

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

Matematika kafedrası

Qo'lyozma huquqida

Toshmatova Ozodaxon Baxtiyor qizi

**HOSILAGA NISBATAN YECHILGAN BIRINCHI TARTIBLI ODDIY
DIFFERENSIAL TENGLAMALAR (ASOSIY TUSHUNCHALAR).**

5130100 – matematika
ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr akademik darajasini olish uchun yozilgan

BITIRUV MALAKAVIY ISH

Ish rahbari: f-m.n.

katta o'qituvchi N. Umrzaqov

ANDIJON-2016 yil

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
-------------	---

I-BOB. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar.

1.1-§. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama va uning yechimi haqida tushuncha.....	8
1.2-§. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasining qo`yilishi.....	30

II-BOB. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi.

2.1-§. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy, hususiy va mahsus yechimlari.....	45
2.2-§. Differensial tenglamaning integrali.....	49

XULOSA.....	53
-------------	----

FOYDALANILGAN ADBIYOTLAR.....	54
-------------------------------	----

Ta'limni tarbiyadan, tarbiyani esa ta'limdan ajratib bo'lmaydi-bu sharqona qarash, sharqona hayot falsafasi. Ana shu oddiy talabdan kelib chiqqan holda farzandlarimizni mustaqil va keng fikrash qobiliyatiga ega bo'lgan, ongli yashaydigan komil insonlar qilib voyaga yetkazish - ta'lim-tarbiya sohasining asosiy maqsadi va vazifasi bo'lishi lozim.

Islom Karimov

Kirish

Mustaqillikning dastlabki yillaridanoq, butun mamlakat miqyosida ta'lim-tarbiya, ilm-fan, kasb-hunar o'rgatish tizimlarini tubdan isloh qilishga nihoyatda katta zarurat sezila boshladi. Kadrlar tayyorlash milliy dasturini ishlab chiqish bilan bog'liq jarayon uzoq yillar davomida bu sohada talay muommolar yig'ilib qolganini ko'rsatdi.

Prezidentimiz Islom Karimov "Ta'lim-tarbiya tizimidagi islohotlar boshlangan dastlabki yillarda jahon tajribasi va hayotda o'zini ko'p oqlagan haqiqatdan kelib chiqib, agar bu maqsadlarimizni muvaffaqiyatli ravishda amalga oshira olsak, tez orada yangi ta'lim modelining kuchli samarasiga erishamiz" degan fikrni qaytgan edi. Bu esa biz tarbiya qilayotgan sog'lom avlodning safimizga tobora ildam kirib borishi bilan yanada yaqollroq seziladi.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturini amalga oshirish jarayonida barcha ta'lim muassasalarni moddiy texnika bazasini mustahkamlash, talim jarayonining mazmunini tubdan takomillashtirish kabi katta ishlar qilinmoqda.

"Yoshlar yili", "Qishloq taraqqiyoti va farovonligi yili", "Barkamol avlod yili", "Kichik biznes va xususiy tadbirkorlik yili" kabi Davlat dasturlari "Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi"ning tadrijiy davomi, desak xato bo'lmaydi.

Ushbu dasturlar ta'lim taraqqiyoti va takomilida alohida o'rin tutdi. Ayniqsa, Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi doirasida, uning tarkibiy qismi sifatida 2004-

2009 yillarda amalga oshirilgan maktab ta'limining rivojlantirish umummilliy davlat dasturi, 1996 yilda ishlab chiqilgan Oliy ta'limni rivojlantirish kontseptsiyasi, 2011-2016 yillarda Oliy ta'lim muassasalarining moddiy-texnik bazasini mustahkamlash va yuqori malakali mutaxassislar tayyorlash sifatini tubdan yaxshilash bo'yicha dastur (2011 yil 20 may) yohud shu singari 10 dan ortiq huquqiy xujjatlar ta'lim rivoji va ijtimoiy hayotimizda tub burilish yasadi.

O'tgan yillarda oliy ta'lim tizimi tubdan o'zgardi. Jumladan, ikki bosqichli tizim - bakalavriat va magistraturaga o'tildi, talabalarni mamlakatning barcha hududida bir kunda va bir vaqtda kirish test sinovlari orqali qabul qilishga to'liq o'tildi. Oliy ta'lim tizimini moliyalashning yangi tizimi yo'lga qo'yildi.

O'tgan yillar davomida yurtimizda jahondagi nufuzli ko'plab universitetlar bilan yaqin hamkorlik aloqalari o'rnatildi. Buning natijasida Toshkentda Buyuk Britaniyaning Halqaro Vestminster universiteti ish boshladi. I.Gubkin nomidagi Rossiya neft va gaz davlat universiteti, Italiyaning Turin politexnika universiteti, Singapur menejmentni rivojlantirish instituti, Plexanov nomidagi Rossiya iqtisodiyot akademiyasi, M. Lomonosov nomidagi Moskva davlat universitetining Toshkent shahridagi filiallari tashkil etildi.

Hozirgi zamon matematikaning amaliy faoliyatga chuqur kirib borishi, uni fan-texnika va iqtisodda qo'llanishi bilan xarakterlanadi. Boshqacha aytganda, matematika amaliy masalalarni yechishda metodologik asos bo'lib qoldi. Shu bilan bir qatorda masalalar yechishda matematikadan tadqiqiy ko'nikma va malakalarni shakllantirmasdan turib, foydalanish mutlaqo mumkin emas. Tadqiqiy bilim, amaliy ko'nikma va malakalar matematikaning nazariy qurilishi bilan uning amaliy muammolarini bog'laydi. Matematik tushunchalarning asosiy negizini tasvirlaydi, amaliy masalalarni yechishda matematikani qo'llash vositasi bo'lib xizmat qiladi. Bu esa, hozirgi paytda tadqiqiy ko'nikmalarning umumta'lim va umummadaniy qimmatga ega ekanligini ko'rsatadi.

Mavzuning dolzarbligi. Diferensial tenglamalar nazariyasi fanini o'rganishga ayni vaqtda juda ehtiyoj sezilmoqda. Chunki differensial tenglamalar nazariyasi turli amaliy masalalarni yechishga tadbiri bilan muhim ahamiyatga ega. Shuning uchun bu yo'nalishda ko'plab ilmiy ishlar qilinmoqda.

Mavzuning o'rganilish darajasi. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy diferensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar berilgan bo'lib, ular butun kursni o'rganish mobaynida zarur bo'ladi.

Ishning maqsad va vazifalari. Ko'pgina tabiiy va texnika masalalarini yechish shunday noma'lum funksiyalarni izlashga keltiriladiki, bunda bu funksiya berilgan hodisa yoki jarayonni ifodalab, ma'lum munosabatlar va bog'lanish esa shu noma'lum funksiya va uning hosilalari orasida beriladi. Mana shunday munosabat va qonunlar asosida bog'langan ifodalar differensial tenglamalarga misol bo'ladi. Bitiruv malakaviy ishda bayon qilingan tushunchalar diferensial tenglamalar nazariyasining poydevori sifatida xizmat qiladi.

Obyekti va predmeti. Ushbu malakaviy ishi kirish, asosiy qism, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Asosiy qism quyidagi boblardan tashkil topgan:

1.1 paragrafda biz hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalarni ko'rib chiqamiz:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

Shu bilan birgalikda biz aylantirilgan tenglamani ham $f(x, y)$ nuqtalari atrofida cheksizlikka aylanuvchi holatlarinni ko'rib chiqamiz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)} \quad (2')$$

Ko'p holatlarda (2) va (2') tenglamalari o'rniga ularga teng bo'lgan differensial tenglamani ko'rib chiqish maqsadga muvofiqdir.

$$dy - f(x, y)dx = 0$$

Tasavvur qilamiz, (2) tenglamining o'ng tomoni $f(x, y)$ qandaydir A to'plam osti (x, y) moddiy tekisligida belgilangan. (a, b) intervalida aniqlangan $y = y(x)$

funktsiyani biz (2) tenglaminig shu intervalidagi yechimi deb hisoblaymiz ($y = y(x)$) yechimi $[a, b), (a, b], [a, b], (-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, +\infty)$ kabi intervallarda ham aniqlash mumkin).

1.2 paragrafda differensial tenglamalar teoremasidagi eng muhim masalalardan biri Koshi masalasi deb ataluvchi masala yoritilgan.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

(2) tenglama uchun Koshi masalasi yoki boshlang'ich masala quyidagicha qo'yiladi: (2) masalaning barcha yechimlari orasida

$$y = y(x)$$

shunday yechim topish kerakki, $y(x)$ funktsiyasi x_0 mustaqil o'zgaruvchining berilgan sonli qiymatida y_0 sonli qiymati ko'rinishiga kirish kerak, ya'ni

$$y(x_0) = y_0$$

Bu yerda x_0 va y_0 — birilgan sonlar, demak (36) yechim :

$$x = x_0 \text{ da } y = y_0$$

shartga mos keladi.

Ikkinchi bobda hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimini o'rganamiz.

2.1 paragrafda hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy, hususiy va mahsus yechimlari ko'rib o'tilgan.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tenglama cheklanmagan miqdordagi yechimlarga ega. Tenglamaning bir dona C ixtiyoriy doimiysiga bog'liq yechimlar oilasini

$$y = \varphi(x, C)$$

odatda ushbu tenglamaning umumiy yechimi deb ataydilar.

Agar

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f[\varphi(t), \psi(t)]$$

tenglama yechimi faqatgina ushbu tenglama uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi nuqtalaridan iborat bo'lsa, biz bunday yechimni xususiy yechim deb ataymiz.

Koshi masalasi yechimining yagonaligi sharti xar bir nuqtasida buzuluvchi yechimni maxsus yechim deb ataymiz.

2.2 paragrafda oddiy differensial tenglamalar teoriyasida ham, xususiy hosilali tenglamalar teoriyasida ham katta o'rin tutuvchi yana bir tushuncha kiritamiz. Bu differensial tenglamaning integrali tushunchasidir.

Tasavvur qilaylik, quyidagi differensial tenglamani integrallashtirib ixtiyoriy doimiy C ga nisbatan yechilgan umumiy integral olamiz:

$$\phi(x, y) = C$$

Odatda yuqoridagi tenglamaning o'ng tomonini ushbu berilgan differensial tenglamaning integrali deb ataydilar.

Izlanyatgan funksiya xossalarini o'rganish va qiymatini hisoblash maqsadida imkon bo'lganda tenglamani kvadraturalarda integrallashga harakat qiladilar.

(2) tenglamaning kvadraturalarda integrallashuvi masalasini yechimi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ funsiyasi ko'rinishiga bog'liq. Umumiy hollarda (2) tenglama kvadraturalarda integrallashmaydi. Lekin $f(x, y)$ funksiya sinfining ba'zi xususiy ko'rinishlarida uni kvadraturalarda integrallashuviga erishish mumkin. Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafi bunday tenglamalarning eng muhim tiplariga bag'ishlangan.

Ilmiy yangiligi. Bu boblarda hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar to'liq va tushunarli yoritilgan. Shuning uchun bitiruv malakaviy ishi natijalaridan foydalanish natijasida kadrlar malakasini oshirish imkoni bo'ladi.

Amaliy ahamiyati. Oliy o'quv yurti talabalariga differensial tenglamalar nazariyasi fanini o'rganishda qo'llanma sifatida asqotadi deb hisoblayman.

I-BOB. HOSILAGA NISBATAN YECHILGAN BIRINCHI TARTIBLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR.

1.1-§. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama va uning yechimi haqida tushuncha

Birinchi tartibli tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Biz hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalarni ko'rib chiqamiz:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

Shu bilan birgalikda biz *aylantirilgan* tenglamani ham $f(x, y)$ nuqtalari atrofida cheksizlikka aylanuvchi holatlarinni ko'rib chiqamiz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)} \quad (2')$$

Ko'p holatlarda (2) va (2') tenglamalari o'rniga ularga teng bo'lgan differensial tenglamani ko'rib chiqish maqsadga muvofiqdir

$$dy - f(x, y)dx = 0 \quad (3)$$

Ikkala o'zgaruvchi x va y ushbu tenglamaga teng huquqli kiradilar va biz ularning har qaysisini mustaqil o'zgaruvchi sifatida qabul qilishimiz mumkin.

(3) tenglamamning ikkala qismini qandaydir $N(x, y)dy$ funktsiyasiga ko'paytirib simmetrik tenglama hosil qilamiz:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

Bu yerda $M(x, y) = -f(x, y)N(x, y)$. Aksincha har qanday (4) ko'rinishdagi tenglamani (2) yoki (2') tenglama ko'rinishida uni $\frac{dy}{dx}$ yoki $\frac{dx}{dy}$ ga nisbatan yechib yozish mumkin, shuning uchun (4) tenglama quyidagi ikki tenglamaga tengdir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{va} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad (5)$$

Ba'zida tenglama simmetrik deb ataluvchi shaklda yoziladi:

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)} \quad (6)$$

Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi.

Tasavvur qilamiz, (2) tenglamining o'ng tomoni $f(x, y)$ qandaydir A to'plam osti (x, y) moddiy tekisligida belgilangan. (a, b) intervalida aniqlangan $y = y(x)$ funksiyani biz (2) tenglaminig shu intervalidagi yechimi deb hisoblaymiz

($y = y(x)$ yechimi $[a, b], (a, b], [a, b], (-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty), [a, +\infty), (-\infty, +\infty)$ kabi intervallarda ham aniqlash mumkin),

agar :

1) (a, b) intervalidagi x ning barcha qiymatlari uchun $y'(x)$ hosilasi mavjud. (Bundan $y = y(x)$ yechimi butun aniqlanish maydoni doirasida uzilmas funksiya ekanligi kelib chiqadi).

2) $y = y(x)$ funksiyasi (2) tenglamani (a, b) intervalidagi x ning barcha qiymatlari uchun haqiqiy bo'lgan ayniyatga aylantiradi:

$$y'(x) \equiv f[x, y(x)] \quad (7)$$

Bu (a, b) intervalidagi x ning har qanday qiymatida $[x, y(x)]$ nuqtasi A to'plamiga tegishliligini va $y'(x) = f[x, y(x)]$.

(2) tenglama bilan birga aylantirilgan (2') tenglama ham ko'rib chiqilyatgani uchun, ushbu tenglamining $x = x(y)$ yechimini (2) tenglama yechimiga tenglatish tabiiydir. Shu ma'noda biz keyingi holatarda, qisqa qilib (2') tenglam yechimlarini (2) tenglama yechimi deb ataymiz.

1-misol.

$$y = e^{2x} + e^x \quad (8)$$

funksiyasi

$$y' = y + e^{2x} \quad (9)$$

tenglamaning $(-\infty, +\infty)$ intervalidagi yechimidir, chunki u ushbu intervalda belgilanib differentsiallanadi va uni (9) tenglamaga qo'yib x ning barcha qiymatlari uchun xos bo'lgan ayniyat hosil qilamiz:

$$2e^{2x} + e^x \equiv e^{2x} + e^x + e^{2x} \quad (10)$$

2-misol

$$y = \operatorname{tg}(x) \quad (11)$$

funksiya

$$y' = y + 1 \quad (12)$$

tenglamanning $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalidagi yechimidir.

