

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS  
TA'LIM VAZIRLIGI**

**ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI**

**ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI**

**MATEMATIKA KAFEDRASI**

**Qo'lyozma xuquqida**

**ABDUMALIKOVA GULZODAXON**

**“STILTES INTEGRALI”**

**5130100- matematika yo'nalishi bakalavr akademik darajasini olish  
uchun yozilgan**

**BITIRUV MALAKAVIY ISH**

**ISH RAHBAR:**

**X.Qo'shaqov.**

**ANDIJON-2016**

## Kirish

O'zbekiston Respublikasida ta'lim tizimini takomillashtirish davlat siyosatining ustuvoryo'nalishi deb e'tirof etilishi, ijtimoiy hayotning barcha sohalarida demokratik, insonparvarlik g'oyalarining yetakchi o'rin egallashi ustida olib borilayotgan amaliy harakatlar respublikada uzluksiz ta'lim tizimini jahon standarti darajasiga ko'tarishi uchun zarur shart-sharoit yaratishi lozimligini ko'rsatdi.

“Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” ni tayyorlash jarayonida O'zbekiston Respublikasi prezidenti mutaxassislar bilan uchrashganda Yaponiya va AQSH ta'lim tizimining bugungi ravnaqi, Yaponyaning so'nggi 50 yil davomida eng rivojlangan davlatlar qatoriga qo'shilishining asosiy omili yoshlarda ilm olishga bo'lgan hayotiy jarayoniga xorijiy davlatlardan malakali kadrlarni jalb etilganligi deb ta'kidlagan edi.

Uzluksiz ta'lim tizimi istiqbolini belgilab beruvchi meyoriy xujatlar O'zbekiston Respublikasi “Ta'lim to'g'risida” gi Qonuni va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” talablariga muvofiq ta'lim tizimini takomillashtirish, uni mazmunini boyitish, ta'lim oluvchilarni chuqur bilim olishiga erishish, ular asosida o'quv dasturlari va darsliklarning yangi avlodini yaratish hamda ularni tajribada sinovdan o'tkazish lozim.

Hozirgi paytda taraqqiyotimiz taqdirini ma'naviy jihatdan yetuk kadrlar hal qiladi. Aqliy zakovat, ma'naviy kamolot, insofu-diyonat, muruvvat, mehr-oqibat – bular marifatli, ma'naviyatli insonning fazilatlaridir. Ana shu fazilatlarni yoshlarimizda shakllantirish olimlar, ziyolilar, o'qituvchilar, tarbiyachilar zimmasida bo'lib, bu borada xususan, matematikani o'qitishning o'z o'рни va ahamiyati beqiyosdir.

Matematika o'sib kelayotgan yosh avlodni kamol toptirishda avvalo maktabda so'ngra oily o'quv yurtlarida o'qitiladigan fanlarning biri sifatida keng imkoniyatlarga ega.

Stiltes integrali Riman integralining bevosita umumlashganidan iboratdir. U birinchi marta golland matematigi (Th.J.Stiltes) tomonidan uzluksiz kasrlarni

tekshirishda kiritilgan. Keyincchalik u sof matematika masalalarida va aniq tabiiy fanlarda keng tadbirlarga ega bo'ldi va rivojlandi. Hozirgi kunda universitetlarning matematika yo'nalishining 4-kurs talabalari "Matematik analizning qo'shimcha boblari" fanida Stiles integrali haqida o'rganishmoqda. Stiles integrali oddiy Riman integraliga nisbatan umumiyroqdir.

Bundan tashqari ma'lum bo'ldiki, Stiles integrali fizikaga muvofiqiyatli tatbiq qilinishi mumkin, ya'ni moddiy jismning koordinata o'qlariga (shuningdek koordinata boshiga) nisbatan static moment, inersiya moment va og'irlik markazining koordinatalari Stiles integrali yordamida aniqlanishi mumkin.

## I BOB. CHEKLI VARIATSIYALI FUNKSIYALAR

Ushbu bob aniq integralning umumlashmasi bo'lgan Stiltes integralini o'rganishda asosiy vazifani bajaradigan va fanga birinchi bo'lib S.Jordan tomonidan kiritilgan chekli variyatsiyali funksiyalar bilan tanishishga bag'ishlangan. Chekli variyatsiyali funksiyalar faqatgina Stiltes integralni o'rganishda emas, balki matematik analizning boshqa ko'plab masalalarida katta ahamiyatga ega.

### 1.1-§. Chekli variatsiyali funksiyalar va ularning xossalari

**1. Chekli variatsiyali funksiyalar.** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya chekli  $[a, b]$  oraliqda aniqlangan bo'lsin. Bu oraliqni ushbu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

tensizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtalar yordamida  $n$  ta oraliqqa bo'lamiz va quydagi yig'indini tuzamiz.

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \quad (1)$$

**1-ta'rif.** Agar (1) – yig'indilar  $\forall n \in N$  uchun yuqoridan tekis chegaralangan bo'lsa, unda  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada **chekli varyatsiyaga ega** yoki **o'zgarishi chegaralangan funksiya** deyiladi. Shu yig'indilarning aniq yuqori chegarasiga funksiyaning to'liq varyatsiyasi yoki to'liq o'zgarishi deb ataladi xamda u  $V_a^b f(x)$  kabi belgilanadi.

$$\bigvee_a^b f(x) := \sup\{v_n\} \quad (2)$$

Ba'zi hollarda  $f(x)$  funksiyaning cheksiz oraliqdagi (masalan,  $[a, \infty)$  oraliqdagi) varyatsiyasi to'g'risida ham gapirish mumkin bo'ladi.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda berilgan bo'lsin.

**2-ta'rif.** Agar  $f(x)$  funksiya  $\forall [a, A] \subset [a, +\infty)$  oraliqda chekli varyatsiyaga ega bo'lib,  $\bigvee_a^A f(x)$  to'liq varyatsiyalar tekis chegaralangan bo'lsa, unda  $f(x)$  funksiya  $[a, +\infty)$  oraliqda chekli varyatsiyaga ega deb ataladi hamda

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A > a} \left\{ \bigvee_a^A f(x) \right\} \quad (3)$$

deb qabul qilinadi.

**Izoh.**  $f(x)$  funksiyaning chekli varyatsiyaga ega bo'lishida uning uzluksizligi mutlaqo ahamiyatga ega emas.

### Misollar. 1) Misol

$[a, b]$  kesmada ixtiyoriy chegaralangan monoton funksiya chekli varyatsiyaga ega bo'ladi.

**a)**  $[a, b]$ - chekli bo'lsin.  $\Rightarrow$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

((funksiya monoton bo'lgani uchun modullar yig'indisi yig'indining moduliga teng bo'ladi))

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \right| \\ &= |f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f(x_n) - f(x_0)| = |f(b) - f(a)| \Rightarrow \bigvee_a^b f(x) \\ &= \text{Sup}\{v_n\} = |f(b) - f(a)| \end{aligned}$$

b)  $f(x)$  funksiya  $[a, \infty)$  oraliqda berilgan bo'lsin.  $\Rightarrow$

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A > a} \left\{ \bigvee_a^A f(x) \right\} = \sup_{A > a} \{ |f(A) - f(a)| \} = |f(+\infty) - f(a)|,$$

bu yerda

$$f(+\infty) = \lim_{A \rightarrow +\infty} f(A)$$

2) Endi uzluksiz, lekin chekli varyatsiyaga ega bo'lmagan funksiya misol keltiramiz.

Ushbu

$$\begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyani  $[0,1]$  kesmada qaraymiz. Quyidagi

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \dots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar yordamida  $[0,1]$  kesmani oraliqlarga ajratamiz va (1) – yig'indini hisoblaymiz xamda ushbu tenglikka ega bo'lamiz.

$$v_n = \sum |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}. \Rightarrow$$

$$\bigvee_0^1 f(x) = \sup\{v_n\} = \sup \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right\} = +\infty.$$

**2. Chekli variyatsiyali funksiyalar sinfi.** Avvalgi punktda ko'rganimizdek  $[a,b]$  kesmada ixtiyoriy chegaralangan monoton funksiya chekli varyatsiyaga ega bo'ladi. Bu xossadan foydalanib, chekli variyatsiyali funksiyalar sinfini kengaytirish mumkin.

**1-teorema.**  $[a, b]$  kesmada berilgan  $f(x)$  funksiya shu kesmada bo'lakli monoton bo'lsa, ya'ni

$$[a, b] = \bigcup_{k=0}^{m-1} [a_k, a_{k+1}] \quad (a_0 = a, \quad a_m = b)$$

bo'lib,  $f(x)$  funksiya har bir  $[a_k, a_{k+1}]$  kesmada monoton bo'lsa, unda  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega bo'ladi.

$[a, b]$  kesmaning ixtiyoriy bo'linishini olib

$$v_n = \sum |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

yig'indini tuzamiz. Bu bo'linishga  $a_k (k = \overline{0, m})$  nuqtalarni qo'shib,  $[a, b]$  kesmaning yangi bo'linishini olamiz. Yangi bo'linish uchun

$$\overline{v_{n(m)}} = \sum_{k=0}^{m-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)| = B$$

bo'lib,  $v_n \leq \overline{v_{n(m)}}$  tengsizlik bajariladi.  $\Rightarrow$

$\text{Sup}\{v_n\} \leq B \Rightarrow f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega.

**2-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada Lipshis shartini qanoatlantirsa, ya'ni shunday  $L > 0$  son topilsaki, ixtiyoriy  $x, \bar{x} \in [a, b]$  nuqtalar uchun

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq L \cdot |\bar{x} - x| \quad (4)$$

tengsizlik bajarilsa, unda  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali funksiya bo'ladi va

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L \cdot (b - a)$$

tengsizlik bajariladi.

