

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY
VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ZAHIRIDDIN MUHAMMAD BOBUR NOMIDAGI

ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI
MATEMATIKA KAFEDRASI

Qo'lyozma xuquqida

SHaripova Navruza Murodjon qizi

“Koshi tengsizligi va uning tadbiqlari”

5130100- matematika yo'nalishi bakalavr

akademik darajasini olish uchun yozilgan

BITIRUV MALAKAVIY ISH

Ish rahbari: dotsent. X. Qo'shaqov.

ANDIJON-2016

MUNDARIJA

Kirish.....	3
-------------	---

I BOB. Koshi tengsizligining isbotlari.

1.1-§. Koshi tengsizligining sodda hollari.....	3
1.2-§. Koshi tengsizligining isbotining birinchi usuli.....	6
1.3-§. Koshi tengsizligining isbotining ikkinchi usuli.....	7
1.4-§. Koshi tengsizligining isbotining uchinchi usuli.....	8
1.5-§. Koshi tengsizligining isbotining to`rtinchi usuli.....	9
1.6-§. Koshi tengsizligining isbotining beshinchi usuli.....	10
1.7-§. Koshi tengsizligining isbotining oltinchi usuli.....	11
1.8-§. Koshi tengsizligining isbotining yettinchi usuli.....	13
1.9-§. Koshi tengsizligining isbotining sakkinchi usuli (deduksiya usuli).....	14
1.10-§. Koshi tengsizligining isbotining to`qqizinchi usuli(deduksiya usuli).....	15
1.11-§. Koshi tengsizligining isbotining o`ninchi usuli.....	17
1.12-§. Koshi tengsizligining isbotining o`n birinchi usuli.....	18

II BOB. Koshi tengsizligining tadbiqlari.

2.1-§. Koshi-Bunyakovskiye tengsizligini isbotlash.....	21
2.2-§. Koshi tengsizligini umumlashtirish.....	22
2.3-§. Yung, Gyolder va Minkovskiye tengsizliklari.....	23
2.4-§. Iensen tengsizligi.....	25
2.5-§. Masalalar yechish namunalari.....	29
Xulosa.....	68
Foydalanilgan adabiyotlar.....	66

Kirish

O'zbekiston Respublikasida ta'lim tizimini takomillashtirish davlat siyosatining ustuvor yo'nalishi deb e'tirof etilishi, ijtimoiy hayotning barcha sohalarida demokratik, insonparvarlik g'oyalarining yetakchi o'rin egallashi ustida olib borilayotgan amaliy harakatlar respublikada uzluksiz ta'lim tizimini jahon standarti darajasiga ko'tarishi uchun zarur shart-sharoit yaratishi lozimligini ko'rsatdi.

“Kadrlar tayyorlash milliy dasturi“ ni tayyorlash jarayonida O'zbekiston Respublikasi prezidenti mutaxassislar bilan uchrashganda Yaponiya va AQSH ta'lim tizimining bugungi ravnaqi, Yaponyaning so'nggi 50 yil davomida eng rivojlangan davlatlar qatoriga qo'shilishining asosiy omili yoshlarda ilm olishga bo'lgan hayotiy jarayoniga xorijiy davlatlardan malakali kadrlarni jalb etilganligi deb ta'kidlagan edi.

Uzluksiz ta'lim tizimi istiqbolini belgilab beruvchi meyoriy xujatlar O'zbekiston Respublikasi “Ta'lim to'g'risida“ gi Qonuni va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi“ talablariga muvofiq ta'lim tizimini takomillashtirish, uni mazmunini boyitish, ta'lim oluvchilarni chuqur bilim olishiga erishish, ular asosida o'quv dasturlari va darsliklarning yangi avlodini yaratish hamda ularni tajribada sinovdan o'tkazish lozim.

Hozirgi paytda taraqqiyotimiz taqdirini ma'naviy jihatdan yetuk kadrlar hal qiladi. Aqliy zakovat, ma'naviy kamolot, insofu-diyonat, muruvvat, mehr-oqibat – bular marifatli, ma'naviyatli insonning fazilatlaridir. Ana shu fazilatlarini yoshlarimizda shakllantirish olimlar, ziyolilar, o'qituvchilar, tarbiyachilar zimmasida bo'lib, bu borada xususan, matematikani o'qitishning o'z o'рни va ahamiyati beqiyosdir.

