = \infty, \quad \lim_{\rho \rightarrow -1} S_i(\rho) = -\infty$

3) $x_i \in (-1,1) \quad \text{yqyH} \quad S_i'(x_i) = \frac{dS_i(x_i)}{dx_i} > 0 \quad \text{va} \quad S_i'(x_i) = -S_i'(-x_i)$

bo`ladi.

Lemma 3.1. Agar (3.1) sistema (A) farazdagi shartlarni qanoatlantirsa va $E(x)$ energetik funksiya (3.2) ko'rinishida aniqlangan bo'lsa, u holda $\{x_m\} \subset (-1,1)^n$ uchun $m \rightarrow \infty$ da $x_m \rightarrow \partial(-1,1)^n$, $(\partial(-1,1)^n - (-1,1)^n)$ sohaning yopig'i va $m \rightarrow \infty$ da $E(x) \rightarrow \infty$ bo'ladi.

Isbot: $a = \sup \left\{ -x^T T x - x^T I : x \in (-1,1)^n \right\}$ bo'lsin. U holda $a \leq \|T\| + |I| < \infty$ ga ega bo'lamiz.

$f_i(\xi) = \int_0^\xi S_i(\rho) d\rho$, $\xi \in (-1,1)$, $i = \overline{1,n}$ bo'lsin. (A) farazdan foydalanib har bir i uchun $f_i(\xi) \geq 0$, $\lim_{\xi \rightarrow 1} f_i(\xi) = \infty$ ba $\lim_{\xi \rightarrow -1} f_i(\xi) = \infty$ ifodalarni xosil qilamiz. $f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \{f_i(x_i)\}$ bo'lsin va $E(x) \geq f(x) - a$ ekanligidan lemmani quyidagicha yozish mumkin $x_m \rightarrow \partial(-1,1)^n$ da $f(x_m) \rightarrow \infty$ bo'ladi. Lemma isbot bo'ldi.

Lemma 3.2. Agar sistema (A) farazlarni qanoatlan- tirs, u holda faqat va faqat $\nabla E(x) = 0$ bo'lgandagini $x \in (-1,1)^n$ nuqta (3.1) sistemaning muvozanat nuqtasi bo'ladi. $E(x)$ funksiyaning kritik nuqtalar to'plami (3.1) sistemaning muvozanat nuqtalari to'plami bilan ustma -ust tushadi.

Isbot: x nuqta E ning kiritik nuqtasi deyiladi agar va faqat agar $\nabla E(x) = -Tx + S(x) - I = 0$ bo'lsa. Bundan esa x nuqta (3.1) sistemaning muvozanat nuqtasi deyiladi agar va faqat agar $-H(x)(-Tx + S(x) - I) = 0$ bo'lsa. Bu teoremani isbotlaydi.

Faraz (B.1). (A) farazdagi shartlar bajarilsin.

a) Quyidagi shartlarni bir vaqtda qanoatlantiruvchi $x \in (-1,1)^n$ mavjud emas.

$$1) \quad \nabla E(x) = 0 \quad 2) \det(\mathfrak{I}_E(x)) = 0 \quad 3) \mathfrak{I}_E(x) \geq 0 \quad 4)$$

$$(S_1''(x_1), \dots, S_n''(x_n))^T \perp N$$

bu yerda

$$N = \{z = (y_1^3, \dots, y_n^3)^T \in R^n : \mathfrak{T}_E(x)(y_1, \dots, y_n)^T = 0\}$$

$$\mathfrak{T}_E(x) = \left[\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] = -T + \text{diag}(S_1''(x_1), \dots, S_n''(x_n))$$

$D^2 E(x, y, z) = y^T \mathfrak{T}_E(x) z$ bo'lib, $\mathfrak{T}_E(x)$ E funksiyaning yakobiyan matritsasi va

$$D^2 E : (-1, 1)^n \rightarrow L^2(R^n; R), \quad D^3 E(x, y, z, u) = \sum_{i=1}^n S_i''(x_i) y_i z_i u_i;$$

b) (3.1) sistemaning muvozanat nuqtalar to'plami diskret bo'ladi.

Faraz (B.2). (A) farazdagi shartlar bajarilsin. $\nabla E(x) = 0$ va $\det(\mathfrak{T}_E(x)) = 0$ tenglamalarni bir vaqtda qanoatlantiruvchi x mavjud emas.

