

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA
MAXSUS TALIM VAZIRLIGI

ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

Matematika kafedrası

Qo'lyozma huquqida

AZIMOVA ZULAYHO JUMABOY Q'IZI

MATRITSALAR ALGEBRALARI VA ULARNING XOSSALARI

5130100 — matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr akademik darajasini olish uchun yozilgan

BITIRUV MALAKAVIY ISH

Ish rahbari: f.-m.f.n.,
katta o'qituvchi Arzikulov F.N.

Andijon – 2016

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
I-BOB. MATRITSALAR VA ASSOTSIATIV ALGEBRALAR.	
1.1- § Matritsalar va ular ustida amallar.....	7
1.2- § Kompleks assotsiativ algebralari.....	24
II-BOB. MATRITSALAR ALGEBRALARI VA ULARNING XOSSALARI	
2.1- § Haqiqiy sonlar ustida chekli o'lchovli matritsalar algebralari tasnifi.....	37
2.2- § Matritsalar assotsiativ algebralari.....	51
XULOSA.....	61
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.....	62

KIRISH

Ma'lumki Respublikamizda yoshlarning ta'lim olishi uchun uch bosqichli uzluksiz ta'lim tizimi joriy qilingan. Bu tizimning uchinchi bosqichida yoshlar oliy o'quv yurtlariga kirib kamida to'rt yil davomida o'qib, oxirida o'zlari tanlagan yo'nalishlari bo'yicha bakalavr diplomini olishlari mumkin. Mamlakatimizda joriy etilgan bu ta'lim olish tizimi o'zining samaraliyligi tufayli ko'pchilik mutaxassislarning e'tirofiga sazovor bo'lmoqda. Oliy o'quv yurtlarida talabalarning ma'naviyatini boyitishga katta e'tibor beriladi. Fuqorolarning, ayniqsa, yoshlarning ma'naviyati yukasakligi Respublikamizning har tomonlama jadal rivojlanishini va ilg'or davlatlar qatorga qo'shilishini ta'minlaydi. O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.Karimovning "Yuksak ma'naviyat engilmas kuch" asarida buning ahamiyati to'la yoritib berilgan. Oliy o'quv yurti talabasi bakalavr diplomini olishdan avval bitiruv malakaviy ishini ximoya qilishi zarur. Shularni xisobga olib, "Matritsalar algebralari va ularning xossalari" mavzusidagi berilgan bitiruv malakaviy ishi yozildi.

2012 yil 24 iyulda O'zbekiston Respublikasi Prezidentining PF-4456-son «Oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagog kadrlar tayyorlash va attestatsiyadan o'tkazish tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida»gi Farmoni e'lon qilindi. Ushbu Farmonda tegishli vazirliklar va tashkilotlarga halqaro standartlarga mos keladigan doktorlik ilmiy darjasini berish jarayonini joriy qilish uchun yangi nizom ishlab chiqish topshirilgan edi. Buning natijasida magistraturaning va bakalaviaturaning ahamiyati yanada oshdi. Endi talaba ijod qilishga va mustaqil ravishda tadqiqot qilishga yanada ko'proq etibor berishi lozim bo'ladi. Berilgan bitiruv malakaviy ishimni bajarishda shularga katta e'tibor berishga harakat qildim.

Berilgan bitiruv malakaviy ishida matritsalar assotsiativ involyutiv algebralari va ularning xossalari, xususan, qismalgebralari bo'yicha masalalari o'rganilgan. Aniqrog' qilib aytganda quyidagi savollarga javob topilgan:

1. Berilgan xaqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan matritsalar algebrasi qanday xossalarga ega?

2. Haqiqiy sonlar maydoni yoki kompleks sonlar maydoni ustida aniqlangan matritsalar algebralari qanday qismalgebralarga ega bo'lishi mumkin?

3. Haqiqiy sonlar maydoni yoki kompleks sonlar maydoni ustida aniqlangan matritsalar algebralari o'lchamlari va ularning qismalgebralari o'lchamlari, bazislari va x. k. qanday bog'langan?

Bitiruv malakaviy ishining qisqacha mazmuni quyidagilardan iborat:

Birinchi bobning birinchi paragrafida algebra va sonlar nazariyasining muhim tushunchalaridan hisoblangan matritsa tushunchasi, matritsalar ustida amallar, teskari matritsa, matritsa rangi, matritsalarini chiziqli almashtirishlar kabi tushunchalar batafsil yoritib berilgan. Ularga oid bir nechta misollar keltirilgan. Ushbu paragrafda matritsalar haqida dastlabki tushunchalar, uning qanday holatda berilishi, matritsalarini qo'shish, ko'paytirish, va shularga oid tariflar, teoremlar, misollar, hamda misollarning ishlanish usullari keltirilgan.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafi kompleks assotsiativ algebralarga bag'ishlangan. Paragraf boshida halqa, tana va algebra tushunchalariga ta'rif berilgan. Keyin assotsiativ algebrada umumiy qo'shish va ko'paytirish qonunlari ko'rib chiqilgan va birlik elementning va teskari elementning yagonaligi asoslab berilgan. Paragraf oxirida ideallar haqida ma'lumot berilgan.

Berilgan bitiruv malakaviy ishining ikkinchi bobining birinchi paragrafida avval involyutiv algebra tushunchasiga ta'rif berilib, unga misollar keltirilgan. Involyutiv algebralar nazariyasi bu xalqalar nazariyasining eng rivojlangan va tatbiqlarga boy qismidir. U faqat har – hil mutaxassisliklardagi matematiklar uchungina emas balki nazariyotchi fiziklar uchun ham tadqiqotda qo'llaniladigan odatiy apparatga aylangan. Involyutiv algebralar nazariyasini erkin qo'llamasdan turib, kvant mexanikasini, maydonlar nazariyasini va statistik fizikani zamonaviy ko'rinishda bayon qilish mumkin emas. Oxirgi 60 - 65 yillarda bu nazariyada kuchli natijalar olindi.

Bundan tashqari ushbu paragrafda haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan ikki o'lchovli matritsalar assotsiativ algebrasining maksimal va minimal qism algebralarini aniqlash masalasi va uning echimi yoritib berilgan.

Paragraf boshida haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan ikki o'lchovli matritsalar assotsiativ algebrasining ayrim bir o'lchovli vektor qism fazolari haqiqiy assotsiativ qism algebra bo'lishi isbotlangan.

Keyin haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan ikki o'lchovli matritsalar assotsiativ algebrasining yuqori va quyi uchburchakli matritsalar vektor qism fazolari haqiqiy assotsiativ qism algebra bo'lishi isbotlangan.

Keyin, ketma – ket quyidagi teoremlar isbotlangan:

Teorema 1. $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ to'plamlar $M_2(\mathbf{R})$

ikki o'lchovli matritsalar assotsiativ algebrasining minimal haqiqiy kommutativ assotsiativ algebralaridir.

Teorema 2. $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R} \right\}$

to'plamlar $M_2(\mathbf{R})$ ikki o'lchovli matritsalar assotsiativ algebrasining $M_2(\mathbf{R})$ dan farqli maksimal haqiqiy kommutativ assotsiativ algebralaridir.

Berilgan bitiruv malakaviy ishining ikkinchi bobi ikkinchi paragrafida kompleks sonlar ustida aniqlangan matritsalar algebralarining va ularning qism algebralari ayrim xossalari va ularning o'lchamlarini aniqlash masalasi va uning echimi yoritib berilgan. Bu quyidagi ko'rinishga ega:

Paragraf boshida birlik elementga ega bo'lgan assotsiativ algebraning ixtiyoriy yig'indisi birga teng bo'lgan ikkita proektor bo'lgan elementlari bo'yicha Pirs komponentalari to'g'ri yig'indisiga yoyilishi haqidagi teorema keltirilgan. So'ngra, misol tariqasida $M_2(\mathbf{C})$ algebraga bu teorema tatbiq qilingan.

Keyin ushbu teoremaning umumiy ko'rinishi sifatida birlik elementga ega bo'lgan assotsiativ algebraning ixtiyoriy yig'indisi birga teng bo'lgan bir nechta proektor bo'lgan elementlari bo'yicha Pirs komponentalari to'g'ri yig'indisiga yoyilishi haqidagi teorema keltirilgan.

Keyin, ketma – ket quyidagi natijalar olingan:

1 – Natija. 1) Har qanday i uchun $M_n(\mathbf{C})$ algebraning e_{ii} elementi o'z – o'ziga qo'shma bo'lgan minimal idempotentdir, ya'ni $e_{ii}M_n(\mathbf{C})e_{ii} = \mathbf{C}e_{ii}$, bu erda $e_{ii}M_n(\mathbf{C})e_{ii} = \{ e_{ii}ae_{ii} : a \in M_n(\mathbf{C}) \}$.

2) $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}$ idempotentlar o'zaro juft – jufti bilan ortogonaldir va $\sum_{i=1 \dots n} e_{ii} = \mathbf{1}$, bu erda $\mathbf{1}$ — $M_n(\mathbf{C})$ algebraning birlik elementi.

3) $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}$ idempotentlar o'zaro chiziqli bog'liqsiz.

2 – Natija. $M_n(\mathbf{C})$ algebrada $\{e_{ij}\}_{i,j=1 \dots n}$ to'plam quyidagi xossalarga ega:

1) $e_{11} + e_{22} + \dots + e_{nn} = \mathbf{1}$,

2) $e_{ij} \cdot e_{kl} = 0$ agar $j \neq k$,

3) $e_{ij} \cdot e_{jk} = e_{ik}$ ixtiyoriy i, j, k indekslar uchun,

4) $e_{ij}^* = e_{ji}$ ixtiyoriy i va j indekslar uchun.

3 – Natija. Kompleks sonlar ustida $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebrasining vektor fazosi sifatidagi o'lchami n^2 ga teng.

4 – Natija. Quyidagi matritsalar algebralari to'g'ri yig'indisi berilgan bo'lsin

$$M_{k(1)}(\mathbf{C}) \oplus M_{k(2)}(\mathbf{C}) \oplus \dots \oplus M_{k(m)}(\mathbf{C}).$$

U holda, bu to'g'ri yig'indi algebra tashkil qiladi va bu algebraning o'lchami quyidagi yig'indiga teng:

$$k(1)^2 + k(2)^2 + \dots + k(m)^2.$$

Quyidagi teorema ko'ra yuqorida hal qilingan masalalar berilgan bitiruv malakaviy ishida qo'yilgan umumiy masala echimini beradi.

Teorema. Deylik $M_n(\mathbf{C})$ — kompleks sonlar ustida $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebrasi va A — uning assotsiativ involyutiv qism algebrasi bo'lsin. U holda shunday $k(1), k(2), \dots, k(m)$ natural sonlar mavjudki

$$A \cong M_{k(1)}(\mathbf{C}) \oplus M_{k(2)}(\mathbf{C}) \oplus \dots \oplus M_{k(m)}(\mathbf{C})$$

izomorfizm o'rinli bo'ladi. Bunda $k = k(1) + k(2) + \dots + k(m) \leq n$.

I-BOB. MATRITSALAR VA ASSOTSIATIV ALGEBRALAR

1.1- § Matritsalar va ular ustida amallar

Matritsa haqida tushuncha. Ushbu ko'inishdagi sonlardan tuzilgan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

jadvallarga matritsalar, $a_{11}, a_{12}, \dots$ lar ularning elementlari deyiladi.

Agar matritsada satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, u kvadrat matritsa deyiladi. Uning satrlar yoki ustunlar soniga tartibi deyiladi. Masalan, keltirilgan matritsalaridan birinchisi ikkinchi tartibli uchinchi esa uchinchi tartibli matritsa. Agar matritsaning satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lmasa, u to'g'ri burchakli matritsa deb ataladi. Masalan, ikkinchi matritsa to'g'ri burchakli matritsa.

$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$ — satr matritsa, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$ — ustun matritsa. Kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinant matritsaning determinanti deyiladi. Matritsani qisqacha bitta harf bilan belgilaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bu matritsalarining determinantlarini belgilash uchun esa o'sha harflarni to'g'ri chiziqlar orasiga olamiz, ya'ni

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Agar kvadrat matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, u matritsa aynimagan, nolga teng bo'lsa, aynigan matritsa deyiladi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; matritsa aynigan matritsa, chunki,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ —matritsa aynimagan, chunki,

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0$$

Matritsaning tengligi. matritsalar ustida amallar. Agar ikkita A va B matritsalarining satr va ustunlar soni bir xil va mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, u holda bu matritsalar o'zaro teng ($A=B$) matritsalar deyiladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad va \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

matritsalar berilgan bo'lib, $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$ bo'lsa, $A=B$ bo'ladi.

Matritsalarini qo'shish. Agar ikkita bir xil tartibli kvadrat matritsalar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad va \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

berilgan bo'lsa, u holda ularning yig'indisi

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

Agar bir xil tartibli to'g'ri burchakli matritsalar berilgan bo'lsa, ularning yig'indisi ham xuddi shuningdek aniqlanadi.

1-misol. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 4+2 \\ 1+0 & 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$

2-misol. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 10 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

Matritsalarini qo'shish amali o'rin almashtirish va gruppallash qonunlari $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$ ga bo'ysunishini osongina isbotlash mumkin. Agar matritsaning hamma elementlari nollardan iborat bo'lsa, u nol-matritsa deb ataladi va (0) yoki 0 ko'rinishida yoziladi. Nol matritsani har qanday matritsaga qo'shganda yana o'sha matritsaning o'zi hosil bo'ladi. Masalan,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Matritsani songa ko'paytirish.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matritsani μ soniga ko'paytmasi deb,

$$A\mu = \mu A = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi. Uchinchi tartibli kvadrat matritsalar, to'g'ri burchakli matritsalar ham songa xuddi shunday ko'paytiriladi. Matritsani nolga ko'paytirsak nol matritsa hosil bo'ladi.

Matritsalarini ko'paytirish.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad va \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

matritsalar berilgan bo'lsa, ularning ko'paytmasi deb shunday $C=AB$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari quyidagicha aniqlangan:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Agar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

bo'lsa, u holda

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^3 a_{1i}b_{i2} & \sum_{i=1}^3 a_{1i}b_{i3} \\ \sum_{i=1}^3 a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^3 a_{2i}b_{i2} & \sum_{i=1}^3 a_{2i}b_{i3} \\ \sum_{i=1}^3 a_{3i}b_{i1} & \sum_{i=1}^3 a_{3i}b_{i2} & \sum_{i=1}^3 a_{3i}b_{i3} \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Ikkita matritsani ko'paytirish natijasida ko'payuvchi matritsa nechta satrga ega bo'lsa, shuncha satr va ko'paytuvchi matritsa nechta ustunga ega bo'lsa, shuncha ustunga ega bo'lgan matritsa hosil bo'ladi. Misol:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar ko'paytmasi umuman olganda o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunmaydi, ya'ni $AB \neq BA$.

Misol: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Demak, $AB \neq BA$.

