

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIYVA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

Matematika kafedrası

Qo'lyozma huquqida

Mahamadjonova Mahliyo Ravshanbek qizining

**Mavzu: Ikkinchi tartibli sirt tenglamalarini invariantlar yordamida
soddalashtirish**

5130100 – matematika yo'nalishi

bo'yicha bakalavr akademik darajasini olish uchun yozilgan

BITIRUV MALAKAVIY ISH

Ish raxbari:

fizika-matematika fanlari nomzodi,

Katta o'qituvchi Azimov R.K.

Andijon-2016 yil

MUNDARIJA

KIRISH	3
1-BOB. SIRT VA UNING BERILISH USULLARI	7
1.1. Sirt haqida tushuncha va uning berilish usullari	7
1.2. Ikkinchi tartibli sirtlarni ularning tenglamalari bo'yicha o'rganish ..	15
2-BOB. IKKINCHI TARTIBLI SIRT TENGLAMALARINI INVARIANTLAR YORDAMIDA SODDALASHTIRISH	21
2.1. Ikkinchi tartibli aylanma sirtlar	21
.	
2.2. Ikkinchi tartibli sirtlarni kanonik tenglamalari	40
2.3. Ikkinchi tartibli sirtlarning invariantlari	60
2.4. Ikkinchi tartibli sirt tenglamalarini invariantlar yordamida soddalashtirish	61
XULOSA	64
ADABIYOTLAR RO'YXATI	65

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi. O'z oldiga ilg'or va rivojlangan mamlakatlar qatoridan joy olishni maqsad qilgan mustaqil O'zbekistonimizda, barcha sohalarda keng qamrovli ishlar amalga oshirilmoqda, shu jumladan ta'lim sohasida ham.

Barkamol avlod yili " Davlat dasturi doirasida mamlakatda sog'lom, barkamol avlodni tarbiyalash uchun zarur imkoniyatlar va shart-sharoitlarni yaratish bo'yicha chora-tadbirlar ko'rib, ularni moliyalashtirishga barcha manbalar hisobidan 8,0 trillion so'm va 165 million AQSh dollaridan ortiq mablag' yo'naltirildi. Shu bilan birga, mamlakatni tubdan isloh qilish va modernizatsiyalash, uni rivojlangan demokratik, ravnaq topgan mamlakatlar qatoriga kirishini ta'minlash, jahon bozorlarida O'zbekistonning raqobatbardoshligini oshirish va o'rnini mustahkamlash, aholi daromadlari, turmush darajasi va sifatini izchil oshirish yo'lida maqsadli, qat'iyat bilan olg'a intilish zarurligiga e'tibor qaratildi.

Joriy yilning "Sog'lom ona va sog'lom bola" yili deb e'lon qilinishi munosabati bilan 2016 yilga belgilangan maqsadlarga erishish bo'yicha dasturiy chora-tadbirlarni amalga oshirish zarurligiga e'tibor qaratildi.

O'quv jarayoniga keng formatli kommunikatsiya tarmoqlari va internet texnologiyalarini joriy qilish maqsadida O'zbekiston aloqa va axborotlashtirish agentligiga Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi, Xalq ta'limi vazirligi bilan hamkorlikda "Elektron ta'lim" milliy tarmog'ini barpo etishni nihoyasiga yetkazish hamda 2016 yilda mamlakatimizning barcha oily o'quv yurtlarini, keyinchalik esa akademik litsey va kasb-hunar kollejlarini yagona kompyuter axborot tarmog'iga ulashni ta'minlash vazifasi yuklatildi. „Ta'lim to'g'risida“gi O'zbekiston Respublikasi qonuni hamda „ Kadrlar tayyorlash milliy dasturi " qabul qilinganidan so'ng mamlakatning ijtimoiy va iqtisodiy taraqqiyoti istiqbollari, jamiyat ehtiyojlari, fan, texnika va texnologiyaning zamonaviy yutuqlarini hisobga olgan holda milliy mafkura va milliy g'oyaga monand ta'lim tizimini isloh qilinib amaliyotiga joriy etila boshladi.

Mamlakatimizda ta'lim sohasidagi islohatlar kadrlar tayyorlash milliy dasturi talablariga monand amalga oshirilib u " har tomonlama kamol topgan, jamiyatda turmushga moslashgan, ta'lim va kasb-hunar dasturlarini ongli ravishda tanlashga keyinchalik puxta o'zlashtirish uchun ijtimoiy-siyosiy, huquqiy, psixologik-pedagogik va boshqa tarzdagi sharoitlarni yaratishni, jamiyat, davlat va oilaoldida o'z javobgarligini xis etadigan fuqorolarni tarbiyalashni nazarda tutadi". Natijada kadrlar tayyorlash milliy modeli asosida uzluksiz ta'lim tizimi yaratiladi va u quyidagi ta'lim turlarini o'zichiga oladi:

- Maktabgachata'lim;
- Umumta'lim;
- O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi;
- Oliy ta'lim;
- Oliy o'quv yurtidan keyingi ta'lim;
- Kadrlar malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash;
- Maktabdan tashqari ta'lim.

Uzluksiz ta'lim tizimining umumtalim va o'rta maxsus kasb-hunar ta'limi majburiy etib belgilanishi va bu ta'lim boshqichlarida o'rgatiladigan fanlarni Davlat ta'lim standartlarining yaratilishi, ularning mazmunini qayta taxlildan o'tkazib, yangi avlod o'quv adabiyotlari yaratiladi. Darsliklar va o'quv qo'llanmalarni yaratishda ularning ta'lim bosqichlari bo'yicha uzluksizligi va ta'lim mazmuni bo'yicha uzviyligini taminlashga katta e'tibor beriladi.

Uzluksiz ta'lim tizimining umumiy ta'lim maktablari uchun matematikadan bugungi kunda qo'llanilayotgan darslik va o'quv uslubiy qo'llanmalar o'quvchilarga chuqurnazariy bilimlar berish, vatanga sadoqat, yuksak axloq, ma'naviyat va ma'rifat, mehnatga vijdonan munosabatda bo'lish ruhida tarbiyalash, xozirgi zamon bozor iqtisodiyotini hisobga olgan holda har bir jamiyat a'zosining mehnat va kundalik hayoti uchun zarur bo'lgan matematik bilim, ko'nikma va malakani tarkib toptirish bilan bir qatorda davlat ta'lim standartlarida belgilab qo'yilgan

matematikani o'qitishdan ko'zda tutilgan quyidagi asosiy maqsadlarni o'z ichiga olgan.

O'quvchining hayotiy ta'savvurlari bilan amaliy faoliyatlarini umumlashtirib borib, matematik tushuncha va munosabatlarni ular tomonidan ongli o'zlashtirishda hamda hayotga tadbiq eta olishga intilishni;

O'quvchilarda izchil mantiqiy fikrlashni shakllantirib borish natijasida ularning aql-zakovati rivojiga, ta'biat va jamiyatdagi muammolarini hal etishning maqbul yo'llarini topa olishlariga ko'maklashishni;

Insoniyat kamoloti, hayotining rivoji, texnika va texnologiyaning takomillashib borishi asosida fanlarning o'qitishga bo'lgan talablarni hisobga olgan holda maktab matematika kurslarining zamonaviy rivoji bilan uyg'unlashtirishni;

Vatanparvarlik, milliy g'ururni tarkib topdirish, rivojlantirish, matematikarivojiga qomusiy olimlarimiz qo'shgan ulkan xissalardan o'quvchlarni xabardorqilish;

Jamiyat taraqqiyotida matematikaning ahamiyatini his qilgan holda umuminsoniy madaniyatning tarkibiy qismi sifatida matematika to'g'risidagi tasavvurlarni shakllantirishni;

Xisoblashning amaliy ko'nikmalari va xisoblash madaniyatini shakllantirishni;

Algebraik amallarni bajarish va ko'nikmalarni shakllantirish va ularning matematika va boshqa sohadagi masalalarni yechishda qo'llashni;

O'rganilayotgan tushuncha va uslublar hayotda va tabiatda ro'y berayotgan hodisalarni matematik modellashtirish vositasi ekanligi to'g'risidagi tasavvurlarni shakllantirishni amalga oshirishga hizmat qiladi. Akademik litsey va kasb-hunar kollejlari matematika o'qitishda ko'zda tutilgan asosiy maqsad quyidagidan iborat;

O'quvchilarni kundalik, hayotda, mehnat faoliyatida, shuningdek kelgusida bilim olishni davom ettirish uchun zarur bo'ladigan matematik bilim va malakalar sistemasini chuqur va ongli ravishda o'zlashtirishni ta'minlash; Akademik litsey va kasb -hunar kollejlari umumta'limning bevosita davomi

bo'lgani uchun ham bu yerda, matematika o'qitishda o'quvchilarning ilgari olgan bilimlarini chuqurlashtirish, amaliyotda tadbiq qilishda abstrakt va mantiqiy fikrlashni o'stirish;

O'quvchilarda izchil mantiqiy fikrlashni shakllantirib borish natijasida ularning aql-zakovati rivojiga, tabiat vajamiatdagi muammolarni hal etishning maqbul yo'llarini topa olishga ko'maklashishi;

O'quvchilarni vatanparvarlik, milliy g'ururni tarkib toptirishni rivojlantirish; O'quvchilarni qomusiy olimlarimizning matematika rivojiga qo'shgan ulkan hissalaridan xabardor qilish;

Jamiyat tarqqiyotida matematikaning ahamiyatini his qilgan holda umuminsoniy madaniyatning tarkibiy qismi sifatida matematika to'g'risidagi tasavvurlarni shakllantirish.

Oliy o'quv yurtlari geometriya kursida aylanma sirtlarni yechishda ketma-ket soddaroq bo'lgan misollardan boshlash kerak.

1-BOB. SIRT VA UNING BERILISH USULLARI

1.1. Sirt haqida tushunchava uning berilish usullari.

Bizga sirtning regulyar qismi berilgan bo'lsin.

$$z = f(x, y) \quad (1.1.1)$$

bu tenglamada x va y biror, (U) sohada erkli o'zgaruvchilar, z —shu sohada ularning uzliksiz bir qiymatli funksiyasidir. Modomiki, x va y o'zgaruvchining bir qiymatli uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalari deb hisoblashimiz mumkin;

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v)$$

Bu φ_1 va φ_2 ifodalarni (1.1.1) tenglamaga qo'ysak, z ham (farazga ko'ra) u va v ning bir qiymatli funksiyasi bo'ladi:

$$z = f[x(u, v), y(u, v)] = \varphi_3(u, v). \quad (1.1.2)$$

Shunday qilib, sirt ustidagi nuqtalarning Dekart koordinatalari biror (U') sohada o'zgaradigan u va v parametrlarning funksiyalaridir:

$$x = \varphi_1(u, v), \quad y = \varphi_2(u, v), \quad z = \varphi_3(u, v) \quad (1.1.3)$$

Demak, (1.1.1) sirtga qarashli har qanday regulyar qismni (1.1.2) ko'rinishdagi parametric tenglamalar bilan ifodalash mumkin. Bu tenglamalarni birlashtirib, vector formada yoza olamiz:

$$r(u, v) = \varphi_1(u, v)i + \varphi_2(u, v)j + \varphi_3(u, v)k, \quad r = r(u, v) \quad (1.1.4)$$

φ_i funksiyalar, farazga asosan, (U') soxada differensiallanuvchi va bir qiymatlidir, ya'ni $x = \varphi_1(u, v)$ va $y = \varphi_2(u, v)$ teskarilanuvchi funksiyalardir:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Bu esa ushbu

$$D = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

matritsaning rangi ikkiga teng, ya'ni undagi ikkinchi tartibli determinantlardan kamida bittasi noldan farqli, masalan,

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

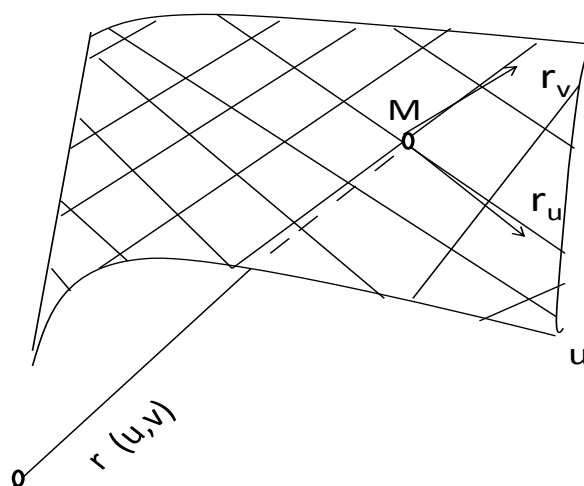
bo'lgandagina yuz bera oladigan. Ikkinchidan

$$[r_u \ r_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

Shu sababli $Rang D = 2$ bo'lganda, ya'ni bu determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari proporsional bo'lmaganda,

$$[r_u \ r_v] \neq 0 \text{ yoki } r_u \neq r_v$$

sharti bajariladi. Hullas, $z = f(x, y)$ shaklda berilgan sirtni (1.1.2) parametrik tenglamalar bilan yoki vektor – parametrik shakldagi (1.1.3) tenglama bilan ifodalash mumkin bo'lib, $Rang D = 2$ yoki $r_u \neq r_v$ sharti bajariladi (1-rasm),



1-rasm.

Aksincha, (1.1.2) parametrik tenglamalar yoki ularga teng kuchli (1.1.3) vektor tenglama berilgan holda, undagi $r(u, v)$ funksiya va uning hosilasi uzluksiz bo'lib, ushbu $r_u \neq r_v$ (yoki baribir, $Rang D = 2$) sharti bajarilsa, bunday

tenglamalar sirtning regulyar qismini (qisqacha, regulyarsirtni) aniqlaydi. Haqiqatdan $Rang D = 2$ bo'lsa, ikkinchi tartibli determinantlardan kamida bittasi noldan farqli, masalan, biror (u_0, v_0) qiymatda.

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'ladi va oshkormas funksiyalarning mavjudlik teoremasiga asosan, shu (u_0, v_0) nuqta atrofida $x = \varphi_1(u, v)$, $y = \varphi_2(u, v)$ $v = v(x, y)$: bular $z = \varphi_3(u, v)$ ga qo'yilsa, $z = \varphi_3[u(x, y), v(x, y)] = f(x, y)$ kelib chiqadi, bu esa (u_0, v_0) atrofida regulyar sirtni ifodalaydi.

Shunday qilib, (1.1.2) tenglamalarga qo'yuvchi φ_i funksiyalarga nisbatan qo'yilgan shartlar bajarilgan taqdirda, bu tenglamalar regulyar sirtni, umuman esa sirtni aniqlaydi.

Olib borilgan muhokamalarga ko'ra (1.1.2) tenglamalar *sirtning parametrik tenglamalarini* $r = r(u, v)$ esa sirtning *vektor -parametrik* tenglamasini tasvirlaydi.

u va v parametrlarning (U') sohadagi har bir qiymatiga sirtning biror nuqtasi mos keladi, bu sonlar sirtidagi nuqtaning *egri chiziqli* koordinatlari deyiladi.