3-misol.

$$y = \frac{1}{1-x} \quad (13)$$

funksiya

$$y' = y^2 \quad (14)$$

tenglamining $(-\infty, 1)$ intervalidagi yechimidir.

Ba'zida (2) tenglama yechimini (7) ayniyatga aylantiruvchi $y = y(x)$ funksiyasini, ya'ni (2) tenglama yechimini ushbu tenglama integrali deb ataydilar.

Yechimning oshkormas va parametrik ko'rinishda berilishi.

Differentsial tenglamaning yechimini har doim ham aniq ko'rinishda olib bo'lmaydi. Undan yashqari aniq ko'rinishdagi yechim o'rganish va qo'llanish uchun doim ham qulay bo'lavermaydi. Shuning uchun tenglamani integrallashtirishda ko'p hollarda yechimning oshkormas ko'rinishini hosil qilish bilan kifoyalanadilar. Biz

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (15)$$

tenglamasi (2) tenglamaning yechimining oshkormas shakli deb hisoblaymiz, qachonki u y ni x ning, $y = y(x)$, oshkormas funktsiyasi sifatida olsak va u (2) tenglamaning yechimi bo'lsa.

Bu holda (15) da $y = y(x)$ ni nazarda tutib, olingan ayniyatni x bo'ylab differensiallab va $\frac{dy}{dx}$ ni $f(x, y)$ ga almashtirib

$$\Phi'_x + \Phi'_y f(x, y) = 0 \quad (16)$$

tenglikka yetib kelamiz va u (15) nisbat tufayli aynan bajarilishi kerak.

4-misol. *Differentsial tenglama berilgan bo'lsin*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)} \quad (17)$$

Tenglamani olamiz

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (18)$$

va (16) tenglik tuzamiz. Hosil qilamiz:

$$2x + 2y \frac{x + y(x^2 + y^2 - 1)}{-y + x(x^2 + y^2 - 1)} = 0 \quad (19)$$

Bu tenglik (18) tenglama tufayli qoniqtiriladi. Demak u berilgan differentsial tenglamaning yechimini noaniq shaklda belgilaydi.

Ba'zida (2) tenglamaning yechimi parametrik shaklda olinadi.

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (20)$$

Biz (20) tenglama (2) tenglamaning yechimini parametrik shaklda (t_0, t_1) oralig'ida belgilaydi deb hisoblaymiz agar quyidagi ayniyat mavjud bo'lsa:

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f[\varphi(t), \psi(t)] \quad (21)$$

5-misol.

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (22)$$

tenglama

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} \quad (23)$$

tenglamaning yechimini $[0, 2\pi]$ oralig'ida belgilaydi, chunki bu intervalda quyidagi ayniyat mavjud

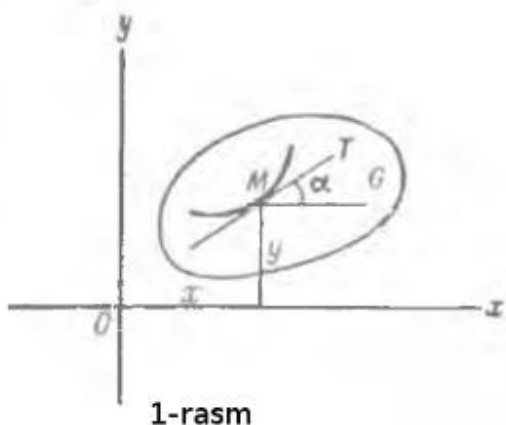
$$\frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{a \cos t}{b \sin t} \quad (24)$$

Geometrik talqin.

x va y ni tekislikdagi to'g'ri burchakli koordinatalar sifatida ko'rib chiqamiz. U holda (2) tenglamaning $y = \varphi(x)$, $\Phi(x, y) = 0$ yoki $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ yechimlari bu tenglamaning integral egri chizig'i deb ataluvchi egri chiziqqa mos bo'ladi. Ba'zida integral egri chiziqning o'zi yechim deb ataladi. Integral egri chiziqlarning geometrik ma'nosi qanday? Ular tekislikda o'tkazilishi mumkin bo'lgan boshqa egri chiziklardan nimasi bilan farq qiladi?

Tasavvur qilamiz muhokama qilinayotgan integral egri chiziqlar mavjud. Integral egri chiziqlarning mavjudligi masalasi 6 va 7 punktlarda ko'rib chiqamiz.

Tasavvur qilamiz (2) tenglamaning o'ng tarafi aniqlangan va G maydonining (x, y) o'zgarishi cheklangan. (1-rasm)



(G maydoni deganda biz bo'sh bo'lmagan G nuqtalarning ikki xususiyatga ega to'plamini tushunamiz 1) G to'plamining har bir nuqtasi ichki, ya'ni atrofining bir qismi bilan unga tegishli. 2) G to'plami bog'langan, ya'ni bu to'plamning har ikki nuqtasini butunlay G ning ichidagi cheklangan bo'g'imlarli sinik chiziq bilan

tutashtirish mumkin.

G maydonining so'ngisi bo'lgan, lekin unga tegishli bo'lmagan nuqtalar to'plami G maydonining chegarasi deb aytiladi.

G maydoni chegarasi bilan birgalikda cheklangan G hudud deb nomlanadi.)

Ushbu hududning har bir $M(x, y)$ nuqtasi orqali Ox o'qi bilan ushbu nuqtada tangensi (2) tenglamaning o'ng qismiga teng α burchakli kesma o'tkazamiz $\tan \alpha = f(x, y)$ (aniqlik uchun bu kesmani yagona deb hisoblaymiz, ya'ni uning uzunligi birga teng va markzai $M(x, y)$ nuqtasida deb hisoblaymiz), shu bilan birgalikda ko'rsatilgan kesmaning ikkala yo'nalishi ham bizga farqi yo'q. Shunday qilib (2) tenglama qandaydir yo'nalsihlar maydonin belgilaydi deyish mumkin.

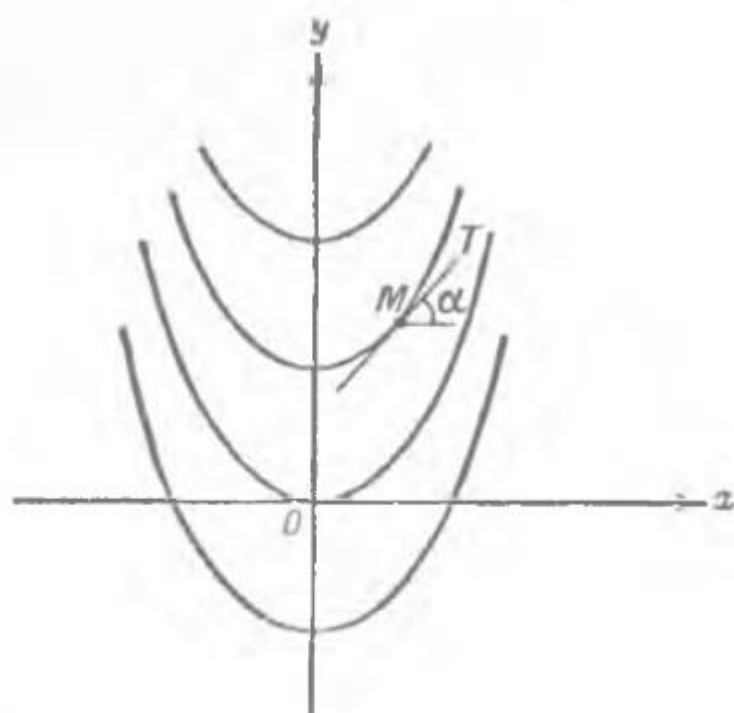
Shunda (2) tenglama *geometrik jihatdan integral egri chiziqlarning har bir nuqtasiga tegishli urinma yo'nalishi ushbu nuqtaning maydondagi yo'nalishi bilan mos kelishi faktini aks etadi*. Ushbu xossa integral egri chiziqlarni boshqa egri chiziqlardan ajratib turadi.

Har qanday birinchi tartibli differentsial tenglama uning barcha integral egri chiziqlari urinmalarining ba'zi umumiy xossalarini aks ettiradi. Integratsiya vazifasi ushbu xossaga qarab integral egri chiziqlar oilasini tiklashdan iboratdir.

6-misol.

$$y' = 2x \quad (25)$$

tenglamani olamiz. Unga $y = x^2$ funksiyasi mos keladi, va unga tepasi koordinatalar boshida bo'lgan parabola mos keladi, lekin unga $y = x^2 + C$, C -ixtiyoriy doimiy, ko'rinishdagi har qanday funksiya ham mos keladi, ya'ni integrak egri chiziqlar parabolalarning butun boshli oilasini tashkil qiladi (2-rasm).



2-rasm

Ularning hammasi umumiy bir xossaga ega: Har qanday integral egri chiziqning har bir $M(x, y)$ nuqtasida MT urinmasining burchak koeffitsienti ushbu nuqtaning abtsissasining ikki hissasiga teng: $\tan \alpha = 2x$.

(2) differentsial tenglama bilan belgilanuvchi maydon qiyalik burchagi bir hil bo'lgan egri chiziq ushbu tenglamaning izoklinasi deb ataladi. Izoklina tenglamasi

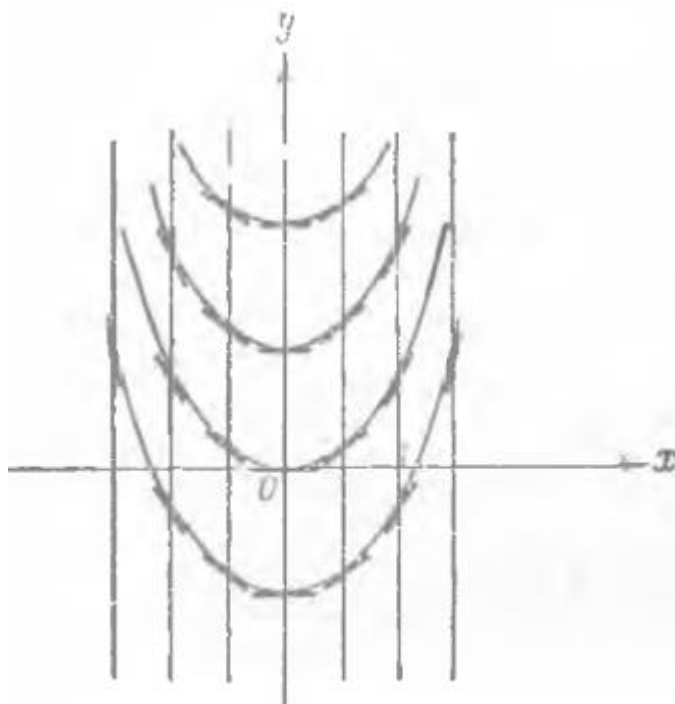
$$f(x, y) = k \quad (26)$$

bu yerda k — doimiy son.

7-misol.

(25) tenglamaning izoklinanasi masalasini ko'rib chiqamiz. O'ng tarafni k doimiy soniga tenglashtirib Oy o'qiga paralel to'g'ri chiziqlar izoklina ekanligini ko'ramiz.

Jumladan $x = \frac{1}{2}$ to'g'ri chizig'ining har bir nuqtasida maydon qiyaligi 1ga teng, demak ushbu to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi integral egri chiziqlar urinmalari Ox o'qi bo'ylab musbat yo'nalishli burchak hosil qiladilar. Izoklinlarning yetarli darajada «zich» oilasini qo'llab biz (25) tenglamaning integral egri chiziqlari bo'yicha aniq tasavvurga ega bo'lishimiz mumkin. (3-rasm).



3-rasm

Agar (2) tenglamasida o'ng taraf musbat (manfiy) belgini saqlab qolsa, tenglamaning har qanday yechimi o'z nuqtasida ortadi (kamayadi), demak hamma integral egri chiziqlar yuqoriga (pastga) yo'naltirilgan bo'ladi. Har bir nuqtasidan integral egri chiziq o'tuvchi va oxirigisi (agar bu chiziq bilan mos kelmaydigan bo'lsa) bu nuqtada ekstremumga ega bo'lgan chiziq ekstremumlar chizig'i deb ataladi.

6-misolda ekstremumlar chizig'i, ya'ni minimumlar chizig'i, ravshanki, Oy ($x = 0$) o'qidir, chunki unda $y' = 0$, o'ng va chap tarafida esa y' mos ravishda manfiy va musbat belgilarga ega.

Agar (2) tenglama doirasidagi y dan ikkinchi hosila ya'ni

$$y'' - \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) \quad (27)$$

funksiyasi musbat (manfiy) belgini saqlab qolsa, har qandayday integral egri chiziq tepaga (pastga) egilgan bo'ladi. Integral egri chiziqlar egrilgan nuqtalarga ega bo'lgan chiziqlar egrilik nuqta chiziqlari deb ataladi.

Yuqorida biz $f(x, y)$ ko'rilyatgan G hududning har bir nuqtasida cheklangan deb tasavvur qilganmiz. Shu bilan Oy o'qiga paralel yo'nalishni cheklagan edik. Geometrik jihatdan bu cheklovni oqlab bo'lmaydi. Bu yo'nalishni ham hisobga olib, 1-paragrafda aytilgandek (2') tenglamani ham $f(x, y)$ nuqtalari atrofida cheksizlikka aylanuvchi holatlarda ishlatgan holda ko'rib chiqamiz,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$$

Agar (2) tenglamaning o'ng tomoni (x,y) nuqtasida $\bar{0}$ korinishdagi aniqmaslikka (ochilmaydigan) aylansa, (2') tenglamasining o'ng tarafi ham ushbu nuqtada $\frac{0}{0}$ korinishdagi aniqmas ko'rinishga ega bo'ladi. Bu holatda biz ushbu nuqtada maydon aniqlanmagan va u orqali bir dona ham integral to'g'ri chiziq o'tmagan deb aytamiz. Bu $y=y(x)$ yoki $x=x(y)$ ko'rinishdagi integral egri chiziqlar mavjudligini cheklamaydi va ular quyidagi hossalarga ega bo'ladi

$$x \rightarrow x_0 \text{ da } y(x) \rightarrow y_0 \quad (28)$$

yoki

$$y \rightarrow y_0 \text{ da } x(y) \rightarrow x_0 \quad (29)$$

Ushbu integral to'g'ri chiziqlar haqida biz ular (x_0, y_0) chegardosh deb aytamiz.

Shunga mos ravishda biz (4) tenglamaning hech bir integral egri chizig'i $M(x, y)$ va $N(x, y)$ bir vaqtning o'zida nolga aylanuvchi nuqtadan o'tmaydi deb hisoblaymiz. Gap faqat bunday nuqtaga chegaradosh bo'lgan integral egri chiziqlar haqida borishi mumkin.