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \stackrel{(4)}{\leq} L \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = L(b-a), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

uchun  $\Rightarrow$

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L \cdot (b-a)$$

**3-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chegaralangan xosilaga ega bo'lsa, unda  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega bo'ladi.

Teorema shartiga ko'ra shunday o'zgarmas  $L > 0$  son topiladiki,  $\forall x \in [a, b]$  uchun

$$|f'(x)| \leq L$$

tengsizlik bajariladi.  $x, \bar{x} \in [a, b]$  nuqtalar olib  $[x, \bar{x}]$  (yoki  $[\bar{x}, x]$ ) kesmada Lagranchning chekli orttirmalar haqdagi teoremasidan foydalanamiz:

$$|f(\bar{x}) - f(x)| = |f(\xi) \cdot (\bar{x} - x)| \leq L \cdot |(\bar{x} - x)|.$$

Demak,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada Lipshis shartini qanoatlantirar ekan. Unda 2 –teoremaga ko'ra u chekli varyatsiyaga ega bo'ladi.

**Misol.** Ushbu

$$\begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya ixtiyoriy chekli  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega.

3 –teoremadan foydalanib ko'rsatamiz:

$x \neq 0$  da

$$f'(x) = 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$$

$x = 0$  da

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{\pi}{\Delta x} = 0$$

bo'lgani uchun ixtiyoriy chekli  $[a, b]$  kesmada ushbu

$$|f'(x)| \leq 2 \cdot |b| + \pi = L$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Unda 3 –teoremaga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da chekli varyatsiyaga ega.

**4-teorema.** Agar  $[a, b]$  kesmada aniqlangan  $f(x)$  funksiyani shu kesmada ushbu

$$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (5)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, bu yerda  $\varphi(t)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada absolyut integrallanuvchi funksiya, u xolda  $f(x)$  funksiya shu kesmada chekli varyatsiyaga ega bo'lib,

$$\bigvee_a^b f(x) \leq \bigvee_a^b |\varphi(t)| dt$$

tengsizlik bajariladi.

Teoremaning isboti ushbu

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(t)| dt \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

tensizlikdan kelib chiqadi.

**3. Chekli vatyatsiyali funksiyalarning xossalari.** Aytaylik, chekli  $[a, b]$  kesma berilgan bo'lsin.

**5-teorema.**  $[a, b]$  kesmadagi ixtiyoriy chekli variyatsiyali funksiyalar shu kesmada chegaralangan bo'ladi.

$\forall x^1 \in (a, b]$  kesmani olamiz. Unda shartga ko'ra

$$v_2 = |f(x^1) - f(a)| + |f(b) - f(x^1)| \leq \bigvee_a^b f(x) \quad (6)$$

bo'ladi  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |f(x^1)| &= |f(x^1) - f(a) + f(a)| \leq \\ &\leq |f(x^1) - f(a)| + |f(a)| \stackrel{(6)}{\leq} \bigvee_a^b f(x) + |f(a)| = M \Rightarrow f(x) \end{aligned}$$

chegaralangan.

**6-teorema.** Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali bo'lsa, unda

$$\mathbf{a)} f(x) \pm g(x) \quad \text{va} \quad \mathbf{b)} f(x) \cdot g(x)$$

funksiyalar ham chekli variyatsiyali bo'ladi.

**a)**  $F(x) = f(x) \pm g(x)$  bo'lsin. Unda

$$\begin{aligned} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| &= |[f(x_{k+1}) \pm g(x_{k+1})] - [f(x_k) \pm g(x_k)]| = \\ &= |[f(x_{k+1}) - f(x_k)] \pm [g(x_{k+1}) - g(x_k)]| \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \end{aligned}$$

$+|g(x_{k+1}) - g(x_k)|$  bo'ladi

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq \\ &\leq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x) \Rightarrow \bigvee_a^b F(x) \leq \bigvee_a^b f(x) + \bigvee_a^b g(x) \Rightarrow F(x) \end{aligned}$$

chekli variyatsiyali funksiya.

**b)**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali bo'lganligi uchun 5 —teoremaga ko'ra ular shu kesmada chegaralangan bo'ladi, ya'ni  $\exists K > 0$  va  $L > 0$  sonlar topiladiki,  $\forall x \in [a, b]$  uchun

$$|f(x)| \leq K \text{ va } |g(x)| \leq L$$

tengsizlik bajariladi.

Endi  $F(x) = f(x) \cdot g(x)$  deb belgilaymiz. U xolda quydagi munosabatlar bajariladi.

$$\begin{aligned} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| &= |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| = \\ &= |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_{k+1})g(x_k) + f(x_{k+1})g(x_k) - f(x_k)g(x_k)| \leq \\ &\leq |f(x_{k+1})||g(x_{k+1}) - g(x_k)| + |g(x_k)||f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \\ &\leq K \cdot |g(x_{k+1}) - g(x_k)| + L|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \end{aligned}$$

Bu yerdan

$$\bigvee_a^b F(x) \leq K \cdot \bigvee_a^b g(x) + L \cdot \bigvee_a^b f(x)$$

ekanligi va  $F(x)$ - chekli funksiya bo'lishini topamiz.

**7-teorema.** Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali bo'lib, shu kesmada  $|g(x)| \geq c > 0$  bo'lsa, unda  $\frac{f(x)}{g(x)}$  nisbat ham  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali bo'ladi.

$h(x) = \frac{1}{g(x)}$  deb belgilab, uning chekli varyatsiyaga ega bo'lishini ko'rsatamiz.

$$|h(x_{k+1}) - h(x_k)| = \left| \frac{1}{g(x_{k+1})} - \frac{1}{g(x_k)} \right| = \frac{|g(x_{k+1}) - g(x_k)|}{|g(x_k) \cdot g(x_{k+1})|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c^2} \cdot |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \Rightarrow \bigvee_a^b h(x) \leq \frac{1}{c^2} \cdot \bigvee_a^b g(x) \Rightarrow h(x)$$

-chekli variyatsiyali funksiya.

Unda 6 –teoremaga ko'ra  $f(x) \cdot h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  funksiya ham  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali bo'ladi.

**8-teorema.** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada aniqlangan va  $c \in (a, b)$  bo'lsin. Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da chekli variyatsiyali bo'lsa, unda u  $[a, c]$  va  $[c, b]$  kesmalarning har birida chekli variyatsiyali bo'ladi va aksincha. Shuningdek

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \quad (7)$$

tenglik bajariladi.

Faraz qilaylik  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali bo'lsin.  $[a, c]$  va  $[c, b]$  kesmalarning har birini  $\forall$  usul bilan alohida kesmalarga ajratamiz:

$$a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = c; \quad c = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_l = b \quad (8)$$

Natijada, butun  $[a, b]$  kesma ham qismlarga ajratiladi.  $[a, c]$  va  $[c, b]$  kesmalar uchun quydagi yig'indilarni tuzamiz:

$$v_1^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|; \quad v_2^{(l)} = \sum_{i=0}^{l-1} |f(y_{i+1}) - f(y_i)|.$$

$\Rightarrow [a, b]$  kesma uchun  $v_n = v_1^{(m)} + v_2^{(l)}$  bo'ladi.

$$\Rightarrow v_1^{(m)} + v_2^{(l)} = v_n \leq V_a^b f(x) \Rightarrow v_1^{(m)} \leq V_a^b f(x) \text{ va } v_2^{(l)} \leq V_a^b f(x) \Rightarrow f(x)$$

funksiya  $[a, c]$  va  $[c, b]$  kesmalarning har birida chekli varyatsiyaga ega va quydagi tengsizlik bajariladi:

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leq \bigvee_a^b f(x) \quad (9)$$

Endi faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, c]$  va  $[c, b]$  kesmalarning har birida chekli varyatsiyaga ega bo'lsin.  $[a, b]$  kesmaning ixtiyoriy bo'linishini olamiz. Agar  $c$  nuqta bo'linish nuqtalariga kirmasa, unda  $c$  ni ham bo'linish nuqtalariga qo'shamiz. Natijada,  $v_n$  yig'indi faqat kattalashishi mumkin:

$$v_n \leq v_1^{(m)} + v_2^{(l)} \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \Rightarrow f(x)$$

funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega va

$$\bigvee_a^b f(x) \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \quad (10)$$

tengsizlik bajariladi. (9) – va (10) – tengsizliklardan (7) – tengsizlik kelib chiqadi.

Bu teoremdan natija sifatida quydagi xossa kelib chiqadi.

**9-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali bo'lsa, unda ixtiyoriy  $x \in [a, b]$  uchun

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

to'liq varyatsiya  $x$  o'zgaruvchining monoton o'suvchi vachegaralangan funksiyasi bo'ladi.

Ixtiyoriy  $x^I, x^{II} \in [a, b] (x^I < x^{II})$  nuqtalarni olsak, unda 8-teoremaga ko'ra

$$\bigvee_a^{x^{II}} f(t) = \bigvee_a^{x^I} f(t) + \bigvee_{x^I}^{x^{II}} f(t)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan kelib chiqadi

$$g(x^{II}) - g(x^I) = \bigvee_a^{x^I} f(t) - \bigvee_a^{x^I} f(t) = \bigvee_a^{x^{II}} f(t) \geq 0 \Rightarrow g(x^{II}) \geq g(x^I) \Rightarrow g(x)$$

↑.