Matritsalar ko'paytirish ushbu: $A(BC) = (AB)C$ gruppash qonuniga va $(A+B)C = AC + BC$ taqsimot qonuniga bo'ysunadi.

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa ikkinchi tartibli birlik kvadrat matritsa

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa uchinchi tartibli birlik kvadrat matritsa

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ matritsa yuqori tartibli birlik kvadrat matritsa deyiladi.

Istalgan tartibli matritsani birlik matritsaga ko'paytmasi, yana o'sha matritsaning o'ziga teng: $AE = EA = A$.

Teskari matritsa. Teskari matritsa faqat kvadrat matritsa uchun kiritiladi. A – kvadrat matritsa bo'lsa, u holda unga teskari matritsa deb A^{-1} bilan belgilanadigan va $AA^{-1} = E$ (1) tenglikni qanoatlantiradigan matritsaga aytiladi. Agar (1) tenglik bajarilsa, u holda u bilan bir vaqtda $A^{-1}A = E$ (2) tenglik ham bajariladi.

Teorema: A kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun A matritsa aynimagan matritsa bo'lishi, ya'ni uning determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va kifoyadir.

A_{ik} minor a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi bo'lsin. A matritsaga teskari A^{-1} matritsa quyidagicha hosil qilinadi:

1) A matritsada uning har bir a_{ik} elementini bu elementning A matritsaning $|A|$ determinantiga bo'lingan A_{ik} algebraik to'ldiruvchisi bilan almashtirib, B matritsa tuzamiz:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{13}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} \\ \frac{A_{31}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}$$

2) B matritsda uning satrlari va ustunlarining o'rinlarini almashtirib, B^* matritsa tuzamiz. (B^* matritsa B matritsaga nisbatan transponirlangan matritsa deb ataladi). Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$B^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{13}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} \\ \frac{A_{31}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Chunki, $AB^* = E$ ni beradi.

Misol.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa tuzing.

Echish.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 12 = -9 \neq 0$$

shuning uchun A matritsa aynimagan matritsa, demak unga teskari matritsa mavjud. Algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6; A_{13} = 3;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-3}{9} & \frac{6}{9} & \frac{-3}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

bu matritsada satrlar bilan ustunlar o'rnini almashtirib,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz.

Matritsa rangi. m ta satr va n ta ustunga ega bo'lgan quyidagi to'g'ri burchakli matritsani qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bunday matritsani $m \times n$ o'lchamli matritsa deb ataymiz. Bu matritsa k ta ustun va k ta satrni ajratamiz. Ajratilgan satrlar va ustunlar kesishgan joyda turgan elementlar k tartibli kvadrat matritsa hosil bo'ladi. A matritsaning k tartibli minori deb, bu matritsadan ixtiyoriy k ta satr va k ta ustun ajratishdan hosil bo'lgan kvadrat matritsaning determinantiga aytiladi. Masalan, uchta satr va to'rtta ustunga ega bo'lgan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun uchinchi tartibli minorlardan biri

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

determinant bo'lib, u A matritsaning birinchi, ikkinchi, uchinchi satrlarini va birinchi, ikkinchi, uchinchi ustunlarini ajratishdan hosil bo'ladi. Ikkinchi tartibli minorlardan biri, masalan, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ determinant bo'ladi.

Matritsaning elementlarining o'zlarini birinchi tartibli minor deb qarash mumkin. Matritsaning minorlaridan ba'zilari nolga teng, ba'zilari noldan farqli bo'lishi mumkin. Matritsaning rangi deb, uning noldan farqli minorlari tartiblarining eng kattasiga aytiladi. Agar A matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, bu narsa A matritsada hech bo'lmaganda bitta noldan farqli r - tartibli minor borligini, biroq, r dan katta tartibli har qanday minor nolga tengligini $r(A)$ bilan belgilaymiz.

Ushbu matritsani qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uning yagona to'rtinchi tartibli minori nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(bitta satrning barcha elementlari nolga teng bo'lsa, determinant sifatida), uchinchi tartibli minorlaridan biri esa noldan farqli, masalan,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Demak, berilgan matritsaning rangi uchga teng, ya'ni $r(A)=3$.

Matritsaning rangini hisoblashda ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Bu ishni osonlashtirish uchun maxsus usullardan foyadalaniladi. Bu usullarni bayon qilishdan oldin matritsani elementar almashtirishlar haqidagi tushunchani kiritamiz.

Elementar almashtirishlar deb, quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1) matritsaning biror satri (ustuni) elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish;

2) matritsaning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satri (ustuni) ning mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shish;

3) matritsaning satr (ustun) lari o'rnini almashtirish;

4) matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lgan satrini (ustunini) tashlab yuborish.

Bir-biridan elementar almashtirish bilan hosil qilingan matritsalar ekvivalent matritsalar deyiladi. Ekvivalent matritsalar, umuman aytganda, bir-biriga teng emas, lekin ekvivalent matritsalarining ranglari teng bo'lishini isbotlash mumkin.

Misol. Matritsaning rangini hisoblang

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Echish: Berilgan matritsaning birinchi satr elementlarini 2 ga bo'lib, ushbu ekvivalent matritsani hosil qilamiz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Matritsaning ikkinchi va uchinchi satrlaridan uning mos ravishda 3 va 5ga ko'paytirilgan birinchi satrlarini ayirib, ushbu matritsani hosil qilamiz. (Satrlarni (ustunlarni) ayirish deganda bu satrlarning (ustunlarning) tegishli elementlarini ayirish ko'zda tutiladi).

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{21}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

A_2 matritsaning uchinchi satridan 3 ga ko'paytirilgan ikkinchi satrini ayirib,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz. A_3 matritsada nollardan iborat satrni tashlab yuborib,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

matritsani hosil qilamiz, uning rangi 2 ga tengligi ravshan. Demak, berilgan matritsaning rangi ham 2 ga teng.

Matritsalarining elementar almashtirishlari. Ikkita $A, B \in M_{s,n}$ matritsalar berilgan bo'lsin. Agar A matritsada ikkita satrning o'rnini almashtirilishi natijasida B matritsa hosil qilinsa, V matritsa A dan satrlar ustida (I) tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi. Bu bilan biror $f: M_{s,n} \rightarrow M_{s,n}$ aks ettirish aniqlanadi.

Agar A matritsaning biror satrini biror songa ko'paytirib, boshqa biror satriga qo'shish natijasida V matritsa hosil qilinsa, V matritsa A dan satrlar ustida (II)-tur elementar almashtirish natijasida hosil qilingan deyiladi. Bu bilan ham biror $f: M_{s,n} \rightarrow M_{s,n}$ aks ettirish hosil qilindi.

Bu ta'riflarga o'xshash matritsa ustunlarining (I) va (II)-tur elementar almashtirishlari ta'riflanadi.

1-teorema. Satrlar (ustunlar) ustidagi xar bir $f: M_{s,n} \rightarrow M_{s,n}$ elementar almashtirish biektsiya bo'lib, uning teskarisi $f^{-1}: M_{s,n} \rightarrow M_{s,n}$ ham satrlar (ustunlar) ustida elementar almashtirishdir.

Isbot. Faraz qilaylik, φ -satrlar ustida (I) tur elementar almashtirish bo'lib, ixtiyoriy A matritsada, masalan r - va q - satrlarning o'rnini almashtirishdan iborat bo'lsin: $f(A) = B$. Agar V matritsada yana r - va q - satrlarning o'rnini almashtirsak, u xolda A matritsaga qaytamiz, ya'ni $A = f(B) = F(f(A))$. Bu $f \cdot f$ birlik akslantirish, ya'ni φ ning teskarisi φ ning o'zi bo'lib, u elementar almashtirish ekanligini ko'rsatadi. Bundan, xususan, φ ning biektsiya ekanligi ham kelib chiqadi.

Endi φ – satrlar ustida (II) tur elementar almashtirish bo'lsin: $f(A)=B$. U xolda φ akslantirish ixtiyoriy $A=(a_{ij})$ matritsaga quyidagicha ta'sir kiladi. Shunday r va $q(1 \leq p, q \leq S)$ xamda $h \in R$ sonlar mavjudki, A va V larning p -satrdan boshqa barcha satrlari bir xil va V ning r -satri esa A ning r - va q -satrlari orqali

$$b_{pk} = a_{pk} + ha_{qk} \quad (k = \overline{1, n})$$

formula bo'yicha olinadi (ya'ni A ning q -satri h soniga ko'paytirilib, p -satriga qo'shildi).

Agar xosil bo'lgan V matritsada bu matritsaning q -satrini $(-h)$ soniga ko'paytirib, p -satriga qo'shsak, A matritsaga qaytamiz: $g(B)=A$. Ko'ramizki $g:M_{s,n} \rightarrow M_{s,n}$ aks ettirish φ ga teskari va u ham satrlar ustida (II) tur almashtirishdir. Bundan φ ning bieksiya ekanligi ham kelib chiqadi.

Ustunlar uchun teoremaning isboti shunga o'xshash. $G_c(sxn)$ orqali satrlar ustidagi elementar almashtirilishlarning mumkin bo'lgan barcha chekli sondagi kompozitsiyalaridan iborat to'plamni belgilaymiz. Har bir $f:M_{s,n} \rightarrow M_{s,n}$ elementar almashtirish bieksiya bo'lgani va bieksiyalarning kompozitsiyasi bieksiya bo'lgani uchun $G_c(sxn)$ to'plamning elementlari ham $M_{s,n}$ ning o'zini o'ziga bieksiylaridan iborat.

2-teorema. $G_c(sxn)$ to'plam bieksiyalarning kompozitsiyasi (ya'ni elementar almashtirishlarning ketma-ket bajarilishi) amaliga nisbatan guruxni xosil qiladi.

Isbot. Aks ettirishlar, xususan, bieksiylar uchun assotsiativlik qonuni o'rinli. Demak, ular uchun umumlashgan assotsiativlik qonuni xam o'rinli. Bunga ko'ra elementar almashtirishlarning ikkita $f_1 \cdot f_2 \dots f_m \in G_c(sxn)$ va $g_1 \cdot g_2 \dots g_r \in G_c(sxn)$ chekli kompozitsiyalarning $(f_1 \cdot f_2 \dots f_m)(g_1 \cdot g_2 \dots g_r)$ ko'paytmasini xam $f_1 \cdot f_2 \dots f_m \cdot g_1 \cdot g_2 \dots g_r$ ko'rinishda, ya'ni elementar almashtirilishlarning chekli sondagi kompozitsiyasi ko'rinishida yozish mumkin. Demak

$$(f_1 \cdot f_2 \dots f_m)(g_1 \cdot g_2 \dots g_r) \in G_c(sxn).$$

$G_c(sxn)$ da assotsiativlik qonunining bajarilishi uning to'plamlar aks ettirishlarining kompozitsiyasi uchun bajarilishidan kelib chiqadi.

Agar $M_{s,n}$ ning (1) formula bilan berilgan (II)-tur almashtirishida $h=0$ deb olsak, to'plamning birlik almashtirishini olamiz. Bundan $M_{s,p}$ ning birlik almashtirishi $G_c(sxn)$ ga tegishli ekanligi kelib chiqadi.

Endi ixtiyoriy $f_1 \cdot f_2 \dots f_m \in G_c(sxn)$ elementni olamiz. Bu erda xar bir f_i elementar almashtirish bo'lgani va har bir elementar almashtirishga teskari almashtirish mavjud bo'lib, u xam elementar almashtirish bo'lgani sababli $f_m^{-1} \cdot f_{m-1}^{-1} \dots f_1^{-1} \in G_c(sxn)$. Bu element $f_1 \cdot f_2 \dots f_m$ ga teskari. Xaqiqatan ushbu

$$\begin{aligned} (f_m^{-1} \cdot f_{m-1}^{-1} \dots f_1^{-1})(f_1 \cdot f_2 \dots f_m) = \\ = (f_m^{-1}(f_{m-1}^{-1}(\dots(f_1^{-1} \cdot f_1) \dots) f_{m-1}) f_m) \end{aligned}$$

ko'paytma assotsiativlik xossasiga ko'ra birlik elementga teng. Bu bilan $G_c(sxn)$ ning gurux ekanligi ko'rsatildi. $G_c(sxn)$ gurux bu aslida $G_c(M_{s,n})$ guruxda satrlarning barcha elementar almashtirishlari xosil qilgan qism guruxdir. Shunga o'xshash ustunlar uchun $G_y(sxn)$ gurux xam kiritiladi. Natija. $A, B \in M_{s,n}$ matritsalar berilgan bo'lsin. Agar A matritsadan B matritsaga satrlarning (ustunlarning) chekli sondagi elementar almashtirishlari orqali o'tish mumkin bo'lsa, u xolda B dan A ga ham chekli sondagi elementar almashtirishlar orqali o'tish mumkin.

Isbot. Faraz qilaylik, A dan B ga satrlarning f_m, f_{m-1}, f_1 elementar almashtirishlari orqali o'tish mumkin bo'lsin. U xolda $f_1(f_2(\dots(f_m(A))=B$, ya'ni $(f_1 \cdot f_2 \dots f_m)(A) = B$.

1-teoremaga asosan $f_m^{-1}, \dots, f_1^{-1}$ lar xam elementar almashtirishlar bo'lib, 2-teoremaga asosan $(f_m^{-1} \cdot f_{m-1}^{-1} \dots f_1^{-1})(B) = A$, ya'ni $f_1^{-1} \cdot f_2^{-1}, \dots, f_m^{-1}$ elementar almashtirishlar orqali B dan A ga o'tish mumkin. Ustunlar uchun muloxaza shunga o'xshash.

3-teorema. Matritsa satrlarining (ustunlarining) rangi uning satrlari (ustunlari) ustida chekli son marta elementar almashtirishlar bajarilganda o'zgarmaydi, ya'ni $G_c(s \times n)$ guruhning $G_y(s \times n)$ guruhining ta'siriga nisbatan invariantdir.

Isbot. $A \in M_{s,n}$ matritsaning satrlari ustida ixtiyoriy $f_1, f_2, \dots, f_k$ elementar almashtirishlar bajarilgan bo'lsin: $(f_k \dots f_1)(A)$

Ushbu $r_c((f_k \dots f_1)(A)) = r_c(A)$ tenglikni isbotlashimiz kerak. Dastlab bu tenglikni $k=1$ xolda isbotlaymiz. A ning satrlari ustida ixtiyoriy φ elementar almashtirish bajarilgan bo'lsin. Agar u (I) tur elementar almashtirish bo'lsa, u xolda A matritsa bilan φ (A matritsa bir xil satrlarga ega bo'lgani uchun (ular faqatgina satrlarning o'rinlari bilan farq qilgani uchun) ularning ranglari teng $r_c(A) = r_c(\varphi(A))$. Agar A ga (II) tur φ elementar almashtirish ta'sir qilgan bo'lsa, u xolda A da shunday r va q satrlar mavjudki, A bilan $\varphi(A)$ larning p -satrlaridan boshqa barcha satrlari bir xil va $\varphi(A)$ ning r -satri A ning r - va q -satrlarining chiziqli kombinatsiyasidir. Demak, bundan $r_c(\varphi(A)) \leq r_c(A)$. Ikkinchi tomondan 2-teoremaga ko'ra φ^{-1} mavjud va u xam (II) tur elementar almashtirishdir. Uning uchun yuqoridagi muloxazalarga asosan $r_c(\varphi^{-1}(\varphi(A))) \leq r_c(\varphi(A))$. Agar bu tengsizlikda A sifatida $\varphi(A)$ matritsa olinsa:

$$r_c(A) = r_c(\varphi^{-1}(\varphi(A))) \leq r_c(\varphi(A)).$$

Bundan va yuqoridagi tengsizlikdan $r_c(A) = r_c(\varphi(A))$ tenglik olinadi. Bu bilan teorema $k=1$ da isbotlandi.