Xalqimiz orasida “Mingni chala bilgandan birni puxta bil“ degan fikr bor. Xaqiqatdan ham o'qitish jarayonida o'quvchilarimizga ortiqcha yuklamalar qo'ymasdan ular olayotgan bilim, amaliy ko'nikmalarning asosiy mazmuni to'liq idrok etsalar, moxiyatini to'liq va aniq tushunsalar, shu bilim, ko'nikmalar

kelajakda qanday asqotishi qay darajada foyda berishining va xalq xo'jaligida qanday ahamiyatga ega ekanligini aniq tasavvur qilsalargina matematika ta'lim maqsadiga muvofiq amalga oshirilgan bo'ladi.

Buning uchun umumiy o'rta ta'lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari va oliy o'quv yurtlarida matematikani o'qitishda uning amaliy yo'nalishiga e'tiborni kuchaytirish kerak. Ya'ni, uzluksiz ta'limning har bir bosqichida matematikani o'qitishda o'rganilayotgan tushunchalardan qayerda, qachon va qanday qilib foydalanish mumkunligini o'quvchilar ongiga singdirish kerak.

Umumiy o'rta ta'lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari matematika kursining amaliy yo'nalishini kuchaytirish uchun unga amaliy tadbirlarga boy bo'limlarni kiritish va amaliy (tadbiqiy) masalalarni ko'proq o'rganish kerak. Ammo matematikani o'rganish uchun ajratilgan soatlar miqdori unga amaliy tadbirlarga boy bo'limlarni kiritish imkoniyati yo'qligini ko'rsatadi. Bu esa matematika kursining mazmunini yoritishda imkon boricha amaliy (tadbiqiy) masalalardan foydalanish kerakligini taqozo etadi.

Mustaqillik yillarida uzuluksiz ta'lim tizimining muhim bo'g'inlaridan bo'lgan umumiy o'rta ta'lim maktablari bo'g'ini, hamda akademik litsey va kasb-hunar kollejlarni o'z ichiga oluvchi o'rta maxsus kasb-hunar ta'limi bo'g'inlari uchun matematikadan yaratilgan darslik va o'quv qo'llanmalarda tadbiqiy masalalar soni ancha ortdi. Lekin bu masalalarning aksariyati bir yoki ikki xil mazmundan iborat bo'lib, ulardan har xil kasblarga mo'ljallangan kollejlarda to'laqonli foydalanib bo'lmaydi. Shuning uchun ham bugungi kundagi asosiy vazifalardan biri turli xil kasb egalari o'z faoliyatlari davrida duch keladigan vaziyatlarni yorituvchi masalalar tizimini yaratishdan iborat. Ushbu bitiruv malakaviy ishda ana shunday masalalar tizimini yaratishni maqsad qilib olingan bo'lib, u mavzuni **dolzarbligini** anglatadi.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti akademik litsey va kasb-hunar kollejlari matematika kursining amaliy yo'nalishini aniqlash va uni kuchaytirish masalalarini yoritishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining metodologik asosini O'zbekiston Respublikasi Prezidentining mamlakatimiz ta'lim tizimini rivojlantirishga qaratilgan farmonlari, Vazirlar Maxkamasining ta'lim tizimini yanada takomillashtirishga qaratilgan qarorlari, "Ta'lim to'g'risidagi" O'zbekiston Respublikasi qonuni, "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi", umumiy o'rta ta'lim va o'rta maxsus kasb-hunar ta'limi uchun matematikadan DTS tashkil etadi.

Bitiruv malakaviy ishini tayorlashda umumiy o'rta ta'lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun mo'jallangan matematika fani darsliklari va o'quv qo'llanmalari, internetdan olingan ma'lumotlar hamda akademik litsey va kasb-hunar kollejlaridagi matematika darslarini kuzatishdan olingan natijalar, xulosalar asos qilib olinadi.

Bitiruv malakaviy ishidan olingan natijalardan akademik litsey va kasb-hunar kollejlarida matematikani o'qitish jarayonida, o'quvchilar bilan mustaqil ishlarni tashkil qilishda, matematikadan o'quv uslubiy qo'llanmalar va tavsiyalar tayyorlashda hamda iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash jarayonida foydalanish mumkin.

Bitiruv malakaviy ishidan olingan natijalar malakaviy amaliyot va bitiruv oldi amaliyoti davrida to'plangan materiallardan iborat.

Bitiruv malakaviy ishi kirish, ikki bob, to'rt paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

Matematika faning yorqin yulduzi, buyuk fransuz olimi Ogyusten-Lui Koshi 1789 yili asilzodalar oilasida tug'ilgan. 1807 tildan Parijdagi yuqori malakali injenerlarni tayyorlaydigan mashhur Politehnika maktabini tugatdi. 1810 yildanboshlab Sherburgda injener bo'lib ishlagan.