## 1.2-§. Chekli variyatsiyali funksiyalar uchun zaruriy va yetarli shartlar

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  oraliqda aniqlangan bo'lsin. Bu paragrafda biz berilgan  $f(x)$  funksiyaning chekli varyatsiyaga ega bo'lishi mezonlarini keltiramiz.

**10-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega bo'lishi uchun shu kesmada monoton o'suvchi va chegaralangan shunday  $F(x)$  funksiyaning mavjud bo'lib ixtiyoriy  $[x^I, x^{II}] \subset [a, b]$  kesmada

$$|f(x^{II}) - f(x^I)| \leq F(x^{II}) - F(x^I) \quad (11)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Shunday xossaga ega bo'lgan  $F(x)$  funksiyaga  $f(x)$  funksiya uchun **majoranta** deyiladi.

**Zarurligi.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya chekli varyatsiyaga ega bo'lsin. Unda

$$F(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

deb belgilasak,  $F(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada monoton o'suvchi va chegaralangan bo'ladi. To'liq varyatsiyaning ta'rifiga ko'ra

$$|f(x^{II}) - f(x^I)| \leq \bigvee_{x^I}^{x^{II}} f(t) = F(x^{II}) - F(x^I)$$

tengsizlik bajariladi.

**Yetarliligi.** Aytaylik, (11) –tengsizlik bajarilsin. Unda

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| = F(b) - F(a)$$

bundan kelib chiqadi  $f(x)$  chekli variyatsiyali funksiya.

**11-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega bo'lishi uchun uni shu oraliqda ikkita monoton o'suvchi va chegaralangan funksiyalarning ayirmasi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lishi zarur va yetarli

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad (12)$$

**Zarurligi.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega bo'lsin. Unda 10 –teoremaga ko'ra shunday majoranta  $F(x)$  topiladiki, uning uchun

(11) –tengsizlik bajarildi. Tuzilishiga ko'ra  $F(x)$  funksiya monoton o'suvchi va chegaralangan. Agar

$$g(x) = F(x) \text{ va } h(x) = F(x) - f(x)$$

deb belgilasak,  $f(x) = g(x) - h(x)$  bo'ladi hamda quydagi munosabat bajariladi.

$$h(x'') - h(x') = [F(x'') - F(x')] - [f(x'') - f(x')] \stackrel{(11)}{\geq} 0,$$

$x'' \geq x' \text{ va } x', x'' \in [a, b] \Rightarrow h(x) \uparrow$  va chegaralangan, chunki

$$|h(x)| \leq |F(x)| + |f(x)| \leq M.$$

**Yetarliligi.** Faraz qilaylik,  $g(x)$  va  $h(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada monoton o'suvchi va (12) –tengsizlik bajarilsin.

$$F(x) = g(x) + h(x)$$

deb olib, uning  $f(x)$  uchun majoranta bo'lishini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &= |[g(x'') - g(x')] - [h(x'') - h(x')]| \leq \\ &\leq |g(x'') - g(x')| + |h(x'') - h(x')| = [g(x'') - g(x')] + \\ &+ [h(x'') - h(x')] = [g(x'') + h(x'')] - [g(x') + h(x')] = \\ &= F(x'') - F(x') \Rightarrow F(x) \end{aligned}$$

-majoranta. Unda 10-teoremaga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli varyatsiyaga ega bo'ladi.

**Natija.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli baryatsiyaga ega bo'lsa, unda  $\forall x_0 \in [a, b]$  nuqtada uning chekli bir tomonli limitlari mavjud.

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x); \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \quad (13)$$

11 –teorema ko'ra shunday o'suvchi va chegaralangan  $g(x)$  va  $h(x)$  funksiyalar topiladiki,

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

tenglik bajariladi. Matematik analiz kursidan ma'lumki, monoton funksiyalar uchun chekli

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} g(x) = g(x_0 \pm 0)$$

va

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} h(x) = h(x_0 \pm 0)$$

lar mavjud.  $\Rightarrow (13)$ .

### 1.3-§. Chekli variyatsiyali uzluksiz funksiyalar. Jordan teoremasi.

**12-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada chekli variyatsiyali funksiya bo'lib,  $x_0 \in [a, b]$  bo'lsin. Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lsa, unda

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

funksiya ham  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi.

$x_0 < b$  deb faraz qilmiz va  $g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada o'ngdan uzluksiz ekanligini isbotlaymiz.  $\forall \varepsilon > 0$  son olib,  $[x_0, b]$  kesmani ushbu

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi shunday nuqtalar yordamida kesmalarga ajratamizki, natijada

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| > \bigvee_{x_0}^b f(t) - \varepsilon \quad (14)$$

tengsizlik bajarilsin.

$f(x) \in C\{x_0\}$  bo'lgani uchun,  $x_1$  nuqtani  $x_0$  nuqtaga shunday yaqin olish mumkinki,

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

bo'lsin. Unda (14) ga ko'ra

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_0}^b f(t) &< \varepsilon + v_n = \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \varepsilon + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \varepsilon + \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^b |f(t)| \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak,

$$\bigvee_{x_0}^b f(t) + \bigvee_{x_1}^b f(t) < 2\varepsilon$$

yoki

$$\bigvee_{x_0}^{x_1} |f(t)| < 2\varepsilon$$

munosabat o'rinli, bundan kelib chiqadi  $g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$ .  $g(x)$  o'suvchi bo'lgani uchun

$$0 \leq g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

Bu tengsizlik  $\forall \varepsilon$  ning ixtiyoriyligidan foydalansak,

$$g(x_0 + 0) = g(x_0)$$

tenglikni, ya'ni  $g(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada o'ngdan uzluksiz ekanligini hosil qilamiz.

$x_0 > a$  bo'lgan xolda  $g(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada chapdan uzluksiz ekanligini ham shu kabi ko'rsatiladi.

Bu teoremadan quydagi natija kelib chiqadi.

**Natija.**  $[a, b]$  kesmadagi chekli variyatsiyali uzluksiz  $f(x)$  funksiyaning shu kesmada ikkita uzluksiz, o'suvchi funksiyaning ayirmasi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

Agar

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

deb belgilasak, unda  $g(x) \uparrow$  va 12 –teoremaga ko'ra  $g(x) \in C[a, b]$  bo'ladi. Unda  $h(x) = g(x) - f(x)$  funksiya ham  $[a, b]$  kesmada uzluksiz bo'ladi. Endi uning o'suvchi bo'lishini ko'rsatamiz.

$\forall x'' > x', x', x'' \in [a, b]$ lar uchun

$$h(x'') - h(x') = [g(x'') - g(x')] - [f(x'') - f(x')] =$$

$$\int_{x'}^{x''} f(t) dt - [f(x'') - f(x')] \geq 0$$

tengsizlik bajariladi.  $\Rightarrow h(x) \uparrow$ .

**13-teorema.** Aytaylik,  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsin.  $[a, b]$  kesmani ushbu

$$a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtalar yordamida qismlarga ajratamiz va

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)]$$

yig'indini olamiz. Unda, agar

$$\lambda = \max_{k=0, n-1} (x_{k+1} - x_k)$$

bo'lsa, ushbu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} v_n = \int_a^b f(x) dx$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bizga ma'lumki,

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{v_n\}$$

va bo'linish nuqtalariga nisbatan  $\{v_n\} \uparrow$ . demak, teoremani isbotlash uchun

$$\sup\{v_n\} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} v_n \quad (16)$$

tenglikni bajarilishini ko'rsatish kifoya.

Faraz qilaylik,

$$\sup\{v_n\} = A \quad (17)$$

bo'lsin. Unda aniq yuqori chegaraning ta'rifiga ko'ra quydagilarni hosil qilamiz:

$$1) \forall n \in N \text{ uchun } v_n \leq A$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \text{ son olinganda ham } \exists n_0 \in N \text{ topiladiki, } v_{n_0} > A - \varepsilon \text{ tensizlik}$$

bajariladi.  $\{v_n\} \uparrow \Rightarrow \forall n > n_0 \text{ uchun } v_{n_0} > A - \varepsilon$  bo'ladi.

Demak,  $\forall n > n_0$  uchun  $A - \varepsilon < v_n \leq A < A + \varepsilon$  ekan. Bundan kelib chiqadi ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} v_n = A \quad (18)$$

tenglik o'rinli. (17) va (18) dan kelib chiqadi (16).

**To'g'rilanuvchi to'g'ri chiziqlar. Jordan teoremasi.** Chekli variyatsiyali funksiya tushunchasi egri chiziqning to'g'rilanuvchiligi masalasida o'z tadbqiqini topgan.

Aytaylik,

$$\widetilde{AB} = (L): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t = [t_0, T] \end{cases} \quad (19)$$

sodda egri chiziq berilgan bo'lib,  $\varphi(t), \psi(t) \in C[t_0, T]$  bo'lsin. Faraz qilaylik  $t$  parametr  $t_0$  dan  $T$  ga qarab o'zgarganda, unga  $L$  egri chiziqda mos keluvchi

$$(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$$

nuqta  $A$  nuqtadan  $B$  nuqtaga qarab o'zgarsin.

$[t_0, T]$  kesmada ushbu  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtalarni olib, ularga  $(L)$  egri chiziqda mos kelgan nuqtalarni  $A = A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n = B$  deb belgilaymiz. Bu nuqtalarni ketma-ket tutashtirish natijasida  $(L)$  egri chiziqqa chizilgan siniq chiziqni xosol qilamiz. Bu siniq chiziqning perimetri

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \quad (20)$$

tenglik yordamida ifodalanadi.