Sirtga qarashli nuqtaning yetarlicha kichik atrofi regulyar qismdan iborat bo'lganda, bunday nuqta sirtning *oddiy* nuqtasi deyilgan edi. Sirtning har bir oddiy nuqtasiga bir juft (u, v) qiymat mos keladi, va aksincha, $r_u \nparallel r_v$ sharti bajarilganda, bunday nuqta oddiy bo'ladi.

1. Koordinat chiziqli. Endir $r_u \nparallel r_v$ shartining geometrik ma'nosini tekshiraylik. $r = r(u, v)$ tenglama $v = v_0$ faraz qilinsa, $r = r(u, v_0)$ vektor bitta o'zgaruvchining funksiyasi bo'lib, sirt ustida biror (egri) chiziq ham umuman o'zgara boradi va bitta v_0 parametrli oilani tashkil qiladi. Huddi shuning singari, (1.1.3) tenglamada $u = u_0$ desak, sirt ustida yotuvchi chiziqlarning ikkinchi oilasi hosil bo'ladi. Chiziqlarning bu ikki oilasi sirtning *koordinat chiziqlari* deyilib, ularning birinchisini bundan keyin u chiziqlar ($v = \text{const}$), ikkinchisini v chiziqlar ($u = \text{const}$) deb ataymiz. $r(u, v)$ ning u bo'yicha hususiy hosiladan tuzilgan r_u vektor u chiziqqa urinma, r_v esa v chiziqqa urinma. Sirtning oddiy

nuqtasida bu ikki vector shu nuqtadagi urinma tekislikda yotadi va bu vektorlar collinear bo'lmasa, shu tekislikni aniqlaydi. Shunday qilib $r_u \nparallel r_v$ sharti sirtning har bir nuqtasida tayin urinma tekislik borligidan, demak, shu nuqtaning oddiyligidan darak beradi.

Maxsus nuqtada, masalan, konus uchi singari nuqtalarda sirtga cheksiz ko'p urinma tekisliklar o'tkazish mumkin.

Koordinat chiziqlarining ikkala oilasi koordinatalar to'rini tashkil qiladi deb ataymiz. Sirtning regulyar qismida har bir nuqtadan to'rga qarashli ikkita chiziq o'tadi. Sirtga joylashgan biror sohaning har bir nuqtasidan chiziqlar oilasi (to'ri)ga qarashli faqat bitta(ikkita) chiziq o'tsa, bunday oila (to'r) *durust oila* (durust to'r) deyiladi.

Eslatma. Sirt ustida egri chiziqli koordinatlarni tanlab olishda keng erkinlik bor: u va v o'rniga ularning istalgan uzluksiz bir qiymatli $U(u, v)$ va $V(u, v)$ funksiyalarini olish mumkin. Ular ham bunday holda sirtidagi nuqtalarni belgilab bera oladi: (u_0, v_0) ga mos kelgan nuqta bu yerda (U_0, V_0) ga mos keladi. Biroq, eski parametrlarga nisbatan $r_u \nparallel r_v$ sharti saqlansa ham, yangi parametrlarga o'tganda $r_u \parallel r_v$ bo'lishi mumkin. Bunday holda sirt nuqtasini berilgan *parametrlashga* nisbatan maxsus nuqta deyishimiz mumkin. Ular bilan keyinroq aniq misollarda tanishamiz.

2. Urinma tekislik, normal. Sirtning har bir oddiy nuqtasida tayin urinma tekislik bor, uni r_u va r_v vektorlar aniqlaydi, chunki $r_u \nparallel r_v$. Shunga asosan, bu urinma tekislikdagi o'zgaruvchan nuqtaning radius – vektorini R bilan belgilasak, bu tekislikning vektor formadagi tenglamasi:

$$(R - r)[r_u r_v] = 0$$

bo'lib, koordinat formadagi tenglamasi esa:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

bo'ladi. Urinish nuqtasida urinma tekislikka tik bo'lgan to'g'ri chiziqli normaldir, uning vektor formadagi tenglamasi:

$$R - r = \lambda[r_u r_v]$$

va koordinat formadagi tenglamasi:

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

Agar sirt $z = f(x, y)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, undan ham parametrik tenglamalarga o'tish mumkin:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v)$$

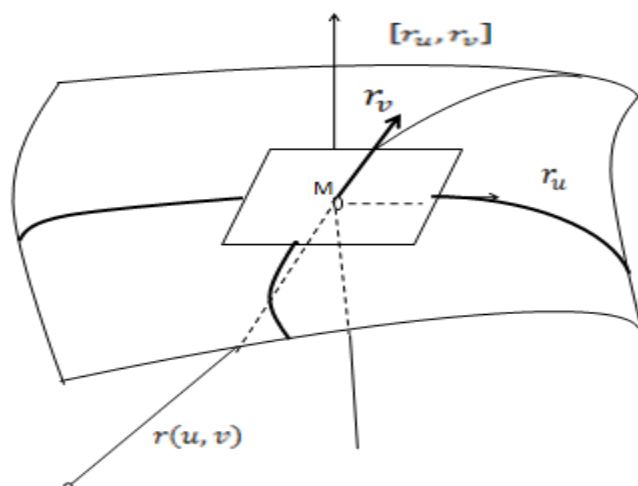
Bu holda vektor formadagi tenglama

$$r = ui + vj + f(u, v)k$$

ko'rinishini oladi. Ikki vektorning vektorial ko'paytmasi $[r_u r_v]$ sirtning normalini bo'ylab yo'nalgandir; shu vektorning yo'nalishi sirtning *musbat tomoni* deyiladi. Quyidagicha belgilashlarni kiritaylik(2-rasm):

$$N = [r_u r_v], \quad n = \frac{N}{|N|} = \frac{[r_u r_v]}{|[r_u r_v]|}$$

Normalning birlik vektori n dir(y sirtning musbat tomoniga yo'nalgan, 2-rasm) .



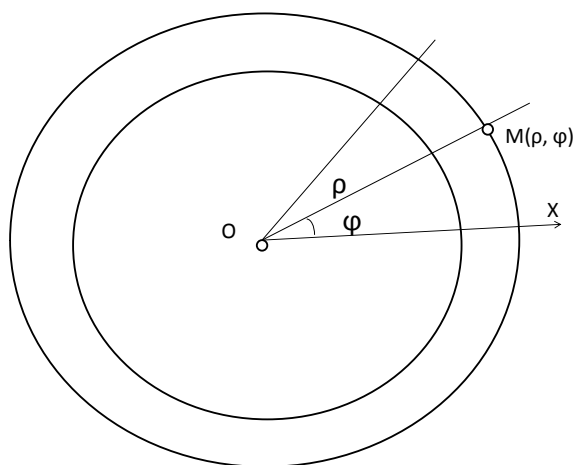
2-rasm.

Sirtlar nazariyasiga egri chiziqli koordinatalarni sistemali ravishda Gauss kiritdi va ulardan keng miqyosda foydalandi.

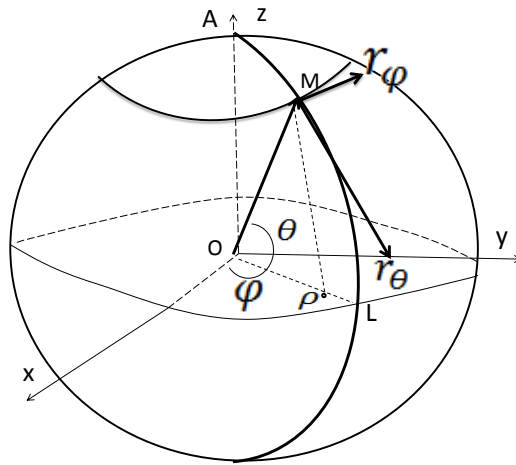
Misollar. 1) Tekislik-eng sodda sirtlardan biridir. Egri chiziqli koordinatalar sifatida Dekart koordinatalarini olish mumkin: $u = x$, $v = y$; koordinat chiziqlari $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ bo'lib, ular koordinat o'qlariga parallel to'g'ri chiziqdir.

Ikkala oila va ularning to'ri hamma joyda durustdir, tekislikning har bir nuqtasidan to'ring ikkita to'g'ri chizig'i o'tadi.

Tekislikdagi nuqtaning vaziyatini qutb koordinatlari bilan ham aniqlash mumkin: $M(\rho, \varphi)$, bunda $0 < \rho < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$. Agar $u = \rho$, $v = \varphi$ ekanini ekanini e'tiborga olsak, u holda egri chiziqli koordinatalar qutb koordinatalaridan iboratligini ko'ramiz (3-rasm).



3-rasm.



4-rasm.

Tekislikning parametrik tenglamalari:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = 0 \text{ yoki } \overline{OM} = r(\rho, \varphi) = \rho e(\varphi)$$

bo'lib, bunda $e(\varphi)$ – doiraviy vektordir (qutb koordinat boshida olingan).

2) Sfera (4-rasm). Sferada nuqtaning vaziyatini turli usullar bilan aniqlash mumkin. Biz uni “parallellar” va “medianalar” yordami bilan aniqlaymiz. Markazi koordinata boshida varadiusi a ga teng sferani olib, boshlang'ich meridian tekislikni XOZ tekisligidan va ekvatorial tekislikni XOY tekisligidani borat deb faraz qilaylik, egri chizqli koordinatalar sifatida geografik φ uzoqlikni va θ kenglikni kiritamiz. $u = \varphi$ parametr XOY tekisligidan boshlab va $v = \theta$ parametr XOZ tekisligidan boshlab hisoblanadi:

$$-\pi < \varphi < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

bu yerda $\varphi = \text{const}$ - meridianlar va $\theta = \text{const}$ - parallellar (aylanalar). Shimoliy va janubiy qutblardan boshqa har bir nuqtaga tayin φ va θ mos keladi. Sferani uzoqlik va kenglik yordami bilan parametrlashganda qutblar maxsus nuqtalar rolini o'ynaydi. Biroq, geometrik nuqtai nazardan olganimizda, bu nuqtalar sferaning boshqa nuqtalar singari oddiydir; ularning ikkalasida ham sferaga tayin urinma tekislik o'tkazish mumkin, Sferaning parametrik tenglamalarini yozamiz:

$$r = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM}, \quad \overline{OP} = a \cos \theta, \quad \overline{PM} = a \sin \theta$$

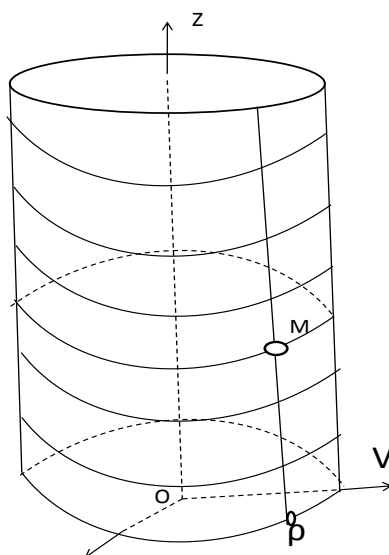
demak,

$$r = a[\cos \theta e(\varphi) + \sin \theta k]$$

yoki koordinat formada

$$x = a \cos \theta \cos \varphi, \quad y = a \cos \theta \sin \varphi, \quad z = a \sin \theta$$

3) Doiraviy slindrda har bir nuqtaning vaziyatini φ burchak va $PM = v$ masofa bilan aniqlash mumkin (5-rasm).



5-rasm.

Koordinat chiziqlari: $\varphi = \text{const}$ - yasovchilar va $v = \text{const}$ aylanalar.

Slindr tenglamalri:

$$r = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM}, \quad r = ae(\varphi) + vk$$

yoki

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = v$$

4) Doiraviy konusning uchi koordinata boshida bo'lib, o'qi esa OZ o'qidan iborat bo'lsin (6-rasm). Nuqtaning vaziyatini φ burchak va $\overline{OM} = v$ masofa bilan aniqlash mumkin. $OP = v \cos \alpha$, $PM = v \sin \alpha$, shu sababli, doiraviy konus tenglamalari:

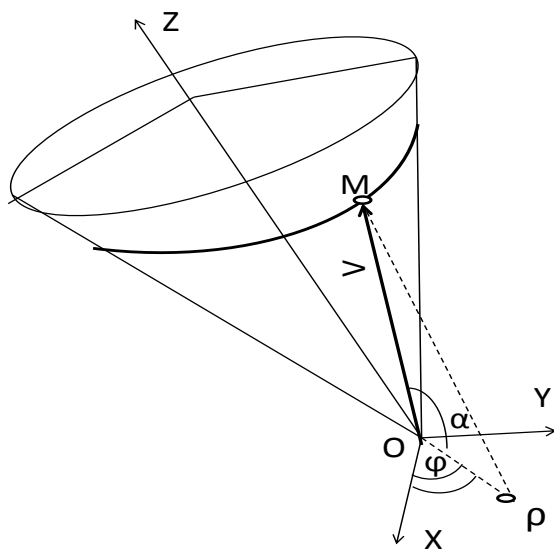
$$r = v \cos \alpha e(\varphi) + v \sin \alpha k$$

yoki

$$r = v [\cos \alpha e(\varphi) + \sin \alpha k]$$

koordinata formasida:

$$x = v \cos \alpha \cos \varphi, \quad y = v \cos \alpha \sin \varphi, \quad z = v \sin \alpha$$



6-rasm.

bulardan:

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

Koordinat chiziqlari $\varphi = \text{const}$ - yasovchilar va $v = \text{const}$ – ularning ortogonal trayektoriyalari – konus ustidagi spiraldir.

1.2. Ikkinchi tartibli sirtlarni ularning tenglamalari bo'yicha o'rganish.

Ushbu $x = \varphi(u)$, $z = \psi(u)$ chiziqni OZ o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt *aylanma sirt* deyiladi. Biz $x = \varphi(u) > 0$ shartini ko'ramiz, ya'ni

aylanayotgan (profil) chiziq aylanish o'qi bilan kesishmaydi, aks holda kesishish nuqtasi sirtning mahsus nuqtasi bo'lishi ravshandir.

Endi chiziqli koordinatalar sifatida $\angle XOP = v$ burchakni va profil chiziqning u parametrini olamiz. Chiziq ustidagi har bir $L(u)$ nuqta markazi OZ o'qida yotgan va radiusi $x = \varphi(u)$ ga teng aylanani chizadi; $AM = OP = \varphi(u)$

Koordinata chiziqlari: $u = \text{const}$ – parallelar (aylanalar), $v = \text{const}$ – meridianlar. Sirtning vektor tenglamasi:

$$r = \varphi(u)e(v) + \psi(u)k$$

koordinat formadagi tenglamalari esa:

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u)$$

Profil chiziq bilan sirtning uchinchi koordinatasi bir hildir, chunki chiziq OZ o'qi atrofida aylanmoqda.