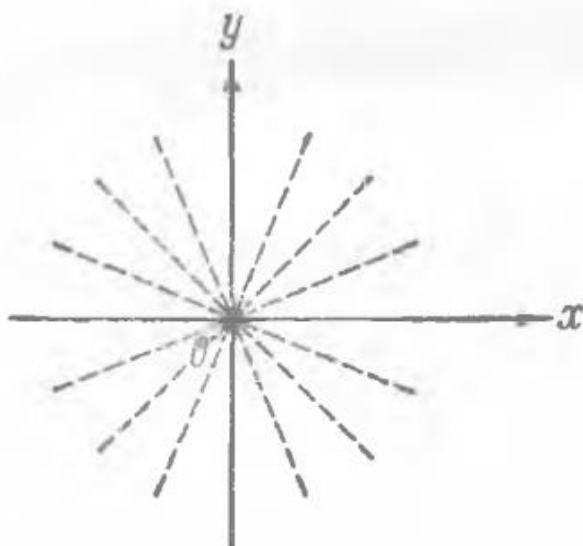
8-misol. Yo'nalishlar maydonini tuzib tenglamaning integral egri chiziqlarini toppish kerak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (30)$$

Bu yerda $x=0, y=0$ nuqtasida maydon belgilanmagan. $x=0, y \neq 0$ nuqtalari uchun

aylantirilgan tenglamani ko'rib chiqamiz

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \quad (31)$$



4a-rasm

Ravshanki har bir $(x,y) [\neq (0,0)]$ nuqtasida maydon yo'nalishi shu nuqta va koordinatalar boshidan o'tivchi to'g'ri chiziq yo'nalsihi bilan mos keladi (4a rasm).

Shuning uchun integral egri chiziqlar yarim to'g'ri chiziqdir:

$$y = kx \quad (x \neq 0) \quad (32)$$

Oy o'qining yuqori va quyi qismi ham integral egri chiziqdir, bu (31) tenglamadan kelib chiqadi

$$x = 0 \quad y \neq 0 \quad (33)$$

Shunday qilib (30) tenglamaning integral egr chiziqlari koordinatalr boshidan boshlanuvchi barchi arim to'g'ri chiziqlardir. (4b rasm). ($ydx - xdy = 0$ tenglamaning (30) va (31) tenglamalørga ekvivalent integral egri chiziqlari koordinatalr boshidan chiquvchi yarim to'g'ri chiziqlardir). Ushbu yarim to'g'ri chiziqlar bir vaqtning o'zida izoklinalar.

9- misol.

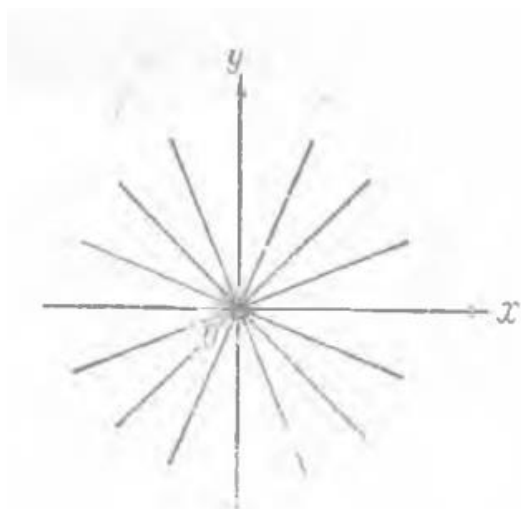
Tenglamani olamiz:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (34)$$

Bu yerda $x=0$, $y=0$ nuqtalarida maydon aniqlanmagan, $x \neq 0$ va $y \neq 0$ nuqtalari uchun quyidagi tenglamani qo'llash zarur.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \quad (34')$$

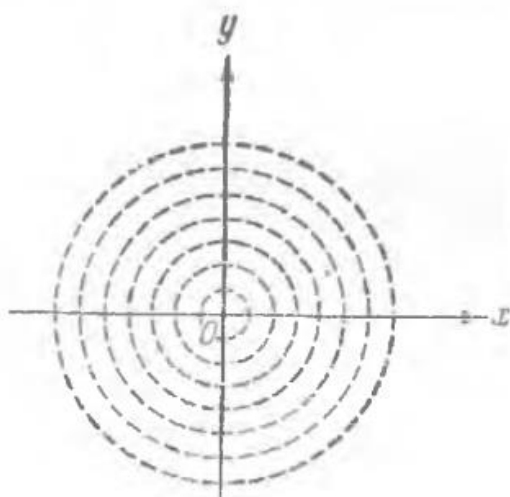
Avvalgi misolga o'xshab izoklinalar koordinatalr boshidan chiquvchi yarim to'g'ri chiziqlardir. Lekin u yerda har bir izoklina integral egri chiziq bo'lsa, bu yerda hech qaysinisi integral egri chiziq emas.



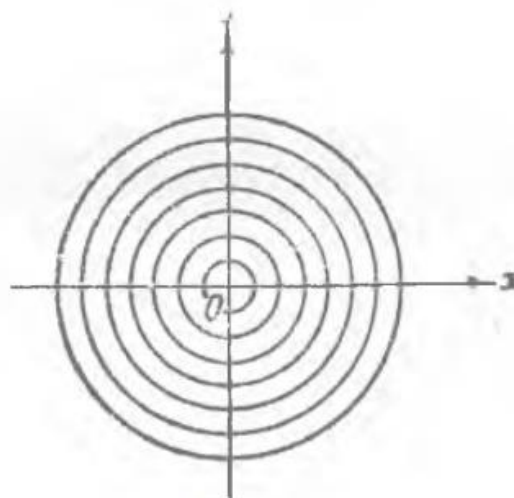
4b-rasm

(34) va (30) tenglamalarning o'ng tarafini solishtirib (34) tenglama orqali belgilangan maydon (5a-rasm) (30) tenlama bilan belgilangan maydonga (4a-rasm) ortogonal ekanligini ko'ramiz, ya'ni har bir (x,y) nuqtasida ushbu tenglamalar orqali belgilanuvchi yo'nalish o'zaro perpendikulyar. Shuning uchun (34) tenglamaning integral egri chiziqlari markazi koordinatalar boshidagi doiralardir (5b-rasm):

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (35)$$



5a-rasm



5b-rasm

$(0,0)$ nuqtasi orqali va unga chegaradosh hech bir integral egri chiziq o'tmadyi, Ox oqi bilan integral egri chiziqlar tutashuvchi nuqtalarda chegaradoshlar Oy o'qiga paralel va bu (34') tenglamani e'tiborga olinsa, ushbu nuqtalardagi maydon yo'nalishiga mos keladi.

1.2-§. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasining qo'yilishi.

Koshi masalasi. Differentsial tenglamalar teoremasidagi eng muhim masalalardan biri Koshi masalasi deb ataluvchi masaladir.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

(2) tenglama uchun Koshi masalasi yoki boshlang'ich masala quyidagicha qo'yiladi: (2) masalaning barcha yechimlari orasida

$$y = y(x) \quad (36)$$

shunday yechim topish kerakki, $y(x)$ funktsiyasi x_0 mustaqil o'zgaruvchining berilgan sonli qiymatida y_0 sonli qiymati ko'rinishiga kirish kerak, ya'ni

$$y(x_0) = y_0 \quad (37)$$

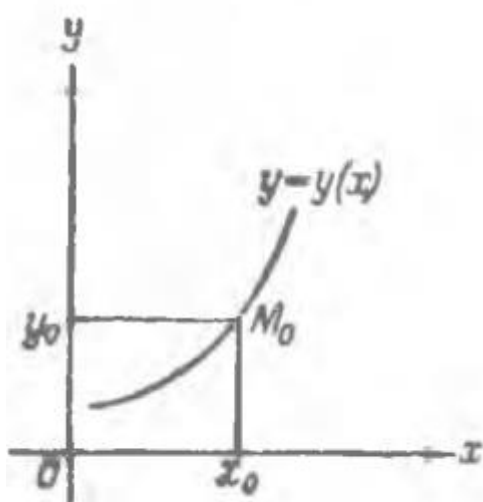
Bu yerda x_0 va y_0 — birilgan sonlar, demak (36) yechim :

$$x=x_0 \text{ da } y=y_0 \quad (38)$$

shartga mos keladi.

Shu bilan birgalikda y_0 soni izlangan funksiyaning boshlang'ich qiymati, x_0 — mustaqil o'zgaruvchining boshlang'ich qiymati deb aytiladi. Umuman olganda x_0 va y_0 sonlari (36) yechimning boshlang'ich ma'lumotlari, (38) esa —ushbu yechimning boshlang'ich sharti deb ataladi.

Koshi masalasini geometrik jihatdan quyidagicha ifodalash mumkin: (2) tenglamaning barcha integral egri chiziqlari orasidan berilgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqra orqali o'tganini toping (6-rasm). 1



6-rasm

Koshi masalasi boshlang'ich shartlari bilan (38) yagona yechimga ega bo'ladi, agar $|x - x_0| \leq h$ intervalidagi qandaydir $h > 0$ soni mavjud bo'lsa va $y = y(x)$ yechimi $y(x_0) = y_0$ deb belgilansa hamda ushbu intervalda belgilangan va $y = y(x)$ yechimi bilan $|x - x_0| \leq h$ intervalida biron bir $x = x_0$ nuqtasida farqli bo'lgan yechim mavjud bo'lmasa. Aks holda, ya'ni Koshi masalasi boshlang'ich shartlari bilan (38) bir donadan ortiq yechimga ega bo'lsa yoki umuman yechimga ega bo'lmasa Koshi masalasi yechimi yagonaligi buziladi deb aytamiz.

Koshi masalasi yechimining yagonaligi muammosi differensial tenglamalar teoremasi uchun ham, uning ko'plab ilovalari uchun ham alohida qiziqish uyg'otadi, chunki Koshi masalasi yechimi yagonalagini bilgan holda boshlang'ich shartlarga mos yechimni topib biz boshqa yechim yo'qligiga ishonchimiz komil bo'ladi. Tabiiy bilimlar savollarida bu biz aniq, faqat differentsial tenglama va boshlang'ich shartlar bilan belgilanuchi qonun olamiz.

Aytib o'tish kerak, Koshi masalasining sodda ko'rinishi bizga integral hisoblashda uchraydi va huddi o'sha yerda $f(x)$ funktsiyasi (a, b) intervalida uzliksiz bo'lsa tenglamaning yagona yechimi

$$y' = f(x) \quad (39)$$

$x = x_0$ bo'lganda y_0 qiymatini oluvchi va x_0 (a, b) intervaliga tegishli, y_0 esa — har qanday berilgan son, quyidagi funktsiyadir

$$y = \int_{x_0}^x f(x) dx + y_0 \quad (40)$$

Bu yechim butun (a,b) intervalida belgilangan.

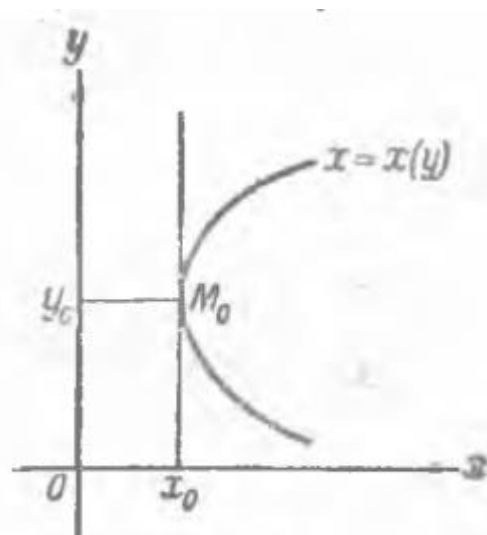
(40) formuladan ko'rilayotgan Koshi masalasi mustaqil o'zgaruvchiga ham boshlang'ich ma'lumotlarga ham bog'liqligini ko'rish mumkin.

Avvalambor analiz kursidan ma'lumki (40) yechim mustaqil o'zgaruvchi x dan doimiy differentsialanuvchi funksiya ekanligi ma'lum (Funksiya birinchi doimiy hosilaga ega bo'lsa doimiy differentsialanuvchi deb ataladi). Geometrik jihatdan bu (x_0, y_0) nuqtasi orqali bitta va faqat bitta integral egri chiziqlik o'tishini bildiradi. Bu integral integral egri chiziqlik tekis (Egri chiziqlik doimiy o'zgaruvchi urinmaga ega bo'lsa tekis deyiladi). U Oy o'qiga paralel bo'lgan to'g'ri chiziqlikka bir donadan ortiq bo'lmagan nuqtada kesishadi.

(40) formuladan ko'rinib turibdiki sodda differentsial tenglama (39) x_0 va y_0 boshlang'ich ma'lumotlari uchun Koshi masalasi uzilmas va hatto doimiy differentsialanuvchi funksiya.

Koshi masalasning alohida holatlari.

Koshi masalasini x_0, y_0 boshlang'ich ma'lumotlari bilan oshkor bo'lmagan ravishda x_0, y_0 sonlari chekli va (2) tenglama o'ng tarafi aniqlangan va (x_0, y_0) nuqtalarida cheklangan deb tahmin qilganmiz, ya'ni (2) tenglama (x_0, y_0) nuqtasida maydonning ma'um yo'nalishini belgilaydi, shuningdek oxirgisi Oy o'qiga paralel emas deb hisoblaganmiz. Agar (2) tenglamaning o'ng tarafi (x_0, y_0) nuqtasida cheksizlikka aylansa aylantirilgan (2') tenglamani ko'rib chiqish lozim bo'ladi.



7-rasm

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \text{ va boshlang'ich shartga: } y = y_0$$

$x = x_0$ bo'lganda (7-rasm), mos yechimni izlash kerak. Ushbu yechimning yagona "o'ziga hosligi" $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasida integral egri chiziqlik urinmasi Oy o'qiga paralel.

Agar (x_0, y_0) nuqtasida o'ng taraf aniqlanmagan bo'lsa biz umuman boshqa holatga ega bo'lamiz. Tahmin qilaylik $f(x, y)$ (x_0, y_0) nuqtasida $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka aylanadi. U holda Koshi masalasning odatiy qo'yilishi ma'nosini yoqotadi, chunki (x_0, y_0)

nuqtasi orqali bir dona ham integral egri hiziqlik o'tmaydi. Bunday holatda Koshi masalasi quyidagicha qo'yiladi:

$y=y(x)$ [yoki $x=x(y)$], ko'rinishdagi (28) [yoki (29)] xususiyatga ega bo'lgan yechimni toping, ya'ni (x_0, y_0) nuqtasiga chegaradosh yechim topish kerak.

Bu yerda, Koshi masalasining asosiy ko'rinishi kabi yechimning yagonaligi savoli kelib chiqadi.