(B.2) faraz (B.1) farazning birinchi qismiga mos kelib, undagi talablarni biroz yumshatadi, shuning uchun undan foydalanish qulayroq. (B.2) farazdan ko'rinadiki $\nabla E(x)$ funksiyaning har bir noli ajralganligi kelib chiqadi. Bundan Lemma 1.2 ga asosan (3.1) sistemaning muvozanat nuqtalarining ajralganligi kelib chiqadi. Umuman olganda (B.1) faraz (B.2) farazdan kelib chiqadi.

Lemma 3.3. Agar (A) farazdagi shartlar (3.1) sistema bilan T o'zgarmas matritsa uchun bajarilsa, u holda (B.2) faraz Lebeg o'lchovidagi $I \in R^n$ lar uchun o'rinli bo'ladi.

Isbot: T doimiy uchun $K \in C' \quad K : (-1, 1)^n \rightarrow R^n \quad K(x) = \nabla E(x) + I = -Tx + S(x)$ funksiyaning aniqlaymiz Sard ning teoremasiga ko'ra shunday $Q \in R^n$ mavjudki agar $K(x) \in R^n - Q$ bo'lsa $\det(DK(x)) \neq 0$ bo'ladi. Bundan $I \in R^n - Q$ da agar $\nabla E(x) = 0$ bo'lsa u holda $K(x) = 0 + I = I \in R^n - Q$ va $\det(J_E(x)) = \det(DK(x)) \neq 0$ bo'ladi.

Faraz (S). (A) farazdagi barcha shartlar bajarilib, ixtiyoriy i ($1 \leq i \leq n$) da $S_i(x) : (-1, 1) \rightarrow R$

funksiya uchun

$$S_i''(\rho) > 0, \rho \in (0,1)$$

bo'lsin.

Teorema 3.1 Agar (3.1) sistema (A) va (B.1) farazlardagi shartlarni qanoatlantirsa, u holda

1) ixtiyoriy $x \in (-1,1)$ uchun (3.1) sistemani $\varphi(\cdot, 0, x)$ yagona yechimi mavjud.

2) (3.1) sistemaning muvozanat xolatidan tashqari yechimlarida E energetik funksiya monoton kamayadi. Shuningdek, (3.1) sistemani o'zgaruvchi davrli bo'lmagan yechimlari mavjud.

3) $[0, \infty]$ da (3.1) sistemaning yechimi mavjud.

4) (3.1) sistemaning har bir muvozanat xolatiga mos kelmagan yechimlari $t \rightarrow \infty$ da yaqinlashadi.

5) (3.1) sistema uchun chekli limitga ega bo'lgan muvozanat nuqtalar mavjud.

Isbot: E ning ixtiyoriy $\varphi: [0, \tilde{t}) \rightarrow (-1,1)^n$ yechimidan t bo'yicha olingan xosilasi quyidagicha bo'lsin

$$D_{(L)}E(\varphi(t)) = -\nabla E(\varphi(t))^T H(\varphi(t)) \nabla E(\varphi(t)), \quad t \in [0, \tilde{t})$$

$t \in [0, \tilde{t})$ lar uchun quyidagilarga egamiz $H(\varphi(t)) \nabla E(\varphi(t)) \neq 0$ ba $\nabla E(\varphi(t)) \neq 0$

Bundan esa $H(\varphi(t))$ ni musbat aniqlanganlig ya'ni $\nabla E(\varphi(t))^T H(\varphi(t)) \nabla E(\varphi(t)) > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari $D_{(L)}E(\varphi(t)) < 0$ ekanligidan $0 \leq t_1 < t_2 < \tilde{t}$

da quyidagi munosabatga ega bo'lamiz $E(\varphi(t_2)) - E(\varphi(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} D_{(L)}E(\varphi(t)) dt < 0$. Faraz

qilaylik teoremaning 3-qismi noto'g'ri, ya'ni φ faqat $[0, \tilde{t})$, $\tilde{t} > 0$ da mavjud. U holda 3.1 lemmaga asosan shunday t , $0 < t < \tilde{t}$ topladiki $E(\varphi(0)) < E(\varphi(t))$ munosabat o'rinli bo'ladi. Teoremaning ikkinchi qismi va 3.1 lemmaga ko'ra

(3.1) sistemaning ixtiyoriy $\varphi(\cdot, \tilde{x}):[0,+\infty) \rightarrow (-1,1)^n$ yechimi uchun shunday $\sigma > 0$ topiladiki $\varphi([0,+\infty)) \subset C$ bo'ladi, bu yerda $C = (-1+\sigma, 1-\sigma)^n$.