Profil tenglamasi ba'zan $z = f(x)$ shaklda ham olinadi, bu holda x o'rniga ρ yoziladi: $z = f(\rho)$; sirtning tenglamasi:

$$r = \rho e(\varphi) + f(\rho)k$$

yoki

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = f(\rho), \quad (1.2.1)$$

bunda $\rho = \text{const}$ – parallelar, $\varphi = \text{const}$ – meridianlardir (6-rasm)

Endi urinma tekislik va normalni aniqlaylik:

$$r_u = \varphi'(u)e(v) + \psi'(u)k$$

$$r_v = \varphi(u)e\left(v + \frac{\pi}{2}\right)$$

bundan

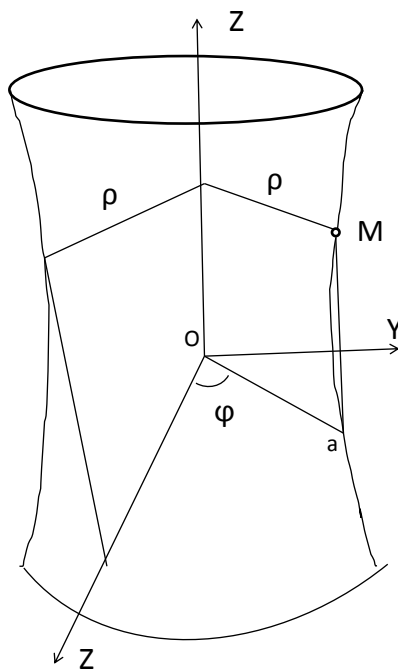
$$N = [r_u r_v] = \varphi(u)\{-\psi'(u)e(v) + \varphi'(u)k\} \quad (1.2.2)$$

bu yerdan N normal meridian tekisligida yotgan vector degan xulosaga kelimiz.

Demak, aylanma sirtning har bir nuqtasidagi normal shu nuqtadan o'tuvchi meridian tekisligida yotadi. (1.2.2) dan $|N| = \varphi\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}$, demak:

$$n = \frac{-\psi'(u)e(v) + \varphi'(u)k}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$$

Normaldagi birlik vektorning bu ifodasi keyinroq bizga ko'p marta kerak bo'ladi. Aylanma sirtning (1.2.1) tenglamalaridan ρ va φ parametrlarni yo'qotish ham mumkin: $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Bu vaqtda $z = f(x)$ shunday meridianning tenglamasiki, u XOZ tekisligida yotadi. Zanjir chiziqni o'z asosi atrofida aylantirishdan hosil qilingan sirt *katenoïd* deyiladi (7-rasm).



7-rasm.

Zanjir chiziq ushbu tenglama bilan berilgan bo'lsin:

$$\rho = x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}} \right) = a \cdot \operatorname{ch} \frac{z}{a}$$

Katenoid uchun $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ va (6) dan $\frac{2\rho}{a} = \frac{e^{\frac{z}{a}} + 1}{e^{\frac{z}{a}}}$ yoki, $e^{\frac{z}{a}} =$
 t faraz qilsak, $t^2 - \frac{2\rho}{a}t + 1 = 0$, bundan

$$t = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}.$$

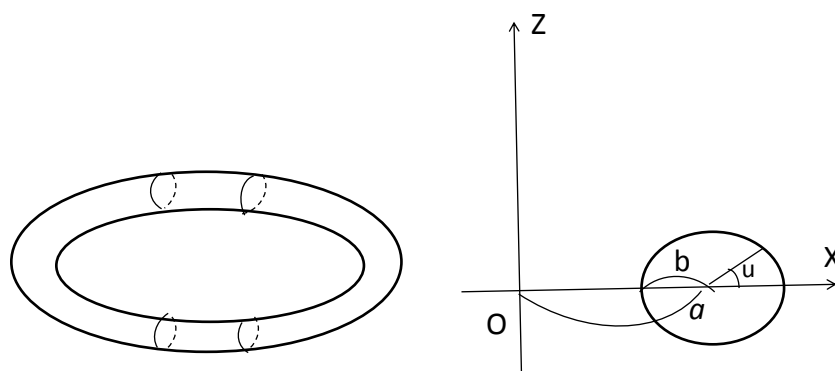
Demak, katenoidning parametrik tenglamalari:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = a \cdot \operatorname{arccch} \frac{\rho}{a} = a \cdot \ln \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - a^2}}{a}.$$

Zanjir chiziq uchun $\rho^2 = a^2 - u^2$. Bunda u –meridianning biror paralleldan hisoblangan uzunligidir. Demak, katenoidning tenglamalari quyidagicha bo'ladi:

$$x = \sqrt{a^2 + u^2} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{a^2 + u^2} \sin \varphi, \quad z = a \cdot \ln \frac{u + \sqrt{a^2 + u^2}}{a} \quad (1.2.3)$$

$$u = \sqrt{a^2 + u^2} - a \sqrt{\cosh^2 \frac{z}{a} - 1} = a \operatorname{sh} \frac{z}{a}; \quad z = a \cdot \operatorname{Arcsh} \frac{u}{a}.$$



8-rasm.

(1.2.3) dagi oxirgi tenglamani

$$z = a \cdot \operatorname{Arcsh} \frac{u}{a} = a \cdot \ln \frac{u + \sqrt{a^2 + u^2}}{a} \quad (1.2.4)$$

shaklda yozish ham mumkin.

Tor. $x = a + b \cos u$, $z = b \sin u$ ($0 < b < a$) aylana OZ o'qi atrofida aylansa, hosil qilingan (teshik kulcha singari) sirt tordeyiladi (8-rasm).

Torning parametrik tenglamalari:

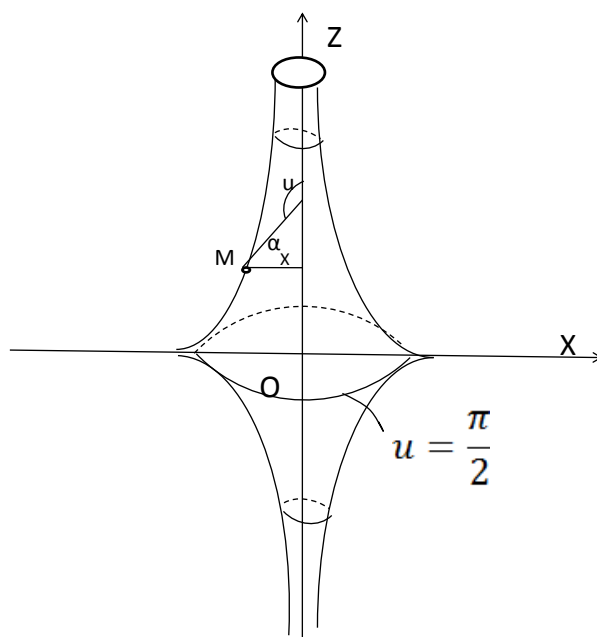
$$x = (a + b \cos u) \cos v, \quad y = (a + b \cos u) \sin v, \quad z = b \sin u$$

yoki vektor formada

$$r = (a + b \cos u) e(v) + b \sin u k$$

bo'ladi. Koordinat chiziqlari: $u = \text{const}$ – aylanar, $v = \text{const}$ – aylanalardir.

Psevdosfera. Traktrisaning asosi(asimptotasi)atrofida aylantirishdan hosil qilingan sirt psevdosfera deyiladi (9-rasm)



9-rasm.

Traktrisaning parametrik tenglamalari:

$$x = a \sin u, \quad z = a \left(\ln \tan \frac{u}{2} + \cos u \right).$$

Bunda u – urinmaning OZ o'qi bilan tashkil etgan burchagidir.

Psevdosferaning parametrik tenglamalari:

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left(\ln \tan \frac{u}{2} + \cos u \right).$$

Bu sirt ustidagi $u = \frac{\pi}{2}$ chiziqning hamma nuqtalari sirtning maxsus nuqtalarini tashkil qiladi(nega?), ya'ni bu chiziq psevdosferaning maxsus chiziqir yoki qirrasidir.

Nihoyat, $x = \sin z$ sinusoida OZ o'qi atrofida aylantirilsa, cheksiz ko'p mahsus nuqtali sirt hosil bo'ladi; $z = u$ deb qabul qilganda,

$$r = \sin u e(v) + u k$$

yoki

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = u$$

kelib chiqadi, bunda

$$N = \sin u \{-e(v) + k \cos u\}$$

$u = 0$ da $N = 0$, ya'ni $(0,0,0)$ –mahsus nuqtasidir.

Gelikoid. OZ o'qiga tik AB kesmaning shu o'q atrofida aylanishidan va shuningdek aylanish burchagiga proporsional tezlik bilan OZ bo'ylab siljishidan hosil bo'lgan sirtni to'g'ri *gelikoid* deymiz.

Koordinatlar:

$$AM = u \sin a, \quad XOP = v$$

Shartga ko'ra $OA = a \sin v$ bunda $a = \text{const}$.

Koordinat chiziqlari: $u = \text{const}$ –vint chiziqlar, $v = \text{const}$ –yasovchilar (harakatlanuvchi to'g'ri chiziqlar).

Gelikoidning vektor tenglamasi:

$$r = u e(v) + a v k;$$

Parametrik tenglamalari:

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a v;$$

oshkor tenglamari:

$$z = a \cdot \arctg \frac{y}{x}.$$

2-BOB. IKKINCHI TARTIBLI SIRT TENGLAMALARINI INVARIANTLAR YORDAMIDA SODDALASHTIRISH

2.1. Ikkinchi tartibli aylanma sirtlar.

Ta'rif. Biror affin reperda ikkinchi tartibli algebraik tenglama bilan aniqlanadigannuqtalar to'plami *ikkinchi tartibli sirtdeb* ataladi:

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (2.1.1)$$

Bunda

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.1.2)$$

Avvalo, bu sirtning biror u to'g'ri chiziq bilan kesishishi masalasini ko'rib chiqaylik. Faraz qilaylik, u to'g'ri chiziq S sirt qaralayotgan affin reperda quyidagi parametric tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$x = x_0 + lt$$

$$u: \quad y = y_0 + mt \quad (2.1.3)$$

$$z = z_0 + nt$$

S bilan u ning kesishmasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechish kerak. Shuning uchun (2.1.3) dagi x, y, z ning qiymatlarini (2.1.1) ga qo'yamiz:

$$a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + a_{33}(z_0 + nt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + mt) + \\ + 2a_{13}(x_0 + lt)(z_0 + nt) + 2a_{23}(y_0 + mt)(z_0 + nt) + 2a_{14}(x_0 + lt) + \\ + 2a_{24}(y_0 + mt) + 2a_{34}(z_0 + nt) + a_{44} = 0.$$

Qavslarni ochib, o'xshash xadlarni ixchamlasak, t ga nisbatan kvadrat tenglama hosil bo'ladi:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (2.1.4)$$

bunda:

$$\begin{aligned} P &= a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}nl + 2a_{23}mn, \\ Q &= l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}) + m(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}) + \\ &\quad + n(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}), \quad (2.1.5) \\ R &= a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 + \\ &\quad + 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44} \end{aligned}$$

(2.1.5) dan ko'rinib turibdiki, P koeffitsient u to'g'ri chiziqlar (x_0, y_0, z_0) nuqtasiga bog'liq bo'lmasdan, u ning faqat yo'naltiruvchi vektorigagina bog'liqdir.

Ta'rif. Yo'naltiruvchi vektorlari $P = 0$ shartni qanoatlantiradigan barcha to'g'ri chiziqlar berilgan sirtga nisbatan *asimptotik yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziqlar* deyiladi, yo'naltiruvchi vektorlarni esa *asimptotik yo'nalishli vektorlar* deyiladi.

Agar u to'g'ri chiziq S sirtga nisbatan asimptotik yo'nalishga ega bo'lmasa (ya'ni $P \neq 0$ bo'lsa), u holda (2.1.4) kvadrat tenglama ikkita t_1, t_2 ildizga ega bo'ladi, bunda t_1, t_2 ikkkita turli haqiqiy son bo'lsa, to'g'ri chiziq sirt bilan ikkita umumiy nuqtaga egadir.

t_1, t_2 qo'shma kompleks sonlar bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq sirt bilan ikkita mavhum umumiy nuqtaga ega, $t_1 = t_2$ da to'g'ri chiziq sirt bilan ustma – ust tushadigan ikkita umumiy nuqtaga ega bo'lib to'g'ri chiziq sirtga *urinadi* deyiladi.

Agar u to'g'ri chiziq S sirtga nisbatan asimptotik yo'nalishga ega bo'lsa (ya'ni $P \neq 0$ bo'lsa), u holda (2.1.4) dan

$$2Qt + R = 0 \quad (2.1.6)$$

Bo'lib, bu yerda turli holler yuz berishi mumkin.

- a) $Q \neq 0$, (2.1.6) $\Rightarrow = -\frac{R}{2Q}$ bo'lib, u to'g'ri chiziq S sirt bilan bitta nuqtada kesishadi.
- b) $Q = 0$ lekin $R \neq 0$ bo'lsa (2.1.6) tenglama ma'noga ega emas, bu hol S sirt bilan u to'g'ri chiziqning kesishmasligini bildiradi.
- c) $Q = 0, R = 0$ bo'lsa, (2.1.6) tenglama t ning har qanday qiymatida o'rinli, bu esa u to'g'ri chiziqning hamma nuqtalari S ga tegishli, ya'ni to'g'ri chiziq S ning tarkibida ekanligini bildiradi (bunda to'g'ri chiziq S sirtning *yasovchisi* deb ataladi). Endi $P \neq 0$ bo'lib, $t_1 = t_2$ holga qarayli, bu holda u to'g'ri chiziq S sirtga urinma deb atalgan edi. Bu vaqtda u to'g'ri chiziqning (x_0, y_0, z_0) nuqtasi sifatida shu urinish nuqtasini olsak, bu nuqta S ga ham tegishli bo'lgani uchun (2.1.5) dan $R = 0$. U holda (2.1.4) dan

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \text{ yoki } t(Pt + 2Q) = 0.$$

Bu tenglamaning bitta ildizi $t_1 = 0$, ikkinchisi esa $t_2 = -\frac{2Q}{P}$ dir.

Ravshanki, $t_1 = t_2 = 0$ bo'lishi uchun $Q = 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})l + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})m + \\ + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})n, \quad (2.1.7)$$

Bu tenglik u to'g'ri chiziq S sirtga nisbatan asimptotik yo'nalishga ega bo'lmaganda uning S sirtga (x_0, y_0, z_0) nuqtada urinishi uchun yo'naltiruvchi $\vec{u}$ vektor koordinatalarini qanoatlantirishi kerak bo'lgan shartdir. Ravshanki, (2.1.7) ni qanoatlantiruvchi l, m, n lar cheksiz ko'pdir (chunki uch noma'lumli bitta tenglamadir), demak M_0 nuqtada sirtga urinuvchi cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar mavjud. Bu urinmalardan biriga tegishli ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtani olsak, $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vektor shu urinmaning yo'naltiruvchi vektori bo'ladi, u holda uning koordinatalari (2.1.7) shartni qanoatlantirishi kerak:

$$\begin{aligned}
& (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})(x - x_0) + \\
& + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})(y - y_0) + \\
& + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})(z - z_0), \quad (2.1.8)
\end{aligned}$$

Shunday qilib, sirtning M_0 nuqtasiga o'tkazilgan har bir urinma to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari (2.1.8)ni qanoatlantirishi kerak. (2.1.8) tenglama x, y, z ga nisbatan chiziqli tenglama bo'lishi uchun u M_0 nuqtadan o'tuvchi biror tekislikni aniqlaydi, xuddi shu tekislik S sirtning M_0 nuqtasiga o'tkazilgan *urinma tekisligi* debataladi. Demak, ikkinchi tartibli sirtning biror nuqtasiga o'tkazilgan barcha urinma to'g'ri chiziqlar to'plami bir tekislikka tegishli bo'lib, bu tekislik sirtning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekislikdan iborat. Shunday qilib, (2.1.8) tenglama ikkinchi tartibli sirtning $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasidir.