Koshi turi sohalar bilan shug'ullangan: elastiklik nazariyasi, optika, osmon mexanikasi, differensial tenglamalar, geometritra, algebra va sonlar nazariyasi. Ammo Koshi qiziqishlarining asosi matematik analiz bo'lgan. U matematik analiz va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi fanlarining asoschilaridan biridir.

1816 yilda O.Koshi Parij fanlar akademiyasining a'zosi qilib qabul qilingan va Politehnika maktabida professor bo'lib ishlay boshlagan. Bu yerda u o'zining matematik analizdan mashhur ma'ruzalar o'qigan. Bu ma'ruzalar keyinchalik uchta kitob shaklida chop qilingan: «Analiz kursi» (1821 y.), «cheksiz kichiklarni hisoblash ma'ruzalar rezyumesi» (1823 y.), «Analizning geometriyaga tadbiqlari bo'yicha ma'ruzalar» (1826-28 y.) . Oliy matematikada Koshining nomi bilan bog'liq bo'lgan teoremlar va terminlar ancha. Shilardan masalan,

- Qavariq ko'pyoqlar uchun Koshining yagonalik teoremasi,
- Nomanfiy sonlarning o'rta arifmetigi va o'rta geometrigi uchun Koshi tengsizligi,
- Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi,
- ko'phadlar uchun Koshi indeksi,
- determinantlar nazariyasida Bine-Koshi teoremasi,
- gruppalar nazariyasida Koshi teoremasi,
- ichma-ich joylashgan kesmalar uchun Koshi-Kantor prinsipi,
- limitlar nazariyasidagi Koshi kriteriyasi,
- uzluksiz funksiyalar uchun Bolsano-Koshi teoremasi,
- Koshining chekli orttirmalar haqidagi teoremasi,
- sonli qatorlar uchun Koshi alomati,
- sonli qatorlar uchun Koshining integral alomati,
- Koshining integral formulasi,
- Koshi-Grin formulasi,
- Koshi-Adamar formulasi,
- Koshi turidagi integral,
- Koshining chegirmalar haqidagi teoremasi,
- differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi,
- Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremlar,
- bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarning xususiy yechimini topish uchun Koshi usuli,

- gamma-funksiya uchun Koshi formulasi,
- kompleks o'zgaruvchili funksiyalar uchun Koshi-Riman sharti,

matematikada muhim o'rin egallaydi. Nemis matematigi Feliks Kleyn «Matematikaning barcha sohalari bo'yicha erishgan ajoyib yutuqlariga ko'ra uni Gaussning deyarli yonida qo'yish mumkin» deb O.Koshiga yuksak baho berilgan ([19]). Rus matematigi akademik AA.D.Aleksandrov «O.Koshining qavariq ko'pyoqlar uchun yagonalik teoremasini isbotlashdagi fikrlashi – geometriyadagi eng ajoyib fikrlashlarning biridir» degan ([19]). Ogyusten-Lyu Koshi 1857 yilda vafot etgan. U hayoti davomida 789 ta ilmiy ish yozgan, bu ishlar 25 ta yirik jildlarda mujassamlashtirilgan ([19]). Hozirgi kunda, O.Koshining usullari klassik usullarga aylanib ketgan.

I BOB. Koshi tengsizligining isbotlari.

1.1-§. Koshi tengsizligining sodda hollari

Bitiruv malakaviy ishidagi asosiy fikr quyidagi tengsizlikka qaratilgan.

Ixtiyoriy $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ sonlar uchun ushbu

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (1)$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi, bu tengsizlikda tenglik faqat

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

bo`lganda bajariladi.

Boshqacha qilib aytganda, nomanfiy sonlarning o`rta geometrigi ularning o`rta arifmetigidan oshmaydi va tenglik faqat bu sonlar bir-biriga teng bo`lganda bajariladi.

Yuqorida keltirilgan tengsizlik fransuz matematigi Ogyesten-Lyu Koshi tomonidan 1821-yilda isbot qilingan.

Izoh. $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ sonlardan birortasi nolga teng bo`lsa, (1) tengsizlikning chap tomoni nolga aylanib, u ushbu

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0$$

ko`rinish oladi. Bu tengsizlikda tenglik faqat

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

bo`lganda bajariladi. Shuning uchun biz, (1) tengsizlikni isbotlashda $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ deb hisoblaymiz.

$n = 2, n = 3, n = 4$ bo`lgan hollarda Koshi tengsizligi osongina isbot qilinadi.