Endi teoremani $k-1$ elementar almashtirish uchun o'rinli deb faraz qilaylik. U xolda teoremaning $k=1$ va $k-1$ uchun o'rinliligiga asosan

$$r_c((f_k f_{k-1} \dots f_1)(A)) = r_c(f_k f_{k-1} \dots f_1(A)) = r_c(f_k f_{k-1} \dots f_1(A)) = r_c(A).$$

Ustunlar uchun teoremaning isboti shunga o'xshash. Quyidagi ikkita xossaga ega bo'lgan matritsaga satrlariga (ustunlariga) nisbatan zinapoya matritsa deyiladi:

- 1) Agar i -satr (ustun) nollardan iborat bo'lsa, u xolda $(i+1)$ -satr (ustun) xam nollardan iborat.
- 2) Agar matritsaning i - va $(i+1)$ satrlarining (ustunlarining) har birida

noldan farqli elementlar bo'lib, i -satrdagi (ustundagi) chapdan (yuqoridan) birinchi farqli element m_i - raqamli ustunda (satrda) va $(i+1)$ -satrdagi (ustundagi) chapdan (yuqoridan) birinchi noldan farqli element m_{i+1} - (satrda) uchrasa, u holda $m_i < m_{i+1}$ tengsizlik o'rinli.

Xususan, nol matritsa satrlariga nisbatan ham ustunlariga nisbatan ham zinapoya matritsadir.

Keltirilgan ta'rif satrlariga (ustunlariga) nisbatan zinapoya matritsada noldan farqli satrlardagi (ustunlardagi) chapdan (yuqoridan) birinchi noldan farqli elementdan chapdagi (yuqoridagi) va pastdagi (o'ngdagi) elementlar nolga teng bo'lishini ko'rsatadi.

Satrlarga nisbatan zinapoya matritsada noldan farqli satrlar r ta bo'lsin. U xolda bu satrlarga mos bo'lgan $m_1, m_2, \dots, m_r$ raqamli ustunlarni satrlarga nisbatan zinapoya matritsaning bosh ustunlari deymiz. Satrlarga nisbatan zinapoya matritsaning ta'rifiga ko'ra $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_r \leq n$

4-teorema. Har qanday matriqani satrlarning (ustunlarning) chekli sondagi elementar almashtirishlari yordamida satrlarga (ustunlarga) nisbatan zinapoya matritsaga aylantirish mumkin.

Isbot. Ixtiyoriy $A \in M_{s,n}$ matritsa berilgan bo'lsin. Teoremani S satrlarning soni bo'yicha matematik induksiya usuli bilan isbotlaymiz. Agar matritsa faqat bitta satrdan iborat bo'lsa, u satrlarga nisbatan zinapoya matritsa bo'ladi. Demak $S=1$ bo'lsa, teorema o'rinli.

Endi $S \geq 2$ xolni ko'ramiz va teoremani $(S-1)$ tasatrlari matritsalar uchun o'rinli deb faraz qilamiz. Agar A matritsa nol matritsa bo'lsa, u zinapoya matritsa.

A noldan farqli matritsa bo'lsin. U xolda unda noldan farqli element mavjud. Demak matritsada noldan farqli ustun mavjud. Birinchi noldan farqli ustun m_1 -ustun bo'lib, undagi noldan farqli element r -satrda yotsin. Birinchi va r -satrlarning o'rnini almashtirib (I) tur elementar almashtirish, birinchi satrining m_1 -ustunida yotuvchi a'_{1m_1} elementi noldan farqli bo'lgan quyidagi matritsaga kelamiz:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 \dots a'_{1m_1} \dots a'_{1n} \\ 0 \dots a'_{2m_1} \dots a'_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ 0 \dots a'_{sm_1} \dots a'_{sn} \end{pmatrix}$$

Agar xar bir $k = \overline{2, S}$ uchun birinchi satrni $\left(-\frac{a'_{km}}{a'_1 m_1}\right)$ songa ko'paytirib, k -satrga qo'shsak (II)-tur elementar almashtirishlar), quyidagi matritsaga kelamiz:

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \ a'_{1m_1} \dots a'_{1n} \\ 0 \dots 0 \ 0 \dots a''_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ 0 \dots 0 \ 0 \dots a''_{sn} \end{pmatrix}$$

Endi A'' matritsada birinchi satrni tashlab, qolgan $S-1$ satrlardan iborat matritsani C orqali belgilaymiz. Bu C matritsaning birinchi m_1 ta ustuni nolga teng.

C matritsa $S-1$ ta satrga ega bo'lgani uchun unga matematik induksiyaning farazini qo'llab, chekli sondagi elementar almashtirishlar yordamida satrlarga nisbatan zinapoya ko'rinishga ega bo'lgan D matritsaga keltirish mumkin. C ustidagi satrlarning elementar almashtirishlari A'' matritsaning xam elementar almashtirishlari bo'lib, bunda birinchi satr o'zgarmaydi. Xosil bo'lgan D matritsaning ham birinchi m_1 ta ustuni nollardan iborat bo'ladi.

D matritsaning noldan farqli $r-1$ ta satri bo'lib, bu satrlardagi noldan farqli birinchi elementlar mos ravishda $m_2, \dots, m_r$ ustunlarda yotgan bo'lsin. U xolda $m_2 < \dots < m_r$. D matritsaning birinchi m_1 ta ustuni nollardan iborat bo'lgani uchun $m_1 < m_2 < \dots < m_r$. Natijada birinchi satrdan pastga D matritsaning satrlari yozilsa, xosil bo'lgan S ta satri matritsa satrlarga nisbatan zinapoya matritsa bo'lib, u A matritsadan chekli sondagi elementar almashtirishlar orqali xosil qilingan bo'ladi.

Ustunlar uchun teorema shunga o'xshash isbotlanadi.

5-teorema. Satrlarga (ustunlariga) nisbatan zinapoya matritsa satrlarining (ustunlarining) rangi nol'dan farqli satrlarining (ustunlarining) soniga teng.

Isbot. $A \in M_{s,n}$ matritsa satrlariga nisbatan zinapoya bo'lib, r ta noldan farqli satrga ega va $m_1, m_2, \dots, m_r$ – bosh ustunlarining raqamlari bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & a_{1m_1} & \dots & a_{1n} \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & a_{2m_2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & a_{rm_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_r A_r = \bar{0}$ bo'lsin deb faraz qilamiz. Bundan teoremani isbotlash uchun qolgan satrlar nol bo'lgani tufayli $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ kelib chiqishini ko'rsatamiz. Agar $r=1$ bo'lsa, ushbu $c_1 A_1 = \bar{0}$ tenglikni, ya'ni $c_1 a_{1m_1} = \dots = c_1 a_{1n} = 0$ tengliklarni olamiz. Bundan $a_{1m_1} \neq 0$ bo'lgani uchun $c_1 = 0$ tenglikni olamiz. Endi $r-1$ xolda $r-1$ ta noldan farqli $B_1, \dots, B_r$ satrlarga ega va satrlariga nisbatan zinapoya bo'lgan har qanday B matritsa uchun $c_1 B_1 + \dots + c_{r-1} A_{r-1} = \bar{0}$ tengliqdan doim $c_1 = c_2 = \dots = c_{r-1} = 0$ kelib chiqsin deb faraz qilamiz. Ushbu $c_1 A_1 + \dots + c_r A_r = 0$ tenglikdan

$$\begin{aligned} c_1 a_{1m_1} &= 0 \\ c_1 a_{1m_2} + c_2 a_{2m_2} &= 0 \\ \dots & \dots \\ c_1 a_{1m_r} + \dots + c_r a_{rm_r} &= 0 \end{aligned}$$

tengliklar tizimini olamiz. Bularning birinchisidan $a_{1m_1} \neq 0$ bo'lgani uchun $c_1 = 0$ tenglikni olamiz va $c_2 A_2 + \dots + c_r A_r = 0$ tenglikka kelamiz. $A_2, \dots, A_r$ satrlarning o'zi $r-1$ satrli zinapoya matritsa xosil qilgani uchun, induksiya faraziga ko'ra $c_2 = \dots = c_r = 0$. Bu va $c_1 = 0$ tengliklar $A_1, A_2, \dots, A_r$ satrlarning chiziqli erkliligini ko'rsatadi, ya'ni $r_c(A) = r$.

4- va 5-teoremlar biror matritsa satrlarining (ustunlarining) rangini xisoblash uchun uni elementar almashtirishlar orqali zinapoya ko'rinishga keltirish kifoya ekanligini ko'rsatadi.

Agar $A \in M_n$ kvadrat matritsa bo'lib, diagonal ko'rinishga ega bo'lsa, 5-teoremaga asosan uning satrlarining (ustunlarining) rangi noldan farqli diagonal elementlarining soniga teng.

6-teorema. Satrlariga (ustunlariga) nisbatan zinapoya matritsa ustunlarining (satrlarining) rangi noldan farqli satrlarining (ustunlarining) soniga teng.

Isbot. Zinapoya A matritsa (2) ko'rinishga ega bo'lsin. Noldan farqli satrlar r ta bo'lgani uchun uning ustunlarini r -o'lchamli vektorlar deb qarash mumkin.

$A^{m_1}, A^{m_2}, \dots, A^{m_r}$ bosh ustunlarning chiziqli erkli ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik biror $c_1, c_2, \dots, c_r$ sonlar uchun $c_1 A^{m_1} + c_2 A^{m_2} + \dots + c_r A^{m_r} = \bar{0}$ bo'lsin. U xolda

[illegible]

Bu erda $a_{1m_1} \neq 0, a_{2m_2} \neq 0, \dots, a_{rm_r} \neq 0$ bo'lgani uchun 5-teoreмага o'xshash muloxazalarni ishlatib $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$ tengliklarni olamiz, ya'ni $A_1^{m_1}, \dots, A_r^{m_r}$ bosh ustunlar chiziqli erkli. Bundan $r_v(A) = r$ ekanligi kelib chiqadi.

Satrlarning rangi uchun teoremaning isboti shunga o'xshash.

Natija. Satrlariga (ustunlariga) nisbatan zinapoya bo'lgan xar qanday matritsa satrlarining rangi ustunlarining rangiga teng.

Isbot. Agar satrlariga nisbatan zinapoya matritsaning noldan farqli satrlari soni s ga teng bo'lsa, u xolda 5- va 6-teoremlarga asosan $r_c(A) = r = r_v(A)$.

Agar $B = (b_{ij}) \in M_{s,n}$ matritsaning elementlari $A = (a_{pq}) \in M_{s,n}$ matritsaning elementlari bilan ushbu $b_{ij} = a_{ij} (i = \overline{1, s}, j = \overline{1, n})$ tengliklar bilan bog'langan bo'lsa, ya'ni B ning $B_1, V_2, \dots, V_s$ satrlari mos ravishda A ning $A^1, A^2, \dots, A^s$ ustunlariga teng bo'lsa, V matritsa A ga nisbatan transponirlangan deyiladi va A^T kabi belgilanadi. Ravshanki, har qanday A matritsa uchun

$$(A^T)^T = A, r_c(A) = r_y(A^T), r_y(A) = r_c(A^T).$$

7-teorema. Matritsa satrlarining (ustunlarining) rangi matritsa transponirlanganda o'zgarmaydi, ya'ni xar qanday H matritsa uchun $r_c(H) = r_c(H^T), r_y(H) = r_y(H^T)$.

Isbot. Ixtiyoriy $H \in M_{s,n}$ matritsa berilgan va H^T – uning transponirlangani bo'lsin. 4-teoremaga ko'ra satrlarning chekli sondagi $f_1, \dots, f_k$ almashtirishlari orqali N ni satrlariga nisbatan zinapoyani A matritsaga keltirish mumkin: $(f_k \dots f_1)(H) = A$. Agar N ning satrlari ustida bajarilgan $f_1, \dots, f_k$ elementar almashtirishlarni H^T matritsaning ustunlari ustida bajarsak, ustunlariga nisbatan zinapoya A^T matritsaga kelamiz. 3-teoremaga asosan $r_c(H) = r_c(A)$ va $r_c(A^T) = r_c(H^T)$ 6-teoremaning natijasiga asosan $r_c(A^T) = r_y(A^T)$. Bulardan

$$r_c(H) = r_c(A) = r_y(A^T) = r_y(A^T) = r_c(H^T)$$

Shunga o'xshash $r_y(H) = r_y(H^T)$ tenglik isbotlanadi.

Natija. Xar qanday matritsa satrlarining rangi ustunlarining rangiga teng.

Isbot. Ixtiyoriy N matritsa uchun 7-teoremaga asosan $r_c(H) = r_c(H^T) = r_y(H)$.

Bu natijaga asosan quyidagi ta'rifni kiritishimiz mumkin. Ushbu $r_c(H) = r_y(H)$ son matritsaning rangi deyiladi.

1.2- § Kompleks assotsiativ algebralar

Halqa va tana. *Ta'rif.* Ikkita binar amalli sistema deb ixtiyoriy ikkita a, b elementlari uchun yagona aniqlangan va yana shu to'plamning o'ziga tegishli bo'lgan yig'indi $a+b$ va ko'paytma $a \cdot b$ mavjud bo'lgan $a, b, \dots$ elementlar to'plamiga aytiladi.

Agar ikki binar amalli sistemada elementlar ustida operatsiyalarni amalga oshiruvchi ushbu binar amallar quyidagi shartlarga qanoatlantirsa bu sistema halqa deb ataladi:

I. Qo'shish qonuni:

a) Assotsiativlik qonuni: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

b) Kommutativlik qonuni: $a+b=b+a$.

v) Barcha a, b elementlar uchun $a+x=b$ tenglamaning echimining mavjudligi.

II. Ko'paytirish qonuni:

a) Assotsiativlik qonuni: $(ab)c=a(bc)$.

III. Distributivlik qonuni:

a) $a \cdot (b+c)=ab+bc$;

b) $(b+c) \cdot a=ba+ca$.