Agar (2.1.8) dagi $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$ ning koeffitsientlari bir vaqtda nolga teng, ya'ni

$$\begin{aligned}
a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0 \\
a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0 \\
a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0 \quad (2.1.9)
\end{aligned}$$

bo'lsa, urinma tekislik noaniqdir.

Bu (2.1.9) shartlarni qanoatlantiruvchi (x_0, y_0, z_0) nuqta sirtning *maxsus nuqtasi* deb ataladi. Demak, sirtning maxsus nuqtasida uning urinma tekisligi aniqlanmagan bo'ladi.

Endi ikkinchi tartibli sirt bilan trkislikning kesishish masalasiga o'taylik.

S ikkinchi tartibli sirt va Π tekislik berilgan bo'lsin. Affin reporni shunday tanlab olamizki, $\Pi = xOy$ bo'lsin, u holda shu reperda Π tekislik

$$z = 0 \quad (2.1.10)$$

tenglama bilan aniqlanadi, S sirtning tenglmasi esa shu reperda umumiy holda, ya'ni (2.1.1) ko'rinishda bo'lsin. (2.1.1) va (2.1.10) tenglamalarni birgalikda yechsak,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0 \quad (2.1.11)$$

S sirtga va Π tekislikka tegishli bo'lgan barcha nuqtalar (2.1.11) tenglamani qanoatlantiradi.

Quyidagi hollar yuz berishi mumkin:

- 1) $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ bu vaqtda umuman olganda (2.1.11) tenglama $z = 0$ tekislikda ikkinchi tartibli chiziqni aniqlaydi.
- 2) $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, bu yerda:
 - a) a_{14} yoki a_{24} dan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, (2.1.11) tenglama $2a_{14} + 2a_{24}y + a_{44} = 0$ ko'rinishda bo'lib, $z = 0$ tekislikda to'g'ri chiziqni aniqlaydi, demak bu holda S sirt bilan Π tekislik to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi;
 - b) $a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0 \Rightarrow$ (2.1.1) tenglama $z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + a_{34}) = 0$ ko'rinishda bo'lib, u $z = 0$ tekisliklarga ajralib ketadi (ravshanki, bu vaqtda berilgan Π tekislik shu sirt tarkibida bo'ladi);
 - c) $a_{14} = a_{24} = 0$ $a_{44} \neq 0 \Rightarrow$ (2.1.11) tenglamadan $a_{44} = 0$ kelib chiqib, ziddik ro'y beradi, bu esa S sirt bilan Π tekislik birorta ham umumiy nuqtaga ega emasligini bildiradi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli sirtning tekislik bilan kesimi:

- a) ikkinchi tartibli chiziqdan;
- b) bitta to'g'ri chiziqdan;
- c) tekislikdan (bu vaqtda sirt ikkita tekislikka ajralib, berilgan tekislik shu tekisliklardan biri bo'ladi);

d) bo'sh to'plamdan (ya'ni sirt bilan tekislik bitta ham umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi) iborat ekan.

1-misol. $x^2 - xy + zy - 5z = 0$ sirt bilan $\frac{x-10}{7} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-1}$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtalarini toping.

Yechish. berilgan to'g'ri chiziq tenglamasini parametric ko'rinishda yozamiz: $x = 10 + 7t$, $y = 5 + 3t$, $z = -t$, bularni berilgan sirt tenglamasiga qo'ysak, $(10 + 7t)^2 - (10 + 7t)(5 + 3t) - t(5 + 3t) + 5t = 0$. bu tenglamani soddalashtirsak,

$$t^2 + 3t + 2 = 0,$$

bu kvadrat tenglamaning ildizlari: $t_1 = -1$, $t_2 = -2$. Bu qiymatlarni to'g'ri chiziqning parametric tenglamalaridagi t ning o'rniga qo'ysak,

$$t_1 = -1 \text{ da } x = 10 + 7(-1) = 3, y = 5 + 3(-1) = 2, z = -(-1) = 1;$$

$$t_2 = -2 \text{ da } x = 10 + 7(-2) = -4, y = 5 + 3(-2) = -1,$$

$$z = -(-2) = 2$$

Demak, izlangan nuqtalar: $(3, 2, 1)$ va $(-4, -1, 2)$

2-misol. $x^2 - y^2 - 2x + z - 3 = 0$ sirtning $(1, 1, 5)$ nuqtasidagi urinma tekislik tenglamasini yozing.

Yechish: Bu yerda: $a_{11} = 1, a_{22} = -1, a_{33} = 0, a_{12} = 0, a_{13} = 0,$

$$a_{23} = 0, a_{14} = -1, a_{24} = 0, a_{34} = \frac{1}{2}, \quad a_{44} = -3,$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 5.$$

Bularni (2.1.8) ga qo'ysak,

$$-(y - 1) + \frac{1}{2}(z - 5) = 0 \text{ yoki } 2y - z + 3 = 0$$

bu izlangan urinma tekislik tenglamasidir.

3-misol. $x^2 + 3y^2 - 4xz - 2yz + z - 6 = 0$ sirtning $z = 0$ tekislik bilan kesimini toping.

Yechish: $z = 0$ ni berilgan sirt tenglamasiga qo'ysak,

$$x^2 + 3y^2 - 6 = 0$$

Buni soddaroq holga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

demak, kesimda yarim o'qlari $\sqrt{6}$ va $\sqrt{2}$ bolgan ellips hosil qilinadi.

Sferik sirt

Sferaning kanonik tenglamasi quyidagicha

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, \quad (2.1.12)$$

bunda (a, b, c) – sfera markazi, R – sfera radiusi.

(2.1.12) ni quyidagicha yozamiz:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0 \quad (2.1.12')$$

Bundan:

- 1) sferaning ikkinchi tartiblisirtekanligini ko'ramiz;
- 2) (2.1.12') da xy, xz, yz ko'paytmalar qatnashgan hadlar yo'qligini,
- 3) x^2, y^2, z^2 oldidagi koeffitsientlarning 1 ga tengligini ko'rib turibmiz.

Endi (1) da $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ va $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ deb faraz qilinsa,

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + a_{11}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (2.1.13)$$

tenglama sferani ifoda qiladimi degan savolga javob izlaylik. $a_{11} \neq 0$ ga bo'lib yuborib,

$$\frac{2a_{14}}{a_{11}} = A, \quad \frac{2a_{24}}{a_{11}} = B, \quad \frac{2a_{34}}{a_{11}} = C, \quad \frac{a_{44}}{a_{11}} = D$$

belgilashni kiritsak,

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.1.14)$$

Bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + By + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + z^2 + Cz + \left(\frac{C}{2}\right)^2 - \left(\frac{C}{2}\right)^2 + D = 0,$$

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 + D - \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4} - \frac{C^2}{4} = 0$$

yoki

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2 - 4D) \quad (2.1.15)$$

Quyidagi hollarni qarab chiqaylik:

a) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$; bu holda

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}\right)^2,$$

bu tenglama esa markazi $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ nuqtada va radiusi

$R = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}$ ga teng sfera tenglamasidir.

b) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$; bu holda (2.1.15) tenglama

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = 0$$

ko'rinishida bo'lib, uni qanoatlantiruvchi faqat bitta $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ nuqta mavjuddir.

c) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$. Bundan ko'rinadiki, fazoda (2.1.15) ni qanoatlantiruvchi bitta ham nuqta mavjud emas. umumiylikni buzmaslik uchun bu vaqtda (2.1.15) tenglama *mavhum sferani aniqlaydi* deymiz.

Demak, (2.1.14) tenglama faqatgina $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ shartda sferani aniqlaydi.

1-misol. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4y + 2z - 5 = 0$ sferaning markazi va radiusini toping,

Yechish. Tenglamadan:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + z - \frac{5}{2} = 0$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 + 2y + 1 - 1 + z^2 + z + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 = 0$$

Demak, sferaning markazi $\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ nuqtada, radiusi esa 2 ga teng.

2-misol. $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ sferaning $M(3, \sqrt{2}, 1)$ nuqtasida unga o'tkazilgan urinma tekislik tenglamasini yozing.

Yechish: (2.1.8) tenglamaga $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$ ning qiymatlarini qo'yib, urinma tekislik tenglamasini yozish ham mumkin edi, lekin biz bu yerda boshqacha yo'l tutamiz. Bu yerda, sfera markazi $O'(2, 0, 0)$ nuqtada, radiusi esa 2 ga teng. Sferaning M nuqtada o'tkazilgan urinma tekisligi sfera radiusiga perpendikulyarligi sababli $\overrightarrow{MO'}$ vektor urinma tekislikning normal vektori bo'ladi. Ammo $\overrightarrow{MO'}(-1, -\sqrt{2}, -1)$ demak izlangan tekislik tenglamasi

$$-1(x - 3) - \sqrt{2}(y - \sqrt{2}) - 1(z - 1) = 0$$

yoki

$$x + \sqrt{2}y + z - 6 = 0$$

Ikkinchi tartibli slindrik sirtlar

Biror Π tekislikda L ikkinchi tartibli chiziq hamda shu tekislikka parallel bo'lmagan u to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

Ta'rif. u to'g'ri chiziqqa parallel hamda L chiziq bilan kesishuvchi fazodagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami *ikkinchi tartibli slindrik sirt* deb ataladi.

Ta'rifda qatnashayotgan L chiziq shu slindrik sirtning *yo'naltiruvchisi*, to'g'ri chiziqlar esa uning *yasovchilari* deyiladi.

Ta'rifdan foydalanib, affin reperda S slindrik sirt tenglamasini keltirib chiqaraylik. Soddalik uchun, yo'naltiruvchi chiziqni xOy tekislikda olamiz:

$$L: F(x, y) = 0 \quad (2.1.16)$$

u to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{u}(l, m, n)$.

Ixtiyoriy $M(x, y, z) \in S$ nuqtani olamiz. Shu M nuqtadan o'tgan yasovchining xOy tekislik bilan kesishgan nuqtasi $N(x_1, y_1, 0)$ bo'lsin. U holda

$\overrightarrow{MN}(x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z)$ va $|\overrightarrow{MN}| |\vec{u}|$, ya'ni $|\overrightarrow{MN}| = \lambda |\vec{u}|$. Bundan

$x_1 - x = \lambda l$, $y_1 - y = \lambda m$, $-z = \lambda n$ ($n \neq 0$ chunki $\vec{u} \notin xOy$). $-z = \lambda n$ dan λ ni topib, oldinbi ikki tenglikga qo'yamiz:

$$x_1 = x - \frac{l}{n}z, \quad y_1 = y - \frac{m}{n}z. \quad (2.1.17)$$

Ammo $N \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0$, demak,

$$F\left(x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z\right) = 0 \quad (2.1.18)$$

Shunday qilib, (2.1.18) tenglama slindrik sirtning tenglamasidir.

Demak, yo'naltiruvchisi $F(x, y) = 0$ ko'rinishdagi tenglama bilan berilgan, yasovchilari esa (l, m, n) vektorga parallel silindrik sirt tenglamasini hosil qilish uchun (2.1.16) dagi x, y o'rniga mos ravishda $x - \frac{l}{n}z, y - \frac{m}{n}z$ ifodalarni qo'yish kerak ekan. $u \parallel Oz$ dan iborat xususiy holda $\vec{u} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{u}(0, 0, n)$ va (2.1.18) tenglama ushbu ko'rinishni oladi:

$$F(x, y) = 0 \quad (2.1.19)$$

Ajoyib xulosaga keldik: yasovchilari Oz o'qqa parallel silindrik sirt tenglamasi yo'naltiruvchi tenglamasining o'zginasidir.

Masalan, xOy tekislikda ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, bu tenglama fazoda yasovchilari Oz o'qqa parallel silindirik sirt dan iborat.

ikkinchi tartibli silindirik sirt $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ affin reperda berilgan bo'lsin: ravshanki, bu tenglama ikkinchi darajadir, sirtning yasovchilariga parallel bo'lmagan Π tekislik bilan kesimini tekshiraylik.

Yangi $\mathcal{B}' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ affin reporni shunday tanlab olamizki, O nuqta $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ bazis vektorlar Π da joylashsin $\vec{e}'_3$ esa u ga parallel bo'lsin. u holda $\mathcal{B}$ dan $\mathcal{B}'$ ga o'tishda tenglamaning darajasi saqlangani uchun S sirt $\mathcal{B}'$ da ham ikkinchi tartibli silindrik sirt ni aniqlaydi, lekin bu tenglamada uchinchi o'zgaruvchi z' qatnashmaydi ($O'z' \parallel \vec{u}$ bo'lgani uchun).

Uning $\mathcal{B}'$ reperdagi tenglamasini umumiy holda quyidgicha yozish mumkin:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + a'_{33} = 0 \quad (2.1.20)$$

Demak, S bilan Π ning kesishmasidan hosil bo'lgan geometric obraz umumiy holda (2.1.20) tenglama bilan aniqlanadi. Bu (2.1.20) tenglama esa Π tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasidir, shu ikkinchi tartibli chiziqning turiga qarab ikkinchi tartibli silindrni sinflarga ajratish mumkin. bundan tashqari, (2.1.20) bilan aniqlanadigan chiziqni S ning yo'naltiruvchisi

sifatida qabul qilsak ham bo'ladi. Demak, ikkinchi tartibli silindrlarning yo'naltiruvchilari: ellips, giperbola, parabola, ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziq, ikkita o'zaro parallel (ustma – ust tushmagan) to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lishi mumkin. Yo'naltiruvchilari shu chiziqlardan iborat ikkinchi tartibli slindrik sirtlar mos ravishda *elliptic slindr*, *giperbolik slindr*, *parabolik slindr*, *ikkita kesishuvchi tekislik*, *ikkita o'zaro parallel tekislik* (ustma ust tushmagan) deb yuritiladi (oxirgi ikitasi ba'zan *aynigan silindr* deb ham yuritiladi). Bu slindrlarning tenglamasini dekart reperida (kanonik holga keltirib) yozamiz:

$$\text{Elliptik slindr } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Giperbolik slindr } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$\text{Parabolik slindr } y^2 = -2px$$

$$\text{Ikkita kesishuvchi tekislik } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\text{Ikki parallel tekislik } x^2 - a^2 = 0 \ (a \neq 0)$$

Misol. Yo'naltiruvchisi (xOy) tekislikda $x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi, ysovchilari $(1, 0, 1)$ vektorga parallel slindrik sirt tenglamasini yozing.

$$\text{Yechish: Berilganlarga asosan: } F(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$$

$\vec{u} = (1, 0, 1)$, $l = 1$, $m = 0$, $n = 1$. U holda bu sirt tenglamasi:

$$F(x - z, y) = (x - z)^2 + 2(x - z)y - 3y^2 - (x - z) = 0$$

Endi ikkinchi tartibli sirt.

$$\begin{aligned} S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (2.1.1) \end{aligned}$$

Umumiy tenglama bilan berilgan bo'lsa, qanday shart bajarilganda bu tenglama yasovchilari $\vec{u}(l, m, n)$ vektorga parallel ikkinchi tartibda silindrik sirtni aniqlash masalasiga to'htaylik.