$n = 2$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. Bu holda (1) tengsizlik

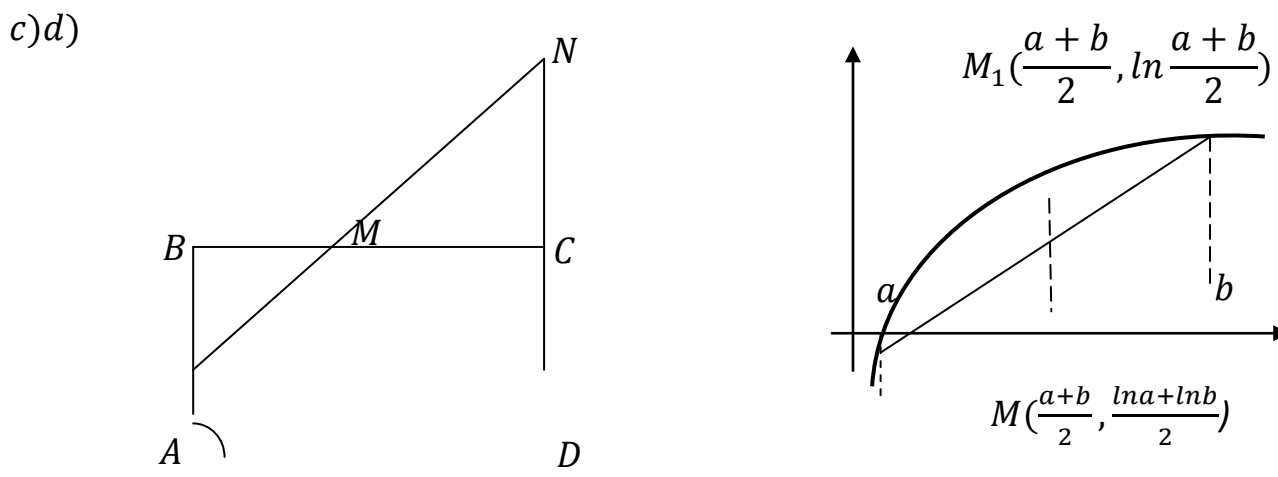
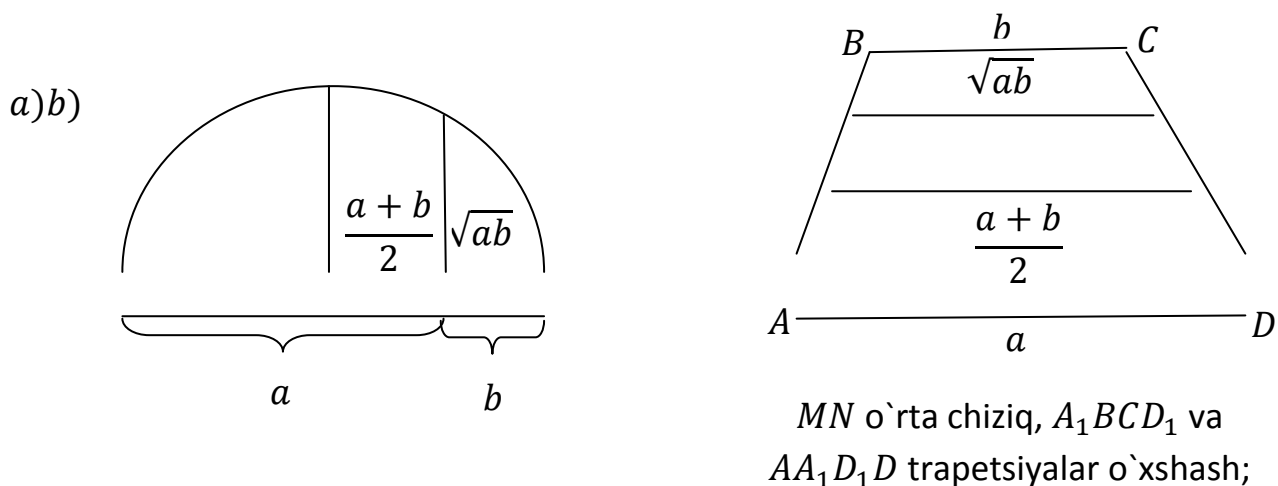
$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi, (2) tengsizlik esa ushbu

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \quad (3)$$

tengsizlikka teng kuchli bo'ladi. (3) tengsizlik o'rinli bo'lishi va tenglik faqat $a_1 = a_2$ bo'lganda bajarilishi ravshan.

$n = 2$ bo'lgan holda Koshi tengsizligi geometrik ma'nolarga ega:



(1-rasm)

Izoh. 1-rasmdagi b) chizma yordamida o`rta garmonik qiymat  $\frac{2ab}{a+b}$  va o`rta kvadratik qiymat $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ larning ham geometrik tasvirini berish mumkin. c) chizmaning g`oyasi asosida  $n = 3$  holda Koshi tengsizligining va Yung tengsizligining geometrik ma`nosini berish mumkin. d) chizma va og`irlik markazi tushunchasi asosida umumiy Koshi tengsizligining geometrik manosi berish mumkin.