Misollar. 1. Agar ko'rilayotgan to'plam elementlari sonlardan iborat bo'lsa va ushbu to'plamda aniqlangan binar amallar bu oddiy ko'paytirish va qo'shish amallari bo'lsa, u holda barcha ratsional sonlar to'plami $\mathbf{Q}$ halqa tashkil qiladi (birlik elementi sifatida 1 soni xizmat qiladi). Shunga o'xshash barcha butun sonlar to'plami $\mathbf{Z}$ hamda barcha haqiqiy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ halqa tashkil qiladi.

2. Deylik $M_2(\mathbf{R})$ — elementlari haqiqiy sonlardan iborat barcha 2×2 – o'lchovli matritsalar to'plami bo'lsin. U holda bu to'plam matritsalarini qo'shish va matritsalarini ko'paytirish amallariga nisbatan guruh tashkil qiladi.

Shunga o'xshash agar $M_2(\mathbf{C})$ elementlari kompleks sonlardan iborat barcha 2×2 – o'lchovli matritsalar to'plami bo'lsa, bu to'plam matritsalarini qo'shish va matritsalarini ko'paytirish amallariga nisbatan halqa tashkil qiladi.

Umuman, agar $M_n(\mathbf{C})$ elementlari kompleks sonlardan iborat barcha $n \times n$ – o'lchovli matritsalar to'plami bo'lsa, bu to'plam matritsalarini qo'shish va matritsalarini ko'paytirish amallariga nisbatan gurux tashkil qiladi.

Shunga o'xshash, deylik $M_n(\mathbf{R})$ elementlari haqiqiy sonlardan iborat barcha $n \times n$ – o'lchovli matritsalar to'plami bo'lsin. U holda bu to'plam matritsalarini qo'shish va matritsalarini ko'paytirish amallariga nisbatan gurux tashkil qiladi.

Agar ko'paytiruv amali uchun kommutativlik qonuni bajarilsa:

$$\text{II. b) } a \cdot b = b \cdot a,$$

u holda halqa kommutativ halqa deb ataladi.

Tana. Halqa tana deb ataladi, agarda:

a) unda hech bo'lmaganda bitta noldan farqli element mavjud bo'lsa;

b) quyidagi tenglamalar

$$ax=b,$$

$$ya=b$$

$a \neq 0$ da berilgan halqada echimga ega.

Agar, bundan tashqari, berilgan halqa kommutativ bo'lsa, u holda u maydon yoki ratsional halqa deb ataladi.

Ta'rif. Biron bir P maydon ustida chekli o'lchovli vektor fazosi bo'lgan $\mathfrak{J}$ to'plam va unda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi

$$1) a+b=b+a,$$

$$2) (a+b)+c=a+(b+c),$$

$$3) \text{ shunday } 0 \text{ element mavjudki har qanday } a \text{ element uchun } 0+a=a+0=a,$$

$$4) \text{ shunday } -a \text{ element mavjudki } a \text{ element uchun } a+(-a)=-a+a=0,$$

$$5) (a+b)c=ac+bc, a(b+c)=ab+ac,$$

$$6) (\alpha u)v=u(\alpha v)=\alpha(uv) \text{ barcha } \alpha \in P \text{ uchun,}$$

binar amallar (chiziqli) algebra deb ataladi.

Agar berilgan algebrada ko'paytiruv amali uchun assotsiativlik qonuni o'rinli bo'lsa, ya'ni

$$7) (ab)c=a(bc),$$

u holda berilgan algebra assotsiativ algebra deb ataladi.

Algebralarga misollar. 1. Deylik $M_2(\mathbf{R})$ — elementlari haqiqiy sonlardan iborat barcha 2×2 – o'lchovli matritsalar vektor fazosi bo'lsin. U holda bu to'plam matritsalarini qo'shish va matritsalarini ko'paytirish amallariga nisbatan algebra tashkil qiladi.

Shunga o'xshash agar $M_2(\mathbf{C})$ elementlari kompleks sonlardan iborat barcha 2×2 – o'lchovli matritsalar to'plami bo'lsa, bu to'plam matritsalarini qo'shish va matritsalarini ko'paytirish amallariga nisbatan algebra tashkil qiladi.

Umuman, agar $M_n(\mathbf{C})$ elementlari kompleks sonlardan iborat barcha $n \times n$ – o'lchovli matritsalar to'plami bo'lsa, bu to'plam matritsalarini qo'shish va matritsalarini ko'paytirish amallariga nisbatan algebra tashkil qiladi.

Shunga o'xshash, deylik $M_n(\mathbf{R})$ elementlari haqiqiy sonlardan iborat barcha $n \times n$ – o'lchovli matritsalar to'plami bo'lsin. U holda bu to'plam matritsalarini qo'shish va matritsalarini ko'paytirish amallariga nisbatan algebra tashkil qiladi.

2. Algebralarga muxim misol bu barcha elementlari P maydondan olingan n – qatorli kvadrat matritsalarining P_n to'liq matritsali algebrasidir. Bu algebra n^2 ranga ega. Bazis elementlari sifatida C_{ik} — i – qator va k – ustun kesishmasida 1 soni, qolgan joylarda esa 0 soni turgan matritsalarini olish mumkin. α_{ik} elementlardan iborat har bir matritsa quyidagi yig'indi ko'rinishda bo'ladi

$$\sum \alpha_{ik} C_{ik},$$

qaysiki unda yig'indi 1 dan n gacha qiymatni oluvchi barcha i va k bo'yicha xisoblanadi. C_{ik} bazis elementlari uchun ko'paytirish qoidalari quyidagicha:

$$C_{hi}C_{jk}=0 \ (i \neq j),$$

$$C_{hi}C_{ik}=C_{hk}.$$

3. *Kvaternionlar algebrasi.* Deylik G — e, j, k, l bazis elementlariga ega bo'lgan to'rt o'lchovli vektor fazosi bo'lsin. Element e ni birlik element deb xisoblaymiz, ya'ni $e^2=e, ej=j$ va x.k. Quyidagi tengliklarni kiritamiz

$$j^2= -e\alpha, k^2= -e\beta,$$

bu erda α va β — P maydonning ixtiyoriy elementlari, va

$$jk = -kj = l.$$

U holda

$$l^2 = jkj = -jjk = -e\alpha\beta,$$

$$jl = jk = -e\alpha k = -k\alpha,$$

$$lj = -kjj = +ke\alpha = k\alpha,$$

$$lk = -kkj = +e\beta j = j\beta,$$

$$lk = jkk = -je\beta = -j\beta.$$

Hosil bo'lgan G algebra umumlashtirilgan kvartenionlar algebrasi deb ataladi.

Uning elementlari quyidagi ko'rinishga ega:

$$x = ex_0 + jx_1 + kx_2 + lx_3 \quad (x_0, x_1, x_2, x_3 \in P).$$

Ravshanki, ex_0 va x_0 elementlar aynan tenglashtiriladi; shunday qilib, P maydon G algebraga yotqizilgan bo'ladi.

Ixtiyoriy x elementning normasi quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{aligned} N(x) = xx^* &= (ex_0 + jx_1 + kx_2 + lx_3)(ex_0 - jx_1 - kx_2 - lx_3) = \\ &= x_0^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2. \end{aligned}$$

Agar bu kvadratik shakl noldan iborat bo'lsa (ya'ni bir vaqtning o'zida nolga teng bo'lmagan x_i larda nolga aylansa), u holda xx^* ko'paytma $x \neq 0$ da nolga teng bo'ladi, G esa nolning bo'luvchilariga ega bo'ladi. Agar yuqorida keltirilgan kvadratik shakl nolga teng bo'lmasa, u holda har bir $x \neq 0$ teskari elementga ega:

$$x^{-1} = x^*(x_0^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2),$$

va, demak, G algebra tana bo'ladi.

Umumlashtirilgan kvartenionlar algebrasining matritsali ko'rinishi G algebra ikki tomonlama modul sifatida qaranganda hosil bo'ladi. Bunda G chap multiplikatorlar va $\Sigma = P(j)$ — o'ng multiplikatorlar sohasi bo'lib xizmat qiladi. $-\alpha$ Element P maydonda kvadrat bo'lmaydi deb xisoblaymiz; u holda

$$\Sigma = P(j) = P(\sqrt{-\alpha})$$

— maydondir. G algebra esa bu maydonda ikki o'lchovli vektor fazosi bo'ladi; bazis elementlari sifatida, masalan, e va $-k$ elementlarni olish mumkin. x Vektorlar u holda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x = e(x_0 + jx_1) + (-k)(-x_2 + jx_3). \quad (1)$$

Agar bu x vektorlarni o'ng tomondan ixtiyoriy y elementga ko'paytirsak, u holda G fazoning ma'lum bir matritsa orqali ifodalanadigan Y chiziqli aylanishi hosil bo'ladi. Bu matritsani ham Y orqali belgilaymiz. Agar e va $-k$ bazis elementlarni chapdan y ga ko'paytirsak va natijalarni yana (1) ko'rinishda yozsak Y matritsaning ustunlari hosil bo'ladi. Agar, xususan, y element sifatida j , k yoki l ni olsak, u holda quyidagi matritsalarini olamiz

$$J = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & j\beta \\ j & 0 \end{pmatrix}.$$

Agar endi $\alpha = \beta = 1$ deb olsak, u holda *gamiltonli kvartenionlar* hosil bo'ladi

$$x = ex_0 + jx_1 + kx_2 + lx_3$$

quyidagi ko'paytirish qoidalariga ega bo'lgan:

$$j^2 = k^2 = l^2 = -1,$$

$$jk = l, \quad kj = -l,$$

$$kl = j, \quad lk = -j,$$

$$lj = k, \quad jl = -k.$$

Agar P — haqiqiy sonlar maydoni bo'lsa, u holda matritsali yozuvda j elementni mavxum i birlik elementga almashtirish mumkin. U holda quyidagi hosil bo'ladi:

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Algebralarga yana ko'plab misollar keltirish mumkin. Lekin yuqorida keltirilgan misollar berilgan bitiruv malakaviy ishiga taaluqlidir. [1]

Ta'rif. Agar berilgan algebrada ko'paytiruv amali uchun kommutativlik qonuni o'rinli bo'lsa, ya'ni

$$8) a \cdot b = b \cdot a,$$

u holda berilgan algebra kommutativ algebra deb ataladi.

Qo'shish qonunlariga shuni qo'shimcha qilish mumkinki. Uchta 1), 2), 3), 4) qonunlar birgalikda shuni bildiradiki algebra elementlari qo'shish amaliga nisbatan abel guruxini tashkil qiladi. Shunday qilib Abel gruppasi uchun o'rinli bo'lgan faktlarni algebralarga ham qo'llashimiz mumkin: quyidagi xossaga ega bo'lgan bitta va faqat bitta nol element 0 mavjud:

$$a+0=a \text{ barcha } a \text{ uchun.}$$

Bundan tashqari, har bir a element uchun quyidagi xossaga ega bo'lgan, unga qarama – qarshi element $-a$ mavjud

$$(-a)+a=0.$$

Shunday qilib $a+x=b$ tenglama faqat echimga ega bo'libgina qolmay yagona uchimga ega; uning yagona echimi — quyidagi element

$$x=(-a)+b,$$

bu elementni $b-a$ orqali belgilaymiz. $a-b=a+(-b)$ bo'lgani uchun har qanday ayirmani yig'indiga aylantirish mumkin; demak, shu ma'noda ayirmalar uchun ham yig'indilarga o'rinli bo'lgan qoidalar o'rinli bo'ladi, masalan

$$(a-b)-c=(a-c)-b.$$

Nihoyat, $-(-a)=a$ va $a-a=0$. [1], [2]

Assotsiativlik qonuniga oid. Ko'paytirish uchun assotsiativlik qonuni asosida murakkab ko'paytmalarni aniqlash mumkin

$$\prod_{v=1}^n a_v = a_1 a_2 \dots a_n \quad (*)$$

va ularning asosiy xossasini isbotlash mumkin:

$$\prod_{\mu=1}^m a_{\mu} \cdot \prod_{v=1}^n a_{m+v} = \prod_{v=1}^{n+m} a_v.$$

Avval (*) tenglikning o'rinli ekaligini ko'rsatamiz. Elementlar $a_1, a_2, \dots, a_n$ berilgan bo'lsin. Matematik induksiya usuli bo'yicha ($m < n$) quyidagilarni aniqlaymiz.

$$\prod_{v=1}^1 a_v = a_1,$$

$$\prod_{v=1}^{m+1} a_v = (\prod_{v=1}^m a_v) \cdot a_{m+1}.$$

Agar bundan tashqari, agar ko'paytiruv amali kommutativ bo'lsa bundan ko'prog'ini isbotlash mumkin: murakkab ko'paytma qiymati ko'paytiruvchilarning joylashish tartibiga bog'liq emas. Aniqrog'i:

Teorema 1. agar φ — $(1, n)$ natural sonlar kesmasini o'z-o'ziga birga-bir akslantirish bo'lsa, u holda

$$\prod_{v=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^n a_v.$$

Isbot. $n=1$ uchun Teorema ravshan. Shuning uchun matematik induksiya usuli bo'yicha uni $n-1$ uchun ham to'g'ri deb faraz qilamiz. Deylik k soni n songa akslansin: $\varphi(k)=n$. U holda

$$\prod_{\varphi(v)=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^{k-1} a_{\varphi(v)} a_{\varphi(k)} \prod_{v=1}^{n-k} a_{\varphi(k+v)} = (\prod_{v=1}^{k-1} a_{\varphi(v)} \cdot \prod_{v=1}^{n-k} a_{\varphi(k+v)}) a_n.$$

Qavs ichiga olingan ko'paytuvchilar faqat ixtiyoriy tartibda olingan $a_1, \dots, a_{n-1}$ elementlardan iborat. Matematik induksiya faraziga ko'ra bu ifoda $\prod_{v=1}^{n-1} a_v$ ga teng. Shuning uchun

$$\prod_{\varphi(v)=1}^n a_{\varphi(v)} = \prod_{v=1}^{n-1} a_v \cdot a_n = \prod_{v=1}^n a_v.$$

Xuddi shunga o'xshash quyidagi yig'indilarni aniqlash mumkin

$$\sum_{v=1}^n a_v = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

va ularning asosiy xossasini isbotlash mumkin:

$$\sum_{\mu=1}^m a_{\mu} + \sum_{v=1}^n a_{m+v} = \sum_{v=1}^{m+n} a_v.$$

1) shartga ko'ra ixtiyoriy yig'indida qo'shiluvchilarni ixtiyoriy tartibda almashtirib qo'yish mumkin, kommutativ algebralarda esa bular ko'paytmalar uchun ham o'rinli.

Distributivlik qonuniga oid. Agar kommutativlik qonuni ko'paytiruv uchun o'rinli bo'lsa, u holda, albatta, $a(b+c)=ab+ac$ shart $(a+b)c=ac+bc$ shartdan kelib chiqadi.