**3-ta'rif.** Agar ushbu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P_n = L \quad (\lambda = \max_{k=0, n-1} (t_{k+1} - t_k))$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, unda  $(L)$  egri chiziq **to'g'rilanuvchi chiziq** deyiladi hamda limitning qiymati  $L$  ga uning **uzunligi** deb ataladi.

**14-teorema (Jordan teoremasi).**  $(19)$  –egri chiziqning to'g'rilanuvchi bo'lishi uchun  $\varphi(t)$ , va  $\psi(t)$  funksiyalar  $[t_0, T]$  oraliqda chekli varyatsiyaga ega bo'lishi zarur va yetarli.

**Zarurligi.** Faraz qilaylik,  $(19)$ -egri chiziq to'g'rilanuvchi bo'lsin. U xolda  $[t_0, T]$  kesmaning ixtiyoriy bo'linishi uchun

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \leq M$$

tengsizlik bajariladi. Unda

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}$$

ga ko'ra

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2} \leq M$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni  $\varphi(x)$  - chekli variyatsiyali funksiya bo'ladi. xuddi shu kabi  $\psi(x)$  funksiya ham chekli variyatsiyali bo'lishini hosil qilamiz.

**Yetarlili.** Aytaylik,  $\varphi(x)$  va  $\psi(x)$  funksiyalar chekli variyatsiyali funksiyalar bo'lsin. Unda

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)] + \sum_{k=0}^{n-1} [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)] \leq \bigvee_{t_0}^T \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^T \psi(t) = M \Rightarrow$$

(19)-to'g'rilanivchi egri chiziq.

Teorema isbotidan ko'rinib turibdiki

$$L = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P_n \leq \bigvee_{t_0}^T \varphi(t) + \bigvee_{t_0}^T \psi(t)$$

tengsizlik bajariladi.

Egri chiziqning yoyining uzunligini  $L = (L)$  deb uni  $[t_0, T]$  oraliqda qaraymiz. Unda  $L(t) \uparrow$  bo'ladi. va  $\Delta t > 0$  bo'lganda  $\Delta L = L(t + \Delta t) - L(t)$  uchun

$$0 < \Delta L < \bigvee_t^{t+\Delta t} \varphi(t) + \bigvee_t^{t+\Delta t} \psi(t)$$

tengsizlik bajariladi. Bundan kelib chiqadi uzluksiz to'g'rilanuvchi egri chiziq uchun  $L(t)$  funksiya  $t$  parametrining uzluksiz funksiyasi bo'ladi.

## II BOB. STILTES INTEGRALI

### 2.1-§. Stiltes integralining ta'rifi va uning mavjudlik sharti.

**1. Stiltes integralining ta'rifi.** Stiltes integrali Riman integralining tabiiy umumlashmasi bo'lib, quydagicha aniqlanadi.

Aytaylik,  $[a, b]$  kesmada  $^2$  ta chegaralangan  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar berilgan bo'lsin.  $[a, b]$  kesmani ushbu

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtalar yordamida  $n$  ta  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , qismlarga ajratamiz.  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  va  $\lambda = \max_{k=\overline{0, n-1}} \Delta x_k$  deb belgilaymiz.  $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$  nuqta olib, ushbu yig'indini tuzamiz:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k) \quad (1)$$

(1)-yig'indiga **Stiltesning integral yig'indisi** deyiladi.

**1-ta'rif.** Agar

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$$

mavjud va chekli bo'lib, uning qiymati  $[a, b]$  kesmaning bo'linish usuliga xamda undagi  $\xi_k$  nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasa, unda shu songa  $f(x)$  funksiyaning  $g(x)$  funksiya bo'yicha **Stiltes integrali** deyiladi va

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x)$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k) \quad (2)$$

Agar (2)-integral mavjud bo'lsa, unda  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada  $g(x)$  funksiya bo'yicha integrallanuvchi deb ataladi.

**Izoh.** Riman integrali Stiles integralining xususiy xoli bo'lib, Stiles integralida  $g(x) = x$  deyilsa, undan Riman integrali kelib chiqadi.

Endi Stiles integralini mavjudlik shartini aniqlaymiz.

Faraz qilaylik,  $g(x)$  funksiya monoton o'suvchi bo'lsin. U xolda  $\Delta x_k > 0$  bo'lganda  $\Delta g(x) > 0$  bo'ladi.

Quyidagi shartlarni kiritamiz:

$$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}, \quad M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}$$

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k), \quad \bar{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k). \quad (3)$$

**2-ta'rif.**  $\underline{S}$  va  $\bar{S}$  yig'indilar mos ravishda **Darbu-Stilesning quyi va yuqori yig'indilari** deb atalad.

Oddiy Darbu yig'indilari kabi bu yig'indilar ham quyidagi xossalarga ega.

Agar  $[a, b]$  kesmaning bo'linish nuqtalariga yangilari kiritilsa, unda  $\underline{S}$  faqat ortishi,  $\bar{S}$  esa kamayishi mumkin.

Demak,  $\{\underline{S}\} \uparrow$  va  $\{\bar{S}\} \downarrow$

Darbu-Stilesning ixtiyoriy quyi yig'indisi uning ixtiyoriy yuqori yig'indisidan katta bo'la olmaydi (agar u boshqa bo'linishga mos kelsa ham).

Agar ushbu

$$I_* = \sup \{ \{S\} \} \quad \text{va} \quad I^* = \inf \{ \{S\} \}$$

tenglik yordamida Darbu-Stiltesning **quyi va yuqori integrallarini** aniqlasak, unda

$$\underline{S} \leq I_* \leq I^* \leq \bar{S}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. bu tengsizliklar va Darbu-Stiltes yig'indilaridan foydalanib, oddiy Riman integrali xolidagi kabi quydagi teorema osongina isbotlanadi.

**1-teorema.** Stiltes integralining mavjud bo'lishi uchun ushbu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{S} - \underline{S}) = 0$$

yo'ki

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) \quad (4)$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli ( $\omega_k = M_k - m_k$ ).

**2. Stiltes integrali mavjud bo'lgan funksiyalar sinfi.**

**2-teorema.** Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lib,  $g(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada monoton o'suvchi bo'lsa, unda

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) \quad (5)$$

Stiltes integrali mavjud bo'ladi.

$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow$  Kantor teoremasiga ko'ra tekis uzluksiz  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta > 0$  son topiladiki,  $[a, b]$  kesmani uzunliklari  $\delta$  dan kichik bo'lgan bo'laklarga ajratilganda,  $f(x)$  funksiyaning shu bo'laklardagi tebranishi  $\omega_k$  uchun ushbu

$$\omega_k = \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$$

tengsizlik bajariladi. Endi  $[a, b]$  kesmani uzunliklari  $\delta$  dan kichik bo'lgan qismlarga ajratamiz.  $\Rightarrow \lambda < \delta$  va

$$\omega_k = \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \sum_{k=0}^{n-1} [g(x_{k+1}) - g(x_k)] =$$

$$\frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} [g(b) - g(a)] = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0 \Rightarrow$$

(5)-integral mavjud.

**3-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lib,  $g(x)$  funksiya Lipshis shartini qanoatlantirsa, ya'ni

$$\begin{aligned} |g(\bar{x}) - g(x)| &\leq L(\bar{x} - x) \\ (L = \text{const}, a \leq x \leq \bar{x} \leq b) \end{aligned} \quad (6)$$

tengsizlik bajarilsa, unda (5)-Stiltes integrali mavjud bo'ladi.

a) Avval xossani  $g(x)$  funksiya (6)-shartni bajarishdan tashqari monoton o'suvchi bo'lgan hol uchun isbotlaymiz.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) < \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \stackrel{(6)}{\leq} L \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (x_{k+1} - x_k) = L \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$$

$f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lgani uchun

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0$$

va mos ravishda (7) – tengsizlikka ko'ra

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0$$

bo'ladi. Bundan kelib chiqadi (5) – integral mavjud.

a) **Umumiy xol.** Lipshis shartini qanoatlantiruvchi  $g(x)$  funksiyani quydagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$g(x) = L \cdot x - [L \cdot x - g(x)] = g_1(x) - g_2(x) \quad (8)$$

(8) – tenglikdagi  $g_1(x) = L \cdot x$  funksiya Lipshis shartini qanoatlantirishi bilan bir qatorda monoton o'suvchi ham bo'ladi. shu shartlarni  $g_2(x) = L \cdot x - g(x)$  funksiya ham bajaradi. Darhaqiqat,  $a \leq x \leq \bar{x} \leq b$  uchun

$$g_2(\bar{x}) - g_2(x) = L(\bar{x} - x) - [g(\bar{x}) - g(x)] \geq L(\bar{x} - x) - L(\bar{x} - x) = 0 \Rightarrow$$

va

$$|g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \leq L(\bar{x} - x) + |g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \stackrel{(6)}{\leq} L(\bar{x} - x) - L(\bar{x} - x)$$

a) holga ko'ra  $g_1(x)$  va  $g_2(x)$  lar uchun (4)-shart bajariladi  $\Rightarrow$  (4)-shart  $g(x)$  funksiya uchun ham bajariladi.  $\Rightarrow$  (5)-integral mavjud.