Ikkinchi tartibli sirt bilan to'g'ri chiziqning kesishish masalasining hal qilinishi $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ kvadrat tenglamaga bog'liq bo'lib, uni biz mufassal tekshirgan edik.

(2.1.1) sirtning yasovchilari $\vec{u}(l, m, n)$ vektorga parallel bo'lsin. $M(x_1, y_1, z_1)$ fazodagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin, M nuqtadan o'tib $\vec{u}$ ga parallel to'g'ri chiziq yo (2.1.1) sirt tarkibida bo'ladi, yoki u bilan bitta ham umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi. U holda $Q = 0$ yoki

$$\begin{aligned} x_1(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n) + y_1(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n) \\ + z_1(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) + (a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n) = 0 \end{aligned}$$

bo'ladi. M nuqta har qanday bo'lganda ham shu shart doimo bajarilishi uchun

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n = 0, \quad a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n = 0 \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n = 0 \quad a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n = 0 \quad (2.1.21) \end{aligned}$$

bo'lishi lozim. Aksincha l, m, n lar (2.1.21) ni qanoatlantirsin, u holda

$\vec{u}(l, m, n)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri (2.1.1) ning yasovchisi ekanligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham, (2.1.1) ga qo'ysak hamda (2.1.21)ni va (2.1.5) ni e'tiborga olsak, $P = Q = 0$ bo'ladi. M nuqta (2.1.6) ga tegishli bo'lgani uchun (2.1.9) dan $R = 0$ ekanligi kelib chiqadi, demak, u to'g'ri chiziq (2.1.1) ning yasovchisi ekan.

Quyidagi muhim xulosaga keldik: (2.1.1) tenglama bilan aniqlanuvchi sirt yasovchilari $\vec{u}(l, m, n)$ vektorga parallel bo'lgan silindrik sirt bo'lishi uchun (2.1.21) shartlarning barchasi bajarilishi zarur va yetarli ekan.

Misol. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$ tenglama bilan aniqlangan sirtning silindrik sirt ekanligini isbotlang.

Yechish. (2.1.6) bilan solishtirsak: $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = 2, a_{12} = 1, a_{34} = 2$

$a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0$. (2.1.21) sistemani tuzatamiz:

$$l + m = 0$$

$$l + m = 0, \Rightarrow n = 0, l = -m, l = 1 \text{ desak, } m = -1,$$

$$n = 0$$

$$2n = 0,$$

demak, $\vec{u}(1, -1, 0)$ vektor berilgan sirt yasovchilari uchun yo'naltiruvchi vector bo'lar ekan.

Ikkinchi tartibli konus sirtlar. konus kesimlari

Biror Π tekislikda L ikkinchi tartibli chiziq va bu tekislikka tegishli bo'lmagan M_0 nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Fazodagi M_0 nuqtadan o'tib, L ni kesib o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami *ikkinchi tartibli konus sirt* (yoki *konus*) deb ataladi. M_0 konus uchi, L chiziq esa konus *yo'naltiruvchisi*, konusni hosil qiluvchi to'g'ri chiziqlar uning *yasovchilari* deb ataladi.

Konus yasovchilarini markazi konus uchida bo'lgan ro'g'ri chiziqlar bog'lamiga tegishlidir.

Endi konus tenglamasini keltirib chiqaraylik. Affin reporni shunday tanlab olamizki, konusning yo'naltiruvchisi yotgan tekislik $\Pi = xOy$ tekislikdan iborat bo'lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta esa fazoning xOy da yotmagan ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin

$$L: F(x, y) = 0 \quad (2.1.22)$$

Konusning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasini olaylik, u holda M_0M to'g'ri chiziq konusning yasovchisi bo'lib, L bilan (ya'ni xOy tekislik bilan) kesishgan nuqtasi $M_1(x_1, y_1, 0)$ bo'lsin. M_0, M, M_1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotgani uchun $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \overrightarrow{M_0M}$ yoki $\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow x_1 - x_0 = \lambda(x - x_0)$

$$y_1 - y_0 = \lambda(y - y_0), \quad 0 - z_0 = \lambda(z - z_0)$$

yoki

$$x_1 = x_0 + \lambda(x - x_0), \quad y_1 = y_0 + \lambda(y - y_0), \quad z_0 + \lambda(z - z_0) = 0$$

So'nngi tenglikdan λ ni topib, avvalgi ikki tenglikka qo'yamiz:

$$x_1 = x_0 + \frac{x - x_0}{z - z_0} \cdot z_0, \quad y_1 = y_0 + \frac{y - y_0}{z - z_0} \cdot z_0 \quad (2.1.23)$$

$$M_1 \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0$$

yoki

$$F\left(x_0 + \frac{x - x_0}{z - z_0} \cdot z_0, y_0 + \frac{y - y_0}{z - z_0} \cdot z_0\right) = 0 \quad (2.1.24)$$

Ravshanki, konusga tegishli barcha nuqtalarning koordinatalari (2.1.24) ni qanoatlantiradi, konusga tegishli bo'lmagan hech qanday nuqtaning koordinatalari (2.1.24) ni qanoatlantiraydi, demak, (2.1.24) ifoda konus tenglamasidir.

Konusning uchi koordinatalar boshidan iborat bo'lgan holni tekshiraylik. Buning uchun avvalo algebradan funksiyaning bir jinsliliigi tushunchasini elaylik: agar istalgan t uchun $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ funksiya ikkinchi darajali bir jinsli funksiyaadir:

$$\begin{aligned} F(tx, ty, tz) &= (tx)^2 - (ty)^2 + (tz)^2 = t^2(x^2 - y^2 + z^2) = \\ &= t^2 F(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

$$F(x, y, z) = 0$$

bir jinsli tenglama bo'lib, biror S sirtini aniqlasin hamda $M_1(x_1, y_1, z_1) \in S$ bo'lsin, OM_1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz, uning parametric tenglamalari:

$$x = tx_1, \quad y = ty_1, \quad z = tz_1. \quad (2.1.26)$$

OM_1 ning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasini olaylik, (2.1.26) ga asosan $M(tx_1, ty_1, tz_1)$.

Endi M nuqtaning koordinatalarini (2.1.25) ga qo'yib, $F(x, y, z)$ ning bir jinsli ekanini e'tiborga olaylik:

$$F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z) = 0; \text{ demak } OM_1 \subset S.$$

Xulosa. (2.1.25) ko'rinishdagi bir jinsli tenglama uchi koordinatalar boshida bo'lgan konusning tenglamasidan iborat.

Agar

$$F = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

bo'lsa, konusning uchi sifatida, soddalik uchun, $M_0(0, 0, 1)$ ni olsak, (2.1.24) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x(1 - z) + 2a_{23}y(1 - z) + a_{33}(1 - z)^2 = 0 \quad (2.1.27)$$

Endi (2.1.1) ko'rinishdagi tenglama qaysi shartlarda konusni aniqlashi mumkin degan savolga o'taylik.

S konusning uchi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada deylik. Ixtiyoriy $\vec{u}(l, m, n)$ vektorni olib (bu vector asimptotik yo'nalishga ega bo'lmasin), M nuqtadan $\vec{u}$ ga parallel u to'g'ri chiziq o'tkizaylik, uning parametric tenglamalari:

$$X = x_0 + lt, Y = y_0 + mt, Z = z_0 + nt \quad (2.1.28)$$

(2.1.28) bilan (2.1.1)ning kesishish nuqtasini izasak, (2.1.4) tenglama hosil bo'ladi. $M_0 \in S$ bo'lsa, (2.1.5) $\Rightarrow R = 0$. U holda

$$(4) \Rightarrow Pt^2 + Qt = 0 \quad (2.1.29)$$

Konusning ta'rifiga asosan u to'g'ri chiziq S ga to'liq tegishli yoki faqat bitta M umumiy nuqtaga ega, bu degan so'z (2.1.29) tenglama cheksiz ko'p yechimga ega yoki faqat bitta $t = 0$ ga egadir, (2.1.29) dan ko'rinib turibdiki, bu shartlar bajarilishi uchun $Q = 0$ bo'lishi kerak, buni yoyib yozsak,

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})l + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})m + \\ + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})n = 0 \quad (2.1.30)$$

Bu shart asimptotik yo'nalishga ega bo'lmagan har qanday $\vec{u}$ vektor uchun bajarilganligidan:

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0$$

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \quad (2.1.31)$$

$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0$$

$M_0 \in S$ ni hamda (2.1.31) ni e'tiborga olsak,

$$(2.1.1) \Rightarrow a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} = 0 \quad (2.1.32)$$

Demak, (2.1.1) tenglama konusni ifodalaganda konus uchining koordinatalari (2.1.31), (2.1.32) shartlarni qanoatlantirishi kerak.

Aksincha, (2.1.1) tenglama berilgan bo'lsa hamda biror M_0 nuqta uchun (2.1.31), (32) shartlar bajarilsa, berilgan tenglama uchi M_0 nuqtadagi konusni ifodalaydi. Xaqiqatan ham, M_0 ning koordinatalarini (2.1.1) ga qo'yib hisoblasak hamda (2.1.31), (2.1.32) ni e'tiborga olsak, $M_0 \in S$ ekaniga ishonch hosil qilamiz.

Endi M_0 nuqtadan ixtiyoriy (2.1.28) to'g'ri chiziqni o'tkazib, u bilan S ning kesishgan nuqtasini topishga harakat qilsak, (2.1.4) tenglamada $Q = R = 0$ bo'lib $Pt^2 = 0$. Bundan u to'g'ri chiziq S bilan faqat bitta M_0 nuqtada kesishadi yoki bu to'g'ri chiziq S ga to'liq tegishli degan xulosa chiqadi, demak, S konusdir.

Xullas, S sirt uchi M_0 nuqtada bo'lgan konusdan iborat bo'lishligi uchun M_0 ning koordinatalari (2.1.31), (2.1.32) shartlarni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

(2.1.31), (2.1.32) dan quyidagi matritsalarini tuzamiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.1.33)$$

Ma'lumki, (2.1.31), (2.1.32) dagi tenglamalarning birgalikda bo'lishi uchun bu matritsalar ranglarining teng bo'lishi yetarli va zarurdir.

Shuning uchun (2.1.1) tenglama konusni ifodalashi uchun (2.1.33) matritsalar ranglarining teng bo'lishi kifoya.

Agar (2.1.1) tenglama konusni ifodalasa, u holda (2.1.33) matritsalarining eng kattasi 3 ga teng, demak, konus uchun

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.1.34)$$

shart bajarilishi kerak.

Endi dekart reperida berilgan konusning ba'zi tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik. Bu reperda ikkinchi tartibli konusning eng sodda tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \left(\text{yoki } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \right) \quad (2.1.35)$$

ko'rinishda bo'ladi, haqiqatdan ham, bu tenglama ikkinchi darajali bir jinsli tenglama bo'lgani uchun u yuqorida chiqarilgan xulosaga asosan uchi koordinatalar boshida bo'lgan konusni aniqlaydi. Shunisi diqqatga sazovorki, (2.1.35) konusni tanlab olingan ba'zi tekisliklar bilan kessak, kesimda ikkinchi tartiblichiziqning hamma turini hosil qilish mumkin.

1. $z = h$ ($h > 0$) tekislik bilan kessak, kesimda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$ yoki $\frac{x^2}{(a\frac{h}{c})^2} +$

$\frac{y^2}{(b\frac{h}{c})^2} = 1$ ellips hosil bo'ladi.

2. $y = h$ ($h > 0$) tekislik bilan kessak, kesimda $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}$ yoki $-\frac{x^2}{(a\frac{h}{b})^2} +$

$\frac{z^2}{(c\frac{h}{b})^2} = 1$ giperbola hosil bo'ladi.

3. $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h$ ($h > 0$) tekislik bilan kesimini tekshiraylik, buning uchun

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h \end{cases}$$

sistemani yechamiz. Birinchi tenglamani quyidagicha yozib, $(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) \times$

$\times (\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) + \frac{y^2}{b^2} = 0$ ikkinchi tenglamani hisobga olsak, $\frac{y^2}{b^2} = -h(\frac{x}{a} + \frac{z}{c})$. Endi

bunga ikkinchi tenglamadan z ni topib qo'ysak, $y^2 = -b^2h(2\frac{x}{a} - h)$ tenglama hosil bo'lib, u parabolic aniqlanadi.

4. $y = 0$ tekislik bilan kessak, kesimda $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq hosil bo'ladi.

5. $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$ tekislik bilan kessak, kesimda $\frac{y^2}{b^2} = 0$ yoki $y^2 = 0$ tenglama bilan aniqlanuvchi ustma – ust tushgan ikkita to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu xulosalar ikkinchi tartibli chiziqlarning konus kesimlari deb atalishi boisidir.

1-misol. Dekart reperida yo'naltiruvchisi xOy tekislikdagi $x^2 - 2y^2 = 1$ giperboladan iborat , uchi $(-1, 2, 1)$ nuqtadagi konus tenglamasini tuzing.

Yechish. $F(x, y) = x^2 - 2y^2 - 1 = 0, x_0 = -1, y_0 = 2, z_0 = 1. (2.1.14)$
ga asosan x ni $\left(\frac{x+z}{1-z}\right)^2 - 2\left(\frac{y-2z}{1-z}\right)^2 - 1 = 0$ bo'lib, uni soddalashtirsak, konus tenglamasi hosil qilinadi:

$$x^2 - 2y^2 - 8z^2 + 8yz + 2xz + 2z - 1 = 0$$

2-misol. Affin reperda berilgan

$$x^2 - 5z^2 + 3xy + 2yz - 7x - 6y - 2z + 10 = 0$$

sirtning konus ekanligini isbotlang va uchining koordinatalarini toping.

Yechish. Bu yerda $a_{11} = 11, a_{22} = 0, a_{33} = -5, a_{12} = \frac{3}{2}, a_{13} = 0$

$a_{23} = 1, a_{14} = -\frac{7}{2}, a_{24} = -3, a_{34} = -1, a_{44} = 10$. Bu qiymatlarni (2.1.31) va (2.1.32) ga qo'yamiz:

$$\left. \begin{aligned} x_0 + \frac{3}{2}y_0 - \frac{7}{2} &= 0, \\ \frac{3}{2}x_0 + z_0 - 3 &= 0, \\ y_0 - 5z_0 - 1 &= 0, \\ -\frac{7}{2}x_0 - 3y_0 - z_0 + 10 &= 0 \end{aligned} \right\} (*)$$

bu sistemadan (2.1.33) matritsalarini tuzib , ranglarini xisoblasak, ikkalasini ham 3 ga teng, sirt konusdir, (*) tenglamar sistemasi birgalikda, shu sistemani yechsak, $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 0$ bo'lib, $(2, 1, 0)$ nuqta konus uchidir.