Undan tashqari bu yerda qo'shimcha savollar ham kelib chiqadi:

- 1) (x_0, y_0) nuqtasiga chegaradosh yechimlar ushbu nuqtaga ma'lum urinmaga ega bo'ladimi? Gap shundaki (2) tenglamaning o'zi bunday holatda (x_0, y_0) nuqtasida ma'lum urinmaning yo'nalishini belgilab bermaydi;
- 2) Agar integral egri chiziqlar (x_0, y_0) nuqtasiga urinmalarning ma'lum yo'nalishi bo'ylab chegaradosh bo'lsalar bu yo'nalishlar qanday? Ushbu yo'nalish bo'yicha qancha egri chiziq kiradi?

1 paragrafda ko'rib chiqilgan egri chiziqlar 8 va 9 misollarda (30) tenglamaning barcha integral egri chiziqlari $(0,0)$ nuqtaga chegaradosh (u yerda o'ng taraf $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka aylanadi) va har biri o'z urinmasiga ega, shu bilan birgalikda (34) tenglamaning hech bir integral egri chizig'i $(0,0)$ nuqtasiga chegaradosh emas, demak ushbu tenglama uchun $x_0=0$, $y_0=0$ boshlang'ich ma'lumotli Koshi masalasi bir dona ham yechimga ega emas.

Ba'zi holatlarda $y=y(x)$ ning quyidagi shartlariga mos keluvchi yechimini izlashga to'g'ri keladi:

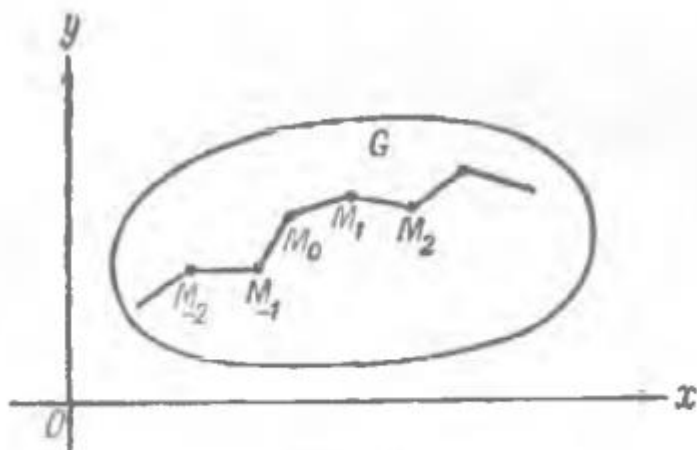
$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow \infty \quad \text{da} \quad y \rightarrow y_0 (\neq \infty) \\ y \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty \quad \text{da} \quad x \rightarrow x_0 (\neq \infty) \end{array} \right\} \quad (38'')$$

Yuqorida ko'rsatilgan alohida holatlar differentsial tenglamalar analitik teoriyasida va differentsial tenglamalar sifat teoriyasida tahlil qilinadi.

Koshi masalasining barcha holatlarida yechimning mavjudligi va yagonaligi savollari bilan birga Koshi masalasini mustaqil o'zgaruvchi funksiyasi (analitik ko'rinish, differentsial va geometrik xususiyatlari va mavjud maydondagi xossalari) va boshlang'ich ma'lumotlar funksiyasi kabi ko'rinishda yechish savollari paydo bo'ladi. Ushbu savollar muhokamasi differentsial tenglamalar teoriyasining asosiy vazifalaridan biridir.

Koshi masalasi yechimining mavjudligi uchun yetarli sharti.

Tahmin qilamiz (2) tenglamaning o'ng tarafi aniqlangan va x, y o'zgaruvi ma'lum G maydonida uzilmas. U holda, yuqorida berilgandek (1 paragraf), (2) tenglama qandaydir yo'nalish maydonini belgilaydi, shu bilan birgalikda hozirgina (2) tenglamaning o'ng tarafi uzilmasligi haqidagi tahminga muvofiq ushbu yo'nalish maydoni uzilmas, shuning uchun yetarlicha yaqin nuqtalarda yo'nalish istalgancha kichik. Qayd qilamizki, (2) tenglamaning o'ng tarafi uzilmasligi haqidagi tahminga muvofiq ushbu tenglamaning har qanday yechimi doimiy differensiallashuvchi va har qanday integral egri chiziq tekis bo'ladi. Har qanday integral egri chiziq, 1.1 paragrafda aytilgandek, uning har bir nuqtasidagi urinma yo'nalishi ushbu nuqtaning differensial tenglamasi bilan belgilanuvchi maydon yo'nalishi bilan mos keladi. Integral egri chiziqning ushbu xossasidan foydalangan holda (2) tenglama uchun G maydonidagi x_0, y_0 boshlang'ich ma'lumotlari bilan Koshi masalasi yechimini topib ko'ramiz.



8-rasm

G maydonidan qandaydir $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasini olamiz (8-rasm).

Ushbu nuqtada maydon qiyaligi $f(x_0, y_0)$ ga teng. $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi orqali burchak koeffitsienti $f(x_0, y_0)$ bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Ushbu to'g'ri chiziqda har qanday G maydoniga tegishli $M_1(x_1, y_1)$ ni olamiz va u orqali

ushbu nuqtada maydon qiyaligiga, ya'ni $f(x_1, y_1)$ ga, teng koeffitsientli to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Oxirgi to'g'ri chiziqda har qanday G maydoniga tegishli $M_2(x_2, y_2)$ nuqtasini olamiz va u orqali burchak koeffitsienti $f(x_2, y_2)$ bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz va hakazo. Shunday siniq chiziqni $x=x_0$ nuqtasining chap tarafida ham hosil qilish mumkin.

Hosil qilingan siniq chiziq Eyler siniq chizig'i deb ataladi.

Ravshanki $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi orqali o'tuvchi cheksiz Eyler siniq chiziqlarini hosil qilish mumkin. Har bir yetarlicha qisqa masofada o'tkazilgan shunday siniq chiziq agar integral egri chiziq mavjud bo'lsa $M_0(x_0, y_0)$ orqali o'tuvchi integral egri chiziq haqida ma'lum tasavvur beradi. Eyler siniq chiziqlaridan cheki (siniq chiziqning barcha bog'lari nolga intilib, ularning soni cheksizlikka intilganda) $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi orqali o'tuvchi integral egri chiziq bo'lgan ketma-ketlikni hosil qilishimiz mumkinligini kutishimiz tabiiy. (x, y) ga nisbatan qilingan tahminlarda

bu mavjudligini isbotlash mumkin, demak (2) tenglama uchun doimiy differentsial tenglama mavjudligi uchun uning o'ng tomoni boshlang'ich ma'lumotlar atrofida uzliksiz ekanligini taxmin qilinsa kifoya (Peano teoremasi).

Lekin qayd qilish kerakki, har biri o'z integral egri chizig'iga intiluvchi, $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi orqali o'tuvchi bir qancha Eyler siniq chiziqlari mavjudligi rad etilmagan, shuning uchun umumiy holda $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasi orqali o'tuvchi yagona integral egri chiziq olishimizni kutishga asosimiz yo'q. Undan tashqari, M.A.Lavrentyev ko'rsatib o'tganidek, yechimning yagonaligi (2) tenglamaning uzliksizining barcha nuqtalarida buzilsih mumkin.

Shunday qilib Peano teoremasi Koshi masalasi yechimining mavjudligi teoremasi xolos. Yechimning yagonaligini u kafolatlamaydi.

Ushbu kitobda faqat uzliksiz differentsiallanuvchi yechimlar ko'rib chiqilgan.

Koshi masalasining yechimining mavjudligi va yagonaligi uchun yetarli shart.

Savol qo'yamiz: (x_0, y_0) nuqtasi orqali bitta va faqat bitta integral egri chiziq o'tishi uchun (2) tenglamaning o'ng tarafini x_0, y_0 boshlang'ich ma'lumotlarining qanday shartlariga bo'ysindirish yetarli? Hozir biz (2) tenglama uchun mavjudligi va yagonaligi teoremasini (Pikar teoremasi) soddalashtirilgan ko'rinishda isbotsiz keltiramiz.

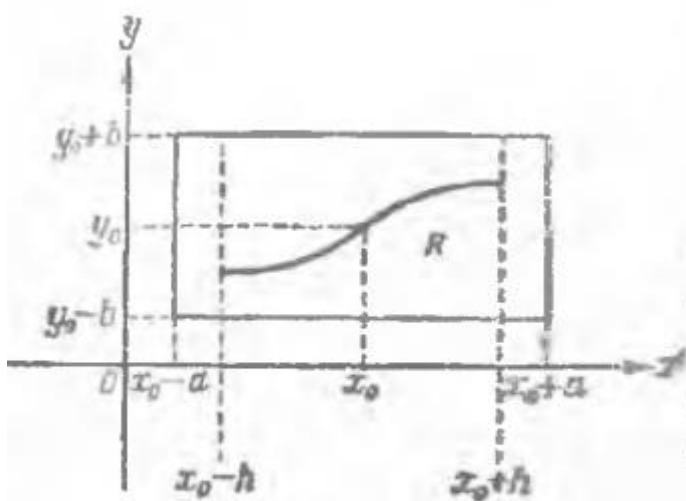
1-teorema. (2) tenglama berilgan bo'lsin

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

va boshlang'ich shartlar berilsin

$$x=x_0 \text{ da } y=y_0 \quad (38)$$

Tahmin qilamiz $f(x, y)$ funksiya qandaydir chegaralangan hududda ichidagi (x_0, y_0) nuqta bilan aniqlangan (9-rasm)



9-rasm

$$R: |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$$

(a va b — berilgan musbat sonlar) va quyidagi ikki shartga mos:

I. $f(x, y)$ uzilmas va demak chekli, ya'ni

$$|f(x, y)| \leq M \quad (41)$$

Bu yerda M —doimiy musbat son, (x, y) — R maydoning har qanday nuqtasi;

II. $f(x, y)$ funksiyasi y argumenti bo'ylab cheklangan xususiy hosilaga ega, ya'ni

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K \quad (42)$$

Bu yerda K — doimiy musbat son, (x, y) — R maydoning har qanday nuqtasi.

Ushbu taxminlarda (2) tenglama

$$y=y(x),$$

(38) boshlang'ich shartlarga mos yagona yechimga ega. Bu yechim x mustaqil o'zgaruvchisining x_0 boshlang'ich qiymatining ba'zi doirasida aniqlangan va doimiy defferensiallanadi, ya'ni u

$$|x - x_0| \leq h \quad (43)$$

intervalida aniq belgilangan (bu yerda h a va $\frac{b}{M}$ sonlarining eng kichigi)

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \quad (44)$$

Bu teoremadan, shuningdek, kelib chiqadiki, (2) tenglamaning o'ng tarafi x va y yoki nisbatan polinom, yoki har qanday boshqa x va y ning barcha qiymatlarida mustaqil o'zgaruvchi y bilan birga x va y ga nisbatan aniqlangan va doimiy funksiya, shunda har qanday (x_0, y_0) nuqtasi orqali bitta va faqat bitta integral egri chiziq o'tadi, chunki markazi (x_0, y_0) da bo'lgan har qanday R ko'pburchagi Pikar teoremasining ikkala sharti ham bajariladi. U holda (x, y) maydoni butunlay bir birini kesishmovchi va urinmaydigan tekis integral egri chiziqlar bilan to'la bo'ladi.

10-misol.

Tenglama berilgan bo'lsin

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (45)$$

va boshlang'ich shart qo'yilsin:

$$x=0 \text{ da } y=0 \quad (46)$$

(45) tenglamaning o'ng tomoni x va y ga nisbatan polinom bo'lgani uchun har qanday boshlang'ich shart bilan yechim, (46) shart bilan ham mavjud va yagonadir.

(46) boshlang'ich shart bilan aniqlanish maydoniga baxo beramiz.

Shu maqsadda markazi $(0, 0)$ nuqtada bo'lgan ko'pburchak yasaymiz,

$$R: |x| \leq a, \quad |y| \leq b \quad (47)$$

a va b sifatida esa har qanday musbat sonni olish mumkin. Ega bo'lamiz

$$M = a^2 + b^2, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{a^2 + b^2}\right) \quad (48).$$

Bu yerda ko'rinib turibdiki h a va b sonlarini tanlashga bog'liq

$$(h \text{ ning eng katta qiymati} - h = \max\left(a, \frac{b}{a^2 + b^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Xususan $a=b=1$ bo'lganda xosil qilamiz:

$$h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad (49)$$

Shuning uchun (45) tenglama $|x| \leq \frac{1}{2}$ intervalida aniqlangan va (46) boshlang'ich shartga mos yagona yechimga ega. Bu yechim doimiy differensiallanadigan.

Geometrik nuqtai-nazardan xosil qilingan natija (45) tenglama koordinatalar boshidan o'tuvchi faqat bitta integral egri chiziqqa egaligini bildiradi va bu integral egri chiziq tekisdir.

Bu natija (45) tenglama elementar funksiyalarda ham, elementar funksiyalar kvadraturalarida ham integrallashmasligini hisobga olsak alohida ahamiyatga ega bo'ladi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi faktining aniqlanganligi uni boshqa usullar bilan ham, shu jumladan tahminiy ham istash uchun asos bo'ladi.

11-misol. Tenglama javobini toping

$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy) \quad (50)$$

Boshlang'ich sharti:

$$x=0 \text{ da } y=0 \quad (51)$$

(50) tenglamaning o'ng tomoni uning y bo'yicha xususiy hosilasida $\frac{df}{dy} = x \cos(xy)$ x va y bo'ylab doimiy bo'lgani uchun (x,y) maydoning har bir nuqtasida yagona integral egri chiziq o'tadi. Bu koordinata boshida ham shunday. Lekin $y=0$ (Ox o'qi) (50) tenglama yechimi ekanligini oson payqash mumkin va bu yechim koordinata boshidan o'tadi va u izlanyatgan yechimdir. Yuqorida aniqlangan (50) tenglamaning yechimning yagonaligi sababli u koordinata boshidan o'tuvchi boshqa yechimga ega emas.

Umuman olganda agar (2) teglamada $f(x, y)$ funksiyasi berilgan (x_0, y_0) nuqtaning atrofida Pikar teoremasining ikkala shartiga ham mos kelsa va $f(x, y_0) \equiv 0$ $x = x_0$ nuqtasi atrofida bo'lsa, bu tenglamaning (x_0, y_0) nuqtasi orqali o'tuvchi yagona yechimi $y=0$ chizig'i bo'ladi.

II-BOB. HOSILAGA NISBATAN YECHILGAN BIRINCHI TARTIBLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMANING UMUMIY YECHIMI.

2.1-§. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy, hususiy va mahsus yechimlari.