**4-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lib,  $g(x)$  funksiyani ushbu

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \quad (9)$$

bu yerda  $\varphi(x) \in [a, b]$  kesmada absolyut integrallanuvchi funksiya ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, unda (5)- integral mavjud bo'ladi.

teorema shartiga ko'ra  $|\varphi(t)|$  integrallanuvchi  $\Rightarrow |\varphi(t)|$  chegaralangan, ya'ni  $\exists L > 0: \forall t \in [a, b]$  uchun  $|\varphi(t)| \leq L$ . Unda  $a \leq x \leq \bar{x} \leq b$  uchun ushbu

$$\begin{aligned} |g(\bar{x}) - g(x)| &= \left| c + \int_a^{\bar{x}} \varphi(t) dt - c - \int_a^x \varphi(t) dt \right| = \left| \int_x^{\bar{x}} \varphi(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^{\bar{x}} |\varphi(t)| dt \leq L \int_x^{\bar{x}} dt = L(\bar{x} - x) \end{aligned}$$

munosabatlar bajariladi. ya'ni  $g(x)$  funksiya Lipshis shartini qanoatlantiradi. U holda 3 - teorema ko'ra (5) - integral mavjud.

**Stiltes integralining xossalari.** Stiltes integralining ta'rifidan to'g'ridan to'g'ri quydagi xossalar kelib chiqadi.

$$1^0 \quad (S) \int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$$

$$2^0 \quad (S) \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)] dg(x) = (S) \int_a^b f_1(x) dg(x) \pm (S) \int_a^b f_2(x) dg(x)$$

$$3 \quad (S) \int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] = (S) \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm (S) \int_a^b f(x) dg_2(x)$$

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (S) \int_a^c f(x) dg(x) + (S) \int_c^b f(x) dg(x). (a < c < b)$$

**Izoh.** xossadagi  $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$  integralning mavjud bo'lishidan  $(S) \int_a^c f(x) dg(x)$  va  $(S) \int_c^b f(x) dg(x)$  integrallarning xar birining mavjud bo'lishi kelib chiqadi, aksi esa o'rinli bo'lishi shart emas.

**Misol.**  $[-1, 1]$  kesmada berilgan ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } -1 \leq x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } 0 < x \leq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

va

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } -1 \leq x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } 0 < x \leq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyalarni olamiz. Unda

$$\int_{-1}^0 f(x) dg(x) \text{ va } \int_0^1 f(x) dg(x)$$

Integrallar mavjud va nolga teng bo'ladi, chunki ikkala xolda xam Stiles yig'indisida qatnashgan hadlar nolga teng.

Endi  $\int_{-1}^0 f(x) dg(x)$  integralning mavjud ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun  $[-1, 1]$  kesmaning shunday bo'linishini olamizki,  $0$  nuqta bo'linish nuqtasi bo'lmasin. Integral yig'indini tuzamiz:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k) = ((\text{Aytaylik, } 0 \in [x_{k+1}, x_k] \text{ bo'lsin})) \Rightarrow x_{k+1} < 0 < x_k \Rightarrow$$

yig'indidagi  $k$  -ko'shiluvchidan boshqa hammasi nolga teng bo'ladi, chunki,  $i \neq k$  da

$$\Delta g(x_i) = (g(x_{i+1}) - g(x_i) = 0)) = f(\xi_k) \cdot [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = f(\xi_k)(0 - 0) =$$

**Stiles integrali uchun bo'laklab integrallash formulasi.**

**5-teorema.** Agar  $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$  va  $(S) \int_a^b g(x) df(x)$  Stiles integrallaridan biri mavjud bo'lsa, unda ikkinchisi ham mavjud bo'ladi va ushbu bo'laklab integrallash formulasi o'rinli:

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - (S) \int_a^b g(x) df(x) \quad (10)$$

Faraz qilaylik,  $(S) \int_a^b g(x) df(x)$  mavjud bo'lsin.  $[a, b]$  kesmani ixtiyoriy usul bilan  $[x_{k+1}, x_k]$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ) qismlarga ajratamiz va  $\forall \xi_k \in [x_{k+1}, x_k]$  nuqtalarni tanlaymiz.

$(S) \int_a^b f(x) dg(x)$  integrali uchun Stiles yig'indisini olamiz:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k)] [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \quad ((\text{Bu yig'indini quydagi ko'rinishda yozib olamiz})) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} [f(\xi_{k-1})] g(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k)] g(x_k) = - \left[ \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k)] g(x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} [f(\xi_{k-1})] g(x_k) \right] \\ & = - \left\{ g(a) [f(\xi)_0] + \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) [[f(\xi)_k] - [f(\xi)_{k-1}]] - g(b) [f(\xi)_{n-1}] \right\} = \\ & = ([f(x) \cdot g(x)] \mid (b @ a)) = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) \end{aligned}$$

ifodani qo'shib ayiramiz))

Bu tenglikdagi katta qavs (figurali qavs) ichidagi ifoda  $(S) \int_a^b g(x) df(x)$  Stiles integrali uchun integral yig'indini beradi. Bu yig'indi  $[a, b]$  kesmani  $[\xi_k, \xi_{k+1}]$  kesmalar yordamida bo'linishiga mos keladi. Agar

$$\lambda = \max \Delta x_k \quad \text{va} \quad \lambda^l = \max \Delta \xi_k$$

deb belgilasak,  $(\lambda \rightarrow 0) \sim (\lambda^l \rightarrow 0)$  bo'ladi.  $\Rightarrow (11)$ - tenglikda  $\lambda \rightarrow 0 (\lambda^l \rightarrow 0)$  da limitga o'tsak, unda isbot qilishimiz kerak bo'lgan (10) - formulani hosil qilamiz.

## 2.2-§. Stiltes integralini hisoblash.

**6-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lib,  $g(x)$  funksiya ushbu

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt$$

ko'rinishida ifodalansin, bu yerda  $\varphi(t)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada absolyut integrallanuvchi funksiya. U xolda

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad (12)$$

(12) – tenglikning o'ng tomonidagi Riman integrali teorema shartiga ko'ra mavjud. Stiltes integrali mavjudligi esa  $\mathbb{R}$ -punktdagi 4 – teoremda isbotlangan. Endi faqat (12) – tenglikning o'rinli ekanligini isbotlash kerak.

Umumiylikka ziyon keltirmagan xolda  $\varphi(x) > 0$  deb faraz qilamiz, chunki ixtiyoriy  $\varphi(x)$  funksiyaning ikkita musbat  $\varphi_1(x)$  va  $\varphi_2(x)$  funksiyalarning ayirmasi ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

Buning uchun

$$\varphi_1(x) = \frac{|\varphi(x)| + \varphi(x)}{2}$$

va

$$\varphi_2(x) = \frac{|\varphi(x)| - \varphi(x)}{2}$$

deb olish kifoya.

Odatdagi usul bilan Stiltes yig'indini tuzamiz:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) \varphi(x) dx \quad (13)$$

Ikkinchi tomondan

$$(R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \quad (14)$$

tenglik o'rinli. (13) dan (14) ni ayiramiz va ayirmani baholaymiz:

$$\begin{aligned} \left| \sigma - (R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} [f(\xi_k) - f(x)] \varphi(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)| \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(x)| \varphi(x) dx \\ &\Rightarrow |f(\xi_k) - f(x)| \leq \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k \varphi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Shartga ko'ra

$$\begin{aligned} (S) \int_a^b f(x) dg(x) &\text{- mavjud} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) &= 0 \xrightarrow{(15)} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \quad (12) \end{aligned}$$

Isbotlangan teoremadan foydalanib, quydagi teorema ham oson isbotlanadi.

**7-teorema.** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi,  $g(x) \in [a, b]$ ,  $g(x)$  funksiya uchun  $[a, b]$  kesmaning chekli sondagi nuqtalardan tashqari barcha nuqtalarida  $g'(x)$  xosila mavjud bo'lib,  $g'(x)$  xosila  $[a, b]$  kesmada absolyut integrallanuvchi bo'lsin. Unda

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx \quad (16)$$

bo'ladi.

Teorema shartini qanoatlantiruvchi  $g(x)$  funksiya uchun

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt$$

formula o'rinli bo'ladi. Unda  $\varphi(t) = g'(t)$  bo'lgan xolda 6 - teorema ko'ra (16) - tenglikni hosil qilamiz.

Endi  $g(x)$  funksiya uzilishga ega bo'lgan holda Stiles integralini hisoblashni o'rganamiz.

Uni uzilishga ega bo'lgan «standart»  $\rho(x)$  funksiya boshlaymiz.

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$\rho(x)$  funksiya  $x = 0$  nuqtada 1 - tur uzilishga ega bo'lib, uning shu nuqtadagi sakrashi

$$\rho(+0) - \rho(0) = 1$$

bo'ladi.

$\rho(x)$  funksiyasi kabi, ushbu

$$\rho(x - c) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq c \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > c \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

va

$$\rho(c - x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x < c \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x \geq c \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyalar ham  $x = c$  nuqtada 1 - tur uzilishga ega bo'lib, ularning shu nuqtadagi sakrashi mos ravishda 1 va -1 ga teng bo'ladi.

$f(x)$  funksiya  $x = c$  nuqtada uzluksiz deb faraz qilamiz va

$$(S) \int_a^b f(x) d\rho(x - c)$$

integralni hisoblaymiz. Bu yerda  $a \leq c < b$  ( $c = b$  bo'lganda integral bo'ladi).

Stiltes yig'indisini tuzamiz:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta \rho(x_i - c)$$

Faraz qilaylik,  $c \in [x_k, x_{k+1}]$  ( $x_k \leq c < x_{k+1}$ ) bo'lsin. Unda  $i \neq k$  bo'lganda  $\Delta \rho(x_i - c) = 0$  va  $\Delta \rho(x_k - c) = 0$  bo'ladi.  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma = f(\xi_k) \Delta \rho(x_k - c) = f(\xi_k) \Rightarrow (S) \int_a^b f(x) d\rho(x - c) =$$

Demak,

$$(S) \int_a^b f(x) d\rho(x - c) = f(c) (a \leq c < b) \quad (17)$$

tenglik o'rinli bo'lar ekan. Huddi shu kabi

$$(S) \int_a^b f(x) d\rho(c - x) = -f(c) (a \leq c < b) \quad (18)$$

ekanligini xosil qilamiz. ( $c = a$  bo'lganda bu integral bo'ladi).

endi biz qaysidir ma'noda 7 - teoremani umumlashtiruvchi teoremani isbotlash imkononga egamiz.