$\Omega(\varphi) = \{x \in (-1,1)^n : \{t_m\} \subset [0,+\infty), t_m \rightarrow +\infty, x = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi(t_m)\}$ bo'lsin. $\Omega(\varphi)$ ni har bir elementi φ ning Ω -limit nuqtasi deyiladi. $\Omega(\varphi) \subset \varphi([0,+\infty)) \subset \bar{C} \subset (-1,1)^n$ ga egamiz, $\bar{C}$ kompakt. Oddiy differensial tenglama uchun invariantlik teoremasidan $\varphi(t)$ ni $\Omega(\varphi)$ ga yaqinlashishi kelib chiqadi va har bir $x \in \Omega(\varphi)$ uchun quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi $D_{(L)}E(x) = -\nabla E(x)^T H(x) \nabla E(x) = 0$. Bundan $H(x)$ ni musbat aniqlanganligi kelib chiqadi. Bundan tashqari φ ning Ω -limit nuqtasi (3.1) sistemaning muvozanat xolati bo'ladi. B.1 farazga asosan (3.1) ning muvozanat nuqtalar to'plami diskret, ya'ni $\Omega(\varphi)$. $\Omega(\varphi) \subset \bar{C}$ va $\bar{C}$ ning kompaktligidan $\Omega(\varphi)$ chegaralanganligi kelib chiqadi. $\Omega(\varphi)$ o'zida faqat bitta nuqtani saqlasin deb olaylik. Boshqacha qilib aytganda $x \in \Omega(\varphi)$ nuqtani olamiz va $\varepsilon > 0$ x dan $\Omega(\varphi) - \{x\}$ nuqtagacha bo'lgan eng qisqa masofa bo'lsin. U holda yuqoridagilarga asosan shunday $t > 0$ topiladiki $t > t$ lar uchun $x_t \in \Omega(\varphi)$ quyidagi munosabatni qanoatlantiradi. $|\varphi(t) - x_t| < \frac{\varepsilon}{3}$. $B_1 = (x, \frac{\varepsilon}{3})$, ba $B_2 = (x, \frac{\varepsilon}{3})$ bo'lsin, bu yerda $x \in \Omega(\varphi) - \{x\}$. B_1 va B_2 lar bir biriga bog'liq emas. Bundan biz quyidagi munosabatlarni xosil qilamiz $\varphi((t,+\infty)) \subset B_1 \cup B_2$ va $\Omega(\varphi)$ ni berilishidan $\varphi((t,+\infty)) \cap B_1 \neq \emptyset$ va $\varphi((t,+\infty)) \cap B_2 \neq \emptyset$. Ammo bu $\varphi((t,+\infty))$ ni bog'liqliligiga zid.

$b = \sup\{-Tx - I : x \in (-1,1)^n\}$ bo'lsin, u holda $b \leq \|T\| + |I| < +\infty$ munosabat o'rinli. A farazga ko'ra har bir i uchun $\rho \rightarrow \pm 1$ da $s_i(\rho) \rightarrow \pm\infty$ bo'ladi. Demak shunday δ , $0 < \delta < \frac{1}{2}$ topiladiki $C(-1+\delta, 1-\delta)^n$ dan tashqarida $\nabla E(x) \neq 0$ bo'ladi.

3.2 lemmaga ko'ra (3.1) sistemaning hamma muvozanat nuqtalari $\bar{C}$ kompakt to'plamda bo'ladi. $\bar{C}$ ning kompaktligidan va V.1 farazning b qismidan (3.1) sistemaning muvozanat nuqtalar to'plami chekli bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Teorema 3.2. (3.1) sistema uchun (A) va (B.1) farazlarning shartlari bajarilsin. Agar $\tilde{x}$ (3.1) sistemaning muvozanat xolatini ifodalovchi yechimi bo'lsa, u holda quyidagilar ekvivalent.

- a) $\tilde{x}$ yechim turg'un.
- b) $\tilde{x}$ - $E(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi.
- c) $\mathfrak{I}_E(x) > 0$ d) $\tilde{x}$ yechim asimptotik turg'un.