2.2. Ikkinchi tartibli sirlarning kanonik tenglamalari.

To'g'ri chiziqli sirt deb, to'g'richiziq (yasovchi)ning harakatidan hosil qilingan sirtga aytamiz. Bir pallali va ikki pallali giperboloidlar, giperbolik

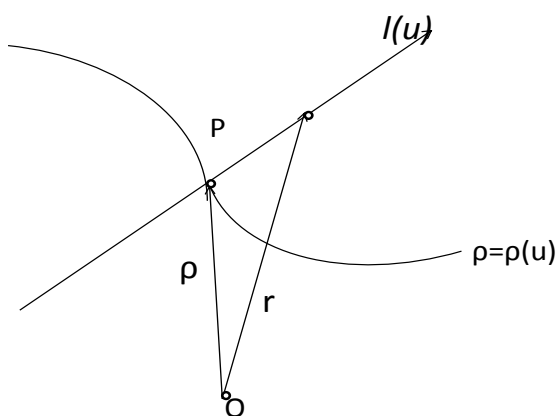
paraboloid, slindr va konus bunga misoldir. Bu sinfga kiruvchi sirtlar katta ahamiyatga ega.

Harakat vaqida yasovchilar biror chiziq bilan doimo kesishib, bu chiziqning har bir nuqtasidan bitta yasovchi o'tsa, bunday chiziq *yo'naltiruvchi* deyiladi. Yo'naltiruvchi chiziq $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$ tenglama bilan berilgan holda, to'g'ri chiziqli sirtning tenglamasini yozish uchunundagi M nuqtaning egri chiziqli koordinatalari sifatida yo'naltiruvchining P nuqtasiga mos kelgan u partametrni va $l(u)$ yasovchi bo'yicha olingan $PM = v$ masofani qabul qilish mumkin.

Koordinat chiziqlari: $u = const$ – yasovchilar $v = const$ – yo'naltiruvchilar, $v = 0$ bo'lganda yo'naltiruvchi $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u)$ chiziqning o'zi hosil qilinadi. Sirtning tenglamsi:

$$r(v) = \bar{\rho}(u) + vl(u),$$

bunda $l(u)$ – birlik vektor deb faraz qilinishi mumkin (10-rasm).



10-rasm.

Yuqorida qaralgan gelikoid – to'g'ri chiziqli sirtidir. Uning yo'naltiruvchisi OZ o'qidir.

Biz to'g'ri chiziqni sirt deyish o'rniga, qisqalik maqsadida *chiziqli sirt* terminini ishlatimiz.

Chiziqli sirtning normalini tekshiraylik:

$$r_u = \bar{\rho}'(u) + v l'(u), \quad r_v = l(u) \quad (2.2.1)$$

$$N = [\bar{\rho}'l] + v[l'l].$$

Ma'lum bir yasovchi bo'ylab harakat qila borganda, ya'ni u ni o'zgartirmay, v ni o'zgartirganda, bu vektorning yo'nalishi va uzunligi, umuman, o'zgara boradi. Bu o'zgarishning xarakteri (2.2.1)ga kiruvchi $[\bar{\rho}'l]$ va $[l'l]$ vektorlarning kollinear bo'lish – bo'lmasligiga bog'liqdir. Shu munosabat bilan ikki holni qaraylik.

$[\bar{\rho}'l] \neq [l'l]$ (vektorlar kollinear emas). Bu holda bitta yasovchi bo'ylab harakat qilganda, N normalning yo'nalishi o'zgara boradi, chunki $a + vb$ shakldagi yig'indida v o'zgarsa, bu yig'indini ifodalovchi vektorning yo'nalishi ham o'zgaradi (hozir bizni N ning uzunligini qiziqtirmaydi).

Yasovchi bo'ylab harakat qilganda, sirtning normali va uning bilan birga urinma tekislik ham go'yo qiyshayib boradi, chiziqli sirt bu holda *qiyshiq* deyiladi. Bu umumiy holdir. Yuqorida aytilgan ikkala giperboloid va giperboloid paraboloid, gelikoid huddi chiziqli qiyshiq sirtlardir (biz buni keyinroq isbotlaymiz).

$[\bar{\rho}'l] \parallel [l'l]$. Bu holfaqatl, $l', \bar{\rho}'$ vektorlar komplanar bo'lgandagina yuzberaoladi: demak, ularning aralash ko'paytmasi nolga tengdir:

$$l l' \bar{\rho}' = 0, \quad l = \alpha l' + \beta \bar{\rho}' \quad (2.2.2)$$

(2.2.2) tengliklarning birinchisini du^2 ga ko'paytirsak,

$$l dl d\bar{\rho} = 0$$

hosil bo'ladi. Bu holda bitta yasovchi bo'ylab harakat qilganida, normal o'z yo'nalishini saqlaydi [bu gal $a + vb$ yig'indi $a(1 + \lambda v)$ ko'rinishni oladi] – urinma tekislik o'zgarmaydi: yasovchining bitta nuqtasidagi urinma tekislik, uning hamma nuqtalarida urinma tekislik vazifasini bajaradi; boshqacha aytganda, normal qiyshaymaydi. Bu hol hamma yasovchilar uchun yuz bersa, chiziqli sirt yeyiluvchi) sirtyoki *tors* deyiladi. Ravshanki, konus va silindr – torslardir.

Gelikoid uchun yo'naltiruvchi OZ o'qidir, uning tenglamasi $\bar{\rho}(u) = au k$; yasovchilarning birlik vektori $l = e(u)$ dir. $ll'\bar{\rho}'$ aralash ko'paytma noldan farqli:

$$ll'\bar{\rho}' = e(u)e\left(u + \frac{\pi}{2}\right)ak = a \neq 0,$$

bu yerda $e(u)e\left(u + \frac{\pi}{2}\right)k = 1 \neq 0$

Endi chiziqli sirtning yoyiluvchi bo'lish sharti (2.2.2) ni analiz qilib, yoyiluvchi sirtlar sinflarini aniqlaylik. (2.2.2) shart uch holda aynan bajariladi.

1) $l' = 0$ va'ni $l = \text{const} = l^0$ –yasovchilar yo'nalishini saqlaydi. Tors slindrdan iborat. Uning normal $N = [\rho' l] = \text{const}$

2) $\bar{\rho}' = 0$, demak, $\bar{\rho} = \text{const} = \bar{\rho}_0$ –yo'naltiruvchi nuqtasidan iborat; tors konusdir: $N = v[l'l]$

3) $l \parallel \bar{\rho}'$. Bu holda yasovchilar sifatida yo'naltiruvchining urinmalari bilinadi. Demak, tors fazoviy chiziqning urinmalaridan yasaladi)

Biz muhim natijaga keldik: *fazodagi ixtiyoriy chiziqning urinmalaridan tuzilgan chiziqli sirt yoyiluvchi sirtidir.*

Qurilgan uchta holda yoyiluvchi sirtlar hosil qilinadi. Bularan boshqa hol yo'q. Shunday qilib, har qanday yoyiluvchi sirt yo silindr, konus, yokibiror chiziqning urinmalaridan tuzilgan sirtidir. (Oxirgi fakti isbotsiz keltirdik.)

Slindr va konuslar e'tiborga olinmasa, yoyiluvchi sirtbiror (G) chiziqning urinmalari tashkil qilgan sirtidir. Agar o'zidan iborat. Fazoviy (G) chiziqni olganda esa, uning urinmalaridan tuzilgan sirt shuchiziqdan qaytaruvchi ikki bo'lakdan iborat. Shu sababli (G) chiziq “qaytish qirrası” deyiladi. Bu sirtning normal $N \parallel [l'l]$, bu yerda $l' = \tau'$ deb olish mumkin, u holda $N = [\tau'\tau] = -\lambda k\beta$, ya'ni $N \parallel \beta$.

Shunday qilib, yoyiluvchi sirtning qaytish qirrasidagi nuqtalarda o'tkazilgan urinma tekisliklar shu chiziqning yopishma tekisliklaridan iboratdir.

2. *To'g'ri chiziqli sirtning qisilish chizig'i.* Bunday sirtning ikkita cheksiz yaqin yasovchisi, umuman aytganda, uchrashmaydi; ular $P(\bar{\rho})$ va $P' = (\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho})$ nuqtalardan o'tadi deylik. Ularning eng qisqa masofani hisoblaymiz. Bu masofashu ikki yasovchiga umumiy perpendiculyar bo'lgan to'g'ri chiziq kesmasi bo'lib, u quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\lambda = \frac{(\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho} - \bar{\rho})[l, 0 + \Delta l]}{|[l, l + \Delta l]|} = \frac{\Delta\bar{\rho}l\Delta l}{|[l\Delta l]|}.$$

Biz slindirik sirlarni hozir tekshirmaymiz, chunki ularning hamma yasovchilari parallel (ya'ni $L(u) = \text{const}$), demak, ikkita yasovchining umumiy perpendikulari aniqlanmas; lekin, $L(u) \neq \text{const}$, demak, ikkita yasovchining umumiy perpendikulari aniqlanmas; lekin, $l(u) \neq \text{const}$ degan talab esa $l'(u) \neq 0$ talabga keltiriladi.

Umumiy $A'A$ perpendikulyar $A' \rightarrow A$ bo'lganda, qandaydir limit vaziyatga intiladi, u holda A ham o'zgara borib qandaydir limit qandaydir A_0 limit vaziyatga intiladi. Ana shu A_0 nuqta l yasovchining *striksion (qisilish) nuqtasi* deyiladi. Har bir yasovchida o'zining strikatsion nuqtasi bordir. Ularning geometrik o'rni to'g'ri chiziqli sirtning *striksion (qisilish) chizig'i* deyiladi. Bundan nom berilishiga sabab shuki, qisilish chizig'i sirtning eng tor joyidan o'rab olganday tuyuladi. Bir pallali aylanma giperboloidning qisilish chizig'i uning $XOY(z = 0)$ tekislik bilan kesishgan aylanasidir. Bu aylana hamma yasovchilarni o'tkir burcha kostida kesib o'tadi.

Konus uchun qisilish chizig'i nuqtadan – konus uchidan iborat, chunki yasovchilarning hammasi bitta nuqtadan o'tadi. Silindr uchun qisilish chizig'i mavjud emas. Gelikoloidning qisilish chizig'i uning o'qidan iboratdir.

3. *Taqsimlanish parrametri.* Umumiy holga qaytaylik. “Qo'shni” bo'lgan l va $l + \Delta l$ yasovchilarni olib, ularning eng qisqa $\Delta\lambda$ masofasini shu yasovchilar orasidagi $\Delta\varphi$ burchakka bo'lamiz va hosil qilingan kasrning $\Delta u \rightarrow 0$ dagi limitini qaraymiz:

$$p = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \lambda}{\Delta \varphi}.$$

To'laroq muhokamalar bu limitning mavjudligini va quyidagiga tengligini ko'rsatadi:

$$p = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \lambda}{\Delta \varphi} = \frac{ldld\rho}{dl^2}. \quad (2.2.3)$$

Ana shu limit, ya'ni cheksiz yaqin yasovchilar orasidagi qisqa masofaning ular orasidagi burchakka nisbati to'g'ri chiziqli sirtning *taqsimlanish parametri* deyiladi.

Yoyiluvchi sirlarning hammasi uchun, masalan, urinmalar sirti uchun, (2.2.3) dagikasrning surati nolga aylanadi (silindrbundan mustasno), demak, bu sirlarning taqsimlanish parametrik nolga teng bo'ladi; ularning cheksiz yaqin yasovchilari "kesishadi".

Endi yo'naltiruvchi chiziq sifatida strikatsion chiziq olingan bo'lsin, ya'ni $v = 0$ ($r = \bar{\rho}$) deb faraz qilaylik, u holda

$$l' \bar{\rho}' = 0, \text{ demak, } l' \perp \bar{\rho}' \quad (2.2.4)$$

Haqiqatan, $dr = d\bar{\rho} + vdl + ldv$ dan $drdl = d\bar{\rho}dl + vdl^2$ hosil bo'ladi, bu esa $v = 0$ bilan $d\bar{\rho}dl = 0$ ($d\bar{\rho} \perp dl$) ning teng kuchli ekanini ko'rsatadi. A_0 qisilish nuqtasidagi N_0 normal $N_0 = [\bar{\rho}'l]$, ya'ni $N_0 \perp \bar{\rho}'$, $N_0 \perp l$; ikkinchidan, (2.2.4) ga asosan, $l' \perp \bar{\rho}'$, demak, $N_0 = ml'$. Buni isbotlash ham oson:

$$[N_0 l'] = [[\bar{\rho}'l]l'] = (\bar{\rho}'l)l - (ll')\bar{\rho}' = 0.$$

Endi m ni aniqlaymiz. Agar $N_0 l' = ml'^2$ ni va $N = [\bar{\rho}'l]$ ni e'tiborga olsak:

$$m = \frac{N_0 l'}{l'^2} = \frac{\rho' ll'}{l'^2} = \rho,$$

Endi $N = [\rho' l] + v[l'l]$ dan ushbu hosil qilinadi:

$$N = \rho l' + v[l'l].$$

Bu ifodaga kirgan l' va $[l'l]$ vektorlar o'zaro tik va uzunliklari tengdir. Demak, A_0 va M nuqtalardagi $N_0 = (\rho l')$ va N normallar orasidagi φ burchakning tangensi ushbuga teng:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{\rho}.$$

Bundan muhim natija kelib chiqadi: *striksion nuqtadan chiqib, yasovchi bo'yicha harakat qilganda sirt normalinin gburilish burchagi yurilgan v yo'lga proporsionaldir.*

Yoyiluvchi sirtning tuzilishini yana ham aniqroq bilish uchun, yana unga qaytaylik. Buholda l , l' , $\bar{\rho}'$ vektorlar komplanar va $l' \perp l$, $l' \perp \bar{\rho}'$, demak, $l \parallel \bar{\rho}'$, ya'ni yoyiluvchi sirt o'zining qisilish chizig'iga o'tkazilgan urinmalardan tuzilgandir. (Biz $l' \neq 0$, $\bar{\rho}' \neq 0$ deb hisoblaylik.)

Hullas, oldingi natijalarni e'tiborga olsak, *ha rqanday yoyiluvchi sirt yo silindr, yo konus, yo ma'lum bir fazoviy chiziq urinmalarining geometric o'rnidir* degan natijaga kelamiz.

Ellipsoid.

Ta'rif. Tanlab olingan dekart reperida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.5)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to'plami *ellipsoid* deyiladi. (2.2.5) tenglama bo'yicha ellipsoidning shaklini va ba'zi geometrik xossalarni aniqlaylik.