**8-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada berilgan bo'lib, quydagi shartlar bajarilsin.

$$1) f(x) \in C[a, b],$$

$$2) \quad g(x) \in C\left([a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^m \{c_k\}\right) \text{ va } a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b \quad \text{nuqtalar} \quad g(x)$$

funksiyaning 1 - tur uzilish nuqtalari,

3) chekli sondagi nuqtalardan tashqari  $g'(x)$  xosila mavjud.

4)  $g'(x)$  xosila  $[a, b]$  kesmada absolyut integrallanuvchi.

U holda  $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$  Stiltes integrali mavjud bo'ladi va quydagi tenglik bajariladi:

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(a) \cdot [g(a+0) - g(a)] +$$

**Izoh.** Agar  $g(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, unda (19) - formula (16) - formulaga aylanadi, ya'ni 8 - teoremadan 7 - teorema kelib chiqadi.

**8-teoremaning isboti.** Yozuvni soddalashtirish uchun quydagi belgilarni kiritamiz:

$$\alpha_k^+ = g(c_k + 0) - g(c_k), \quad (k = \overline{0, m-1})$$

$$\alpha_k^- = g(c_k) - g(c_k - 0), \quad (k = \overline{0, m})$$

unda  $1 \leq k \leq m-1$  uchun

$$\alpha_k^+ - \alpha_k^- = g(c_k + 0) - g(c_k - 0),$$

bo'ladi. Quydagi yordamchi funksiyani olamiz:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \rho(x - c_k) - \sum_{k=1}^m \alpha_k^- \rho(c_k - x)$$

Aniqlangan  $g_1(x)$  funksiya  $g(x)$  funksiyaning barcha uzilishlarini o'zida saqlaydi va  $g_2(x) = g(x) - g_1(x)$  funksiya uzluksiz funksiya bo'ladi.

Darxaqiqat,

1)  $x \neq c_k$  bo'lsa,  $g_2(x)$  funksiya uzluksiz funksiyalarning ayirmasi sifatida uzluksiz bo'ladi.

2)  $x \neq c_k$  bo'lsin. Avval  $g_2(x)$  funksiyaning  $c_k (k < m)$  nuqtada o'ngdan uzluksiz bo'lishini ko'rsatamiz.  $x \in [c_k, c_k + 0]$  bo'lsin.  $\Rightarrow$

$$g_2(x) = g(x) - \alpha_k^+ \rho(x - c_k)$$

$$g_2(c_k) = g(c_k) - \alpha_k^+ \rho(0) = g(c_k)$$

Ikkinchi tomondan,

$$\lim_{x \rightarrow c_k + 0} g_2(x) = \lim_{x \rightarrow c_k + 0} [g(x) - \alpha_k^+ \rho(x - c_k)] = g(c_k + 0) - \alpha_k^+ =$$

funksiya  $x = c_k$  nuqtada o'ngdan uzluksiz. Xuddi shunga o'xshash  $g_2(x)$  funksiyaning  $c_k (k > 0)$  nuqtada chapdan uzluksizligi xam ko'rsatiladi.  $\Rightarrow$

$$g_2(x) \in C\{c_k\} \Rightarrow g_2(x) \in C[a, b]$$

Agar  $x \neq c_k$  nuqta olinsa, unda bu nuqtaning biror atrofida aniqlanishiga ko'ra  $g_1(x)$  funksiya o'zgaras qiymatini qabul qiladi.  $\Rightarrow g^1(x) = 0 \Rightarrow x \neq c_k$  nuqta

$$g_2^1(x) = g^1(x)$$

bo'ladi (albatta bu tenglik  $g^1(x)$  mavjud bo'lgan nuqtalarda qaraladi).

Uzluksiz bo'lgan  $g_2(x)$  funksiya uchun avvalgi 7-teoremaga ko'ra Stiles integrali mavjud bo'ladi:

$$(S) \int_a^b f(x) dg_2(x) = (R) \int_a^b f(x) dg_2^1(x) = (R) \int_a^b f(x) dg^1(x) \quad (20)$$

Endi (17) va (18)-tengliklardan foydalanib, quydagi integralni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} (S) \int_a^b f(x) dg(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \cdot (S) \int_a^b f(x) d\rho(x - c_k) - \\ &- \sum_{k=0}^m \alpha_k^- \cdot (S) \int_a^b f(x) d\rho(c_k - x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \cdot f(c_k) + \sum_{k=0}^m \alpha_k^- \cdot f(c_k) = \end{aligned}$$

$$+f(b) \cdot g(b) - g(b) = 0 \quad (21)$$

(20) va (21) – tengliklarni xadlab ko‘shish yordamida isbotlashimiz kerak bo‘lgan

(19) – tenglikni xosil qilamiz.

**Stiltes integralini hisoblashga doir misollar.**

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx, \quad (22)$$

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx, \quad (23)$$

va

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(a) \cdot [g(a+0) - g(0)] +$$

Shu formulalardan foydalanib misollar yechamiz.

**1-misol.** (22) yoki (23) – formulalardan foydalanib, quydagi Stiltes integrallari hisoblansin:

$$\begin{aligned} a) (S) \int_1^2 x^2 d \ln [(1+x)^2] & \quad b) (S) \int_0^{\pi/2} x \sin x; \\ v) (S) \int_{-1}^1 x \arctg x. & \end{aligned}$$

$$a) (S) \int_0^2 x^2 d \ln(1+x) = ((23) - \text{formuladan foydalanamiz}))$$

$$= (R) \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left( x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left( \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^2 = \ln 3$$

**Misol. Integralni hisoblang:**  $(S) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x$

Yechilishi: Quidagi formuladan foydalanamiz:

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

$$(S) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x = (R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left( \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right) =$$

$$v) (S) \int_{-1}^1 x d \arctg x = ((23) - \text{formuladan foydalanamiz}))$$

$$= (R) \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_{-1}^1 = 0$$

**2-misol.** (24) – formuladan foydalanib quydagi Stiltes integrallari hisoblansin:

$$a) (S) \int_{-1}^3 x dg(x) \text{ bu yerda}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = -1 \text{ bolsa,} \\ 1, & \text{agar } -1 < x < 2 \text{ bolsa,} \\ -1, & \text{agar } 2 \leq x \leq 3 \text{ bolsa,} \end{cases}$$

va

$$b) (S) \int_0^2 x^2 dg(x) \text{ bu yerda}$$

$$\begin{cases} -1, & \text{agar } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{agar } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \text{ bolsa,} \\ 2, & \text{agar } x = \frac{3}{2} \text{ bolsa,} \\ -2, & \text{agar } \frac{3}{2} < x \leq 2 \text{ bolsa,} \end{cases}$$

$a)g(x)$  funksiyaning funksiyaning  $x = -1$  nuqtadagi sakrashi  $1$  ga,  $x = 2$  nuqtadagi sakrashi  $-2$  ga teng hamda  $x \neq 1; 2$  nuqtalarda  $g'(x) = 0$ . Unda (24) – formulaga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(S) \int_{-1}^2 x dg(x) = -1 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (-1 - 1) = -1 - 4 = -5$$

$b)g(x)$  funksiyaning  $x = \frac{1}{2}$  nuqtadagi sakrashi  $1$  ga,  $x = \frac{3}{2}$  nuqtadagi sakrashi  $-2$  ga teng va  $x \neq \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$  bo'lganda  $g'(x) = 0$ . Integralni (24) – formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$(S) \int_0^2 x^2 dg(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0 + 1) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot (-2 - 0) = \frac{1}{4} - \frac{18}{4} = -\frac{17}{4}$$

**3-misol.** (24) – formuladan foydalanib quydagi Stiltes integrallari hisoblansin:

$$a)(S) \int_{-2}^0 x^2 dg(x), \quad b)(S) \int_{-2}^0 x^2 dg(x), \\ v)(S) \int_{-2}^0 (x^3 + 1) dg(x)$$

Bu yerda

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{agar } -2 \leq x \leq -1 \text{ bolsa,} \\ 2, & \text{agar } -1 < x < 0 \text{ bolsa,} \\ x^2 + 3, & \text{agar } 0 \leq x \leq 2 \text{ bolsa,} \end{cases}$$

$g(x)$  funksiyaning  $x = 1$  va  $x = 0$  nuqtalardagi sakrashi  $1$  ga teng hamda

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } -2 \leq x < -1 \text{ bolsa,} \\ 0, & \text{agar } -1 < x < 0 \text{ bolsa,} \\ 2x, & \text{agar } 0 < x \leq 2 \text{ bolsa,} \end{cases}$$

$$a) \int_{-2}^3 x dg(x) = ((24) - \text{formuladan foydalanamiz}))$$

$$= \int_{-2}^{-1} x dx + \int_0^2 x \cdot 2x dx + (-1) \cdot (2 - 1) + 0 \cdot (3 - 2) =$$

$$b) \int_{-2}^3 x^2 dg(x) = ((24)) \int_{-2}^{-1} (-1) x^2 dx + \int_0^2 x^2 \cdot 2x dx + 0 \cdot 1 =$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^4}{2} \Big|_0^2 + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + 1 = 1\frac{1}{3}$$

$$v) \int_{-2}^3 (x^3 + 1) dg(x) = ((24)) \int_{-2}^{-1} (-1) (x^3 + 1) dx + \int_0^2 (x^3 + 1) \cdot 2x dx + 0 \cdot 1 =$$

$$\left[ (-1)^4 + 1 \right] \cdot 1 + \left( 0^4 + 1 \right) \cdot 1 = \left( \frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_{-2}^{-1} + 2 \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 + 0 + 1 =$$