$a(b+c)=ab+ac$ shartdan induksiya bo'yicha quyidagini hosil qilamiz

$$a(b_1+b_2+\dots+b_n)=ab_1+ab_2+\dots+ab_n,$$

xuddi shunday, $(a+b)c=ac+bc$ shartdan quyidagiga egamiz:

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)b=a_1b+a_2b+\dots+a_nb.$$

Bu ikki qonun yig'indilarni ko'paytirishning odatiy qoidasini beradi:

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)=$$

$$=a_1b_1+\dots+a_1b_m+\dots+a_nb_1+\dots+a_nb_m=\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_i b_k.$$

Distributivlik qonuni ayirma uchun ham bajariladi; masalan,

$$a(b-c)=ab-ac,$$

bunga osongina ishonch hosil qilish mumkin:

$$a(b-c)+ac=a(b-c+c)=ab.$$

Xususan,

$$a \cdot 0 = a(a-a) = a \cdot a - a \cdot a = 0,$$

yoki: agar ko'paytiruvchilardan biri nolga teng bo'lsa ko'paytma nolga teng.

Ammo bu Teoremaning teskarisi har doim ham to'g'ri bo'lavermaydi: shunday bo'lishi mumkinki

$$a \cdot b = 0, a \neq 0, b \neq 0.$$

Bu holda a va b elementlar nolning bo'luvchilari deb ataladi. Bunda a — nolning chap bo'luvchisi, b — nolning o'ng bo'luvchisi deb ataladi. (Kommutativ algebralarda bu ikki tushunchalar ustma – ust tushadi.) Nolning o'zini ham nolning bo'luvchisi deb xisoblash qulaydir. Shuning uchun a nolning chap bo'luvchisi deb ataladi, agarda $ab=0$ tenglikka qanoatlantiruvchi shunday $b \neq 0$ element mavjud bo'lsa. Agar algebrada noldan boshqa nolning bo'luvchilari mavjud bo'lmasa, ya'ni agar $ab=0$ shartdan yoki $a=0$, yoki $b=0$ shart kelib chiqsa, u holda algebra nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan algebra deb ataladi. Agar, bundan tashqari, algebra kommutativ bo'lsa, u holda u butunlik algebra deb ataladi.

Misollar. Yuqorida keltirilgan butun sonlar algebrasi $\mathbf{Z}$, ratsional sonlar algebrasi $\mathbf{Q}$ va haqiqiy sonlar algebrasi $\mathbf{R}$ nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan algebralarga misol bo'la oladilar. $(-1,1)$ intervalda aniqlangan barcha uzluksiz funktsiyalar algebrasi nolning bo'luvchilariga ega. Chunki, agar

$$f=f(x)=\max(0,x),$$

$$g=g(x)=\max(0,-x),$$

ko'rinishdagi funktsiyalarni olsak, u holda $f \neq 0$, $g \neq 0$, $fg=0$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Birlik element. Agar algebra chap birlik elementga ega bo'lsa:

$ex=x$ barcha x elementlar uchun,
va bir vaqtning o'zida — o'ng birlik e elementga ega bo'lsa:

$$xe=x \text{ barcha } x \text{ elementlar uchun,}$$

u holda bu ikkala elementlar o'zaro teng bo'lishlari kerak. Chunki

$$e=e\hat{e}=\hat{e}.$$

Shunga o'xshash har qanday o'ng birlik element va chap birlik element e ga teng bo'ladi. Bunday holatda e elementni oddiygina qilib birlik element yoki bir deb ataladi va berilgan algebra birlik elementli algebra yoki birlik algebra deb ataladi. Ko'pincha, agar bu 1 soni bilan chalkashlikka olib kelmasa birlik element 1 orqali belgilanadi.

Teskari element. Agar a — birlik algebraning ixtiyoriy elementi bo'lsa, u holda a elementning chap teskarisi deb quyidagi hossaga ega bo'lgan $a_{(l)}^{-1}$ element tushuniladi:

$$a_{(l)}^{-1}a=e,$$

o'ng teskarisi deb quyidagi hossaga ega bo'lgan $a_{(r)}^{-1}$ element tushuniladi:

$$aa_{(r)}^{-1}=e.$$

Agar a element chap teskari va o'ng teskari elementlarga ega bo'lsa, u holda bu teskari elementlar ustma – ust tushadi, chunki

$$a_{(l)}^{-1}=a_{(l)}^{-1}(aa_{(r)}^{-1})=(a_{(l)}^{-1}a)a_{(r)}^{-1}=a_{(r)}^{-1},$$

va, demak, a elementning har bir o'ng teskarisi, a elementning har bir chap teskarisi kabi yuqorida ko'rsatilgan elementga teng. Bunday holda “ a element teskari elementga ega” deyiladi, teskari elementning o'zi esa a^{-1} orqali belgilanadi.

Darajalar va karralilar. Assotsiativlik qonuni asosida har bir a element uchun algebrada a^n darajalarni kiritish mumkin (n — natural son) va quyidagi oddiy qoidalarni hosil qilish mumkin:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \\ (a^n)^m &= a^{nm}, \\ (ab)^n &= a^n b^n; \end{aligned} \tag{1}$$

Bunda oxirgi tenglik faqat kommutativ algebralar uchun o'rinlidir. Haqiqatan ham, 1 teoremdan (1) dagi tengliklardan birinchisi kelib chiqadi. (1) tengliklardan ikkinchisini ham matematik induksiya usuli yordamida isbotlash mumkin.

Agar algebra birlik elementga ega bo'lsa, a element esa — teskari elementga ega bo'lsa, u holda nol va manfiy darajalarni kiritish mumkin; bunda (1) tengliklar o'rinliligicha qoladi.

(1) Tengliklardan ikkinchisi qo'shish amali uchun quyidagi ko'rinishga ega

$$n \cdot ma = nm \cdot a,$$

birinchi tenglik distributivlik qonuniga aylanadi

$$ma + na = (m+n)a.$$

Bu ikki qonunga yana bir distributivlik qonuni qo'shiladi

$$m(a+b) = ma + mb.$$

Bu tenglik (1) ning uchinchi tengligining qo'shish amali uchun ko'rinishidir. Bu tenglikni ham matematik induksiya usuli yordamida isbotlash mumkin. Oxirgi tengliklar qatorida quyidagi tenglik ham o'rinli

$$n \cdot ab = na \cdot b = a \cdot nb.$$

Darajalar xolidagi kabi quyidagi belgilashni qabul qilamiz

$$(-n) \cdot a = -na;$$

u holda, hosil qilingan

$$n \cdot ma = nm \cdot a$$

$$ma + na = (m+n)a$$

$$m(a+b) = ma + mb$$

$$n \cdot ab = a \cdot nb$$

tengliklar barcha butun (musbat, manfiy va nolga teng bo'lgan) sonlar uchun bajariladi. Shu bilan birga $n \cdot a$ ifodaga algebraning ikkita elementining ko'paytmasi sifatida qaramaslik kerak. Chunki umumiy holda n soni algebraning elementi bo'lmaydi, balki qandaydir tashqi narsa — butun son bo'ladi. Ammo, agar algebra e birlik elementga ega bo'lsa, u holda na ifodani elementlar ko'paytmasi sifatida olish mumkin:

$$na = n \cdot ea = ne \cdot a.$$

Ideallar. Deylik $\mathfrak{J}$ — ixtiyoriy algebra bo'sin.

Berilgan $\mathfrak{J}$ algebraning biron – bir qism to'plami yana algebra (berilgan algebraning qism algebrasi) bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va etarlidir:

1) bu to'plam algebraning additiv guruxining qism guruxi bo'lishi zarur; boshqacha qilib aytganda, ixtiyoriy a va b elementlar bilan birga ularning $a - b$ ayirmasini ham o'z ichiga olishi lozim (modullarning xossalari);

2) a va b elementlar bilan birga ularning ab ko'paytmasini ham o'z ichiga olishi lozim.

Qism algebralarining ichida ideallar deb ataluvchi qism algebralar alohida rol o'ynaydi; ularning roli normal qism guruxlarning guruxlar nazariyasidagi roliga o'xshash.

$\mathfrak{J}$ algebraning bo'sh bo'lmagan M qismto'plami ideal, aniqrog'i o'ng ideal deb ataladi, agarda:

1) $a \in M$ va $b \in M$ lardan $a - b \in M$ shart kelib chiqsa (modullar xossalari);

2) $a \in M$ dan $\mathfrak{J}$ dagi ixtiyoriy r element uchun $ar \in M$ kelib chiqsa. So'z bilan ifodalaydigan bo'lsak: M modul o'zinig har bir a elementi bilan birga barcha ar o'ng karallilarni o'z ichiga olishi lozim.

Xuddi shunday, modul chap ideal deb ataladi, agar $a \in M$ dan $ra \in M$ ixtiyoriy $r \in \mathfrak{J}$ uchun kelib chiqsa.

Nihoyat, M qism to'plam ikkitomonlama ideal deb ataladi, agar u bir vaqtning o'zida ham o'ng, ham chap ideal bo'lsa.

Kommutativ algebralar uchun ushbu uchta tushuncha ustma – ust tushadi va shuning uchun bu erda chap va o'ng ideallar farqlanmaydi.

Kommutativ algebralardagi ideallarga misollar:

1. Faqat nol idealdan iborat Nol ideal.

2. Berilgan algebraning barcha elementlarini o'z ichiga oluvchi $\mathfrak{J}$ birlik ideal.

3. a element yordamida yaratilgan va

$$ra+na \ (r \in \mathfrak{J}, n \text{ — butun son})$$

ko'rinishdagi barcha ifodalar iborat (a) ideal. Bu to'plamning haqiqatan ham ideal bo'lishini ko'rish qiyin emas: bunday ifodalarning ikkitasini ayirmasi, ravshanki, yana shunday ko'rinishga ega bo'ladi, ixtiyoriy karrali esa quyidagi ko'rinishga ega:

$$s(ra+na)=(sr+ns)a,$$

ya'ni $r'a$ yoki $r'a+0a$ ko'rinishga ega.

(a) ideal, ravshanki, a elementni o'z ichiga oluvchi ideallar ichida eng kichigidir, chunki har bir ideal hech bo'lmaganda barcha ra karralilarni va $\pm \sum a = na$ ko'rinishdagi barcha yig'indilarni o'z ichiga oladi, shuning uchun $ra+na$ ko'rinishdagi barcha yig'indilarni ham o'z ichiga oladi. Ideal (a) , shunday qilib, a elementni o'z ichiga oluvchi barcha ideallarning kesishmasi sifatida aniqlanishi mumkin.

Agar $\mathfrak{J}$ algebra e birlik elementga ega bo'lsa, u holda $ra+na$ uchun $ra+nea=(r+ne)a=r'a$ ko'rinishdagi yozuvdan foydalanish mumkin. Demak, ushbu holatda (a) ideal barcha ra ko'rinishdagi karralilardan iborat bo'ladi. Masalan, (2) ideal butun sonlar algebrasida barcha juft sonlardan iborat.

Bir a element yordamida yaratilgan ideal asosiy ideal deb ataladi. Nol ideal har doim asosiy idealdir: bu (0) idealdir. Birlik ideal ham asosiy ideal xisoblanadi, agar $\mathfrak{J}$ — birlik e elementli algebra bo'lsa, chunki u holda $\mathfrak{J}=(e)$. Kommutativ bo'lmagan algebralarda o'ng asosiy va chap asosiy ideallar farqlanishi zarur. a element yordamida yaratilgan o'ng ideal barcha $ar+na$ ko'rinishdagi yig'indilardan iborat.

4. Xuddi shunga o'xshash, bir nechta $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementlar yordamida qurilgan chap idealni ham

$$\sum r_i a_i + \sum n_j a_j$$

ko'rinishdagi yig'indilar majmuasi yoki $\mathfrak{J}$ algebraning $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementlarni o'z ichiga oluvchi barcha chap ideallar kesishmasi sifatida aniqlash mumkin. Bu ideal

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ orqali belgilanadi va $a_1, a_2, \dots, a_n$ elementlar bu idealning bazisini tashkil qiladi deyiladi.

5. Xuddi shunday tarzda M cheksiz to'plam bo'yicha qurilgan (M) chap ideal aniqlanadi; u quyidagi ko'rinishdagi barcha chekli yig'indilarning majmuasi bo'ladi:

$$\sum r_i a_i + \sum n_j a_j \quad (a_j \in M, r_r \in \mathfrak{I}, n_j \text{ — butun sonlar}). [1], [2]$$

II-BOB. MATRITSALAR ALGEBRALARI VA ULARNING XOSSALARI

2.1- § Haqiqiy sonlar ustida chekli o'lchovli matritsalar algebralari tasnifi

Invol'yutiv algebralar. Invol'yutiv algebralarning nazariyasi bu xalqlarning nazariyasining eng rivojlangan va ilovalarga boy qismidir. U faqat har – hil mutaxassisliklardagi matematiklarga uchungina emas balki nazariyotchi fiziklar uchun ham tadqiqot uchun odatiy apparatga aylangan.

Invol'yutiv algebralarning nazariyasini erkin qo'llamasdan turib , kvant mexanikasini , maydonlar nazariyasini va statistik fizikani zamonaviy ko'rinishda bayon qilish mumkin emas. Oxirgi 60 – 65 yillarda bu nazariyada kuchli natijalar olindi.

Ta'rif. A — $\mathbf{C}$ kompleks sonlar maydoni ($\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar maydoni) ustida algebra bo'lsin. A algebrada aniqlangan invol'yutsiya deb shunday A algebrani A algebrasining o'ziga akslantirishga $x \rightarrow x^*$ aytiladiki, bunda ixtiyoriy $x, y \in A$ va $\lambda \in \mathbf{C}$ ($\in \mathbf{R}$) uchun:

- (i) $(x^*)^* = x$;
- (ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$;
- (iii) $(\lambda x)^* = \lambda^* x^*$;
- (iv) $(xy)^* = y^* x^*$

shartlari bajariladi. Invol'yutsiyaga ega bo'lgan va $\mathbf{C}$ kompleks sonlar maydoni ($\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar maydoni) ustida aniqlangan assotsiativ algebra kompleks (mos ravishda haqiqiy) invol'yutiv assotsiativ algebra yoki qisqacha (mos ravishda haqiqiy) invol'yutiv algebra deyiladi.

Bu erda λ^* — bu λ kompleks songa qo'shma sonni bildiradi. x^* Elementni ko'pincha x elementga qo'shma element deb yuritiladi. Yuqoridagi (i) xossadan ko'rinadiki invol'yutsiya A algebraning A algebraga biektiv akslantirish bo'ladi. [7]

Haqiqiy involyutiv algebraga misollar keltiramiz.

Misollar. $A=\mathbf{R}$ algebrada $\lambda \rightarrow \lambda$ akslantirish involyutsiya bo'ladi. Bunda $\mathbf{R}$ komutativ involyutiv assotsiativ algebraga aylanadi. Bu erda involyutsiya sonlarni aynan akslantrishdan iborat bo'ladi.