Isbot: a) ((1) $\Rightarrow$ (2)) Faraz qilamiz $\tilde{x}$ (3.1) sistemaning turg'un muvozanat xolati va E ni minimum nuqtasi bo'lmasin. U holda shunday $\{x_m\} \subset (-1,1)^n$ ketma-ketlik mavjudki $0 < |x_m - \tilde{x}| < \frac{1}{m}$ va $E(x_m) < E(\tilde{x})$ bo'ladi. B.1 farazga ko'ra shunday $\varepsilon > 0$ mavjudki $B(\tilde{x}, \varepsilon) - \{\tilde{x}\}$ da muvozanat nuqtalar mavjud bo'lmaydi. U holda ixtiyoriy $\delta, \varepsilon > \delta > 0$ uchun m ni shunday tanlash mumkinki $\frac{1}{m} < \delta$ bo'ladi. Bundan esa $x_m \in B(\tilde{x}, \delta) - \{\tilde{x}\} \subset B(\tilde{x}, \varepsilon) - \{\tilde{x}\}$ va x_m muvozanat nuqtasi bo'lmasligi kelib chiqadi. Teorema 3.1 ning 4-qismga ko'ra $\varphi(\cdot, x_m)$ yechim (3.1) sistemaning x muvozanat nuqtasiga intiladi. Teorema 3.1 ning 2-qismiga ko'ra esa $E(x) < E(x_m) < E(\tilde{x})$, $x \neq \tilde{x}$ bo'ladi. Demak $B(\tilde{x}, \varepsilon)$ o'zida x ni saqlamaydi va $\varphi(t, x_m)$ $t \rightarrow \infty$ da $B(\tilde{x}, \varepsilon)$ dan chiqib ketadi. Bundan tashqari $\tilde{x}$ turg'unmas bo'ladi. Biz qarama-qarshilikka keldik, demak $\tilde{x}$ E ning minimumi bo'lar ekan.

b) ((2) $\Rightarrow$ (3)) Faraz qilamiz $\tilde{x}$ E energetik funktsiyaning minimumi. Ikki xolni ko'rib chiqamiz 1) $J_E(\tilde{x})$ musbat aniqlanmagan ammo u yarim musbat aniqlangan. 2) $J_E(\tilde{x})$ yarim musbat aniqlanmagan.

Birinchi xol: biz $\nabla E(\tilde{x}) = 0$ va $\det(J_E(\tilde{x})) = 0$ munosabatlarga egamiz. B.1 farazning a) qismiga ko'ra shunday $y \in R^n$, $y \neq 0$ mavjudki $J_E(\tilde{x})y = 0$, $D^3 E(\tilde{x}, y, y, y) = (s_1''(\tilde{x}_1), \dots, s_n''(\tilde{x}_n))(y_1^3, \dots, y_n^3)^T \neq 0$ munosabat o'rinli bo'ladi. E ni $\tilde{x}$ nuqta atrofida teylor qatoriga yoyib quyidagini xosil qilamiz

$E(\tilde{x} + ty) = E(\tilde{x}) + t\nabla E(\tilde{x})y + (\frac{t^2}{2})y^T J_E(\tilde{x})y + (\frac{t^3}{6})D^3(\tilde{x}, y, y, y) + o(t^3)$. $t \in [-1, 1]$ bu yerda

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^3)}{t^3} = 0$ bo`ladi. $\nabla E(\tilde{x}) = 0$ va $J_E(\tilde{x})y = 0$ ekanligidan

$E(\tilde{x} + ty) - E(\tilde{x}) = (\frac{t^3}{6})D^3(\tilde{x}, y, y, y) + o(t^3) < 0$. $t \in [-1, 1]$ kelib chiqadi.

$D^3(\tilde{x}, y, y, y) \neq 0$ ekanligidan shunday $\delta > 0$ topiladiki agar $D^3(\tilde{x}, y, y, y) > 0$

bo`lsa u holda  $E(\tilde{x} + ty) - E(\tilde{x}) = (\frac{t^3}{6})D^3(\tilde{x}, y, y, y) + o(t^3) < 0$ .  $t \in [-\delta, 0]$  bo`ladi va

agar $D^3(\tilde{x}, y, y, y) < 0$ bo`lsa u holda

$E(\tilde{x} + ty) - E(\tilde{x}) = (\frac{t^3}{6})D^3(\tilde{x}, y, y, y) + o(t^3) < 0$. $t \in [0, \delta]$ bo`ladi. Bundan tashqari  $\tilde{x}$  E ning minimumi bo`lmaydi

Ikkinchi xol: $J_E(\tilde{x})$ yarim musbat aniqlanmagan. U holda shunday $y \in R^n$ mavjud bo`ladiki  $y \neq 0$ ,  $y^T J_E(\tilde{x})y < 0$  munosabat o`rinli bo`ladi. E ni $\tilde{x}$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyib quyidagini xosil qilamiz

$$E(\tilde{x} + ty) = E(\tilde{x}) + t\nabla E(\tilde{x})y + (\frac{t^2}{2})y^T J_E(\tilde{x})y + o(t^2). \quad t \in [0, 1]$$

bu yerda $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t^2)}{t^2} = 0$ bo`ladi. $\nabla E(\tilde{x}) = 0$ ekanligidan

$$E(\tilde{x} + ty) = E(\tilde{x}) + (\frac{t^2}{2})y^T J_E(\tilde{x})y + o(t^2). \quad t \in [0, 1]$$

kelib chiqadi.