Umumiy yechim. Yuqorida ko'rsatib o'tilgan misollarda biz

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

tenglama cheklanmagan miqdordagi yechimlarga ega bo'lishi mumkinligini ko'rdik. (2) tenglamaning bir dona C ixtiyoriy doimiysiga bog'liq yechimlar oilasini

$$y = \varphi(x, C) \quad (52)$$

odatda ushbu tenglamaning umumiy yechimi deb ataydilar. Geometrik jihatdan u (x, y) tekisligidagi C ning bir parametriga bog'liq, shu bilan birga y ga nisbatan hal qilingan integral to'g'ri chiziqlar oilasidir. Ixtiyoriy doimiy (parametr) C ning har bir qiymatida (mumkin bo'lganlar ichidan) (52) formula (2) tenglamaning yechimini (integral egri chizig'ini) hosil qiladi.

(52) formulasi, umuman olganda, (2) tenglama uchun Koshi masalasini yechishga imkon beradi, ya'ni berilgan boshlang'ich shart $y=y_0$ $x=x_0$ bo'lganda mos keluvchi ixtiyoriy doimiy C ning kerakli qiymatini tanlash hisobiga yechim topishga imkon beradi.

Shu maqsadda (52) formulaga x va y o'rniga x_0 va y_0 sonlarini qo'yib, hosil bo'lgan $y_0 = \varphi(x_0, C)$ tenglamani C ga nisbatan yechadilar va topilgan $C=C_0$ qiymatini (52) formulaga qo'yadilar, natijada $y = \varphi(x, C_0)$ ko'rinishdagi izlangan yechimni oladilar.

Lekin bu holda $y_0 = \varphi(x_0, C)$ tenglamasining C ga nisbatan yechilishi ham, topilgan Koshi masalasi yechimi yagonaligi ham kafolatlanmaydi. Ularni kafolatlash uchun $y = \varphi(x, C)$ funksiyasi qandaydir cheklov kiritish kerak, toki (52) formula Koshi masalasini x_0, y_0 ning har qanday boshlang'ich qiymatlarida qandaydir D maydonidan x va y qiymatlari o'zgarganida yaroqli va bu yechim yagona bo'lsin.

Quyida biz (2) tenglamaning qandaydir D maydonidan x va y qiymatlari o'zgarganidagi yechimini beramiz.

D maydoni sifatida biz har bir nuqtasida bitta va faqat bitta (2) tenglamaning integral egri chizig'i o'tuvchi qandaydir (x,y) tekisligidagi maydonni ko'ramiz va bunda D maydonning har bir (x,y) nuqtasida (2) tenglama uchun Koshi masalasining mavjudligi va yagonaligi mavjud bo'ladi. Bunda D maydoni (2) tenglama uchun Koshi masalasining borligi va yagonaligining barcha nuqtalari jamlanmasi yoki uning bir qismidir.

(Bunda (2) tenglama uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi bir qancha maydonga bo'linib ketishi mumkin, bunda har bir maydon uchun (2) tenglama o'z umumiy yechimiga ega bo'ladi)

$$y = \varphi(x, C) \quad (53)$$

x va C o'zgaruvchilarining ba'zi o'zgarishlari doirasida aniqlangan, mustaqil o'zgaruvchi x bo'ylab doimiy xususiy hosilaga ega bo'lgan funksiyani agar (53) tenglik D maydonida ixtiyoriy doimiy C ga nisbatan hal bo'lsa uni D maydonidagi (2) tenglamaning umumiy yechimi deb ataymiz, demak D maydoniga tegishli x va y ning har qanday qiymatlarida C ning qiymati (53) tenglik orqali quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$C = \psi(x, y) \quad (54)$$

va agar (53) funksiya (2) tenglamaning (54) formula orqali keltiriladigan ixtiyoriy doimiy C ning barcha qiymatlaridagi yechimi bo'lsa, (x,y) nuqtasiga D maydonidan o'tadi.

Ushbu ta'rifning mohiyati quyidagicha. C ning bir parametriga bog'liq D maydonda joylashgan F egri chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin. Agar F oilasidagi har bir egri chiziq uchun u (2) tenglamaning integral egri chizig'i ekanligi va F oilasi birgalikda D maydonini qoplashi ma'lum bo'lsa, u holda F (2) tenglamaning D maydonidagi umumiy yechimidir.

Umumiy yechimning (53) formulasi ixtiyoriy doimiy C ning mos ravishdagi qiymatini tanlash hisobiga D maydonidagi (2) tenglama uchun har qanday Koshi masalasini yechishga imkon beradi, ya'ni (2) tenglamaning x_0, y_0 boshlang'ich ma'lumotlari bilan belgilanuvchi (2) tenglamaning har qanday yechimini, bunda (x_0, y_0) – D maydonidagi har qanday nuqta.

Ushbu yechimni topish uchun yuqorida ko'rsatilganni bajaramiz. (53) formulaga x va y o'rniga x_0 va y_0 boshlang'ich ma'lumotlarini qo'yamiz:

$$y_0 = \varphi(x_0, C) \quad (55)$$

bu yerdan topamiz

$$C = \psi(x_0, y_0) \equiv C_0 \quad (56)$$

C ning bu qiymatini (53) formulaga qo'yamiz. Hosil qilamiz:

$$y = \varphi(x, C_0) \quad (57)$$

Bu izlanayotgan yechimdir. x_0 va y_0 boshlang'ich ma'lumotlari bilan boshqa yechim yo'q.

Ba'zida umumiy yechimning (53) formulasida ixtiyoriy doimiy C rolini izlanyatgan y funksiyasining y_0 boshlang'ich ma'lumoti, x argumentining belgilangan x_0 qiymatida, bajaradi, shuning uchun (53) formula quyidagi ko'rinish oladi:

$$y = y(x, x_0, y_0) \quad (57')$$

umumiy yechimning bunday yozilishi *Koshi formasidagi umumiy yechim* deb ataladi.

12-misol. (30) tenglamani ko'ramiz,

$$y = Cx \quad (x \neq 0) \quad (58)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (30)$$

tenglamaning

$$0 < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty \quad (59)$$

maydonida umumiy yechimi ekanligini ko'rsatamiz.

Avvalambor (59) maydonda Koshi masalasi mavjudligi va yechimi yagonaligini oson ko'rish mumkin. Keyin (58) tenglama (59) maydonda C ga nisbatan yechiladi:

$$C = \frac{y}{x} \quad (60)$$

Nixoyat, ravshanki (58) funktsiya (60) formula orqali yetkazuvchi C ning barcha qiymatlarida, (x, y) nuqtasi maydondan o'tganda (30) tenglamaning yechimidir. Demak (58) (59) maydondagi (30) tenglamaning umumiy yechimidir.

(30) tenglamaning boshlang'ich shartga mos yechimini topamiz

$$x = x_0 \quad (x_0 > 0) \quad \text{da} \quad y = y_0 \quad (61)$$

(58) umumiy yechimda $x=x_0$, $y=y_0$ deb tahmin qilib quyidagiga ega bo'lamiz

$$y_0 = Cx_0 \quad (62)$$

u yerdan

$$C = \frac{y_0}{x_0} \equiv C_0. \quad (63)$$

C ning ushbu qiymatini (58) umumiy yechimga qo'yib topamiz

$$y = \frac{y_0}{x_0} x \quad (64)$$

Bu izlangan yechimdir. Boshlang'ich shartga mos keluvchi boshqa yechimlar yo'q.

Qayd qilish kerak (64) funktsiya (30) tenglamaning (59) maydondagi, agar y_0 ni ixtiyoriy doimiy sifatida ko'rsak, Koshi formasidagi yechimdir

Parametr ko`rinishdagi umumiy yechim. Aksariyat hollarda (2) tenglamani integrallashtirib umumiy yechimning (bir parametrlilik integral egri chiziqlar oilasi) mavhum holda (y ga nisbatan hal qilinmagan ko'rinishda hosil qilamiz:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad (65)$$

yoki

$$\phi(x, y) = C \quad (65')$$

(2) tenglamaning bu ko'rinishdagi yechimi odatda ushbu *tenglamaning umumiy integrali* deb ataladi.

(65) yoki (65') nisbatini, agar bu nisbat (53) umumiy yechimni belgilasa, mavhum shakldagi umumiy yechim yoki D maydonidagi (2) tenglamaning umumiy integrali deb ataymiz. ,

$$y = \phi(x, C)$$

D maydonidagi (2) tenglama.

Bu ta'rifdan (54) (2) tenglamaning D maydonidagi umumiy integral ekanligi kelib chiqadi.

13-misol. (34) tenglamani ko'rib chiqaylik

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (34)$$

Biz (4) dan bilamizki bu tenglamaning integral egri chiziqlari

$$x^2 + y^2 = C \quad (C = R^2) \quad (66)$$

aylanalar va (x,y) tekisligining har bir nuqtasida, koordinata boshidan tashqari, bitta va faqat bitta (34) tenglamaning integral egri chizig'i o'tadi. (66) nisbati (34) tenglamaning umumiy integralidir. U har bir yarim tekislikda ham umumiy integral bo'ladi. Darhaqiqat, (66) nisbati umumiy yechimlarning $y = \varphi(x, C)$ ko'rinishdagi har bir maydon uchun belgilab beradi, ya'ni aynan

$$y = \sqrt{C - x^2}$$

— yuqori yarim tekislikdagi ($y > 0$) umumiy yechim

$$-y = \sqrt{C - x^2}$$

— quyi yarim tekislikdagi ($y < 0$) umumiy yechim.

Ba'zida (2) differentsial tenglamani integrallashtirib bir dona ixtiyoriy doimiy C ga bog'liq, parametrik ko'rinishdagi integral egri chiziqlar oilasini hosil qilishadi.

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t, C) \\ y &= \psi(t, C) \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Integral egri chiziqlarning bunday oilasini (2) *tenglamaning parametrik ko'rinishdagi umumiy yechimi* deb ataymiz.

Agar (67) tenglamadan t parametri olib tashlansa, umumiy yechimni mavhum va hatto yaqqol ko'rinishda olishadi.

14-misol. Tenglama

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (34)$$

quyidagi ko'rinishdagi parametrik umumiy yechimga ega.

$$\left. \begin{aligned} x &= C \cos t \\ y &= C \sin t \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

t parametrini olib tashlab umumiy integralni hosil qilamiz

Hususiy yechim. Agar

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f[\varphi(t), \psi(t)] \quad (21)$$

tenglama yechimi faqatgina ushbu tenglama uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi nuqtalaridan iborat bo'lsa, biz bunday yechimni xususiy yechim deb ataymiz.

Umumiy yechimning formulasidan (53) ixtiyoriy doimiy C ning xususiy sonli qiymatida, $\pm\infty$ ni qo'shib, xosil bo'luvchi yechim, ravshanki xususiy yechimdir. Bunda agar ko'rib chiqilayotgan umumiy yechim aniqlangan D to'plami(1) tenglama uchun Koshi masalasi yechimi yagonaligi va mavjudligining barcha nuqtalari bilan to'g'ri kelmasa, bu umumiy yechim formulasi (1) tenglamaning barcha xususiy yechimlarni emas, balki bir qismini o'z ichiga olgan bo'ladi. Qolgan xususiy yechimlar (1) tenglamaning boshqa umumiy yechimlari formulalari tarkibidadir.

Pikar teoremasi orqali aniqlanuvchi yechim xususiy yechimdir, chunki bu yechimning har bir nuqtasi uchun Koshi masalasi yechimining yagonaligi mavjuddir.

Koshi masalasini (53) umumiy yechim formulasi yordamida D to'plamidagi boshlang'ich ma'lumotlar bilan yechganimizda doimo xususiy yechimga ega bo'lamiz, shuning uchun (57) yechim xususiy yechim.

15-misol. Tenglamani ko'rib chiqamiz.

$$y' = 2x \quad (70)$$

Ravshanki

$$y = x^2 + C \quad (71)$$

quyidagi to'plamda ushbu tenglamaning umumiy yechimidir.

$$0 < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$

ya'ni (x,y) tekisligida.

Boshlang'ich shartlarga mos yechim topaylik:

(71) da $x = x_0$, $y = y_0$ faraz qilib ega bo'lamiz: $y_0 = x_0^2 + C$, bu erda $C = y_0 - x_0^2$ ning ushbu qiymatini (71) umumiy yechimga qo'yib xosil qilamiz:

$$y = x^2 + y_0 - x_0^2 \quad (72)$$

Bu biz izlagan yechim. U xususiy yechim.

Mahsus yechim. Koshi masalasi yechimining yagonaligi sharti xar bir nuqtasida buzuluvchi yechimni maxsus yechim deb ataymiz.

Geometrik jixatdan maxsus yechimga umumiy yechim (umumiy integral)ga ega bo'lgan integral egri chiziqlar oilasiga tegishli bo'lmagan integral egri chiziq to'g'ri keladi. Shuning uchun maxsus yechim umumiy yechim majud Ddoirasi ichida bo'la olmaydi.

Maxsus yechim, ravshanki,ixtiyoriy doimiy S ning xech qanday sonli qiymatida, $\pm\infty$ ni qo'shib, umumiy yechim (umumiy integral) formulasida mavjud emas. U umumiy yechim formulasidan faqatgina C ni x ning, $C = C(x)$

ba'zi funksiyasi almashtirilganda xosil bo'lishi mumkin.

Xususiy xam, maxsus ham bo'lmagan yechimlar borligini qayd qilib o'tamiz. Xususan agar tenglama xususiy va maxsus yechimlarga ega bo'lsa yuqorida qayd qilingan yechimlarni xususiy va maxsus yechimlar bo'laklarini qo'shib olish mumkin. Keyingi xollarda bunday usulda olish mumkin bo'lgan yechimlarni biz ko'rsatib o'tirmaymiz.

16-misol. Tenglamani olamiz

$$y' = 2\sqrt{y}(y \geq 0) \quad (73)$$

bu yerda radikalmusbat sonli. $y \neq 0$ deb xisoblab tenglamaning ikkala qismini $2\sqrt{y}$ ga bo'lamiz va xosil qilamiz:

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1 \text{ yoki } (\sqrt{y})' = 1$$

Bundan:

$$\sqrt{y} = x + C$$

Bu yerda $x > -C$, chunki $x + C > 0$. Demak (73) tenglama quyidagi yechimlar oilasiga ega

$$y = (x + C)^2, x \geq -C \quad (74)$$

Bu yerda biz $x > C$ tengsizligiga tenglik belgisini qo'shdik, chunki (74) funksiya (73) tenglamani ayniyatga aylantiradi va bu ayniyat $x = -C$ bo'lganda ham ko'rinadi. Bu simmetriya o'qi Oy o'qiga paralel, uchi esa Ox o'qida joylashgan parabolaning o'ng shoxlari (10-rasm). Parabolaning o'ng shoxlari integral egri chiziqlar emasligi (73) differensial tenglamadan ham ma'lum, chunki ular bo'ylab urinma Ox o'qi bilan o'tmas burchak xosil qiladi, shuning uchun y' manfiy, (73) tenglamaga ko'ra esa u manfiy emas deb taxmin qilinadi. (O'ng shoxlar $y' = -2\sqrt{y}$ tenglamaning integral egri chiziqlaridir)

$$y = (x + C)^2 \quad (x > -C) \quad (75)$$

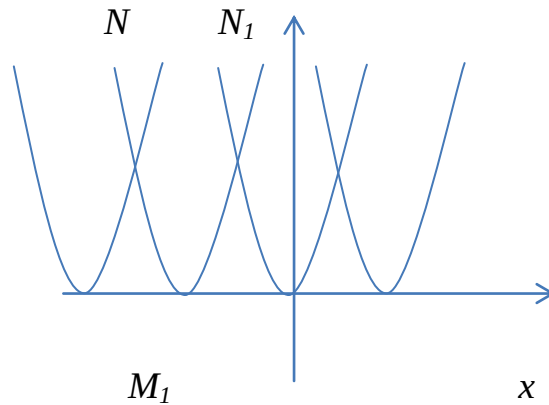
funksiyasi (73) tenglamaning D soxasida umumiy yechimligini ko'rsatib beramiz:

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < +\infty, \quad (76)$$

ya'ni yuqori yarimtekislikda.