Deylik $M_n(\mathbf{R})$ — $\mathbf{R}$ maydon ustida $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebrasi bo'lsin. $\{a_{ij}\}_{ij=1}^n$ — shu matritsalar algebrasining elementi bo'lsin. Bu erda i — qator nomerini, j — ustun nomerini va $\{a_{ij}\}_{ij=1}^n$ — elementlari a_{ij} komponent - sonlardan iborat $n \times n$ -o'lchovli matritsani bildiradi. Shunday $\{b_{ij}\}_{ij=1}^n \in M_n(\mathbf{R})$ matritsani olaylikki, bunda $i, j=1, 2, \dots, n$ uchun $b_{ij}=a_{ji}^*$ bo'lsin u holda

$$\{a_{ij}\}_{ij=1}^n \rightarrow \{b_{ij}\}_{ij=1}^n, \quad \{a_{ij}\}_{ij=1}^n \in M_n(\mathbf{R})$$

akslantirish involyutsiya bo'ladi va $M_n(\mathbf{R})$ algebra bu involyutsiya yordamida involyutiv algebraga aylanadi. Bu faktning isbotini quyida $n=2$ bo'lgan holda keltiramiz.

A — haqiqiy involyutiv algebra bo'lsin. Element $x \in A$ ermit elementi deyiladi, agar $x^*=x$ bo'lsa va normal element deyiladi, agar $xx^*=x^*x$ bo'lsa. Idempotent (yani $x^2=x$ bo'lgan) ermit elementi proektor deb ataladi. Har bir ermit elementi normal element bo'ladi. Barcha ermit elementlari to'plami A algebraning haqiqiy vektor qism fazosidir. Agar x va y ermit elementlari bo'lsa u holda

$$(xy)^*=y^*x^*=yx$$

va, demak, x va y kommutativ (yani $xy=yx$) bo'lsa

$$(xy)^*=yx=xy,$$

ya'ni ko'paytma xy ermit elementi bo'ladi. [7], [8]

Agar A haqiqiy involyutiv algebra 1 chap birlik elementga ega bo'lsa, u holda har bir $x \in A$ uchun $x \cdot 1^* = (1 \cdot x^*)^* = x^{**} = x$. Shuning uchun 1^* — o'ng birlik element bo'ladi. Demak, $1=1^*$ — A algebraning birlik elementidir. Agar x — A algebraning teskarlanuvchi va elementi bo'lsa, u holda

$$(x^{-1})^*x^*=(xx^{-1})^*=1^*=1,$$

$$x^*(x^{-1})^*=(x^{-1}x)^*=1^*=1,$$

shuning uchun x^* element ham teskarlanuvchi va $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$ bo'ladi. Aksincha, agar x^* teskarlanuvchan bo'lsa, u holda $x^{**} = x$ ham teskarlanuvchi bo'ladi. Element $x \in A$ unitar element deyiladi, agar $xx^* = x^*x = 1$ tengliklar o'rinli bo'lsa, boshqacha qilib aytganda, agar x teskarlanuvchi va $x = (x^*)^{-1}$ bo'lsa. A involyutiv algebraning barcha unitar elementlari ko'paytiruv amali bo'yicha guruppa — A algebraning unitar gruppasini tashkil qiladi. Haqiqatdan ham, agar x va y — A algebraning elementlari bo'lsa, u holda

$$((xy)^*)^{-1} = (y^*x^*)^{-1} = (x^*)^{-1}(y^*)^{-1} = xy,$$

shuning uchun xy unitar elementdir, va

$$((x^{-1})^*)^{-1} = (x^*)^{-1} = x^{-1}$$

bo'lsa, u holda x^{-1} unitar elementdir.

Teorema. Haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan barcha 2×2 o'lchovli matritsalar to'plami $M_2(\mathbf{R})$ assotsiativ algebra tashkil qiladi. Bu algebra involyutsiya kiritish mumkin. Bunda berilgan algebra assotsiativ involyutive algebra bo'ladi.

Isbot. Deylik $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ — ixtiyoriy 2×2 o'lchovli matritsalar, $\lambda \in \mathbf{R}$ — haqiqiy son bo'lsin. U holda quyidagi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix},$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y \\ \lambda z & \lambda t \end{pmatrix}$$

amallarga nisbatan $M_2(\mathbf{R})$ vektor fazosi bo'ladi.

$M_2(\mathbf{R})$ vektor fazosida elementlarni ko'paytirish amali quyidagicha kiritiladi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & cy + dt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}.$$

Bu ko'paytirish amali assotsiativdir:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v & w \\ p & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v & w \\ p & s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (ax + bz)v + (ay + bt)p & (ax + bz)w + (ay + bt)s \\ (cx + dz)v + (cy + dt)p & (cx + dz)w + (cy + dt)s \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} axv + bzv + ayp + btp & axw + bzw + ays + bts \\ cxv + dzv + cyp + dtp & cxw + dzw + cys + dts \end{pmatrix} = \\
\begin{pmatrix} a(xv + yp) + b(zv + tp) & a(xw + ys) + b(zw + ts) \\ c(xv + yp) + d(zv + tp) & c(xw + ys) + d(zw + ts) \end{pmatrix} = \\
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xv + yp & xw + ys \\ zv + tp & zw + ts \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v & w \\ p & s \end{pmatrix} \right).$$

Demak, $M_2(\mathbf{R})$ assotsiativ algebradir.

$M_2(\mathbf{R})$ assotsiativ algebrada involyutsiyani quyidagicha kiritamiz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Ushbu operatsiya yuqorida keltirilgan involyutsiyaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Demak, berilgan algebra assotsiativ involyutive algebradir. Isbot yakunlandi. $\square$

Teorema 1. Quyidagi to'plam

$$A = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{R} \}$$

matritsalar ustida bajariladigan amallarga nisbatan haqiqiy kommutativ assotsiativ algebra bo'ladi.

Isbot. Quyidagi algebraik amallarga nisbatan A vektor fazo bo'ladi:

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A,$$

ixtiyoriy $\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A, \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun, va

$$\lambda(\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Shuni Teoremalash lozimki vektor fazolar sifatida $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ va haqiqiy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ o'zaro izomorfdir.

Quyidagi ko'paytma o'rinli

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Umuman, har qanday $\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A, \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A.$$

Demak, $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vektor fazoning algebraik amallariga va matritsalarini ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq. $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vektor fazoda matritsalarini ko'paytirish amalining assotsiativligi ushbu ko'paytirish amalining butun $M_2(\mathbf{R})$ algebrada assotsiativligidan kelib chiqadi. Demak $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yuqorida kiritilgan amallarga nisbatan haqiqiy assotsiativ algebra bo'ladi.

Bundan tashqari ushbu ko'paytirish amali $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ haqiqiy assotsiativ algebrada kommutativdir. Haqiqatan ham, har qanday $a = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$, $b = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$\begin{aligned} \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= (\lambda\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= (\mu\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ya'ni } ab=ba. \end{aligned}$$

Isbot tugadi. $\square$

1 Teoremada qilingan xulosa $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ to'plam uchun ham o'rinli, ya'ni quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija 2. Quyidagi to'plam

$$\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} := \{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{R} \}$$

matritsalar ustida bajariladigan amallarga nisbatan haqiqiy kommutativ assotsiativ algebra bo'ladi.

Qo'shimcha. Ushbu $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ haqiqiy kommutativ assotsiativ algebralar odatiy involyutsiyaga nisbatan involyutiv algebra bo'lishmaydi.

Haqiqatan ham, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ammo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaga qo'shma bo'lgan $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ algebrada yotmaydi.

Teorema 3. Quyidagi to'plam

$$A = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{R} \}$$

matritsalar ustida bajariladigan amallarga nisbatan haqiqiy kommutativ assotsiativ algebra bo'ladi.

Isbot. Quyidagi algebraik amallarga nisbatan A vektor fazo bo'ladi:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A,$$

ixtiyoriy $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A, \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun, va

$$\lambda(\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Shuni Teoremalash lozimki, yuqoridagi Teoremalardagi kabi, vektor fazolar sifatida $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ va haqiqiy sonlar to'plami $\mathbf{R}$ o'zaro izomorfdir.

Quyidagi ko'paytma o'rinli

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Umuman, har qanday $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A, \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A.$$

Demak, $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vektor fazoning algebraik amallariga va matritsalarini ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq. Yuqoridagi 1 Teorema isbotida Teoremalanganidek $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vektor fazoda matritsalarini ko'paytirish amalining assotsiativligi ushbu ko'paytirish amalining butun $M_2(\mathbf{R})$ algebrada assotsiativligidan kelib chiqadi. Demak $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yuqorida kiritilgan amallarga nisbatan haqiqiy assotsiativ algebra bo'ladi.

Bundan tashqari ushbu ko'paytirish amali $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ haqiqiy assotsiativ algebrada kommutativdir. Haqiqatan ham, har qanday $a = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A, b = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (\mu\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ya'ni } ab=ba.$$

Isbot tugadi. $\square$

3 Teoremada qilingan xulosa $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ to'plam uchun ham o'rinli, ya'ni quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija 4. Quyidagi to'plam

$$\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{R} \right\}$$

matritsalar ustida bajariladigan amallarga nisbatan haqiqiy kommutativ assotsiativ algebra bo'ladi.

Teorema 5. Quyidagi (yuqori uchburchakli) matritsalar to'plami

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R} \right\}$$

matritsalar ustida bajariladigan amallarga nisbatan haqiqiy assotsiativ algebra bo'ladi.

Isbot. Quyidagi algebraik amallarga nisbatan A vektor fazo bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \in A,$$

ixtiyoriy $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in A$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun, va ixtiyoriy $\lambda \in \mathbf{R}$ son uchun

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ 0 & \lambda a_{22} \end{pmatrix} \in A$$

va

$$\begin{aligned} \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \right) &= \lambda \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ 0 & \mu a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \mu a_{11} & \lambda \mu a_{12} \\ 0 & \lambda \mu a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Umuman, har qanday $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in A$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}0 & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0b_{11} + a_{22}0 & 0b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \in A.$$

Demak, A to'plam vektor fazoning algebraik amallariga va matritsalarini ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq. A vektor fazoda matritsalarini ko'paytirish amalining assotsiativligi ushbu ko'paytirish amalining butun $M_2(\mathbf{R})$ algebrada assotsiativligidan kelib chiqadi. Demak, A yuqorida kiritilgan amallarga nisbatan haqiqiy assotsiativ algebra bo'ladi. Isbot tugadi. $\square$

Qo'shimcha. Matritsalarini ko'paytirish amali

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R} \right\}$$

— haqiqiy assotsiativ algebrada kommutativ emas. Haqiqatan ham, $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$,

$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ ba = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ya'ni } ab \neq ba.$$

Demak, ushbu haqiqiy assotsiativ algebra kommutativ emas. Bundan tashqari, algebra A involyutiv ham emas, ya'ni

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin A.$$

5 Teoremada qilingan xulosa

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{21}, a_{22} \in \mathbf{R} \right\}$$

to'plam uchun ham o'rinli, ya'ni quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija 6. Quyidagi to'plam

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{21}, a_{22} \in \mathbf{R} \right\}$$

matritsalar ustida bajariladigan amallarga nisbatan haqiqiy assotsiativ algebra bo'ladi.

Qo'shimcha. Matritsalar ni ko'paytirish amali

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{21}, a_{22} \in \mathbf{R} \right\}$$

— haqiqiy assotsiativ algebrada kommutativ emas. Haqiqatan ham, $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in A$,

$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$ab = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ba = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ya'ni } ab \neq ba.$$

Demak, ushbu haqiqiy assotsiativ algebra kommutativ emas. Bundan tashqari, algebra A involyutiv ham emas, ya'ni

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin A.$$

Teorema 7. Quyidagi to'plam

$$A = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbf{R} \right\}$$

matritsalar ustida bajariladigan amallarga nisbatan haqiqiy kommutativ assotsiativ algebra bo'ladi.

Isbot. Ravshanki

$$\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}.$$

Quyidagi algebraik amallarga nisbatan A vektor fazo bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in A,$$

ixtiyoriy $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \in A$, $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun, va ixtiyoriy $\lambda \in \mathbf{R}$ son uchun

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & \lambda a \end{pmatrix} \in A$$

va

$$\lambda \left(\mu \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right) = \lambda \left(\begin{pmatrix} \mu a & \mu b \\ -\mu b & \mu a \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\mu a & \lambda\mu b \\ -\lambda\mu b & \lambda\mu a \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Umuman, har qanday $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ -b_1 a_2 - a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ -(a_1 b_2 + b_1 a_2) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} \in A.$$

Demak, A to'plam vektor fazoning algebraik amallariga va matritsalarini ko'paytirish amaliga nisbatan yopiq. A vektor fazoda matritsalarini ko'paytirish amalining assotsiativligi ushbu ko'paytirish amalining butun $M_2(\mathbf{R})$ algebrada assotsiativligidan kelib chiqadi. Demak, A yuqorida kiritilgan amallarga nisbatan haqiqiy assotsiativ algebra bo'ladi.

Algebra A kommutativdir. Haqiqatan ham, har qanday $a = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \in A,$

$b = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in A$ elementlar uchun

$$ab = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ -b_1 a_2 - a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ -(a_1 b_2 + b_1 a_2) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_2 a_1 - b_2 b_1 & b_2 a_1 + a_2 b_1 \\ -(b_2 a_1 + a_2 b_1) & a_2 a_1 - b_2 b_1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = ba,$$

ya'ni $ab=ba$. Isbot tugadi. $\square$

Endi $\mathbf{C}$ kompleks sonlar maydoni ustida matritsalar algebralarini olamiz.

Teorema 8. Deylik $\mathbf{C}$ — kompleks sonlar maydoni, $\mathbf{R}$ — haqiqiy sonlar maydoni bo'lsin. U holda,

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} + i\mathbf{R}$$

va $\mathbf{C}$ maydon $\mathbf{R}$ ustida ikki o'lchovli haqiqiy kommutativ assotsiativ algebra va $\mathbf{R}$ maydon $\mathbf{C}$ algebraning qism algebrasi bo'ladi.

Isbot. Kompleks sonlar maydoni haqiqiy sonlar maydoniga nisbatan ikki o'lchovli vektor fazoni tashkil qiladi. Masalan, 1, i sonlar bu vektor fazoning bazisini tashkil qiladi. 8 Teorema kompleks sonlarning va haqiqiy sonlarning xossalariidan kelib chiqadi. $\square$

Ma'lumki kompleks sonlar maydoni ustida 2×2 – o'lchovli matritsalar to'plami $M_2(\mathbf{C})$, ya'ni

$$M_2(\mathbf{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a + ie & b + if \\ c + ig & d + ih \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

4 o'lchovli kompleks assotsiativ involyutiv algebradir. Bu algebra uchun quyidagi o'rinli.

Teorema 9. 1) $M_2(\mathbf{C})$ algebra $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar maydoni ustida 8 o'lchovli haqiqiy assotsiativ algebra bo'ladi.