$$y^T J_E(\tilde{x})y < 0$$

dan shunday $\delta > 0$ topiladiki

$$E(\tilde{x} + ty) - E(\tilde{x}) = (\frac{t^2}{2})y^T J_E(\tilde{x})y + o(t^2) < 0. \quad t \in [0, \delta]$$

bo`ladi. Yana bir bor $\tilde{x}$ E ning minimumi emasligi kelib chiqdi. 1 va 2 xollardagi ziddiyatlardan $J_E(\tilde{x}) > 0$ ekanligi kelib chiqadi.

c) ((3) $\Rightarrow$ (4)) Faraz qilamiz $J_E(\tilde{x})$ musbat aniqlangan. U holda $\tilde{x}$ ning shunday ochiq U atrofi topiladiki U atrofda funksiya quyidagi $v(x) = E(x) - E(\tilde{x})$ ko'rinishda musbat aniqlangan bo'ladi va $x \neq \tilde{x}$ lar uchun $D_{(1)}v(x) = -\nabla v(x)^T H(x) \nabla v(x) < 0$ bo'ladi. Bundan Lyapunovning turg'unlik nazariyasiga ko'ra $\tilde{x}$ asimptotik turg'un bo'ladi.

d) ((4) $\Rightarrow$ (1)) Faraz qilaylik $\tilde{x}$ asimptotik turg'un. U holda ta'rifga ko'ra $\tilde{x}$ turg'un bo'ladi. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

Endi $(-1,1)^n$ ni 2^n ta sohalarini

$$\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_n) = \{x \in (-1,1)^n : \xi_i x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$$

bu yerda $\xi_i = 1$ *ëku* $\xi_i = -1$, $1 \leq i \leq n$ ko'rinishida aniqlaymiz. Masalan, agar $n=2$ bo'lsa $2^2 = 4$ ta sohani qaraymiz, ular $\Lambda(1,1)$, $\Lambda(1,-1)$, $\Lambda(-1,1)$ va $\Lambda(-1,-1)$ ko'rinishda bo'ladi.

Teorema 3.3 Agar (3.1) sistema uchun (A), (B.1) va (S) farazlardagi shartlar bajarilsa, u holda

$$\Lambda(\xi_1, \dots, \xi_n) = \{x \in (-1,1)^n : \xi_i x_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$$

bu yerda $\xi_i = 1$ *ëku* $\xi_i = -1$, $1 \leq i \leq n$ ko'rinishdagi 2^n ta sohalarining har birida (3.1) sistemaning turg'un (asimptotik) muvozanat xolatga mos keluvchi yechimlari mavjud.

Isbot: $F : (-1,1)^n \rightarrow R^n$ funksiyaning $F(x) = \nabla E(x) = -Tx + S(x) - I$ ko'rinishida olamiz. Uning xosilasi $DF : (-1,1)^n \rightarrow L(R^n, R^n)$ quyidagicha bo'ladi

$DF(x) = J_E(x) = -T + \text{diag}(s'_1(x_1), \dots, s'_n(x_n))$. Avval $\Lambda = \Lambda(1, \dots, 1) = (0,1)^n$ sohada tekshiramiz. S farazga ko'ra har bir i uchun $s'_{i+} = s'_i : (0,1) \rightarrow (\sigma_i, +\infty)$ bu yerda $\sigma_i = s'_i(0)$ ko'rinishida aniqlangan funksiya teskarilanuvchi bo'ladi. s'_i ning teskarisini $p_i = (s'_i)^{-1} : (\sigma_i, +\infty) \rightarrow (0,1)$ ko'rinishida aniqlaymiz. U holda s'_i va p_i

larning ikkisi ham C^1 -funksiyalar. $P: \prod_{i=1}^n (\sigma_i, +\infty) \rightarrow \Lambda$ funksiyani

$P(u) = (p_1(u_1), \dots, p_n(u_n))^T$ ko`rinishida aniqlaymiz. Biz bilamizki P teskarilanuvchi

bo`lib  $P$  va  $P^{-1}$  ikkisi ham  $C^1$ -funksiyalar bo`ladi. $Q: \prod_{i=1}^n (\sigma_i, -\infty) \rightarrow R^n$

$Q(u) = F(P(u))$ ko`rinishida tanlaylik va

$D = \{x \in \Lambda : DF(x) > 0\}$ esa $C = P^{-1}(D)$ deb olamiz.