Darxaqiqat, birinchi navbatda (76) maydonda Koshi masalasi mavjudligi va yechimining yagonaligiga ishonch xosil qilamiz. Bu (76) maydondagi har qanday nuqta uchun (x_0, y_0) yuqori yarimtekislikda yotuvchi quyidagi ko'rinishdagi tugallangan o'ramani qurish mumkinligidan kelib chiqadi.

$$R|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq by$$



10-rasm

Bu joyda (73) tenglamaning o'ng tarafi pika teoremasining ikkala shartini bajaradi. Darxaqiqat $f(x, y) \equiv 2\sqrt{y}$ funksiyasi uzulmas, $\frac{df}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ cheklangan. Shuning uchun (x_0, y_0) nuqtasi orqali bir dona va faqat bir dona (73) tenglamaning integral egri chizig'i o'tadi.

Endi (75) funksiya umumiy yechimning belgilarida ko'rsatilgan ikkala talabga mosligini tekshiramiz.

1) (75) tenglik ixtiyoriy doimiy C ga nisbatan (76) maydonda yechilishi mumkin:

2) (75)ni(73)ga almashtirib ayniyat xosil qilamiz

$$2(x + C) \equiv 2\sqrt{(x + C)^2} \quad (x + C > 0)$$

shuning uchun (75) funksiyasi C ning barcha qiymatlarida (73) tenglama echimidir.

Ravshanki (73)tenglamaning echimi $y = 0$ (Oxo' qi) xamdir. Bu echim maxsus echimchunki uning har bir nuqtasida Koshi masalasining echimi yagonaligi buziladi. Darxaqiqat Ox nuqtasida yotuvchi har qanday $M(x_0, 0)$ nuqta orqali $y \equiv 0$ echiming o'zi, unga tutash yarimparabola

$$MN := (x - x_0)^2 \quad (x \geq x_0)$$

(u (74) oilani $C = -x_0$ abo'lgandabor bo'ladi) va undan tashqari, MM_1N_1 tipdagimaxsusechim $MM_1y \equiv 0$ [$M_1 = M_1(x_1, 0)$]va xususiy echim yarim parabola

$$M_1N_1:y = (x - x_1)^2 \quad (x > x_1)$$

qismlaridan iborat cheksiz echimlar o'tadi.

MM_1N_1 tipdagi echimlar na xususiy, na maxsusligini qayd qilib o'tamiz.(73) tenglama orqali belgilanadigan yo'nalishlar maydonini ko'rib chiqib aniqlaymizki, $y \equiv 0$ maxsus echimida yotuvchi har bir $M(x_0, 0)$ nuqatsi orqaliko'plab egri chiziqlar o'tadi, vaxolanki maydonning yo'nalishi ushbu nuqtada faqat bir dona:

$$y'|_{(x_0,0)} = 2\sqrt{y}|_{(x_0,0)} = 0$$

Yana aytib o'tamizki $y = 0$ maxsus echimi (75) umumiy echim formulasida mavjud emas, ya'ni undan ixtiyoriy doimiy C ning har qanday sonli qiymatida kelib chiqmaydi, lekin u (75) umumiy echim masalasining echilish chegarasidir va ushbu umumiy echim formulasidan $C = -x$ bo'lganda xosil bo'ladi.

Quyida biz maxsus echimlarni topish yo'llarini yoki maxsus echimga shubxali bo'lgan egri chiziqlarni topish yoo'llarini ko'rsatib beramiz.

Differinsial tenglamaga ko'ra mahsus yechim bo'lishga shubxali egri chiziqlarni topish.

Tasavvurqilamizki (1) tenglamaning o'ng tarafi D maydonining ma'lum qismida aniqlangan va uzulmasdir hamda ushbu maydonning har bir nuqtasida y dan xosilaga egadir. Shunda, agar $\frac{df}{dy}$ D maydoni bilan chegaralangan bo'lsa, Pikar teoremasiga ko'ra bu maydonning har bir nuqtasi orqali bir dona va faqat bir dona (1) tenglamaning integral egri chizig'i demak (1) tenglama maxsus echimga ega emas. Shuning uchun keltirilgan taxminlarda (1) tenglamaning maxsus echimlarini

faqat $\frac{df}{dy}$ bo'ylab cheklanmagan egri chiziqlar orasida izlash lozim. $\frac{df}{dy}$ bo'ylab cheklanmagan egri chiziqlarni maxsus echimga shubxali deb ataymiz. Maxsus yechimga shubxali egri chiziqni topib, birinchidan uni integral egri chiziqligini, ikkinchidan uning har bir nuqtassida yechimning yagonaligi buzilishiga ishonch xosil qilish lozim. Agar bu ikkalasi xam o'z isbotini topsa, maxsus yechimga shubxali egri chiziq rostdan ham maxsus yechim bo'ladi.

17-misol. (73)tenglamani ko'rib chiqamiz,

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

Bu erda $\frac{df}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ shuning uchun $\frac{df}{dy} = \infty$ faqat $y = 0$ bo'lganda

Shuning uchun maxsus yechimga shubxali egri chiziq faqat Ox ($y = 0$) o'qidir. ($y \equiv 0$) (73) tenglama yechimi ekanligiga va shuning uchun maxsus yechimligi ekanligini tekshirish oson.

18-misol. Tenglamani ko'ramiz

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} + 1 \quad (73')$$

Bu erda 17-misol kabi maxsus yechimga shubxali egri chiziq faqat Ox ($y = 0$) o'qidir. Lekin u yechim emas. Shuning uchun (73') maxsus yechimga ega emas.

y ga nisbatan ratsional bo'lgan o'ng tarfli birinchi darajali y tenglamalarining maxsus yechimlari yo'qligi. Qayd qilib o'tamizki avvalgi punktdagi misollarning o'ng tarfi y ga nisbatan irratsional.

$f(x, y)$ ga nisbatan o'ng tarfi y ga nisbatan butun ratsional funksiya bo'lgan (1) tenglamaning xolatlarni ko'rib chiqamiz.

$$\frac{dy}{dx} = A_0(x)y^n + A_1(x)y^{n-1} + \dots + A_{n-1}(x)y + A_n(x) \quad (77)$$

taxmin qilamizki (77) tenglamada $A_i(x)$ koeffitsientlari (a, b) intervalida uzulmas. Unda to'g'ri burchakda

$$R: a_i \leq x \leq b_i \quad -k \leq y \leq k \quad (a_i > a, \quad b_i < b)$$

Bu yerda a_1 va b_1 ga istalgancha yaqin sonlar, k soni esa istalgancha katta, (77) tenglamaning o'ng tarafdin uzuluksiz va bundan tashqari $\frac{df}{dy}$ mavjud va chekli, shuning uchun Pikar teoremasining ikkala sharti bajarilgan. Demak (77) tenglama maxsus yechimlarga ega emas.

19-misol. (45) tenglama,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

Maxsus yechimga ega emas, chunki uning o'ng qismi x va y ga nisbatan darajali ko'phad.

Endi quyidagi ko'rinishdagi tenglamani ko'rib chiqamiz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (78)$$

Bu yerda P va Qy ga nisbatan x koeffitsientlarli uzuluksiz, butun ratsional funksiyalar (misol uchun, R va Qx va y ga nisbatan darajali ko'phadlar). Shu bilan birgalikda (78) tenglamaning o'ng qismini keltirilmas deb taxmin qilamiz, ya'ni umumiy ko'paytmalarga qisqartirmalar bajarilmagan.

Bu yerda $Q(x_0, y_0) = 0$ bo'lgan (x_0, y_0) nuqtalardagina cheklanmagan bo'lishi mumkin.

Ikki hil xolatni farq qilamiz.

1°. $P(x_0, y_0)$. Bu holatda o'girilgan tenglamaning o'ng qismi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

(x_0, y_0) nuqta atrofida Pikar teoremasining ikkala shartiga ham mos keladi. Demak (78) tenglamasi (x_0, y_0) nuqtasi orqali o'tuvchi $x = x(y)$ yagona yechimga ega. Bu yechim xususiy.

2°. $P(x_0, y_0) = 0$. Bu holatda (78) tenglamaning o'ng qismi (x_0, y_0) nuqtasida noaniq bo'lib qoladi. P va Q ni x va y ga nisbatan darajali ko'phad deb xisoblaymiz. Shunda (x_0, y_0) nuqtasining yetarli kichik maydonida P va Q birvaqtning o'zida no'lga aylanuvchi nuqta mavjud emas, demak, (x_0, y_0) nuqtasidan farqli bo'lgan bu maydonning har bir nuqtasidan (78) tenglamaning birtta va faqat bitta (78) yoki (78') tenglamaning integral egri chizig'i o'tadi shuning uchun ikkala xolda ham maxsus yechim yo'q.

Demak 1° holda ham, 2° holda ham biz maxsus yechim ola olmaymiz.

Xususan o'ng tomoni bir turdagi kasrli-chiziqli tenglama

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (79)$$

Maxsus yechimga ega emas.

O`rama integral egri chiziqlar oilasi maxsus yechim sifatida.

Taxmin qilamizki, (1) tenglama integral egri chiziqlarning bir juftli- metrik oilasiga ruxsat beradi.

$$\phi(x, y, C) \quad (80)$$

bu erda C parametr. Taxmin qilamizki u o`ramachiziq, ya'ni xar bir nuqtasida (80) oilaga mansub xech bo'lmaganda bir dona egri chiziqqa teguvchi va xech bir qismida ushbu oilaning egri chizig'i bilan mos kelmaydigan, egri chiziqqa ega deb taxmin qilamiz.

Ravshanki, (2) tenglamaning o`ramachizig'i integral egrichiziqlar oilasibu tenglamaning echimi bo'lib, shu bilan birgalikda maxsus yechimdir.

Darxaqiqat o`rama chizig`i har bir nuqtasida (80) oilaga mansub qandaydir integral egri chiziq bilan umumiy urinmaga ega, demakki o`rama chizig`ining har bir nuqtasida yo`nalishi nuqtaning bu maydondagi yo`nalishi bilan mosdir. Bu o`ramachizig`i integral egri chiziqekanligini bildiradi. Keyin, o`rama chizig`ining har bir nuqtasida Koshi masalasining echimining yagonaligi buzuladi: bu nuqta orqali kamida ikkita integral egri chiziq o`tadi (ya`ni o`rama chizig`ning o`ziva o`rama chizig`i shu nuqtada teguvchi egri chiziq oilasi) maydon yo`nalishi bir xil bo`lgan xolda.

20-misol. (73)tenglama,

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

(74) integral egri chiziqlarning birparametrlilik oilasiga ruxsat beradi. (74), 1-rasmdan ravshanki bu oila (73) tenglamaning maxsus yechimi bo`lgan o`rama chizig`iga  $y = 0$  (ox o`qi) ekanligi ko`rinib turibdi.

Quyida biz bir parametrlilik egri chiziqlar oilasi o`rama chizig`i to`g`risida teorema mos bo`lishi kerak sharoit va etarli sharoit xaqida teoremani ko`rsatib o`tamiz. Buning uchun bizga egri chiziqlar oilasiga ham, o`rama chizig`iga xam bir qancha cheklashlar kiritish lozim bo`ladi.

Tasavvur qilamiz (80) bir parametrlilik oila $\phi(x, y, C)$ funksiyasi berilgan va G maydonida $[C_1, C_2]$ intervali bo`yicha  $C$  ning barcha qiymatlaridax,  $y, C$ bo`yicha uzulmas xususiy xosilalarga ega va $[C_1, C_2]$ dagi xar bir C da (80) tenglama qandaydir egri chiziqni belgilaydi. Shu xolatda biz (80) tenglama G maydonida $[C_1, C_2]$ dagi C parametrga bog`liq egri chiziqlar regulyar oilasiga egamiz deymiz.

Agar egri chiziq quyidagi tenglama bo`yicha berilgan bo`lsa

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$$

tekis parametrizatsiya bo'ylab berilgan deymiz va bunda $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalari uzuluksiz xosilalarga ega va bu xosilalar t ning $[\alpha, \beta]$ dagi xech qaysi qiymatida bir vaqtda no'lga aylanmaydilar.

Taxmin qilaylik, (80) oiladagi o'rama chizig'i tekis parametrizatsiyalik egri chiziq.

2-Teorema (o'ramachiziq uchun shart). (81) egri chiziq (80) regulyar oilaning o'ramachizig'i bo'lsin. U xolda agar $[\alpha, \beta]$ xolda u egri chiziqqa tegishli

$$\phi(x, y, C_0) = 0 \quad (C_0 \in [C_1, C_2]) \quad (82)$$

(80) sistemadagiko'rsatilgan son x_0, y_0, C_0 bilan qayerda $x_0 = x(t_0)$, o'chirib sistema tenglanadi.

$$\begin{cases} \phi(x, y, C) = 0 \\ \phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases} \quad (83)$$

G dagi (x, y) nuqtalari to'plami, biron biri $[C_1, C_2]$ dagi C dan (83) sistemaga mos bo'lsa (80) oilaning egri chiziqning diskriminantasi deb ataladi.

2 –teoremadan kelib chiqadiki o'rama chizig'i egri chiziq diskremenantasi yoki uning qismi. Lekin diskriminant egri chiziq o'rama chizig'idan farqli nuqtalarga xam ega bo'lishi mumkin.

Ko'p xolatlarda geometrik jixatdan egri chiziq diskramenantasi (yoki uning qismi) (80) oilaning o'rama chizig'i bo'lishligini aniqlash mumkin.

3-Teorema (o'rama chizig'ining etarli belgisi). (80) oila regulyar oila bo'lsin va (81) tenglama bilan berilgan u egri chizig'i va $C = C(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ funksiyasi ko'rsatilgan bo'lsin, bunda $x(t), y(t), C(t)$ kattaliklari xamma $[\alpha, \beta]$ dagi t da (83) sistemani aynay mos kelsin. Agar bunda:

- 1) y egri chizig'i tekis parametrizatsiyada berilgan;

2) $C(t)$ funksiyasi $[\alpha, \beta]$ dagi xech bir joyda no'lga teng bo'lmagan doimiy xosilaga ega bo'lsa;

$$3) |\phi'_x[x(t), y(t), C(t)]| + |\phi'_y[x(t), y(t), C(t)]| \neq 0$$

bunda egri chiziq (80) oilaning o'rama chizig'i.