$n = 3$ bo`lsin. Bu holda Koshi tengsizligi ushbu

$$\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

ko`rinishda bo`ladi. $a = \sqrt[3]{a_1}, b = \sqrt[3]{a_2}, c = \sqrt[3]{a_3}$ belgilash kiritsak, u

$$3abc \leq a^3 + b^3 + c^3 \quad (4)$$

ko`rinishni oladi, (4) tengsizlikni

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0$$

tarzda yozib olib, chap tomonini ko`paytuvchilarga ajratamiz:

$$(a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc \geq 0,$$

$$(a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) \geq 0,$$

$$(a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) \geq 0,$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - ac - cb) \geq 0,$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \geq 0.$$

Oxirgi tengsizlik o`rinli bo`lishi va tenglik faqat $a = b = c$ bo`lganda bajarilishi ravshan.

$n=4$ bo`ladi. Bu holda Koshi tengsizligi

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \quad (5)$$

tarzda yoziladi. (5) tengsizlik osongina isbot qilinadi:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} &= \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}} \leq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \leq \\ &\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}. \end{aligned}$$

Koshi tengsizligi umumiy holda isbot qilishga keyingi paragraflar bag'ishlangan.

Tengsizlikdan quyidagi muhim natijalar kelib chiqishi yaqqol ko`rinadi:

1-natija. Yig`indisi o`zgarmas bo`lgan nomanfiy sonlar orasida ko`paytmasi eng katta bo`ladigani, bu bir-biriga teng sonlardir.

2-natija. Ko`paytmasi o`zgarmas bo`lgan nomanfiy sonlar orasida yig`indisi eng kichik bo`ladigani, bu bir-biriga teng sonlardir.

Bu natijalar eng katta va eng kichik qiymatlarni topishga doir masalarga ishlatilishi mumkin.

1.2-§. Koshi tengsizligi isbotining birinchi usuli.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo`lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. Shuning uchun $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ deb hisoblaymiz. Ushbu

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}, x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}, \dots, \\ x_n &= \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}, \end{aligned}$$

belgilashdan so`ng quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli bo`ladi: $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ shartni qanoatlashtiruvchi ixtiyoriy $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ sonlar uchun

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \quad (6)$$

bo`ladi va tenglik faqat  $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$  bo`lganda bajariladi.

Oxirgi tasdiqni matematik induksiya usulida isbotlaymiz.

$n = 2$ bo`lganda bajarilishi ravshan (1-§ da ko`rsatilgan). $n = k$ da to`g`ri deb olib, $n = k + 1$ o`lganda ham to`g`ri bo`lishini ko`rsatamiz. Ushbu

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1 \quad (7)$$

tenglikning chap tomonidagi ko`paytuvchilar orasida shunday ikkitasi topiladiki, birinchisi 1 dan katta bo`lmaydi, ikkinchisi 1 dan kichik bo`lmaydi. Agar bu fikr bajarilmasa, (7) tenglik ham bajarilmasligi ravshan. Qulaylik uchun $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$ deb olamiz. U holda

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) \geq 0,$$

$$x_2 - 1 - x_1 x_2 + x_1 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1 + x_1 x_2 \quad (8)$$

bo`ladi. Ushbu

$$x_1 x_2, x_3, x_4, \dots, x_k, x_{k+1}$$

k ta son ko`paytmasi 1 ga teng bo`lgani uchun induksiya faraziga ko`ra

$$x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq k \quad (9)$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi. (8) va (9) dan quyidagi baholash kelib chiqadi:

$$(x_1 + x_2) + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq (1 + x_1 x_2) + x_3 + \dots + x_{k+1} \geq 1 + k.$$

keltirilgan tasdiqning birinchi qismi isbotlandi.

Agar (6) tengsizlikda tenglik bajarilib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar orasida birdan farqlisi bo'lsa, bu sonlar ko'paytmasi1 bo'lgani uchun shunday ikkitasi topiladiki (aytaylik x_1 va x_2), $x_1 < 1, x_2 > 1$ bo'ladi. Unda

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1 x_2,$$

$$n = (x_1 + x_2) + x_3 + \dots + x_n > 1 + x_1 x_2 + \dots + x_n \geq 1 + (n - 1) = n$$

ziddiyat kelib chiqadi. **Tasdiq to'la isbotlandi.**

3-§. Koshi tengsizligi isbotining ikkinchi usuli.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. Shuning uchun $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ deb hisoblaymiz. Ushbu .

$$x_1 = \frac{a_1}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}, x_2 = \frac{a_2}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}$$

belgilashlardan so'ng quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli bo'ladi: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ sonlar uchun

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \leq 1 \quad (10)$$

bo'ladi va tenglik faqat $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$ bo'lganda bajariladi.