**4-misol.** (22) – formuladan foydalanib, oddiy Riman integralidagi bo'laklab integrallash formulasining bir umumlashmasini keltiramiz:

Aytaylik,  $u(x)$  va  $v(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada absolyut integrallanuvchi bo'lib,

$$U(x) = U(a) + \int_a^x u(t) dt \quad \text{va} \quad V(x) = V(a) + \int_a^x v(t) dt \quad \text{bo'lsin.}$$

Unda quydagi formula o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b U(x)v(x)dx = U(x)V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V(x)u(x)dx \quad (25)$$

formuladan foydalanamiz  $\int_a^b U(x) dV(x) =$

((Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanamiz))

**Izoh.** (25) – formuladagi  $u(x)$  va  $v(x)$  funksiyalar  $U(x)$  va  $V(x)$  funksiyalarning xosilasi bo'lmasa ham, xosila vazifasini bajaryapti. Agar  $u(x), v(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, unda  $U'(x) = u(x)$  va  $V'(x) = v(x)$  bo'lib, (25) – formula oddiy bo'laklab integrallash formulasiga aylanib qoladi.

### 2.3-§. Stiltes integralining geometrik ma'nosi.

Aytaylik,  $f(t)$  va  $g(t)$  funksiyalar biror  $T \in [a, b]$  oraliqda aniqlangan bo'lib, quydagi shartlarni qanoatlantirsin:

- 1)  $f(t) \in C(T)$  va  $f(t) > 0$
- 2)  $g(t)$  funksiya  $T$  da qat'iy o'suvchi bo'lib, uzilish nuqtalariga (sakrashlarga) ega bo'lishi ham mumkin.

Ushbu

$$(S) \int_a^b f(t) dg(t) \quad (26)$$

Stiltes integralini qaraymiz. Quydagi

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in T \quad (27)$$

parametrik tenglamalar tekislikda biror  $\gamma$  chiziqni, umuman olganda uzilishga ega bo'lgan chiziqni aniqlaydi.

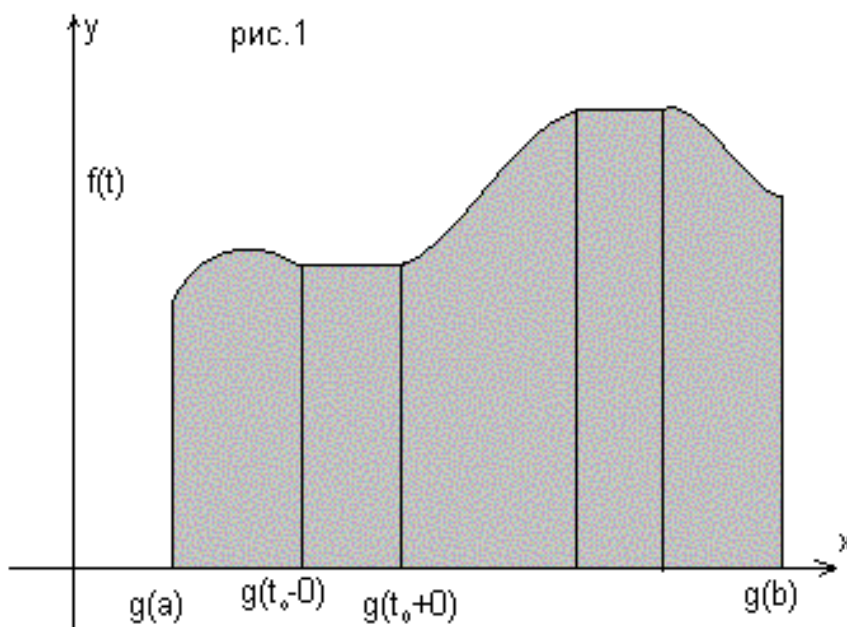
Agar biror  $t = t_0$  nuqtadagi  $g(t)$  funksiya sakrashga ega bo'lsa,

$$g(t_0 - 0) < g(t_0 + 0)$$

bo'ladi.  $g(t_0 - 0)$  va  $g(t_0 + 0)$  nuqtalarga  $y = f(t)$  funksiya  $OY$  o'qidagi bitta  $f(t_0)$  nuqtani mos qo'yadi.

$(g(t_0 - 0), f(t_0))$  va  $(g(t_0 + 0), f(t_0))$  nuqtalarni kesma yordamida tutashtirilsa, bu kesma  $OX$  o'qiga parallel bo'ladi va  $\gamma$  chiziqni  $t_0$  nuqtadagi sakrashidan qutilamiz.

Boshqa sakrash nuqtalarida xam shu jarayonni amalga oshirsak,  $\gamma$  chiziq uzluksiz chiziqqa aylanadi. Xosil bo'lgan chiziqni  $G$  deb belgilaymiz. (1-chizma)



Endi (26) – integralning qiymati yuqoridan  $G$  chiziq, quyidan  $OX$  o'qi, yon yoqlaridan  $x = g(a)$  va  $x = g(b)$  vertikal chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'lishini ko'ramiz.

$T \in [a, b]$  kesmani ushbu

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n = b$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtalar yordamida qismlarga ajratamiz.

Natijada,  $OX$  o'qidagi  $[g(a); g(b)]$  kesma ham

$$g(a) < g(t_1) < \dots < g(t_k) < g(t_{k+1}) < \dots < g(b)$$

nuqtalar yordamida qismlarga ajraladi.

$$m_k = \inf_{[t_k, t_{k+1}]} \{f(t)\}$$

va

$$M_k = \sup_{[t_k, t_{k+1}]} \{f(t)\}$$

deb belgilab, Stiltes-Darbuning quyi va yuqori yig'indilarini tuzamiz:

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(t_k); \quad \bar{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(t_k)$$

Bu yig'indilarning qiymatlari mos ravishda berilgan shaklning ichida yotgan va uni o'z ichiga olgan ko'pburchaklarning yuzalariga teng bo'ladi.

(26) – integral yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \underline{S} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\lambda \rightarrow 0)}} \bar{S} = (S) \int_a^b f(t) dg(t)$$

bo'ladi.

**Stiltes integrali uchun o'rta qiymat haqida teorema.**

Faraz qilaylik,  $[a, b]$  kesmada berilgan  $f(x)$  funksiya chegaralangan bo'lsin:

$$m \leq \mu \leq M$$

**9-teorema.** Agar  $[a, b]$  kesmada berilgan  $f(x)$  funksiya monoton o'suvchi bo'lib,  $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$  Stiltes integrali mavjud bo'lsa, u holda ushbu

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = \mu \cdot [g(b) - g(a)] \quad (28)$$

bu tengsizlikdan  $\lambda \rightarrow 0$  da limitga o'tib

$$m \cdot [g(b) - g(a)] \leq \sigma \leq M \cdot [g(b) - g(a)]$$

yoki

$$m \leq \frac{(S) \int_a^b f(x) dg(x)}{[g(b) - g(a)]} \leq M$$

ekanligini topamiz. Agar

$$\mu = \frac{(S) \int_a^b f(x) dg(x)}{[g(b) - g(a)]}$$

deb belgilasak,  $m \leq \mu \leq M$  bo'lib, oxirgi tenglikdan isbot qilishimiz kerak bo'lgan (28) – tenglik kelib chiqadi.

**Natija.** Agar 9 – teoremada  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, unda shunday  $c \in [a, b]$  nuqta topiladiki,

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = f(c) \cdot [g(b) - g(a)]$$

tenglik bajariladi.

**Stiltes integralini baholash.**

Stiltes integralini o'rganish jarayonida amaliyotda  $f(x)$  funksiya uzluksiz va  $g(x)$  funksiya chekli varyatsiyaga ega bo'lgan xol muhim ahamiyatga ega. Bunday xolda Stiltes integralini quydagicha baholash mumkin.

**10-teorema.** Agar  $f(x) \in C[a, b]$  va  $g(x)$  chekli variyatsiyali funksiyalar bo'lsa, unda

$$\left| (S) \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq M \cdot V \quad (29)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu yerda  $M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad V = \bigvee_a^b g(x)$

Stiltes yig'indisini tuzib, uni baholaymiz:

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k) \right| = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \cdot |\Delta g(x_k)| \leq \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq M \bigvee_a^b g(x) = M \cdot V \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} (29). \end{aligned}$$

**11-teorema.**  $f(x) \in C[a, b], g(x)$ -chekli variyatsiyali funksiya va

$I = (S) \int_a^b f(x) dg(x)$  bo'lsin. Unda  $\forall \varepsilon > 0$  son uchun  $\exists \delta > 0: \lambda < \delta$  bo'lganda

$$|\sigma - I| = \varepsilon \cdot \bigvee_a^b g(x) \quad (30)$$

bo'ladi.