Bu teoremaning ikkita xususiy xolatini aytib o'tamiz.

1-muloxaza. Taxmin qilaylik (83) sistema y va C ni x ning funksiyalari:

$$y = y, C = C(x), (a \leq x \leq b), \quad (84)$$

bunda $y'(x)$ va $C'(x)[a, b]$ da uzuluksiz va bundan tashqari $C'(x)[a, b]$ da no'lga aylanmaydi. Unda $y = y(x)$ diskriminant egri chiziqdir.

x ni parametr sifatida qabul qilib uni

$$\left. \begin{array}{l} y = y(x) \\ x = x \end{array} \right\} \quad (81')$$

ko'rinishda yozish mumkin ravshanki, tekis parametrizatsiyadagi egri chiziq (81') tekis parametrizatsiyadagi egri chiziqdir, chunki uning o'ng tomoni parametrlari xosilalari bilan (ya'ni x bilan) uzuluksiz va bundan tashqari $x'_x = 1$ shuning uchun 3-teoremaning birinchi sharti bajarildi.

C kattaligi x parametri funksiyasi sifatida (qilingan taxminga mos) 3-teoremaning ikkinchi shartiga mos keladi. Uchunchi shart ko'rinishi

$$|\phi'_x[x, y(x), C(x)]| + \phi'_y[x, y(x), C(x)] \neq 0 \quad a \leq x \leq b.$$

Agar bu shart bajarilsa $y = y(x)$ egri chizig'i (80) oilaning o'rama chizig'i bo'ladi.

2-muloxaza. y va C ni x dan funksiyasi sifatida (83) sistemadan topa olinmagan, lekin x va y ni C orqali bildirilgan xollarda biz parametrik formadagi diskriminant egri chiziqni xosil qilamiz:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(C) \\ y &= y(C) \end{aligned} \right\} \quad (81'')$$

bu yerda C parametr. Agar $x(C)$ va $y(C)$ funksiyalari uzuluksiz xosilalarga ega bo'lsa va agar $|x'(C)| + |y'(C)| \neq 0$ $[C_1, C_2]$ intervalida, unda (81'') egri chizig'i tekis parametrizatsiyadagi egri chiziqdir. Bu bilan 2 teoremaning sharti bajariladi. Undan so'ng bizda bor: $C_C = 1 \neq 0$ shuning uchun teoremaning ikkinchi sharti ham bajarilgan.

Uchinchi shart quyidagi ko'rinishni oladi:

$$|C'_C[x(C), y(C), C]| + |\phi'_C[x(C), y(C), C]| \neq 0 \quad (C_1 \leq C \leq C_2)$$

Agar bu shart bajarilsa (81'') egri chizig'i yuqoridagi farazlarda (80) chiziqlar oilasining o'rama chizig'idan iborat bo'ladi.

21-misol. Oilaning o'rama chizig'ini topamiz:

$$y = xC + \sqrt{1 - C^2} \quad (-1 < C < 1) \quad (86)$$

bu oila (x, y) butun tekisligida C parametrining $(-1, +1)$ intervalida doimiy.

(83) sistemani tuzib ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned} x &= xC + \sqrt{1 - C^2} \\ y &= x - \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \end{aligned} \right\}$$

Diskriminant egri chiziq:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{1 - C^2}} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Bu yerda C parametr. (87) egri chiziq tekis parametrizatsiyadagi egri chiziq, chunki x_C va y_C uzulmas va $x_C = 0$.

Ravshanki (85) sharti bajarilgan chunki $\phi'_C = 1 \neq 0$ Demak (87) egri chiziq (86) oilaning o`rama chizig`i. (87) tenglamadan C parametrini olib tashlab o`rama chizig`ining aniq ko`rinishdagi tenglamasini xosil qilamiz:

$$y = \sqrt{1 + x^2}$$

22-misol. Tenglamani ko`ramiz

$$y' = \frac{3}{5} y^{\frac{-2}{5}} \quad (88)$$

Uni quyidagi ko`rinishda yozib

$$\text{yoki } \left(y^{\frac{5}{3}} \right)' = 1$$

Integral egri chiziqlar oilasini olamiz

$$y^{\frac{5}{3}} = x + C \text{ yoki } y^5 - (x + C)^3 = 0.$$

Diskriminant egri chiziqni olamiz. Bizda bor

$$\left. \begin{aligned} y^5 - (x + C)^3 \\ -(x + C)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Bu erda $x = -C, y = 0$ Ravshanki $y = 0$ diskriminant egri chiziq o`rama chizig`i emas. (85) shart bajarilmagan.

Umumiy yechim (umumiy integral) ni qurish jarayonida mahsus yechim bo`lishga shubxali egri chiziqlarni topish.

Agar biron-bir differensial tenglamani integrallashtirish jarayonida uning ikkala qismini qandaydir $\omega(x, y)$ funksiyaga bo`lsak, biz umuman olganda berilganga baravar bo`lmagan tenglama olamiz chunki biz bunda $y = y(x)$ yoki $x = x(y)$ ko`rinishdagi yechimlarni yo`qotib qo'yishimiz mumkin, ularda bo`linuvchi  $\omega(x, y)$  no`lga aylanadi, agar bu yechimlar umumiy yechim tarkibida bo`lmasa. yuqorida keltirilgan yechimlar maxsusdir.

Misol uchun $y' = 2\sqrt{y}$ tenglamani integrallashtirib, biz $y = 0$ bo'lganda no'lga aylanuvchi $y = 0$ maxsus yechimini yo'qotib qo'ydik.

$$x^2 + y^2 = C^2 \quad (69)$$

2.2-§. Differentsial tenglama integrali tushunchasi.

Oddiy differentsial tenglamalar teoriyasida ham, xususiy hosilali tenglamalar teoriyasida ham katta o'rin tutuvchi yana bir tushunchani kiritamiz. Bu differentsial tenglama integrali tushunchasidir.

Tasavvur qilaylik, quyidagi differentsial tenglamani integrallashtirib ixtiyoriy doimiy C ga nisbatan yechilgan umumiy integral olamiz:

$$\phi(x, y) = C \quad (90)$$

Odatda (90) tenglamaning o'ng tomonini ushbu berilgan differentsial tenglamaning integrali deb ataydilar.

Agar umumiy integral quyidagi ko'rinishda hosil bo'lsa

$$\Psi(x, y, C) = 0, \quad (91)$$

integralni topish uchun (91) tenglamani C ga nisbatan yechish kerak. Buni imkoniyati mavjud deb hisoblab (91) tenglama berilgan differentsial tenglama integralini mavhum ko'rinishda belgilaydi deb aytamiz.

Va nihoyat agar biz umumiy yechimni bilsak

$$y = \psi(x, C), \quad (92)$$

integralni topish uchun shu singari yo'l tutamiz.

Quyida biz (2) differentsial tenglama integraliga ikkita ta'rif beramiz

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

D har bir nuqtasida (2) tenglamaning Koshi masalasi mavjudligi va yechimi yagonaligi holati bor maydon bo'lsin va

$$y = \varphi(x, C) \quad (93)$$

D maydonidagi ushbu tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. Unda (93) tenglik D maydonda C ga nisbatan yechilishi mumkin:

$$\psi(x, y) = C. \quad (94)$$

$\psi(x, y)$ doimiyga olib kelinmaydi, chunki u ayniyat bo'yicha doimiyga D maydonida ham, ushbu maydonning biron-bir qismida ham doimiyga aylanmaydi.

(94) tenglikning chap tomonidagi $\psi(x, y)$ funksiyasining yana bir xususiyatini ta'kidlab o'tamiz. $\psi(x, y)$ funksiyasi yni (93) umumiy yechimda

maydonida joylashgan har qanday xususiy yechim bilan almashtirganda doimiyga aylanadi, shu nilan birga ushbu doimiy qiymati tanlangan xususiy yechim bilan belgilanadi, ya'ni biz x ga nisbatan ayniyatga egamiz :

$$\psi[x, \psi(x, C)] = C. \quad (95)$$

har qanday ko'rsatib o'tilgan xossalarga ega $\psi(x, y)$ funktsiyani (1) tenglamaning D maydonidagi integrali deb ataymiz.

Integralning birinchi ta'rifi. D maydonida aniqlangan va doimiy bo'lmagan $\psi(x, y)$ funktsiyasi (2) tenglamaning D maydonidagi integrali deb ataladi, agar y ni har qanday ushbu tenglamaning xususiy yechimi bilan almashtirganda u doimiyga aylansa.

Endi tahmin qilamiz $\psi(x, y)$ funktsiyasi (2) tenglamaning integrali bo'lgan holda x va y bo'ylab uzilmas xususiy hosilalarga ega. Bu holda u har qanday xususiy yechim bo'ylab doimiyga aylanishi xisobiga uning to'liq differentsiali $d\psi$ aynan (x bo'ylab) ushbu yechim bo'ylab nolga aylanishi kerak, ya'ni:

$$d\psi = d\frac{\psi}{dx}dx + d\frac{\psi}{dy}dy = 0 \quad (96)$$

har qanday xususiy yechim bo'ylab.

Lekin yechim bo'ylab biz egamiz

$$dy = f(x, y)dx \quad (97)$$

Shuning uchun avvalgi ayniyatni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}f(x, y)dx = 0. \quad (98)$$

Ushbu ayniyat D maydonning barcha nuqtalarida bajarilsishi kerak.

Shunday qilib, agar $\psi(x, y)$ integrali uzliksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, uning to'liq differentsiali, (1) tenglama kuchi bilan, nolga aylanadi, ya'ni dy ni uning (2) tenglamadagi qiymat bilan almashtirilganda. Shu bilan birgalikda $\frac{d\psi}{dy}$ D maydonida noldan farq qilishi kerak, chunki (98)dan kelib chiqadiki, D maydonidagi $\frac{d\psi}{dy} = 0$ bo'lgan (x, y) nuqtasida $\frac{d\psi}{dy} = 0$ bo'ladi, demak bu nuqtada (2) tenglama orqali aniqlanuvchi maydon berilmagan.

Integralning ikkinchi ta'rifi. D maydonida x va y xususiy hosilalari bilan aniqlangan va uzilmas $\psi(x, y)$ funktsiya va D maydonida $\frac{d\psi}{dy} \neq 0$ (2) tenglamaning D maydonidagi integrali deb ataladi, agar uning to'liq differentsiali D da ushbu tenglamaga binoan aynan nolga teng bo'lsa.

(98) ayniyatning ikkala qismini dx ga bo'lib hosil qilamiz:

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} f(x, y) = 0. \quad (99)$$

Ushbu ayniyatning chap tomoni x bo'ylab ψ funktsiyaning to'liq xususiy hosilaning

$$\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{dy}{dx},$$

$\frac{dy}{dx}$ ni (2) tenglamadagi qiymati bilan almashtirilishi natijasidir.

Shunday qilib agar $\psi(x, y)$ (2) tenglamaning integrali bo'lsa, uning x bo'ylab to'liq xusuiy hosilasi (D da) (2) tenglamaga mos ravishda nolga aynan teng, ya'ni y' ni ushbu tenglamaning o'ngtarafi bilan almashtirilganda.

Ravshanki ikkiinchi ta'rif bo'yicha integral bo'lgan $\psi(x, y)$ funtsiyasi birinchi ta'rif bo'yicha jam integral bo'ladi.

Teskarisi to'g'ri emas, chunki birinchi ta'rif bo'yicha integral bo'lgan $\psi(x, y)$ funktsiyasi x va y bo'yicha xususiy hosilalarga ega bo'lmasligi mumkin.

23-misol. Tenglama berilgan bo'lsin

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad (101)$$

Quyidagi funksiya

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 \quad (102)$$

(101) tenglamaning integrali ekanligini ko'rsatib beramiz.

Koshi masalasining mavjudligi va yechimining yagonaligi ordinatasi 0 dan farq qiluvchi har qanday (x, y) nuqtasida, ya'ni yuqori va ostki yarim tekisliklarda, kafolatlangan. Misol sifatida yuqori yarim tekislikni olaylik.

Unda $\psi(x, y)$ funktsiyasi o'z xususiy hosilalari bilan uzilmas, sh bilan birga $\frac{d\psi}{dy} = 2y$ noldan farq qiladi.

So'ng biz egamiz:

$$d\psi = 2xdx + 2ydy. \quad (103)$$

O'ng tarafiga dy ni o'rniga umin (101) tenglamadagi qiymatini qo'yib hosil qilamiz:

$$d\psi(101) = 2xdx + 2y\left(-\frac{x}{y}\right)dx \equiv 0 \quad (104)$$

Demak (102) funksiya (101) tenglamaning yuqori yarim tekislikdagi integralidir.

Shunday tarzda u (101) tenglamaning ostki yarim tekisligida ham integrali ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Agar (2) tenglama bi integralga ega bo'lsa u holda u cheksiz integrallarga ega bo'lishini ko'rsatamiz. Ya'ni quyidagi teorema mavjud.

4-teorema. Agar $\psi_1(x, y)$ (2) tenglamaming D maydonidagi x va y bo'ylab doimiy xususiy hosilalarga ega bo'lgan integrali bo'lsa, $\Psi(z)$ esa z maydonining qandaydir qismida aniqlangan, $\psi_1(x, y)$ funktsiyasi qabul qiluvchi barcha qiymatlarni qamrab oluvchi (u holda (x, y) funktsiyasi butun D maydonidan o'tadi) va ushbu maydonda noldan farq qiluvchi uzliksiz hosilaga ega har qanday funktsiya bo'lsa, quyidagi funktsiya ham

$$\psi = \Psi[\psi_1(x, y)] \quad (105)$$

D maydonidagi (2) tenglamaning integrali bo'ladi.

Darhaqiqat, ψ funktsiyasi x va y bo'ylab doimiy xususiy hosilalarga ega:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\Psi}{d\psi_1} \frac{d\psi_1}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dy} = \frac{d\Psi}{d\psi_1} \frac{d\psi_1}{dy}, \quad (106)$$

shu bilan birga D maydonida $\frac{d\psi}{dy} \neq 0$. Undan so'ng ega bo'lamiz:

$$d\psi = \frac{d\Psi}{d\psi_1} d\psi_1 \quad (107)$$

(2) tenglamaga mos ravishda $d\psi_1 \equiv 0$, mos ravishda $d\psi \equiv 0$. Demak, ψ D maydonida (2) tenglamaning integralidir.

1-xossa. Agar $\Psi'(z)$ teoremda ko'rsarib o'tilgan maydonning z ning hamma qismida emas, faqat bir qismida noldan farq qilsa, (105) funktsiya (2) tenglamaning D maydondagi mos qismida integrali bo'ladi.