Bu fikrni matematik induksiya usulida isbotlaymiz.

$n = 2$ bo'lganda bajarilishi ravshan (1-§ da ko'rsatilgan). $n = k$ da to'g'ri deb olib, $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Ushbu

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k + 1 \quad (11)$$

Tenglikning chap tomonidagi qo'shiluvchilari orasida shunday ikkitasi topiladiki, birinchisi topiladiki, birinchisi 1 dan katta bo'lmaydi va ikkinchisi 1 dan kichik

bo'lmaydi. Agar bu fikr bajarilmasa, (11) tenglik ham bajarilmasligi ravshan. Qulaylik uchun $x_1 \leq 1, x_2 \geq 1$ deb olamiz. U holda

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0$$

$$x_2 - 1 - x_1x_2 + x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 - 1 \geq x_1x_2 \quad (12)$$

bo'ladi. Ushbu

$$(x_1 + x_2 - 1), x_3, \dots, x_k, x_{k+1}$$

k ta son yig'indisi *kgat eng* bo'lishi uchun induksiya faraziga ko'ra

$$(x_1 + x_2 - 1) \cdot x_3 \dots x_k \cdot x_{k+1} \leq 1 \quad (13)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (12) va (13) tengsizliklardan quyidagi baholash kelib chiqadi:

$$(x_1x_2)x_3 \cdot \dots \cdot x_{k+1} \leq (x_1 + x_2 - 1)x_3 \cdot \dots \cdot x_{k+1} \leq 1.$$

Keltirilgan tasdiqning birinchi qismi isbotlandi.

Agar (10) tengsizlikda tenglik bajarilib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar orasida birdan farqlisi bo'lsa, bu sonlar yig'indisi n bo'lgani uchun shunday ikkitasi topiladiki (aytaylik x_1 va x_2), $x_1 < 1, x_2 > 1$ bo'ladi. Bundan

$$x_1 + x_2 - 1 > x_1x_2,$$

$$1 = (x_1x_2)x_3 \dots x_n < (x_1 + x_2 - 1)x_3 \dots x_n \leq 1$$

ziddiyat kelib chiqadi. **Tasdiq to'la isbotlandi.**

4-§. Koshi tengsizligi isbotining uchinchi usuli.

Avvalo $x \geq 0$ bo'lganda ushbu

$$x^n + n - 1 \geq nx$$

Tengsizlik bajarilishini isbotlab olamiz. Bu yerda tenglik faqat $x = 1$ bo'lganda bajariladi. Buning uchun (14) tengsizlikni

$$x^n - 1 - n(x - 1) \geq 0 \quad (14)$$

ko'rinishda yozib olib, chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\begin{aligned} x^n - 1 - n(x - 1) &= (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n(x - 1) = \\ &= (x - 1)[(x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1) + \dots + (x + 1)] = \\ &= (x - 1)^2[(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) + (x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + 1) + \dots + (x + 1) + 1] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

chunki $x \geq 0$. Bu tengsizlikda tenglik bajarilishi uchun $x = 1$ bo'lishi kerak.

(14) tengsizlikda $x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, ($a \geq 0, b > 0$) desak,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + n - 1 &\geq n \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \\ a + (n - 1)b &\geq na^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-1}{n}}, \\ \frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}b &\geq a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{n-1}{n}} \end{aligned} \quad (15)$$

Kelib chiqadi. (15) tengsizlik $b = 0$ bo'lganda ham bajaroladi. (15) tengsizlik $b = 0$ bo'lganda ham bajariladi. (15) tengsizlikda tenglik faqat $a = b$ bo'lganda bajariladi.

Endi esa Koshi tengsizligini matematik induksiya usulida isbotlashga o'tamiz. $n = 2$ bo'lganda bajarilishi ravshan. $n = k$ da to'g'ri deb olib, $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz.

(15) tengsizlik va induksiya faraziga asosan

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k+1} &= \frac{1}{k+1} a_{k+1} + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \\ &\geq a_{k+1}^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \right)^{\frac{k}{k+1}} \geq a_{k+1}^{\frac{1}{k+1}} \left(\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} \right)^{\frac{k}{k+1}} \\ &= \sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}\end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Koshi tengsizligida tenglik bajarilib, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar orasida bir biriga teng bo'lmagankari bor deb faraz qilaylik. Qulaylik uchun

$$a_n \neq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

deb hisoblaymiz. U holda (15) tengsizlikka asosan

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &= \frac{1}{n} a_n + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} > \\ &> a_n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \geq a_n^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}\end{aligned}$$

ziddiyat kelib chiqadi. **Isbot tugadi.**

Izoh. (14) tengsizlikda $x = 1 + \alpha$, ($\alpha \geq -1$) desak,

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

Tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlikda tenglik faqat $\alpha = 0$ bo'lganda bajariladi ($n \geq 2$). Ohirgi tengsizlikka Y. Bernulli tengsizligi deyiladi. (Yakob Bernulli (1654-1705) Svetsariyalik olim).