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta g(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) dg(x), \\ I &= (S) \int_a^b f(x) dg(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) dg(x), \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$|\sigma - I| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(\xi_k) - f(x)] dg(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} dg(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)$$

$= ((f(x) \in C[a, b], \text{ bo'lgani uchun Kantor teoremasiga ko'ra } \varepsilon > 0 \text{ uchun } \exists \delta > 0: \lambda < \delta \text{ bo'lganda } \omega_k < \varepsilon \text{ bo'ladi}))$

$$\leq \varepsilon \cdot \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) = \varepsilon \cdot \bigvee_a^b g(x)$$

#### 2.4-§. Stiles integrali belgisi ostida limitga o'tish.

**12-teorema.** Faraz qilaylik,  $[a, b]$  kesmada  $\{f_n(x)\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) funksional ketma-ketlik berilgan bo'lib,

1)  $f_n(x) \in C[a, b]$ ,

2)  $n \rightarrow \infty$  da  $f_n(x) \xrightarrow{\square} f(x)$ ,

3)  $g(x)$  - cheklivariyatsiyali funksiya bo'lsa, u xolda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S) \int_a^b f_n(x) dg(x) = (S) \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dg(x) = (S) \int_a^b f(x) dg(x) \quad (31)$$

bo'ladi.

$n \rightarrow \infty$  da  $f_n(x) \xrightarrow{\square} f(x)$  bo'lgani uchun  $\forall \varepsilon > 0$  olinganda ham shunday  $n_0 > N$  son topiladiki  $\forall n > n_0$  va barcha  $x \in [a, b]$  lar uchun

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. unda 15- punktdagi (29) – tengsizlikka ko'ra  $n > n_0$  bo'lganda quydagi munosabatni xosil qilamiz:

$$\left| (S) \int_a^b f_n(x) dg(x) - (S) \int_a^b f(x) dg(x) \right| =$$

$$\left| (S) \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dg(x) \right| \leq \varepsilon \cdot \bigvee_a^b g(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \quad (31)$$

**13-teorema.** Faraz qilaylik,  $[a, b]$  kesmada  $f(x)$  funksiya va  $\{g_n(x)\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) funksional ketma-ketlik berilgan bo'lib, quydagi shartlar bajarilsin:

- 1)  $f(x) \in [a, b]$
- 2)  $g_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ )
- 3)  $\bigvee_a^b g_n(x) \leq V$  ( $n = 1, 2, \dots$ )
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$

U xolda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S) \int_a^b f(x) dg_n(x) = (S) \int_a^b f(x) dg(x) \quad (32)$$

bo'ladi.

Avval limit funksiya  $g(x)$  ning chekli varyatsiyaga ega bo'lishini ko'rsatamiz: buning uchun  $[a, b]$  kesmani ushbu

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy nuqtalar yordamida qismlarga ajratib,  $\forall n > N$  uchun

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| \leq \bigvee_a^b g(x) \leq V \Rightarrow$$

$\Rightarrow g(x)$ -chekli variyatsiyali funksiya.

Endi (32) – tenglikni isbotlashga o'tamiz. Stiles yig'indini tuzamiz:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \Delta g(x_k) \quad \sigma = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k) \Delta g_n(x_k)$$

$\forall \varepsilon > 0$  son olib, oraliqni shunday kichik bo'laklarga bo'lamizki,  $f(x)$  funksiyaning har bir oraliqdagi tebranishi  $\omega_k < \varepsilon$  bo'ladi.

Unda (11) – teorema ko'ra quydagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \left| \sigma - (S) \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \varepsilon \cdot V \\ \left| \sigma_n - (S) \int_a^b f(x) dg_n(x) \right| \leq \varepsilon \cdot V \end{cases} \quad (33)$$

Ikkinchi tomondan,  $n \rightarrow \infty$  da  $\sigma_n \rightarrow \sigma \Rightarrow$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n > n_0$  da

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon \quad (34)$$

bo'ladi. Unda  $n > n_0$  bo'lganda (33) va (34) – tengsizliklardan quydagilarni xosil qilamiz:

$$\left| (S) \int_a^b f(x) dg_n(x) - (S) \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \left| (S) \int_a^b f(x) dg_n(x) - \sigma_n \right| +$$

**Ikkinchi tur egri chiziqli integralni Stiles integraliga keltirish.**

Aytaylik,

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx \quad \text{yoki} \quad \left( \int_{\overline{AB}} f(x, y) dy \right) \quad (35)$$

2-tur egri chiziqli integral berilgan bo'lib,

$$\overline{AB}: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

bo'lsin va  $t$  parametr  $\alpha$  dan  $\beta$  ga qarab harakatlenganda unga mos  $((\varphi(t), \psi(t)))$  nuqta  $A$  dan  $B$  ga qarab harakatlansin.  $[\alpha, \beta]$  kesmani ushbu

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

nuqtalar yordamidagi ixtiyoriy bo'linishini olib,  $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$  deb belgilaymiz.

$\forall \tau_k \in [t_{k+1}, t_k]$  nuqtalarga mos keluvchi nuqtani  $M_k$  deb belgilab

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx$$

uchun integral yig'indini tuzsak, u quydagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_k) \Delta(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)] \Delta\varphi(t_k).$$

Tabiiyki, tenglikning o'ng tomonidagi ifoda Stilties integrali uchun integral yig'indi bo'ladi va bu tenglikdan  $\lambda \rightarrow 0$  da quydagi tenglik kelib chiqadi:

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dx = (S) \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] d\varphi(t) \quad (36)$$

Xuddi shu kabi ushbu

$$\int_{\overline{AB}} f(x, y) dy = (S) \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] d\psi(t) \quad (37)$$

tenglik ham o'rinli.

(36) – va (37) – tengliklardan (35) – egri chiziqli integralning mavjudligi haqida quyidagi teorema kelib chiqadi:

Agar  $f(x, y)$  funksiya uzluksiz va  $\varphi(t)$  (yoki  $\psi(t)$ ) funksiya chekli variyatsiyali funksiya bo'lsa, u xolda (35) – integral mavjud bo'ladi.

Xususan,  $\overline{AB}$  egri chiziqli to'g'rilanuvchi,  $P(x, y)$  va  $Q(x, y)$  funksiyalar uzluksiz bo'lsa, unda

$$\int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

integral yaqinlashuvchi bo'ladi hamda quydagi tenglik bajariladi:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= (S) \int_{\alpha}^{\beta} P[\varphi(t), \psi(t)]d\varphi(t) + \\ &+ (S) \int_{\alpha}^{\beta} Q[\varphi(t), \psi(t)]d\psi(t) \end{aligned}$$

## Xulosa

Ushbu bitiruv malakaviy ishida “Stiltes integrali” mavzusibayon qilindi. U ikki bob, yetti paragrfdan iborat bo’lib, Birinchi bobida “Chekli variatsiyali funksiyalar” haqida ma’lumotlar keltirilgan.

Ushbu bob aniq integralning umumlashmasi bo’lgan stiltes integralini o’rganishda asosiy vazifani bajaradigan va fanga birinchi bo’lib S. Jordan tomonidan kiritilgan chekli variyatsiyali funksiyalar bilan tanishishga bag’ishlangan. Chekli variyatsiyali funksiyalar faqatgina Stiltes integralni o’rganishda emas, balki matematik analizning boshqa ko’plab masalalarida katta ahamiyatga ega. Ikkinchi bobda esa Stiltes integrali va uning xossalari to’la o’rganildi. Misollar yechimlari bilan keltirildi.

Yuqorida ko’rdikki, Stiltes integrali oddiy Riman integraliga nisbatan umumiyroqdir. Buni shundan ham ko’rish mumkinki,

$$(s) \int_a^b f(x) dg(x)$$

Stiltes integralida, agar  $g(x) = x$  bo’lsa,  $dg(x) = dx$  bo’lgani uchun  $\int_a^b f(x) dx$  oddiy integral xosil bo’ladi. Yana ko’rdikki ikkinchi tur egri chiziqli integrallar (koordinatalar bo’yicha integrallar) Stiltes integralining xususiy xolidan iboratdir.

Bundan tashqari ma’lum bo’ldiki, Stiltes integrali fizikaga muvofaqqiyatli tatbiq qilinishi mumkin, ya’ni moddiy jismning koordinata o’qlariga (shuningdek koordinata boshiga) nisbatan statik moment, inersiya moment va og’irlik markazining koordinatalari Stiltes integrali yordamida aniqlanishi mumkin.

## Foydalanilgan adabiyotlar

1. Каримов И.А. *Юксак маънавият – енгилмас куч*. Т. “Маънавият”. 2008.
2. Каримов И.А. *Жаҳон молиявий – иқтисодий инқироzi, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этишининг йўллари ва чоралари*. Т. “Ўзбекистон”. 2009.
3. I.A.Karimov *Ona yurtimiz baxt-u iqboli va buyuk kelajagi yo'lida xizmat qilish – eng oliy saodatdir*. Toshkent - “O'zbekiston”, 2015
4. Фихтенгольц Г.М. *«Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. 3, М.: «Наука», 1969.*
5. Туйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К., Кутлимуратов А.Р., Каримов Ж.Ж. *Дополнительные главы анализа*, Т. “Университет”. 2015.
6. Ефимов А.В., Золотарёв Ю.Г., Тернигорева В.М., *«Математический анализ. Специальные разделы», т.2, М.: «Высшая школа», 1980.*
7. Б.П.Демидович. . *«Сборник задач и упражнений по математическому анализу», М.: «Наука», 1977.*
8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *«Сборник задач по математическому анализу», т.3, М.: «Наука», 2003.*
9. Очан Ю.С. *«Сборник задач по математическому анализу», М.: «Просвещение», 1981*

## Internet saytlari:

1. [www.Google.uz](http://www.Google.uz).
2. [www.Ziyo.uz](http://www.Ziyo.uz).
3. [www.math.ru](http://www.math.ru).
4. [www.Ref.uz](http://www.Ref.uz)

5. [www.Lex.uz](http://www.Lex.uz)