§3. 2. Neyron tor turg`unligini Lyapunov matritsa funksiyasi usuli yordamida tekshirish.

Yuqoridagi paragrafda ko`rilgan sistema turg`unligini tekshirishda $E(x)$ energetik funksiyadan foydalanish neyron to`r modeli turg`unligining yetarli shartlarini xosil qilmaydi. Endigi paragrafda yirik masshtabli neyron to`r modelining turg`unligini yetarli shartlarini xosil qilishda Lyapunovning matritsa-funksiyasi usulidan foydalanish mumkin ekanligini ko`rsatamiz. Buning uchun avval (3.1) sistemani  $S$  ta qism sistemalarga ajratamiz, ya'ni (3.1) sistema quyidagi ko`rinishda yoziladi.

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^S H_{ij}(x_j)(T_{ij}x_j - S_j(x_j) + I_j) = f_i(x) \quad (3.4)$$

bu yerda

$H(x) = (H_{ij}(x_j))_{i,j=1}^S$, $H_{ij}(x) - n_i \times n_j$ o`lchovli matritsa funksiya,

$T = (T_{ij})_{i,j=1}^S$, $T_{ij} - n_i \times n_j$ o`lchovli o`zgarmas matritsa,

$S(x) = (S_1^T(x_1), \dots, S_s^T(x_s))^T$, $S_i(x) - n_i$ o`lchovli vektor funksiya,

$I = (I_1^T, I_2^T, \dots, I_s^T)^T$, $I_i - n_i$ o`lchovli o`zgarmas vektor,

$x = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_s^T)^T$, $n_1 + n_2 + n_s = n$

(3.4) sistemadan erkin qism sistemalarni ajratib olish uchun

$$x^i = (0^T, 0^T, \dots, x_i^T, \dots, 0^T) \in (-1, 1)^n$$

belgilashni kiritamiz. U holda i chi erkin qism sistema quyidagi

$$\dot{x}_i = -H_{ii}(x^i)(-T_{ii}x_i + S_i(x^i) - I_i) = f_i(x^i) \quad (3.5)$$

(bu yerda $x_i \in (-1,1)^n$, $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$) ko`rinishda bo`lib,

$$f_i^*(x) = f_i(x) - f_i(x^i)$$

tenglik bilan aniqlangan $f_i^*(x)$ funksiya (3.4) sistemadagi erkin qism sistemalarni o`zaro aloqalarni ifodalaydi. Natijada (3.4) sistemani quyidagicha yozishimiz mumkin.

$$\dot{x} = f_i(x^i) + f_i^*(x), \quad i = \overline{1, S} \quad (3.6)$$

Agar $x = \hat{x}$ yechimning turg`unligini aniqlash kerak bo`lsa, (3.6) sistemada $x = x - \hat{x}$ almashtirish qilib, uni $x=0$ yechimga keltirish mumkin ekanligini xisobga olsak, (3.6) sistemaning $x=0$ yechimini turg`unlik shartlarini xosil qilishning umumiy nazariyasini quramiz. Buning uchun quyidagi farazlarni kiritamiz.

Faraz 1: (3.6) sistema uchun $U(x)$ matritsa -funksiya mavjud bo`lib, bu matritsa-funksiya va  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s)^T$  o`zgarmas vektor yordamida tuzilgan $V(x)$ skalyar funksiya uchun

$$V(x) \geq U^T H^T A H U$$

tengsizlik o`rinli bo`lsin.

Faraz 2: $U(x)$ matritsa-funksiya elementlaridan (3.5) va (3.6) sistemalar bo`yicha olingan xosilalar uchun quyidagi tengsizlik o`rinli bo`ladigan  $\rho_{ii}$ ,  $i = \overline{1, S}$  va  $\rho_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1, S}$ ,  $i < j$  o`zgarmaslar mavjud bo`lsin:

$$\sum_{i=1}^S \eta_i^2 \{D_t^+ v_{ii} + (D_{x_i}^+ v_{ii})^T f_i(x^i) + (D_{x_i}^+ v_{ii})^T f_i^*(x^i)\} + 2 \sum_{i=1}^{S-1} \sum_{j=2}^S \eta_i \eta_j \{D_t^+ v_{ij} + (D_{x_i}^+ v_{ij})^T f_i(x^i) + (D_{x_j}^+ v_{ij})^T f_j(x^j) + (D_{x_i}^+ v_{ij})^T f_j^*(x) + (D_{x_j}^+ v_{ij})^T f_j^*(x)\} \leq \sum_{i=1}^S \rho_{ii} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{i=1}^S \sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^S \rho_{ij} \|x_i\| \|x_j\|$$