5-§. Koshi tengsizligi isbotining to'rtinchi usuli.

Matematik induksiya usulida isbotlaymiz. $n = 2$ bo'lganda bajararilishi ravshan. $n = k$ da deb olib, $n = k + 1$ bo'lganda ham to'g'ri o'lishini ko'rsatamiz. Qulaylik uchun

$$a_{k+1} \geq a_1, a_{k+1} \geq a_2, \dots, a_{k+1} \geq a_k$$

deb hisoblaymiz. Ushbu

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

belgilashni kiritib olamiz. U holda

$$A_{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{(k+1)A_k + (a_{k+1} - A_k)}{k+1} = A_k + \frac{a_{k+1} - A_k}{k+1},$$

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = 1 + \frac{a_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k}$$

bo'ladi. Bernulli tengsizligidan

$$\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{a_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k}\right)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot \frac{a_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k} = \frac{a_{k+1}}{A_k}$$

kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlikni ushbu

$$(A_{k+1})^{k+1} = a_{k+1}(A_k)^k$$

tarzda yozish mumkin. Induksiya faraziga ko'ra

$$(A_k)^k \geq a_1 a_2 \dots a_k$$

bo'ladi. Demak,

$$(A_{k+1})^{k+1} \geq a_1 a_2 \dots a_{k+1}$$

o'rinli ekan. Bu yerda tenglik bajarilishi uchun Bernulli tengsizligining xossasiga ko'ra $a_{k+1} = A_k$ bo'lishi kerak. Agar ushbu

$$a_{k+1} \geq a_1, a_{k+1} \geq a_2, \dots, a_{k+1} \geq a_k$$

tengsizliklarning birortasida tenglik bajarilmasa, $a_{k+1} = A_k$ tenglik bajarilmaydi. Demak,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$$

bo`lar ekan. **Isbot tugadi.**

6-§. Koshi tengsizligi isbotining beshinchi usuli.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

U holda

$$\begin{aligned} (n+1)A_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = nA_n + a_{n+1} \\ (G_{n+1})^{n+1} &= a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} = (G_n)^n a_{n+1} \end{aligned} \quad (16)$$

Tengliklar o`rinli bo`ladi. Quyidagi ayirmani o`rib chiqamiz:

$$R = (n+1)(A_{n+1} - G_{n+1}) - n(A_n - G_n).$$

(16) ayniyatlardan ushbu

$$R = a_{n+1} + nG_n - (n+1)^{n+1} \sqrt[n+1]{(G_n)^n a_{n+1}}$$

Tenglik kelib chiqadi. Agar $G_n = x^{n+1}, a_{n+1} = y^{n+1}$ belgilash kiritsak, (17) tenglikdan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\begin{aligned} R &= y^{n+1} + nx^{n+1} - (n+1)x^n y = nx^n(x-y) - y(x^n - y^n) = \\ &= nx^n(x-y) - y(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = \\ &= (x-y)[(x^n - yx^{n-1}) + (x^n - y^2x^{n-2}) + \dots + (x^n - y^n)] = \end{aligned}$$

$$(x - y)^2 [x^{n-1} + x^{n-2}(x + y) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1})] \geq 0.$$

Demak, ushbu

$$(n + 1)(A_{n+1} - G_{n+1}) \geq n(A_n - G_n) \quad (18)$$

Tengsizlik o`rinli bo`lar ekan. $A_2 - G_2 \geq 0$ bo`lganligi uchun (18) tengsizlikdan  $n$  ning ixtiyoriy natural qiymatida  $A_n \geq G_n$  bo`lishi kelib chiqadi. **Isbot tugadi.**

7-§. Koshi tengsizligi isbotining oltinchi usuli.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo`lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. Shuning  $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$  deb hisoblaymiz. Bu ushuli ham induksiya usulidir.  $n = 2$  bo`lganda Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. Koshi tengsizligi $n = k$ da to`g`ri deb olib, $n = k + 1$ uchun isbot qilamiz.