2) Deylik $M_2(\mathbf{R})$ — $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar maydoni ustida 2×2 – o'lchovli matritsalar haqiqiy assotsiativ algebrasi bo'lsin, ya'ni

$$M_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}.$$

U holda

$$M_2(\mathbf{C}) = M_2(\mathbf{R}) + iM_2(\mathbf{R}).$$

Isbot. 1) Quyidagi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

matritsalar $M_2(\mathbf{C})$ vektor fazosining bazisi bo'lib xizmat qiladi. Haqiqatan ham, $M_2(\mathbf{C})$ vektor fazosining ixtiyoriy

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ p + iq & g + ih \end{pmatrix}, a, b, c, d, p, q, g, h \in \mathbf{R},$$

matritsasi (1) sistema matritsalarini orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ p + iq & g + ih \end{pmatrix} = \\ = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Bundan tashqari (1) sistema chiziqli erkli. Haqiqatan ham, deylik ixtiyoriy $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$ haqiqiy sonlar uchun

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \lambda_5 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \lambda_7 \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_8 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ + \lambda_5 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \lambda_7 \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_8 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \lambda_1 + i\lambda_5 & \lambda_3 + i\lambda_7 \\ \lambda_4 + i\lambda_8 & \lambda_2 + i\lambda_6 \end{pmatrix} = 0.$$

Bundan quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz

$$\lambda_1 + i\lambda_5 = 0, \lambda_3 + i\lambda_7 = 0,$$

$$\lambda_4 + i\lambda_8 = 0, \lambda_2 + i\lambda_6 = 0.$$

Kompleks sonlar uchun har doim

$$a + ib = 0, a, b \in \mathbf{R} \Leftrightarrow a = 0, b = 0$$

bo'lgani uchun quyidagiga ekamiz

$$\lambda_1 = \lambda_5 = 0, \lambda_3 = \lambda_7 = 0,$$

$$\lambda_4 = \lambda_8 = 0, \lambda_2 = \lambda_6 = 0.$$

Bundan (1) sistemaning chiziqli erkli ekanligi kelib chiqadi. Demak, (1) sistema $M_2(\mathbf{C})$ vektor fazosining bazisi va $M_2(\mathbf{C})$ vektor fazosi 8 o'lchovli. Shunday qilib $M_2(\mathbf{C})$ to'plam $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar maydoni ustida 8 o'lchovli haqiqiy vektor fazosidir. $M_2(\mathbf{C})$ matritsalarini ko'paytirish amaliga nisbatan algebra bo'lgani uchun u haqiqiy assotsiativ algebra bo'ladi.

2) Ravshanki $M_2(\mathbf{R}) \subset M_2(\mathbf{C})$ va $i \cdot M_2(\mathbf{R}) \subset M_2(\mathbf{C})$, bu erda

$$i \cdot M_2(\mathbf{R}) = \left\{ i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}.$$

Shuning uchun

$$M_2(\mathbf{R}) + iM_2(\mathbf{R}) \subseteq M_2(\mathbf{C}).$$

Shu bilan birga $M_2(\mathbf{C})$ algebraning ixtiyoriy

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ p + iq & g + ih \end{pmatrix}, a, b, c, d, p, q, g, h \in \mathbf{R},$$

Matritsasi uchun

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ p + iq & g + ih \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & c \\ p & g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ib & id \\ iq & ih \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ p & g \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b & d \\ q & h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bundan

$$M_2(\mathbf{C}) \subseteq M_2(\mathbf{R}) + iM_2(\mathbf{R}).$$

Demak, $M_2(\mathbf{C}) = M_2(\mathbf{R}) + iM_2(\mathbf{R})$. $\square$

Natija 10. $M_2(\mathbf{C})$ va $M_2(\mathbf{R})$ algebralar uchun quyidagilar o'rinli

$$M_2(\mathbf{R}) \cap iM_2(\mathbf{R}) = \{0\}, M_2(\mathbf{C}) = iM_2(\mathbf{C}).$$

Isbot. Deylik har qanday $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}$, $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}$ elementlar uchun

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ib_1 & ib_2 \\ ib_3 & ib_4 \end{pmatrix},$$

va $a_k = ib_k$, $k=1,2,3,4$. Bundan $a_k = b_k = 0$, $k=1,2,3,4$. Demak, $M_2(\mathbf{R}) \cap iM_2(\mathbf{R}) = \{0\}$.

Deylik,

$$\begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ p + iq & g + ih \end{pmatrix}, a, b, c, d, p, q, g, h \in \mathbf{R},$$

$M_2(\mathbf{C})$ algebraning ixtiyoriy elementi bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ p + iq & g + ih \end{pmatrix} &= i \cdot \begin{pmatrix} -ia + b & -ic + d \\ -ip + q & -ig + h \end{pmatrix} = \\ &= i \cdot \begin{pmatrix} b - ia & d - ic \\ q - ip & h - ig \end{pmatrix} \in i \cdot M_2(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

Demak, $M_2(\mathbf{C}) \subseteq iM_2(\mathbf{C})$. Shu bilan birga, deylik,

$$i \cdot \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ p + iq & g + ih \end{pmatrix}, a, b, c, d, p, q, g, h \in \mathbf{R},$$

$i \cdot M_2(\mathbf{C})$ to'plamning ixtiyoriy elementi bo'lsin. U holda

$$\begin{aligned} i \cdot \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ p + iq & g + ih \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ia + iib & ic + iid \\ ip + iiq & ig + iih \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -b + ia & -d + ic \\ -q + ip & -h + ig \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

Demak, $iM_2(\mathbf{C}) \subseteq M_2(\mathbf{C})$. Bundan $M_2(\mathbf{C}) = iM_2(\mathbf{C})$. $\square$

Teorema I. 1) $\mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ to'plamlar

$M_2(\mathbf{R})$ algebraning eng kichik haqiqiy kommutativ assotsiativ algebralaridir.

2) $\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R} \}, \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R} \}$ to'plamlar

$M_2(\mathbf{R})$ algebraning $M_2(\mathbf{R})$ dan farqli eng katta haqiqiy kommutativ assotsiativ algebralaridir.

2.2- § Matritsalar assotsiativ algebralari

Masala. Kompleks sonlar ustida $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebrasi $M_n(\mathbb{C})$ va uning qism algebralarining vektor fazo sifatidagi o'lchamlarini aniqlash. Alohida bazislarini topish va xossalarini aniqlash.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$aAa = \{axa: x \in A\}, \quad aAb = \{axb: x \in A\}.$$

Ta'rif. Agar assotsiativ algebraning e elementi $e^2 = e$ shartga qanoatlantirsa, u holda e element idempotent deyiladi.

Agar assotsiativ involyutiv algebraning e idempotenti $e^* = e$ shartga qanoatlantirsa, u holda e idempotent proektor deyiladi.

Har qanday assotsiativ algebra uchun Albertning quyidagi teoremasi o'rinli.

Teorema. (Albert) Deylik A — assotsiativ algebra bo'lsin, e — A algebraning proektori va algebra A birlik elementga ega bo'lsin. U holda algebra A quyidagi to'g'ri yig'indiga yoyiladi.

$$A = eAe \oplus eA(1-e) \oplus (1-e)Ae \oplus (1-e)A(1-e).$$

Bu erda $\oplus$ — chiziqli vektor fazolarning to'g'ri yig'idisidir, bu to'g'ri yig'indi qo'shiluvchilari Pirs komponentlari deb ataladi. Bunda

$$eAe = \{x \in A: ex = x, xe = x\},$$

$$eA(1-e) = \{x \in A: ex = x, x(1-e) = x\},$$

$$(1-e)Ae = \{x \in A: xe = x, (1-e)x = x\},$$

$$(1-e)A(1-e) = \{x \in A: ex = 0, xe = 0\}$$

va $x \in A$ element uchun

$$x = exe + ex(1-e) + (1-e)xe + (1-e)x(1-e).$$

Pirs komponentlari uchun quyidagi ko'paytirish jadvali o'rinli:

$$eAe \cdot eAe \subseteq eAe, eAe \cdot (1-e)Ae = \{0\},$$

$$eAe \cdot eA(1-e) \subseteq eA(1-e), eA(1-e) \cdot eA(1-e) = \{0\},$$

$$eA(1-e) \cdot (1-e)Ae \subseteq eAe, (1-e)Ae \cdot (1-e)Ae = \{0\},$$

$$(1-e)Ae \cdot eA(1-e) \subseteq (1-e)A(1-e), (1-e)A(1-e) \cdot (1-e)A(1-e) \subseteq (1-e)A(1-e).$$

Misol. $M_2(\mathbf{C})$ assotsiativ algebrani olaylik. Bu assotsiativ algebra faktor bo'ladi, ya'ni uning markazi — barcha elementlar bilan kommutativ bo'lgan elementlari to'plami kompleks sonlar maydoniga nisbatan bir o'lchovli vektor fazodir. Bu faktorning markazi quyidagi ko'rinishga ega.

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda : \lambda \in \mathbf{C} \right\} =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C}$$

YAngi markaz Z bir o'lchovli vektor fazo va demak, $Z \cong \mathbf{C}$. Ushbu assotsiativ algebraning maksimal kommutativ qism algebra misol qilib quyidagilarni olish mumkin:

$$\begin{aligned} & \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbf{C} \right\}, \\ & \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbf{C} \right\} \end{aligned}$$

va x. k. Umuman olganda, ixtiyoriy ortogonal minimal proektorlar $p, q \in M_2(\mathbf{C})$ uchun $p + q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bo'ladi va quyidagi qism algebra

$$\mathbf{C}p + \mathbf{C}q := \{ \lambda p + \mu q : \lambda, \mu \in \mathbf{C} \}$$

ham maksimal kommutativ qism algebra bo'ladi. Xar qanday $M_2(\mathbf{C})$ algebraning maksimal kommutativ qism algebrasi yuqoridagidek ko'rinishda bo'ladi. Matritsa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ proektordir, ya'ni $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. U holda

Albert teoremasiga ko'ra $M_2(\mathbf{R})$ algebra quyidagi to'g'ri yig'indiga yoyiladi:

$$M_2(\mathbf{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{C} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C}.$$

Haqiqatan ham ixtiyoriy $x \in M_2(\mathbf{C})$ uchun

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_{11} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_{12} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_{21} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_{22}$$

tengliklar o'rinlidir.

Endi Albert teoremasini bir nechta ortogonal proektorlar uchun umumlashtiramiz.

Teorema. A — birlik elementli assotsiativ algebra bo'lsin. Faraz qilaylik $p_1, p_2, \dots, p_n$ — A algebraning yig'indisi 1 ga teng ortogonal proektorlari bo'lsin. Deylik $A_{ij} = p_i A p_j$ bo'lsin. U holda quyidagi yoyilma o'rinli $A = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} A_{ij}$. Bundan tashqari quyidagi ko'paytirish jadvali o'rinli

$$A_{ij} \cdot A_{kl} = \{0\}, \text{ agar } j \neq k \text{ bo'lsa,}$$

$$A_{ij} \cdot A_{jk} = A_{ik}, \text{ ixtiyoriy } i, j, k \text{ indekslar uchun.}$$

Misol. Deylik $M_n(\mathbf{C})$ — $\mathbf{C}$ maydon ustida $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebrasi bo'lsin. Quyidagi belgilashni kiritamiz

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

va, agar ixtiyoriy $k, l = 1, 2, \dots, n$ indekslar uchun $k \neq i$ yoki $l \neq j$ bo'lsa, u holda $a_{kl} = 0$, aks holda, ya'ni, agar $k = i$ va $l = j$ bo'lsa, u holda $a_{ij} = 1$.

U holda $p_i = e_{ii}$, $i = 1, 2, \dots, n$ — proektorlar, va $i, j = 1, 2, \dots, n$ indekslar uchun

$$A_{ij} = e_{ij} \mathbf{C} = \{\lambda e_{ij}; \lambda \in \mathbf{C}\}$$

to'plamlar $A = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} A_{ij}$ tenglikni qanoatlantiradi. Bundan tashqari ular uchun

$$A_{ij} \cdot A_{kl} = \{0\}, \text{ agar } j \neq k \text{ bo'lsa,}$$

$$A_{ij} \cdot A_{jk} = A_{ik}, \text{ ixtiyoriy } i, j, k \text{ indekslar uchun,}$$

ko'paytirish qoidalarini o'rinli.

1 – Teorema. 1) Har qanday i uchun $M_n(\mathbf{C})$ algebraning e_{ii} elementi o'z – o'ziga qo'shma bo'lgan minimal idempotentdir, ya'ni $e_{ii} M_n(\mathbf{C}) e_{ii} = \mathbf{C} e_{ii}$, bu erda $e_{ii} M_n(\mathbf{C}) e_{ii} = \{ e_{ii} a e_{ii}; a \in M_n(\mathbf{C}) \}$.

2) $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}$ idempotentlar o'zaro juft – jufti bilan ortogonaldir va $\sum_{i=1}^n e_{ii} = \mathbf{1}$, bu erda $\mathbf{1}$ — $M_n(\mathbf{C})$ algebraning birlik elementi.

3) $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}$ idempotentlar o'zaro chiziqli bog'liqsiz.

Isbot. 1) Ixtiyoriy quyidagi ko'rinishdagi $a \in M_n(\mathbf{C})$ matritsani olamiz:

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

U holda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shunga o'xshash quyidagiga ega bo'lamiz

$$e_{ii}ae_{ii}=a_{ii}e_{ii}, \quad (1)$$

ixtiyoriy i indeks uchun. Bu erda $a_{ii}e_{ii}$ sonni matritsaga ko'paytmasini bildiradi. Tenglik (1) $M_n(\mathbf{C})$ algebradan olingan ixtiyoriy matritsa uchun o'rinli bo'lgani uchun

$$e_{ii}M_n(\mathbf{C})e_{ii}=\{a_{ii}e_{ii}: a \in M_n(\mathbf{C})\}.$$

Matritsalarini ko'paytirish qoidasiga ko'ra

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

va, xuddi shunday

$$e_{ii}e_{ii}=e_{ii}, \quad e_{ii}^*=e_{ii} \text{ ixtiyoriy } i \text{ indeks uchun.}$$

(1) ning isboti yakunlandi.

2) Ma'lumki $M_n(\mathbf{C})$ algebrada quyidagi matritsa birlik element xisoblanadi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Shuning uchun,

$$e_{11}+e_{22}+\dots+e_{nn}=\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

tenglik 2) shartini qanoatlantiradi, ya'ni $e_{11}+e_{22}+\dots+e_{nn}=\mathbf{1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

va

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hamda shunga o'xshash, ixtiyoriy n natural son uchun

$$e_{ii}e_{jj}=0, \text{ ixtiyoriy } i \neq j \text{ indekslar uchun,}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. 2) ning isboti yakunlandi.