1. (2.2.5) tenglama ikkinchi tartibli algebraic tenglama bo'lgani uchun ellipsoid ikkinchi tartibli sirtidir.
2. (2.2.5) tenglamaning chap tomoniga nazartashlasak, uchta musbat sonning yig'indisi 1 ga tengdir, demak,

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \quad (2.2.6)$$

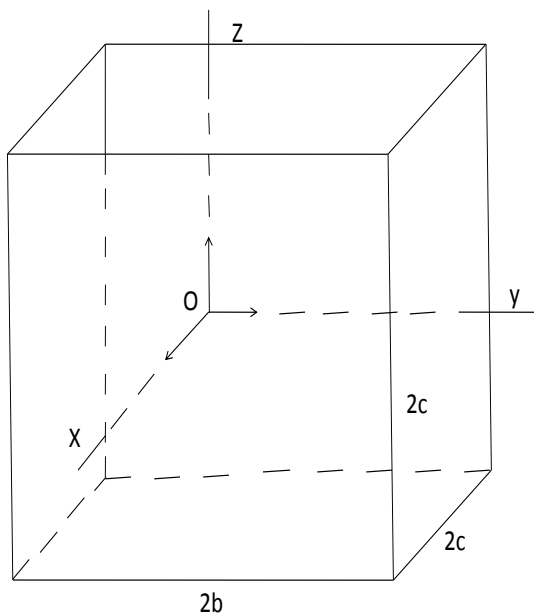
yoki

$$x^2 \leq a^2, \quad y^2 \leq b^2, \quad z^2 \leq c^2,$$

bulardan:

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c. \quad (2.2.7)$$

ellipsoid chegaralangan sirt bo'lib, q irralari $2a, 2b, 2c$ hamda simmetriya markazi koordinatalar boshidagi to'g'ri burchakli parallelepiped ichiga joylashgan figuradir.



11-Rasm.

3. (2.2.6) va (2.2.5) dan ko'rinadiki, qo'shiluvchilardan bittasi 1 ga teng bo'lsa, qolgan ikkitasi nol bo'lishi kerak: $\frac{x^2}{a^2} = 1, \frac{y^2}{b^2} = 0, \frac{z^2}{c^2} = 0$, bundan $x = \pm a, y = 0, z = 0$ va ellipsoid Ox ni $A_1(a, 0, 0), A_2(-a, 0, 0)$ nuqtalar kesib o'tadi.

Xuddi shunga o'xshash, bu ellipsoid Oy ni $B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0)$ nuqtalarda, Oz ni esa $C_1(0, 0, c), C_2(0, 0, -c)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Bu $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ nuqtalar ellipsoid uchlari deb ataladi.

4. Endi ellipsoidning koordinata tekisliklari bilan kesimini tekshiraylik:

a) xOy tekislik bilan kesishmasi:

$$\left. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}_{z=0} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

xOy o'qdagi ellipsdir.

b) xOz tekislik bilan kesishmasi:

$$\left. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}_{y=0} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

xOz o'qdagi ellipsdir.

c) yOz tekislik bilan kesishmasi:

$$\left. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}_{x=0} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

yOz o'qdagi ellipsdir.

Xulosa. (2.2.5) ellipsoidning koordinata tekisliklari bilan kesishmasi ellipslardan iborat.

5. Endi ellipsoidning koordinata tekisliklariga parallel tekisliklari bilan kesimini tekshiraylik.

xOy tekislikka parallel bo'lgan $z = h$ ($h \in R$) tekislik bilan kesimini qaraylik:

$$\left. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}_{z=h} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad (*)$$

bu yerda uchholbo'lishi mumkin.

a) $-c < h < c \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$ bo'lib,

$$(*) \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$$

maxrajdagi musbat sonlarni a'^2, b'^2 deb belgilasak, $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ bu esa markazi $(0, 0, h)$ nuqtada va o'zi $z = h$ tekislikda yotgan ellipsdir.

b) $h = c$ yoki $h = -c$ bo'lsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ bo'lib, bu shartni faqatgina $x = 0, y = 0$ qanoatlantiradi, demak, $z = c$ tekislik bu holda sirt bilan $(0, 0, c)$ nuqtada kesishadi.

c) $h > c$ yoki $h < -c \Rightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} < 0$ bo'lib (*) ning o'ng tomonida manfiy son hosil bo'ladi, chap tomoni esadoimo musbat, demak, $z = h$ tekislik ellipsoid bilan bu holda kesishmaydi.

6. Ellipsoidga tegishli (x_1, y_1, z_1) nuqta bilan bir vaqtda $(-x_1, -y_1, -z_1)$ nuqta ham unga tegishli: bundan ko'rinadiki, ellipsoid kooordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan (koordinata tekisliklariga nisbatan ham simmetrik joylashganliginiko'rsating).

Bu ma'lumotlar ellipsoidning (11-rasm) tuzilishidan darak beradi.

Xususiylar $a = b \neq c$ holda $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ aylanma ellipsoid hosil bo'ladi.

$$a = b = c \text{ da } x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

bo'lib, markazi koordinatalar boshidagi va radiusi a ga teng sferani aniqladi.

$a \neq b \neq c$ shartda ellipsoid uch o'qli deyiladi.

Misol. Dekart reperida o'qlari koordinata o'qlarida joylashgan hamda $M(2, 0, 1)$ nuqtadan o'tib, xOy tekislik bilan $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ ellips bo'yicha kesishuvchi ellipsoid tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlangan tenglama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (**)$$

ko'rinishda bo'lib, a, b, c ni topish kifoya, $(**)$ ni $z = 0$ tekislik bilan kessak, kesimda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips hosil bo'ladi, uni berilgan $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ ellips bilan solishtirsak,

$$a^2 = 8, \quad b^2 = 1 \quad (***)$$

$$M(2, 0, 1) \in (**); \quad \frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{8} + \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = 2,$$

izlangan tenglama:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1.$$

Giperboloidlar

Giperboloidlar ikki hil bo'ladi. Biror Π tekislikda giperbolani olib, uni mavhum o'qi atrofida aylantirsak, hosil qilingan sirt *bir pallali aylanma giperboloid* deb ataladi, lekin shu giperbolani haqiqiy o'q atrofida aylantirsak, hosil qilingan sirt *ikki pallali aylanma giperboloid* deb ataladi. Bu sirtlar giperboloidlarning xususiy holidir, biz quyida shu sirtlar bilan ayrim-ayrim tanishamiz.

I. Dekart reperida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.8)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to'plami *bir pallali giperboloid* deb ataladi.

Bir pallali giperboloidning shaklini va ba'zi geometric xossalarini aniqlaylik.

1. Ellipsoid singari bir pallali giperboloid ham ikkinchi tartibli sirtidir.
2. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ bilan bir vaqtda $M'_1(\pm x_1, \pm y_1, \pm z_1)$ ham giperboloidga tegishli, demak, bir pallali giperboloid nuqtalari koordinatalar boshiga, koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik joylashgan.

a) Ox o'q ($y = 0, z = 0$) bilan kesimini tekshiraylik:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ y &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow A_1(a, 0, 0), A_2(-a, 0, 0)$$

b) Shuning singari Oy o'q ($x = 0, z = 0$) bilan $B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0)$ nuqtalarda kesishadi, chunki:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ x &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b \Rightarrow B_1(0, b, 0), B_2(0, -b, 0)$$

c) Oz o'q bilan ($x = 0, y = 0$) kesishmaydi, haqiqatan,

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ x &= 0, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Haqiqiy sohada bu tengliklar bo'lishi mumkin emas.

Shuning uchun Oz o'q bir pallali giperboloidning *mavhum o'qi* deb ataladi. yuqorida hosil qilingan A_1, A_2, B_1, B_2 nuqtalar bir pallali giperboloidning *uchlari* deyiladi.

3. Endi koordinata tekisliklari bilan kesimini tekshiraylik.

$$a) \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kesim – ellips.

$$b) \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kesim – giperbola.

$$c) \left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kesim – giperbola.

4. xOy tekislikka parallel $z = h$ tekislik bilan kesimni aniqlaylik:

$$\left. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}_{z=h} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1$$

bu tenglama $z = h$ tekislikda ellipsni aniqlaydi, $|h|$ son kattalashgan sari ellipsning yarim o'qlari ham kattalashib, faqat $h = 0$ uchun ellips eng kichik o'qli bo'ladi.

5. xOz tekislikka parallel $y = h$ tekislik bilan kesimini tekshiraylik:

$$\left. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}_{y=h} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}. \quad (**)$$

Bu yerda quyidagi hollar yuz berishi mumkin:

a) $h = b$ bo'lsa, $(*) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ yoki

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

bo'lib, kesim ikkita kesishuvchi to'g'richiziqdan iborat.

b) $-b < h < b$ bo'lsa, $1 - \frac{h^2}{b^2} > 0$ bo'lib, $(*)$ quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1,$$

bu esa $y = h$ tekislikda mavhum o'qi Oz ga parallel giperbolani aniqlaydi.

c) $|h| > b$ bo'lsa, $1 - \frac{h^2}{b^2} < 0$ bo'lib, $(*)$ tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

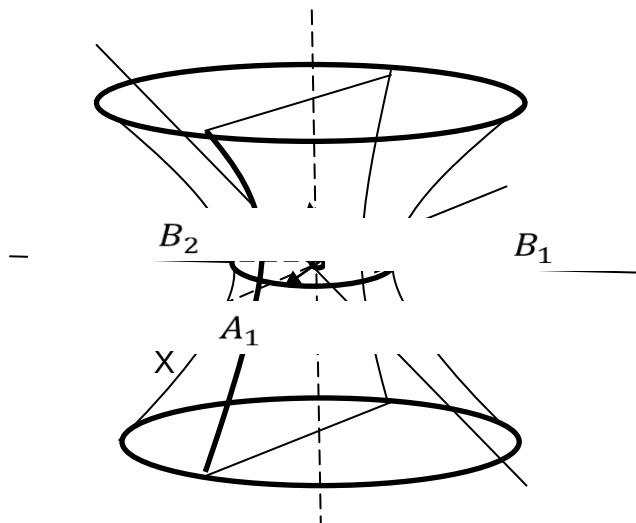
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right) \quad \left(\text{bunda } \frac{h^2}{b^2} - 1 > 0\right), \text{ bundan}$$

$$-\frac{x^2}{a^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} = 1,$$

bu tenglama $y = h$ tekislikda giperbola tenglamasi bo'lib, mavhum o'qi Ox o'qqa paralleldir.

Xuddi shu holler giperboloidni $x = h$ tekislik bilan kesganda ham sodir bo'ladi.

Shu ma'lumotlarga asosan, bir pallali giperboloidning shakli namoyon



bo'ladi (12-rasm)

12-Rasm.

$a = b$ da (2.2.8) tenglama $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ga keltiriladi, bu esa bir pallali aylanma giperboloidni aniqlaydi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.9)$$

yoki

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.10)$$

tenglamalar ham bir pallali giperboloidni bo'lib, ular mavhum o'qlar bilangina farq qiladi ((2.2.9) uchun mavhum o'q Oy, (2.2.10) uchun mavhum o'q Oxdir).

II. Fazoning

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2.11)$$

tenglamani qanoatlaniruvchi barcha nuqtalari to'plami *ikki pallali giperboloid* deb ataladi. (2.2.11)tenglama bo'yicha bu sirtning shaklini va ba'zi geometric xossalarini aniqlaylik.

Yuqoridagi bir pallali giperboloid tenglamasini tekshirishdagi ba'zi hollarni bu yerda mufassal ko'rmaymiz, chunki ular bevosita takrorlanadi:

- 1) ikki pallali giperboloid ikkinchi tartibli sirtidir;
- 2) ikki pallali giperboloid koordinatalar boshiga va koordinata tekislilariga nisbatan simmetrik joylashgan;
- 3) faqatgina Ox o'q bilan $A_1(a, 0, 0), A_2(-a, 0, 0)$ nuqtalarda kesishib, boshqa koordinata o'qlari bilan kesishmaydi, demak, yOz tekislik bilan ham kesishmaydi, demak, Oy, Oz mavhum o'qlar hisoblanadi. Bundan ko'rinib turibdiki, ikki pallali giperboloidikki qismdan iborat bo'lib, ular yOz tekislikka nisbatan simmetrik joylashgan;
- 4) (2.2.11)ning yOz tekislikka parallel $x = h$ tekislik bilan kesimini tekshiraylik:

$$\left. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}_{x=h} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$$

yoki

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1. \quad (*)$$

$$|h| > a \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} - 1 > 0; \quad (*) \text{ tenglama}$$

$$-\frac{x}{a^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1 \right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - 1 \right)} = 1$$

ko'rinishni olib, $x = h$ tekislikda ellipsni aniqlaydi.

$h = a$ da kesim faqat bitta $A_1(a, 0, 0)$ yoki $A_2(-a, 0, 0)$ nuqtadan iborat.

Boshqa koordinata tekisliklari va bu tekisliklarga parallel tekisliklar bilan kesimlari ham giperboladan iborat.

Ikki pallali giperboloidning shakli 13-rasmda ko'rsatilgan. $b = c$ shartda (2.2.11) tenglama $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$ ko'rinishni oladi va u $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

giperbolaning ($y = 0$ tekislikda) Ox o'q atrofida aylanishidan hosil qilinadi, u aylanma ikkipallali giperboloiddir. (2.2.11) tenglama $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ yoki $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ko'rinishli bo'lsa, bular ham ikki pallali giperboloid bo'lib, birinchisi uchun Ox, Oy o'qlar, ikkinchisi uchun Ox, Oz o'qlar mavhum o'qlar bo'ladi.

Misol: Dekart reperida $M_1(0, 0, 3)$ va $M_2(0, 0, -3)$ nuqtalar berilgan. Fazodagi shunday nuqtalar to'plamini topingki, ularning har biridan M_1, M_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati 4 ga teng bo'lsin.

Yechish: Faraz qilaylik, $M(x, y, z)$ nuqta so'ralgan xossaga ega bo'lgan nuqta bo'lsin, ya'ni $|\rho(M_1, M) - \rho(M_2, M)| = 4$, masala shartini koordinatalarda yozamiz:

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 3)^2} \right| = 4$$

yoki

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 3)^2} \right| = \pm 4$$

bundan

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 &= x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 \pm \\ &\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 3)^2} = 16 + 2z \end{aligned}$$

Yana bir marta kvadratga ko'tarib soddalashtirsak,

$$-\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1$$

bu tenglama ikkipallali giperboloidni aniqlaydi.

Paraboloidlar

Endi ikkinchi tartibli sirtlarning yana bir sinfi paraboloidlar bilan tanishamiz. Bu sirtlar ham ikki turdan iborat bo'lib, ularni ayrim – ayrim ko'rib chiqamiz.

I. Dekart reperida

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (p > 0, \quad q > 0) \quad (2.2.12)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazodagi barcha nuqtalar to'plami *elliptic paraboloid* deb ataladi.

Bu paraboloidning ham shaklini va ba'zi geometrik xossalarini (2.2.12) tenglamani tekshirish yo'li bilan aniqlaymiz.

1. Elliptik paraboloid ham ikkinchi tartibli sirt, undan tashqari, bu sirt koordinatalar boshidan o'tadi.
2. Koordinata o'qlari bilan nuqtalarini topaylik;

$$a) \quad Ox: \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} = 0, x = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)$$

$$b) \quad Oy: \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{q} = 0, y = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)$$

$$c) \quad Oz: \left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2z = 0, z = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)$$

Demak, elliptik paraboloid koordinata o'qlari bilan faqat koordinatalar boshidagina kesishadi.