2-xossa. Isbot qilingan teoremdan kelib chiqadiki, agar

$$\psi_1(x, y) = C_1 \quad (108)$$

(2) tenglamaning umumiy integrali bo'lsa,

$$\Psi[\psi_1(x, y)] = C \quad [C = \Psi(C_1)], \quad (109)$$

nisbati ham, $\Psi(z)$ - noldan farqli uzilmas doimiyga ega har qanday funktsiya, (2) tenglamaning umumiy integralidir.

Bu da'vo Ψ funksiyasini kerakligini tanlash hisobiga ushbu tenglamaning umumiy integralining eng qulay ko'rinishda olishga imkon beradi.

24-misol. Tenglamani olamiz

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (110)$$

Ushbu tenglama, anglash qiyin emaski, quyidagi umumiy integralga ega:

$$\psi_1 = \arcsin x + \arcsin y = C_1 \quad (111)$$

Uning chap tarafi **transsendent funktsiya**.

Umumiy integralni algebraik shaklda yasaymiz. Buning uchun yuqorida ko'rsatilgan $\Psi(z)$ funksiyasi sifatida sinusni olamiz. U holda quyidagi ko'rinishdagi umumiy integral olamiz

$$\psi = \sin(\arcsin x + \arcsin y) = C \quad (112)$$

yoki

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C, \quad (113)$$

ya'ni biz algebraik ko'rinishdagi umumiy integral hosil qildik. Umumiy integralning ushbu ko'rinishi avvalgisidan ko'p holatlarda qulayroq. Jumladan, radikallardan qutilib biz bu yerdan umumiy integralni ratsional ko'rinishda olishimiz mumkin.

(2) tenglamaning integrali haqidagi yuqoridagi berilgan tushuncha (4) differentsial ko'rinishdagi tenglamaga ham

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

(6) simmetrik ko'rinishdagi tenglamaga ham

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)},$$

oson ko'chirilasi.

Uzilmas xususiy hosilalarga ega integralda to'xtalamiz. (4) tenglama (5) tenglamalar jamlanmasiga teng bo'lgani uchun

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

biz $\psi(x, y)$ funksiyasini (4) tenglamaning D maydonidagi, D maydoni ushbu tenglama uchun Koshi masalasining mavjudligi va yechimining yagonaligi maydoni, agar $\frac{d\psi}{dx}$ va $\frac{d\psi}{dy}$ D maydonida mavjud va uzliksiz, D maydonining hech qaysi nuqtasida nolga aylanmaydigan va agar $\psi(x, y)$ funksiyasining to'liq differentsiali aynan (Dda) (4) tenglamaga mos ravishda nolga teng bo'lsa, integrali deb ataymiz.

Differentsial tenglama (6) simmetrik ko'rinishda berilgan hollarda, integral tushunchasi shunga o'xshash kiritiladi, shu bilan birga taxmin qilinadiki, ko'rilyatgan maydonda X va Y funksiyalari bir vaqtda nolga aylanmaydi.

**Bir tenglamaning har qanday ikki integrali o'zaro bog'liqligi
teoremasi.**

Ushbu bobda biz (2) tenglamaning bir maydonda aniqlangan ikki integrali o'zaro bog'liqligini isbotlaymiz. Avvalo ikki funksiyaning o'zaro bog'liqligi tushunchasini eslatib o'tamiz. Qandaydir D maydondagi xususiy hosilalari bilan $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalari berilgan bo'lsin. Agar $f(x, y)$ funksiyasi $g(x, y)$ funksiyasidan bo'lsa,

$$f = \Psi(g) \quad (114)$$

D maydonidagi x, y ning barcha qiymatlarida tenglik mavjud, shu bilan birga $\Psi(z)$ z dan $g(x, y)$ funksiyasining barcha qiymatlarida uzliksiz hosilaga ega uzliksiz funksiya, (x, y) nuqtasi D maydoni bo'ylab o'tganda D maydonida f funksiyasi g funksiyasiga bog'liq deyishadi. Umuman f va g funksiyalarini D maydonida bog'liq deyishadi, agar f ga g ga, f esa g ga bog'liq bo'lsa.

25-misol. Ikki funksiya

$$f_1 = \ln x + \ln y, \quad g_1 = xy \quad (115)$$

$x > 0, y > 0$ (birinchi kvadrant) maydonida bogliq, ya'ni aynan:

$$f_1 = \ln g_1 \quad (116)$$

buni isbotlash uchun bizga quyidagi lemma kerak bo'ladi.

Lemma. Ikkita funksiya berilgan bo'lsin $f(x, y)$ va $g(x, y)$. aniqlangan va uzliksiz, D maydonida, xususiy hosilalari bilan. Tahmin qilamiz, Yokobin aniqlovchisi yoki yakobian deb ataluvchi aniqlovchi

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{df(x, y)}{dx} & \frac{df(x, y)}{dy} \\ \frac{dg(x, y)}{dx} & \frac{dg(x, y)}{dy} \end{array} \right|$$

D maydonida aynan nolga teng, lekin

$$g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0) \neq 0, \quad (118)$$

bu yerda (x_0, y_0) ushbu maydondagi qandafir nuqta. U holda f funksiya D_0 ning atrofida (x_0, y_0) nuqtasi g dan bo'lgan funksiya, ya'ni D_0 dan x, y ning barcha qiymatlarida quyidagi tenglik bajariladi:

$$f = \Psi(g). \quad (119)$$

26-misol. (115) funksiyalarni yana ko'rib chiqamiz,

$$f_1 = \ln x + \ln y, \quad g_1 = xy (x > 0, y > 0)$$

ularning yakobianlarini tuzamiz:

$$\left| \frac{df_1}{dx} \frac{df_1}{dy} \right| \equiv \left| \frac{1}{x} \frac{1}{y} \right|,$$

U nolga aynan teng. Lekin ko'rib chiqilyatgan hududda biz egamiz:

$$\frac{dg_1}{dx} = y \neq 0, \frac{dg_1}{dy} = x \neq 0, \quad (120)$$

(x_0, y_0) nuqtasi sifatida birinchi kvadrantdagi har qanday nuqtani olish mumkin.

Misol sifatida $(1, 1)$ nuqtasini olaylik. Lemmaga muvofiq f_1 funksiyasi olingan nuqtaning atrofida g_1 dan kelib chiqadi, ya'ni uning atrofida biz ega bo'lamiz:

$$f_1 = \Psi(g_1) \quad (121)$$

Ψ funksiyasining ko'rinishini topamiz. Ega bo'lamiz:

$$\ln x + \ln y = \Psi(xy)$$

$y = 1$ qo'yamiz. Hosil qilamiz $\ln x = \Psi(x)$. demak Ψ sifatida logarifm olish kerak, shuning uchun

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \text{ yoki } f_1 = \ln g_1$$

Olingan tenglik lemmaga muvofiq $(1,1)$ nuqtasining atrofida bajariladi. Aslida, 25-misolda aytilgandek, u birinchi kvadrantning barcha x, y larda bajariladi, shuning uchun f_1, g_1 ning butun birinchi kvadrantida funksiyadir.

Endi (2) tenglamaning har qanday ikki integrali bog'liqligini ko'rsatamiz, ya'ni quyidagi teorema bajariladi.

5-teorema. (2) tenglamaning D maydonida aniqlangan har qanday $\psi(x, y)$ va $\psi_1(x, y)$ integrali qandaydir D maydoni ichidagi D_0 maydonida o'zaro bog'liq, ya'ni ayniyat bo'yicha (D_0 da) quyidagi tenglik bajariladi

$$\psi = \Psi(\psi_1) \quad (122)$$

Darhaqiqat $\psi(x, y)$ va $\psi_1(x, y)$ (2) tenglamaning D maydonidagi integrallari bo'lgani uchun ta'rif bo'yicha (D da) ayniyat mavjud

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} f(x, y) dx = 0, \\ \frac{d\psi_1}{dx} + \frac{d\psi_1}{dy} f(x, y) dx = 0, \end{array} \right\} \quad (123)$$

lekin u holda (D da) quyidagi ayniyat ham bor bo'ladi

$$\left| \frac{\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} f(x, y)}{\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{d\psi_1}{dy} f(x, y)} \right| \equiv 0 \quad (124)$$

Shunday qilib ψ va ψ_1 funktsiyalari yakobiani ayniy (D da) nolga teng. Shundan, $\frac{d\psi_1}{dy}$ D maydonining har qanday (x_0, y_0) nuqtasida noldan farq qilinishini hisobga olib, yuqoridagi keltirilgan lemmaga muvofiq, ψ funksiyasi D maydonidagi qandaydir (x_0, y_0) nuqtasidagi ψ_1 funksiyasidan kelib chiqadi, ya'ni (D_0 da) (122) tenglik ayniy bajariladi deb xulosa qilamiz. Teorema isbotlandi.

Yana aytib o'tamizki (122) tenglikda Ψ funksiyasi ψ_1 funksiyasi tomonidan (x, y) nuqtasi D maydoni bo'ylab o'tganda ψ_1 tomonidan qabul qilinadigan barcha qiymatlarda uzliksiz hosilaga ega. Undan tashqari $\frac{d\Psi}{d\psi_1}$ noldan farq qiladi, chunki agar $\frac{d\Psi}{d\psi_1} = 0$, unda $\frac{d\psi}{dy} = \frac{d\Psi}{d\psi_1} \frac{d\psi_1}{dy} = 0$, ya'ni $\frac{d\psi}{dy} = 0$ bu esa mumkin emas, chunki ψ (2) tenglamaning integralidir.

Shunga o'xshash mulohazalar bilan bir maydonda aniqlangan ikkita integral orasidagi bog'liqlik (4) va (6) ko'rinishdagi tenglamalar uchun ham mavjudligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Kvadraturalarda integrallashuv haqida.

Izlanyatgan funksiya xossalarini o'rganish va qiymatini hisoblash maqsadida imkon bo'lganda tenglamani kvadraturalarda integrallashga harakat qiladilar.

(2) tenglamaning kvadraturalarda integrallashuvi masalasini yechimi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$f(x, y)$ funksiyasi ko'rinishiga bog'liq. Umumiy hollarda (2) tenglama kvadraturalarda integrallashmaydi. Lekin $f(x, y)$ funksiyasining ba'zi xususiy ko'rinishlarida uni kvadraturalarda integrallashuviga erishish mumkin. Ushbu bobning bu paragrafi bunday tenglamalarning eng muhim tiplariga bag'ishlangan.

Aytib o'tish kerak (2) tenglamani ko'rib chiqayotganimizda biz y ni izlanyatgan funksiya deb hisoblaymiz. Lekin ko'p hollarda berilgan (2) tenglama ko'rinishi kvadraturalarda integrallashuvchi tenglama tipiga kirmaydi, shu bilan birga agr izlanyatgan funksiya y emas x deb hisoblansa u kvadraturalarda integrallashadi, ya'ni uni qaytadan (2') tenglama ko'rinishida yozilsa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{1},$$

agar berilgan tenglama (4) ko'rinishda bo'lsa,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

uni doimo $\frac{dy}{dx}$ yoki $\frac{dx}{dy}$ ga nisbatan yechib (2) yoki (2') ko'rinishga keltirish mumkin. Agar bu holda biron bir tenglama kvadraturada integrallashsa berilgan tenglama ham kvadraturada integrallashadi.

Lekin ko'p hollarda (4) tenglama ko'rinishidagi tenglama shundaoq ham kvadraturada integrallashadi. Hattoki ba'zi hollarda berilgan tenglama (2) ko'rinishga ega bo'ladi, lekin uning o'zi ham uning teskari (2') ko'rinishi ham ma'lum integrallashuvchi tiplaga mansub bo'lmaydi, shu bilan birga unga mos (4) ko'rinishdagi tenglama kvadraturada integrallashadi.

Shuning uchun berilgan differentsial tenglamaning kvadraturada integrallashuvi haqidagi savolga javob berish uchun uni (2), (2') va (4) ko'rinishlarda yozilganda ma'lum integrallashuvchi tiplaga mansubligini tekshirish lozim.

Kvadraturada integrallashuvchi tenglamalrniko'rib chiqqanda biz, ta'rifni soddalastirish maqsadida, tenglamalrning va yechimlarning to'liq analizini faqat en ko'p teoretik qiziqash uyg'otuvchi hollarda berib boramiz, qolgan hollarda esa formal integratsiya bilan kifoyalanamiz.

Xulosa.

Oddiy differensial tenglamalar juda keng tadbiqu ega bo'lgan fanlardan biridir. Bu fanni amaliyotga tadbiqu etish uchun avvalo differensial tenglamani yechimlarini aniqlashni bilish zarur. Fanning eng ko'p o'rganilgan bo'limi bu birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalardir. Ammo biz amaliy masalalarni matematik modelini tuzganimizda hamma vaqt ham birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'lmaydi. Lekin barcha diferensial tenglamalar ham birinchi tartibli chiziqli ko'rinishda bo'lavermaydi. Ko'p hollarda yuqori tartibli differensial tenglamalarni o'rganish zarurati paydo bo'ladi. Agarda bunday tenglamalarni tartibini pasaytirib birinchi tartibli differensial tenglamaga o'tib olsak qaralayotgan masalani o'rganishimiz yengillashadi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar o'rganilgan bo'lib, unda hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, tenglamaning yechimi, umumiy yechim, hususiy yechim, mahsus yechim tushunchalari yoritildi. Shu bilan birga differensial tenglamaning integrali tushunchasi berildi. Hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasining qo'yilishi o'rganildi. Nazariy ma'lumotlarni kengroq tushuntirish maqsadida ko'plab misollar yechib ko'rsatildi. Ishni tayyorlash davomida ikkinchi kursda "differensial tenglamalar" kursida o'rganilgan bilimlar asqotdi. O'ylaymanki, bu malakaviy ishdan ikkinch kurs talabalari qo'llanma sifatida foydalanishlari mumkin.

Foyalanilgan adabiyotlar.

1. Н.М.Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений
2. Карташев А.П., Рождественский В.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления, М., Наука, 1986.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, М., Наука, 1965.
4. Салохиддинов М.С., Насриддинов Г. Оддий дифференциал тенгламалар, Т., Ўзбекистон, 1994.
5. Салохиддинов М.С. Математик физика тенгламалари, Т., Ўзбекистон, 2002.
6. Еругин Н.Г. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, Минск, Наука и техника, 1970.
7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1964.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Наука, 1969.
9. Филлипов А.Ф. Сборник задач дифференциальным уравнениям, М., Наука, 1992.
10. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, 1-қисм, Т., Ўқитувчи, 1986.
11. Азларов Т., Мансуров Х. Математик анализ, 2-қисм, Т., Ўзбекистон, 1989.
12. Фихтенгольц Г.М. Математик анализ асослари, 1-, 2-т., Т., Ўқитувчи, 1970.

Internet ma'lumotlari

- <http://diffurov.net>
- www.mathnet.ru