3) Faraz qilaylik ixtiyoriy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kompleks sonlar uchun

$$\lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22} + \dots + \lambda_n e_{nn} = 0 \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'lsin, bu erda (2) tenglikning o'ng tomonida turgan 0 barcha komponentlari nollardan iborat $n \times n$ - o'lchovli matritsani bildiradi. U holda quyidagiga ega bo'lamiz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ushbu matritsalar tengligidan ko'rinadiki $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Demak, $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}$ idempotentlar o'zaro chiziqli bog'liqsiz. 3) isbotlandi.

2 – Teorema. $M_n(\mathbb{C})$ algebrada $\{e_{ij}\}_{ij=1\dots n}$ to'plam quyidagi xossalarga ega:

- 1) $e_{11}+e_{22}+\dots+e_{nn}=\mathbf{1}$,
- 2) $e_{ij} \cdot e_{kl}=0$ agar $j \neq k$,
- 3) $e_{ij} \cdot e_{jk}=e_{ik}$ ixtiyoriy i, j, k indekslar uchun,

4) . $e_{ij}^* = e_{ji}$ ixtiyoriy i va j indekslar uchun.

Isbot. Tenglik 1) yuqorida isbotlandi.

2) va 3) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

va

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ya'ni

$$e_{12}e_{31}=0, e_{12}e_{32}=0, e_{12}e_{33}=0,$$

hamda shunga o'xshash, ixtiyoriy n natural son uchun, agar

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

i - qatori va j - ustunining kesishmasida 1 va qolgan joylarida 0 turgan $n \times n$ - o'lchovli matritsa va

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

j - qatori va k - ustunining kesishmasida 1 va qolgan joylarida 0 turgan $n \times n$ - o'lchovli matritsa bo'lsa, bu matritsalarining birinchisining i - qatorini ikkinchi matritsaning k - ustunga ko'paytirganda natija 1 ga teng va qolgan hollarda 0 ga teng bo'ladi. Boshqacha qilib yozsak bu quyidagi ko'rinishni oladi

$$e_{ij}e_{jk}=e_{ik}, \text{ ixtiyoriy } i, j, k \text{ indekslar uchun.}$$

Agar birinchi matritsaning i - qatori va k – ustunining kesishmasida 1 va qolgan joylarida 0 turgan bo'lsa va ikkinchi matritsaning j - qatori va l – ustunining kesishmasida 1 va qolgan joylarida 0 turgan va $k \neq j$ bo'lsa, u holda yuqoridan ko'rinadiki ularning ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Boshqacha qilib yozsak bu quyidagi ko'rinishni oladi

$$e_{ik}e_{jl}=0.$$

2) va 3) larning isboti yakunlandi.

Yuqorida kiritilganidek (3) matritsani belgilashda e_{ij} dan foydalanamiz. (3) matritsani qo'shmasini topish uchun avval bu matritsani transponirlash kerak so'ngra matritsa elementlarining qo'shmasini xisoblash kerak. Ravshanki (3) matritsa elementlarining barchasining qo'shmasi yana o'zlariga teng. Shuning uchun (3) matritsa qo'shmasi uning transponirlaganda xosil bo'ladigan matritsaga teng. Bunda transponirlangan matritsa (3) matritsa qatorlarini uning mos sonli ustunlariga almashtirganda hosil bo'ladi. Demak $e_{ij}^*=e_{ji}$ ixtiyoriy i va j indekslar uchun. 4) isbotlandi. $\square$

Ta'rif. $M_n(\mathbb{C})$ algebraning 2 – Teoremaning shartlariga qanoatlantiruvchi $\{e_{ij}\}_{ij=1\dots n}$ to'plami shu algebraning *birlik matritsalar sistemasi* deb ataladi.

3 – Teorema. Kompleks sonlar ustida $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebrasining vektor fazosi sifatidagi o'lchami n^2 ga teng.

Isbot. $M_n(\mathbb{C})$ algebrada $\{e_{ij}\}_{ij=1\dots n}$ to'plamni olamiz. Faraz qilaylik ixtiyoriy $\{\lambda_{ij}\}_{ij=1\dots n}$ kompleks sonlar uchun

$$\sum_{ij=1\dots n} \lambda_{ij}e_{ij}=0 \quad (4)$$

tenglik o'rinli bo'lsin, bu erda (4) tenglikning o'ng tomonida turgan 0 barcha komponentlari nollardan iborat $n \times n$ - o'lchovli matritsani bildiradi. U holda quyidagiga ega bo'lamiz

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \cdots & \lambda_{1n-1} & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \cdots & \lambda_{2n-1} & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-11} & \lambda_{n-12} & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1n-1} & \lambda_{n-1n} \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \cdots & \lambda_{nn-1} & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ushbu matritsalar tengligidan ko'rinadiki

Ushbu matritsalar tengligidan ko'rinadiki ixtiyoriy i, j indekslar uchun $\lambda_{ij}=0$. Demak, $\{e_{ij}\}_{ij=1\dots n}$ — chiziqli bog'liqsiz to'plam. Demak, $M_n(\mathbf{C})$ algebra o'lchami n^2 sonda kichik emas. Shu bilan birga, $M_n(\mathbf{C})$ algebraning ixtiyoriy a elementi — matritsasi $\{e_{ij}\}_{ij=1\dots n}$ to'plam elementlari orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni biron — bir $\{a_{ij}\}_{ij=1\dots n}$ kompleks sonlar to'plami uchun

$$a = \sum_{ij=1\dots n} a_{ij}e_{ij}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak kompleks sonlar ustida $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebrasi $M_n(\mathbf{C})$ ning vektor fazosi sifatidagi o'lchami n^2 ga teng. $\square$

4 – Teorema. Quyidagi matritsalar algebralari to'g'ri yig'indisi berilgan bo'lsin

$$M_{k(1)}(\mathbf{C}) \oplus M_{k(2)}(\mathbf{C}) \oplus \dots \oplus M_{k(m)}(\mathbf{C}).$$

U holda, bu to'g'ri yig'indi algebra tashkil qiladi va bu algebraning o'lchami quyidagi yig'indiga teng:

$$k(1)^2 + k(2)^2 + \dots + k(m)^2.$$

Isbot. Deylik $a_i \in M_{k(i)}(\mathbf{C})$, $i=1, \dots, m$ ixtiyoriy elementlar bo'lsin. U holda, agar

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa. U holda, ravshanki, $a_i=0$, $i=1, \dots, m$, o'rinli bo'ladi. Shuning uchun, agar $a_i=0$, $i=1, \dots, m$, elementlardan birontasi noldan farqli bo'lib, ixtiyoriy $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kompleks sonlar uchun

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \quad (5)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, bu erda (5) tenglikning o'ng tomonida turgan 0 barcha komponentlari nollardan iborat matritsalarining to'g'ri yig'indisini bildiradi, u

holda (5) tenglikdan $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=0$ hosil bo'ladi. Bundan $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ — chiziqli bog'liqsiz to'plam.

3 – Teoremaga ko'ra har bir $i=1, 2, \dots, m$ uchun $M_{k(i)}(\mathbf{C})$ to'g'ri qo'shiluvchi, qism algebra o'lchami $k(i)^2$ ga teng. Shuning uchun va $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ to'plam, ixtiyoriy $a_i \in M_{k(i)}(\mathbf{C})$, $i=1, \dots, m$ noldan farqli elementlar uchun, chiziqli bog'liqsiz bo'lgani uchun

$$M_{k(1)}(\mathbf{C}) \oplus M_{k(2)}(\mathbf{C}) \oplus \dots \oplus M_{k(m)}(\mathbf{C}) \quad (6)$$

algebraning o'lchami $k(1)^2 + k(2)^2 + \dots + k(m)^2$ yig'indiga teng. Haqiqatan ham, (6) algebrani $M_k(\mathbf{C})$ algebraning qism algebrasi sifatida qarash mumkin, bu erda $k=k(1)+k(2)+\dots+k(m)$. Chunki quyidagi moslik algebra xossalarini saqlab qoladi

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_m \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_m \end{pmatrix}, \quad (7)$$

bu erda matritsa $k \times k$ o'lchovli bo'lib, $a_i \in M_{k(i)}(\mathbf{C})$, $i=1, \dots, m$ ixtiyoriy mos o'lchamli matritsalar. Matritsaning diogonalidagi bloklarda $a_1, a_2, \dots, a_m$ matritsalar tartib bilan joylashgan. Qolgan bloklarda barcha elementlari nollardan iborat matritsalar joylashgan. Deylik, $i=1, \dots, m$ uchun $\{e(k(i))_{nl}\}_{nl=1 \dots k(i)}$ — $M_{k(i)}(\mathbf{C})$ algebraning birlik matritsalar sistemasi bo'lsin va

$$\sum_{i=1 \dots m} \sum_{nl=1 \dots k(i)} \lambda(k(i))_{nl} e(k(i))_{nl} = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsin, bu erda ixtiyoriy i va ixtiyoriy n, l indekslar uchun $\lambda(k(i))_{nl} \in \mathbf{C}$. U holda (7) moslikka ko'ra ixtiyoriy i va ixtiyoriy n, l indekslar uchun

$$\lambda(k(i))_{nl} = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\cup_{i=1 \dots m} \{e(k(i))_{nl}\}_{nl=1 \dots k(i)}$$

to'plam chiziqli bog'liqsizdir va (6) algebraning o'lchami k dan kam emas. Shu bilan birga, (6) algebraning ixtiyoriy a elementi – matritsasi

$$\cup_{i=1 \dots m} \{a(k(i))_{nl}\}_{nl=1 \dots k(i)}$$

to'plam elementlari orqali chiziqli ifodalanadi, ya'ni biron – bir

$$\cup_{i=1 \dots m} \{a(k(i))_{nl}\}_{nl=1 \dots k(i)}$$

kompleks sonlar to'plami uchun

$$a = \sum_{i=1 \dots m} \sum_{n=1 \dots k(i)} a(k(i))_{nl} e(k(i))_{nl}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak kompleks sonlar ustida (6) algebraning vektor fazosi sifatidagi o'lchami $k(1)^2 + k(2)^2 + \dots + k(m)^2$ ga teng. $\square$

Quyidagi teoremaga ko'ra 5 – paragraf boshida qo'yilgan masala hal bo'ldi deb xisoblash mumkin.

Teorema. Deylik $M_n(\mathbf{C})$ — kompleks sonlar ustida $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebrasi va A — uning assotsiativ involyutiv qism algebrasi bo'lsin. U holda shunday $k(1), k(2), \dots, k(m)$ natural sonlar mavjudki

$$A \cong M_{k(1)}(\mathbf{C}) \oplus M_{k(2)}(\mathbf{C}) \oplus \dots \oplus M_{k(m)}(\mathbf{C})$$

izomorfizm o'rinli bo'ladi. Bunda $k = k(1) + k(2) + \dots + k(m) \leq n$.

Xulosa

1. Assotsiativ involyutiv algebralar nazariyasi hozirgi paytda etarlicha rivojlangan.

2. Haqiqiy assotsiativ involyutiv algebralarni harakterlaydigan asosiy misollar bu ixtiyoriy natural son n uchun haqiqiy sonlar maydoni yoki $\mathbf{H}$ kvaternionlar algebrasi ustida aniqlangan $n \times n$ - o'lchovli barcha matritsalar algebralaridir.

3. $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar maydoni, $\mathbf{C}$ kompleks sonlar maydoni va $\mathbf{H}$ kvaternionlar algebrasi ustida aniqlangan 2×2 - o'lchovli barcha matritsalar algebralarida involyutiv bo'lmagan minimal haqiqiy assotsiativ qism algebralar mavjud.

4. $\mathbf{R}$ haqiqiy sonlar maydoni, $\mathbf{C}$ kompleks sonlar maydoni va $\mathbf{H}$ kvaternionlar algebrasi ustida aniqlangan 2×2 - o'lchovli barcha matritsalar algebralarida involyutiv bo'lmagan maksimal haqiqiy assotsiativ qism algebralar mavjud.

5. $M_n(\mathbf{C})$ algebraning yig'indisi birga teng bo'lgan minimal proektorlari bo'yicha qurilgan matritsali birliklar sistemasi uning bazisi vazifasini o'taydi va $M_n(\mathbf{C})$ algebraning o'lchami ularning soniga teng.

6. $M_n(\mathbf{C})$ algebraning qism – algebrasi o'lchami uning qism – algebralarning to'g'ri yig'indisi ko'rinishini tashkil qiluvchi matritsalar algebralarining o'lchamlarining yig'indisiga tengdir.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Van-der-Varden B.L. «Algebra» M. 1976 g.
2. Obshaya algebra. «Nauka». Pod red. L.A.Skornyakova. Tom 1. 1990. 591 str.
3. Kurosh A.G. «Leksii po obshchey algebre» M. 1973 g.
4. Kostrikin A.I. Vvedenie v algebru. Moskva, "Nauka" 1994.
5. Sbornik zadach po algebre. Pod. red. A.I.Kostrikina. "Nauka" 1987
6. P.Xalmosh «Konechnomernye vektornye prostranstva», M., IL, 1968.
7. T.A.Sarimsaqov «Funksional analiz kursi» Toshkent. O'qituvchi. 1980
8. J.Diksme. S^* -algebry i ix predstavleniya. «Nauka», 1974
9. Xersteyn I. «Nekommutativnye koltsa» M.: Mir. 1972 g.
10. Jevlakov K.A. «Koltsa blizkie k assotsiativnym» M, 1978 g
11. Kon P. Svobodnye koltsa i ix svyazi. — M.: Mir, 1975.
12. Maltsev A.I. Osnovy lineynoy algebry. — M.: Nauka, 1970.
13. Djekobson N. Teoriya kolets. — M.: IL, 1947.
14. Djekobson N. Stroenie kolets. — M.: IL, 1961.
15. TSorn M. Alternativkörper und quadratische Systeme. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1933, 9, S. 395.
16. Cartan E. Thèse. — 1894.
17. Weyl H. Darstellung halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformation, I — III. — Math. Z., 1925, 23, S. 271; 1926, 24, S. 328, 789.
18. Li Bing-Ren. Real operator algebras. Institute of Mathematics, Academia Sinica Beijing 100080. China. -2002. -223 p.
19. Li B. Introduction to Operator Algebras. Singapore: World scientific. -1992. -P. 237-256.
20. S.Albeverio, Sh.A.Ayupov, A.X.Abduvaitov. O sovpadenii tipov veshchestvennoy AW^* -algebry i ee kompleksifikatsii. Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya. -2004. -Tom 68. -№ 5.

21. Sarymsakov T.A., Ayupov Sh.A., Xadjiev Dj., Chilin V.I. Uporyadochennyye algebry. Tashkent:Fan. -1983.

22. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza. Moskva, «Nauka», 1976, 543 str.

Resurslar:

1. <http://uch1.tashiit.uz/predmet.php?id=102>
2. <http://uch1.tashiit.uz/doc.php?m=content&id=498>
3. www.ziyonet.uz
4. www.lex.uz
5. www.arxiv.org