3. Koordinata tekisliklari va ularga parallel tekisliklar bilan kesimini tekshiraylik:

- a) xOy bilan kesishish chizig'i:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0 \Rightarrow (0, 0, 0);$$

b) xOz bilan kesishish chizig'i;

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} = 2z \Rightarrow x^2 = 2pz,$$

bu tenglama xOz tekislikda simmetriya o'qi Oz dan iborat paraboladir;

c) yOz bilan kesishish chizig'i:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{y^2}{q} = 2z \Rightarrow (0, 0, 0)$$

bu ham simmetriya o'qi Oz dan iborat yOz tekislikdagi paraboladir;

d) $z = h$ tekislik bilan kesishish chizig'i:

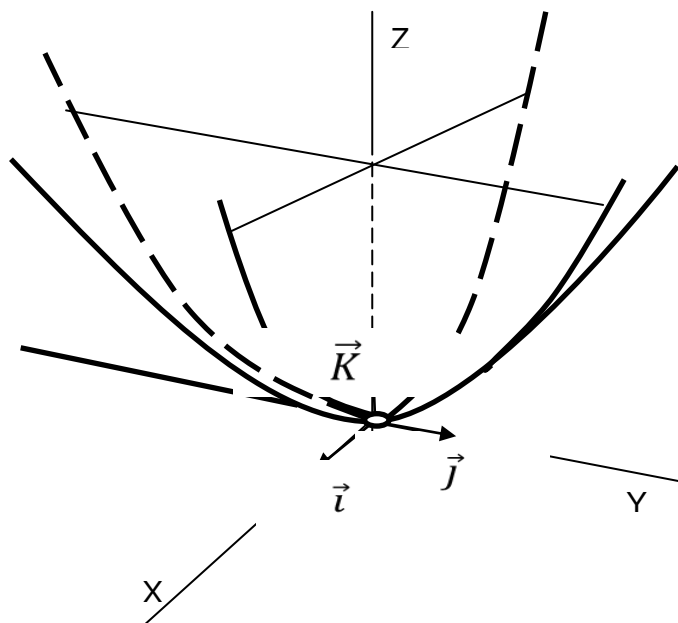
$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2z \\ z &= h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \quad (*)$$

$h = 0 \Rightarrow z = 0$; a) holiga qaytdik. $h < 0$ bo'lsa, p va q shartga asosan musbat, shuning, (*) tenglik o'rinli bo'lmaydi: $h > 0$ da

$(*) \Rightarrow \frac{x^2}{p \cdot 2h} + \frac{y^2}{q \cdot 2h} = 1$ bo'lib, bu tenglama $z = h$ tekislikdagi ellipsni bildiradi.

Bundan tashqari, x, y o'zgaruvchilar (2.2.12) tenglamada juft darajada qatnashganligi uchun elliptic paraboloid xOz, yOz tekisliklarga nisbatan simmetrik joylashadi.

Bu tekisliklarning kesishmasidan hosil bo'lgan Oz to'g'ri chiziq *elliptic*



paraboloidning o'qi deb ataladi.

14-Rasm.

Elliptik paraboloid 14-rasmda tasvirlangan. $p = q$ da tenglama $x^2 + y^2 = 2pz$ ko'rinishda bo'lib, aylanma paraboloid bo'ladi. O'qlari Ox yoki Oy dan iborat elliptik paraboloidning tenglamalari mos ravishda ushbu tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x \text{ yoki } \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y$$

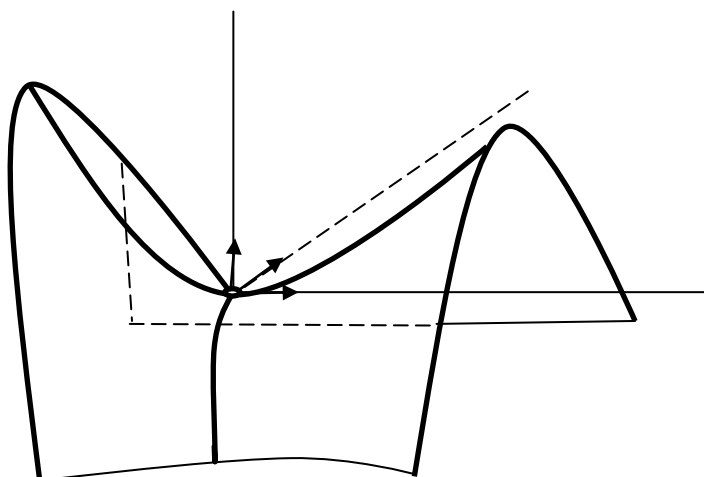
II. Dekart reperida

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad (2.2.13)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi fazo nuqtalari to'plami *giperbolik paraboloid* deb ataladi, tenglamasi bo'yicha giperbolik paraboloid shaklini va ba'zi geometrik xossalarni aniqlash mumkin. Quyida biz ba'zi xulosalarnigina beramiz.

1. Giperbolik paraboloid ikkinchi tartibli sirt bo'lib, koordinatalar boshidan o'tadi.

2. Koordinata o'qlari bilan faqat koordinatalar boshida kesishadi.
 - a) xOy tekislik bilan kesilganda kesimda ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqli hosil qilinadi;
 - b) xOz tekislik bilan kesilganda kesimda simmetriya o'qi Oz dan iborat $x^2 = 2pz$ parabola hosil bo'ladi;
 - c) yOz tekislik bilan kesilganda kesimda simmetriya o'qi Oz dan iborat $y^2 = -2qz$ parabola hosil bo'ladi.
3. $z = h$ tekislik bilan kesilganda kesimda
 - a) $h > 0$ shartda $\frac{x^2}{p \cdot 2h} - \frac{y^2}{q \cdot 2h} = 1$ giperbola.
 - b) $h < 0$ da $-\frac{x^2}{p \cdot 2h} + \frac{y^2}{q \cdot 2h} = 1$ giperbola hosil qilinadi.
4. Boshqa koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesilganda



kesimda doimo parabola hosil bo'ladi.

15-Rasm.

Shu ma'lumotlarga asoslanib giperbolik paraboloidni 15-rasmdagidek sirt ko'rinishida tasavvur qilish mumkin, ba'zan bu sirtni "egarsimon" sirt deb ham yuritiladi.

2.3. Ikkinchi tartibli sirtning invariantlari.

Bizga ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi berilgan bo'lsin,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Bu tenglamani chiziqli almashtirish yordamida soddalashtirib quydagi beshta ko'rinishga keltirish mumkin.

1. $s_1 X^2 + s_2 Y^2 + s_3 Z^2 + a''_{44} = 0 \quad (s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0).$
2. $s_1 X^2 + s_2 Y^2 + a'_{34} Z = 0 \quad (s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 = 0, a'_{34} \neq 0).$
3. $s_1 X^2 + s_2 Y^2 + a'_{44} = 0 \quad (s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 = 0, a'_{34} = 0).$
4. $s_1 X^2 + 2\sqrt{a'^2_{24} + a'^2_{44}} Y = 0 \quad (s_1 \neq 0, s_2 = s_3 = 0, a'^2_{24} + a'^2_{34} \neq 0).$
5. $s_1 X^2 + a''_{44} = 0 \quad (s_1 \neq 0, s_2 = s_3 = 0, a'_{24} = a'_{34} = 0).$

Ikkinchi tartibli sirtlarning invariantlari quydagilardan iborat bo'ladi,

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$I_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$I_6 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$I_7 = a'_{44} = a_{44}.$$

Ikkinchi tartibli sirtning umumiy almashtirishga nisbatan invariantlari quydagilardan iborat bo'ladi.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

2.4. Ikkinchi tartibli sirt tenglamalarini invariantlar yordamida soddalashtirish.

Ikkinchi tartibli sirtning burishga nisbatan invariantlarini topish uchun quyidagi uch o'zgaruvchiga bo'lgan kvadratik fo'rmani qaraymiz.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

bu kvadratik formani quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin.

$S_1x'^2 + S_2y'^2 + S_3z'^2$, bu yerda S_1, S_2, S_3 lar ikkinchi tartibli sirtning xarakteristik tenglamaning ildizlari.

$$S^3 - I_1S^2 + I_2S - I_3 = 0$$

Ikkinchi tartibli sirtning birinchi tip tenglamasini qaraylik,

$$S_1x''^2 + S_2y''^2 + S_3z''^2 + a_{44}'' = 0$$

$I_3 = s_1s_2s_3 \neq 0$, I_4 invariantni xisoblaymiz $I_4 = s_1s_2s_3a_{44}'' = I_3a_{44}''$ bu yerdan esa $a_{44}'' = \frac{I_4}{I_3}$ ekanligi kelib chiqadi.

Bulardan esa ikkinchi tartibli sirtning birinchi tip tenglamasini quydagicha yozish mumkin ekanligini ko'rishimiz mumkin.

$$S_1x''^2 + S_2y''^2 + S_3z''^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0.$$

Ikkinchi tartibli sirtning ikkinchi tip tenglamasini qarab chiqaylik,

$$s_1X^2 + s_2Y^2 + a_{34}'Z = 0,$$

Bu tenglama uchun $I_3 = s_1s_2s_3 = 0$, $I_2 = s_1s_2 \neq 0$. To'rtinchi invariantni xisoblaymiz $I_4 = -s_1s_2a_{34}''^2 = -I_2a_{34}''^2$,

Bu yerdab esa $a''_{34} = \pm \sqrt{-\frac{I_4}{I_3}}$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib ikkinchi tip tenglamani quydagicha yozish mumkin ekan,

$$S_1 x''^2 + S_2 y''^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_4}{I_3}} z'' = 0$$

Ikkinchi tartibli sirtning uchinchi tip tenglamasini qarab chiqaylik,

$$S_1 x''^2 + S_2 y''^2 + a''_{44} = 0,$$

bu tenglama uchun $I_3 = s_1 s_2 s_3 = 0$, $I_2 = s_1 s_2 \neq 0$, $I_4 = 0$,

$$I_5 = s_1 s_2 a''_{44} = I_2 a''_{44} \text{ bundan esa } a''_{44} = \frac{I_5}{I_2}$$

Demak uchinchi tip tenglamani quydagi ko'rinishda yozish mumkin ekan,

$$S_1 x''^2 + S_2 y''^2 + \frac{I_5}{I_2} = 0.$$

Ikkinchi tartibli sirtning to'rtinchi tip tenglamasini qarab chiqaylik,

$$s_1 x''^2 + 2a''_{24} y'' = 0, \text{ bu sirt tenglamasi uchun}$$

$$I_3 = s_1 s_2 s_3 = 0, I_2 = 0, I_1 = s_1, I_4 = 0, I_5 = -s_1 a''_{24}^2 = -I_1 a''_{24}^2.$$

$$\text{Bu yerdan } a''_{24} = \pm \sqrt{-\frac{I_5}{I_1}}$$

Demak to'rtinchi tip tenglamani quydagi ko'rinishda yozish mumkin ekan,

$$I_1 x''^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{I_5}{I_1}} y'' = 0.$$

Ikkinchi tartibli sirtning beshinchi tip tenglamasini soddalashtirilgandan kegin quydagi ko'rinishga kelar edi,

$$S_1 x''^2 + a''_{44} = 0.$$

Beshinchi tiptenglama uchun invariantlarni xisoblaymiz

$$I_3 = s_1 s_2 s_3 = 0, I_2 = 0, I_1 = s_1, I_4 = 0, I_5 = 0, I_6 = S_1 a''_{44}$$

bu yerdan $a''_{44} = \frac{I_6}{s_1} = \frac{I_6}{I_1}$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak beshinchi tip tenglamani quydagi ko'rinishda yozish mumkin ekan,

$$I_1 x''^2 + \frac{I_6}{I_1} = 0 \text{ yoki } x''^2 + \frac{I_6}{I_1^2} = 0.$$

XULOSA

Ushbu bitiruv malakaviy ishida ikkinchi tartibli sirt tenglamasini soddalashtirishning usullaridan biri bo'lmish invariantlar nazaryasi o'rganilgan.

Ikkinchi tartibli sirtlarning fazodagi vaziyatlarini o'rganishda ularning berilish usullariga xamda kanonik tenglamalariga etibor berilgan. Fazodagi ikkinchi tartibli sirtlar sifatida asosan aylanma sirtlar, ya'ni sferik sirtlar, silindrik sirtlar, konus sirtlar va ularni kesimlari o'rganilgan.

Aylanma sirtlar sifatida ellipsoid, giperbaloid, paraboloidlarni kanonik tenglamalari keltirib chiqarilgan. Ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi qaralib bu tenglamani almashtirishlar yordamida soddalashtirish masalasi o'rganilib, soddalashtirishda invariantlar nazaryasidan foydalanilgan.

Ikkinchi tartibli sirt tenglamasini soddalashtirish uchun uni chiziqli almashtirishlar yordamida beshta tipga ajratish mumkin ekanligi ko'rsatilib so'ngra bu ajratilgan ikkinchi tartibli sirt tenglamalarini kayfisientlari invariantlar orqali ifodalanishi ko'rsatilgan.

Umuman olganda ikkinchi tartibli sirt tenglamasini invariantlar orqali soddalashtirish ushbu bitiruv malakaviy ishida ancha qulay ekanligi ko'rsatilgan.

Yuqoridagi fikirlarni tasdiqlovchi misollar keltirilib ularni yechish usullari ko'rsatilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. I.A. Karimov. “O’zbekiston XXI asrga intilmoqda ”. Toshkent 2000-yil.
2. I.A. Karimov. “O’zbekistonning oz istiqlol va taraqqiyot yo’li ”. Toshkent.O’zbekiston 1992 yil.
3. I.A. Karimov. “ Barkamol avlod – O’zbekiston poydevori ”. Toshkent 1998
4. I.A. Karimov. “O’zbekiston XXI asr bo’sag’asida ”. O’zbekiston 1997 yil.
5. Погорелов А.В. “Геометрия”(ўрта мактабнинг 7 – 11 синфлари учун дарслик). Тошкент. “ Ўқитувчи” 1993 йил.
6. Кокстер Н.С, Грейтсер С.Л. “ Новые встречи с геометрией”. Москва. “ Наука” 1978 год.
7. Бахвалов С.В. “ Аналитическая геометрия”. Москва 1970 год.
8. Погарелов А.В. “ Аналитик геометрия ” Тошкент “ Укитувчи” 1983 йил.
9. Bahvalov S.V, Modenov P.S.Parxomenko A.S. “ Analitik geometriyadan masalalar tuplami ”. Toshkent- 2006 yil.
10. Собиров М.А, Юсупов А.Е. “Дифференциал геометрия курси” Тошкент-1959 йил.
11. ДадажоновН.Д, ЖўраеваМ.Ш. “Геометрия”, 1-қисм,Тошкент “Ўқитувчи”-1996 йил.
12. Александров А.Д. Нецветаев Ю.Н. “Геометрия”.Москва“ Наука” 1990 год.
13. Энциклопедия “элементарной математики” книги пятая (геометрия) москва “Наука” 1966 год.
14. Рокафеллер. Р. Вынуклый анализ. Издательство “МИР” Москва. 1973 год.
15. ЦубербиллерО.Н “Аналитикгеометрияданмасалаларвамашқлар” “Ўқитувчи” нашриёти. Тошкент– 1996 йил.
16. [Http//www.ilm.uz](http://www.ilm.uz)
17. [Http//www.ZiyoNet.uz](http://www.ZiyoNet.uz)