Lemma 3.4: Agar faraz 2 dagi shartlar bajarilsa $V(x)$ skalyar funksiyadan (3.6) sistema yordamida olingan xosila uchun quyidagi tengsizlik o`rinli bo`ladi.

$$D^+ v(x, \eta) \leq U^T G U \quad (3.7)$$

bu yerda $U^T = (\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_S\|)$, $G = [\rho_{ij}]$, $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, $i, j = \overline{1, S}$.

Teorema 3.4: Agar (3.6) sistema uchun faraz 1 va faraz 2 dagi shartlar bajarilib, A matritsa musbat aniqlangan G matritsa manfiy aniqlangan bo`lsa, u holda bu sistemaning  $x=0$  yechimi asimptotik turg`un bo`ladi.

Isbot: $\eta^T = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_S)$ vektor yordamida $U(x)$ matritsa-funksiyadan faraz 1 dagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi $V(x)$ skalyar funksiyani tuzamiz. Bu skalyar funksiya xosilasi uchun faraz 2 dagi baholashni xosil qilamiz. faraz 1 dagi tengsizlikdan va A matritsaning musbat aniqlanganligidan $V(x)$ funksiyaning musbat aniqlanganligi xosil bo`ladi, faraz 2 dagi baholashdan va  $G$  matritsaning manfiy aniqlanganligidan esa  $V(x)$  skalyar funksiyadan (3.5) sistema yordamida olingan xosila manfiy aniqlangan bo`ladi. Bu shartlar esa sistema muvozanat xolatining asimptotik turg`un bo`lishi uchun yetarli.

X U L O S A

Hulosa qilib shuni aytish lozimki, markaziy nerv sistemasining funksiyasi hamma organ va to'qimalardagi retseptorlar ta'sirlanganda paydo bo'lgan afferent (markazga intiluvchi) impulslarni qabul qilish, shu taassurotlarni analiz va sintez qilish, hamda periferik organlarga ta'sir etuvchi efferent (markazdan qochuvchi) impuls oqimlarini vujudga keltirishdan iborat. Markaziy nerv sistemasi organizmni tashqi muxitga moslanishini, hamma organlarni faoliyatini boshqarishni va birlashtirilishini ta'minlaydi. Nerv markazlari bilan organlar o'rtasida ikki tomonlama aloqa borligi uchun, markaziy nerv sistemasi turli organlarni faoliyatini idora qiladi. Bu sistemaning turg'unligini o'rganish muhim ekanligi mavzuning naqadar dolzarb ekanligini anglatadi.

Ishda Hopfield tipidagi neyron torlar sistemasi turg'unligining umumiy masalasi Lyapunov matritsa funksiyasi usulini yordamida o'rganildi hamda harakat turg'unligining yetarli shartlarini hosil qilindi.

Neyron torlar turg'unlik masalasini hal qilishda sistemalarni dekompozitsiya qilish, Lyapunovning to'g'ri usuli va Lyapunovning matritsa funksiyasi usulidan foydalanildi.

Dissertatsiyada quyidagi natijalar olindi:

- 1) neyron torlar modeli tahlil qilindi;
- 2) neyron torlar sistemasi o'zaro muvozanatlashuvchi qism sistemalarga nisbatan dekompozitsiya qilindi;
- 3) neyron torlar turg'unligining yetarli shartlari xosil qilindi;

Ishda olingan nazariy natijalar yangi bo'lib, dissertatsiyadan ilmiy izlanishlar olib borishda, shu va shunga yaqinroq bo'lgan mavzular bo'yicha maxsus kurslar o'qishda foydalanish mumkin.

Magistrlik dissertatsiyasida Hopfield modeli o'rganiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati.

1. Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю. и др. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости.—М.: Наука, 1987.—312 стр.
2. Барбашин Е.А. Введения в теории устойчивости движения. М.: Наука, 1967.
3. Барбашин Е.А. Функция Ляпунова. М.Наука. 1970.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц: Пер. с англ.—М.: Наука, 1969.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.—3-е изд.—М.: Наука, 1967.
6. Грюич Л.Т., Мартинюк А.А., Риббенс—Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях.—Киев: Наук, думка, 1984.—307 стр.
7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.—М.: Наука, 1967.
8. Karimov I.A. Yuksak malakali mutaxassislar taraqqiyot omili—T.: O`zb.1995
10. Karimov I.A. Barkamol avlod orzusi, Sharq,T. 1999.
11. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.—М.: Физматгиз, 1959.
12. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М: Гост.дат.1950
13. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения..М.:Наука, 1966.
14. Мартинюк А.А., Миладжонов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема А. Электронное моделирование.—1992.
15. Мартинюк А.А., Миладжонов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема В. Электронное моделирование.—1992.

16. Мартинюк А.А., Миладжонов В.Г. К теории устойчивости орбитальной обсерватории при гироскопической стабилизации движения., Прикл. механика., 2000. Том 36, №5.

17. Mullajonov R.V., Abdugapparova Sh.N, G'oymatova D.G., Yirik masshtabli sistemalarning dekompozitsiyasi., Yosh matematiklarning yangi teoremlari – 2013 Respublika ilmiy amaliy anjuman materiallari., Namangan 2013 y.

18. Miladjonov V.G', G'oymatova D.G., Deformatsiyalanishi va bikirligi oshkor holda vaqtga bog'liq bo'lib, chiziqsiz bo'lgan sistema asimptotik turg'unligining yetarli shartlari., Andijon 2013 y.

19. Муллажонов Р.В. Динамик системалар турғунлигини Ляпунов матрица – функция усули ёрдамида текшириш // Аспирант, докторант ва тадқиқотчиларнинг республика илмий – амалий анжумани тезислари тўплами. – Тошкент, 2007. –С. 276 –277.

20. Муллажонов Р.В., Каримжонов А. Анализ устойчивости нестационарные линейных КМС. //Труды международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль Хорезми 2009». – Ташкент, 2009. –том №1. –С.251–255.

21. Муллажонов Р.В. Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем // Украинский журнал «Доп.НАН Украины». –Киев, 2009. - №11.С. 27 –35.

22. Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Проблема механики. – Ташкент, 2010. –№2.–С. 4– 7.

23. Миладжонов В.Г., Муллажонов В.Р. К теории устойчивости орбитальной обсерватории при гироскопической стабилизации. Анд.конф.2001.

24. Mullajonov V.R. Neyron setlar modeli., Tez. –And. 2003.

25. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.–М: Мир, 1980.

26. Saloxitdinov M.S., Nasritdinov G.N. Oddiy differensial tenglamalar. – T. O`qituvchi. 1982.

27. Mirzaaxmedova J.V., Ziyaitdinova M. Illustrative example two-input case to the neural networks. “XXI asr – intellektual avlod asri” ёш олимлар ва талалабаларнинг худудий илмий-амалий анжумани материаллари. Андижон. 2015 йил 27-28 май.

28. Ziyaitdinova M., Mirzaaxmedova J.V., Illustrative example two-input case to the neural networks. “XXI asr – intellektual avlod asri” ёш олимлар ва талалабаларнинг республика илмий-амалий анжумани материаллари. Тошкент. 2015 йил 19-20 ноябрь.

29. Mullajonov R.V., Mirzaaxmedova J.V., Ziyaitdinova M. Neyron torlar turg'unligini Lyapunov matritsa funksiyasi usuli yordamida tekshirish. “Ахборот коммуникация технологияларининг долзарб муаммолари” мавзусидаги республика илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. Андижон. 2015 й.

30. Муллажонов Р.В., Мирзаахмедова Ж., Насриддинов М., Зиёитдинова М. Динамик ва механик системалар турғунлигини ўрганишда ЭХМдан фойдаланиш. Илмий хабарнома. 2016/№2.

31. Насритдинов М., Мирзаахмедова Ж., Зиёитдинова М., Динамик кўпайиш моделини Maple дастурида аналитик ҳисоблаш. Инновация: фан, таълим технология. Илмий-услубий мақолалар тўплами. 2016/№1.

32. Mullajonov R.V., Mirzaahmedova J.V., Ziyaitdinova M.A. Lyapunov matrix – valued functions.. “XXI asr – intellektual avlod asri” ёш олимлар ва талалабаларнинг республика илмий-амалий анжумани материаллари. Андижон. 2016 йил 26-27 май.

33. www.sciencearea.com.ua.

34. www.stcu.kiev.ua.

35. www.attrasoft.com/abm/champ27_1.html.

36. www.emsl.pnl.gov:2080/proj/neuron/neural/what.html.

37. www.math.ucla.edu/nykamp/285j.1.02s/.