Ushbu

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}, x_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}, \dots, x_{k+1} \\ &= \frac{a_{k+1}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}} \end{aligned}$$

belgilashlardan so`ng, quyidagi fikrni isborlash yetarli bo`ladi: $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{k+1} > 0$ sonlar uchun

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k+1} \leq \frac{1}{(k + 1)^{k+1}}$$

bo`ladi. Induksiya faraziga asosan

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k}$$

bo`ladi. Bundan foydalanib

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k [1 - (x_1 + x_2 + \dots + x_k)] \leq$$

$$\leq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k (1 - k \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k}) = t^k (1 - kt) \quad (19)$$

Baholashni olamiz. Bu yerda

$$t = \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k}$$

belgilash kiritildi.

Ushbu

$$t^k (1 - kt) \leq \frac{1}{(k+1)^{k+1}} \quad (20)$$

tengsizlikni isbot qilamiz. Bu tengsizlikni

$$t^k - kt^{k+1} \leq \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$$

ya'ni

$$(k+1)((k+1)t)^k - k((k+1)t)^{k+1} - 1 \leq 0 \quad (21)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Quyidagi

$$x = (k+1)t$$

belgilash yordamida (21) tengsizlik

$$kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1 \geq 0 \quad (22)$$

tengsizlikka keltiriladi. (22) tengsizlikni isbotlash uchun uning chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\begin{aligned} kx^{k+1} - (k+1)x^k + 1 &= kx^{k+1} - kx^k - x^k + 1 = \\ &= kx^k(x-1) - (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + 1) = \\ &= (x-1)[kx^k - (x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + 1)] = \\ &= (x-1)[(x^k - x^{k-1}) + (x^k - x^{k-2}) + \dots + (x^k - 1)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-1)[(x-1)x^{k-1} + (x^2-1)x^{k-2} + (x^3-1)x^{k-3} + \dots + (x^k-1)] = \\
&= (x-1)^2[x^{k-1} + (k+1)x^{k-2} + (x^2+x+1)x^{k-3} + \dots \\
&\quad + (x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + 1)] \geq 0
\end{aligned}$$

chunki $x > 0$. Bu tengsizlikda tenglik bajarilishi uchun $x = 1$ bo'lishi kerak.

(19) va (20) tengsizliklardan

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} \leq \frac{1}{(k+1)^{k+1}}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Koshi tengsizligida tenglik bajarilib, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar orasida bir-biriga teng bo'lmaganlari bor bo'lsin deb faraz qilalik. U holda

$$x_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, x_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \dots, x_n = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Belgilashlardan so'ng, bu fikr

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{1}{n^n}$$

Bo'lib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar orasida $\frac{1}{n}$ ga teng bo'lmaganlari borligini bildiradi.

Qulaylik uchun $x_n \neq \frac{1}{n}$ deb hisoblasak, $t = \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} \neq \frac{1}{n}$ bo'ladi va bundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^n} &= x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} (1 - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})) \leq \\
&\leq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot (1 - (n-1) \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}}) = t^{n-1} (1 - (n-1)t) \\
&< \frac{1}{n^n}
\end{aligned}$$

ziddiyat kelib chiqadi. **Isbot tugadi.**

8-§. Koshi tengsizligi isbotining yettinchi usuli.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlardan birortasi nolga teng bo'lsa, Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. Shuning $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ deb hisoblaymiz. Bu usuli ham induksiya usulidir. $n = 2$ bo'lganda Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. Koshi tengsizligi $n = k$ da to'g'ri deb olib, $n = k + 1$ uchun isbot qilamiz.

Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}}, x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}}, \dots, x_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}},$$

belgilashlardan so'ng, quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli bo'ladi.
 $x_1 x_2 \dots x_{k+1} = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{k+1} > 0$$

sonlar uchun

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} \geq k + 1$$

bo'ladi. Induksiya faraziga asosan

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k}$$

Bo'ladi. Bundan foydalanib

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} &= (x_1 + x_2 + \dots + x_k) + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_k} \geq \\ &\geq k \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k} + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_k} = kx + \frac{1}{x^k} \end{aligned}$$

Baholashni olamiz. Bu yerda $x = \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k}$ brlgilash kiritildi.

Ushbu

$$kx + \frac{1}{x^k} \geq k + 1, (x > 0)$$

tengsizlikni isbot qilamiz. Bu tengsizlikni

$$kx^k + 1 \geq (k + 1)x^k,$$

ya'ni

$$kx^k - (k + 1)x^k + 1 \geq 0 \quad (23)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (23) tengsizlik $x > 0$ bo'lganda o'rinli bo'lishi, oldingi paragrafda isbot qilingan edi. Bunda tenglik faqat $x = 1$ bo'lganda bajariladi.

Xozirgi isbot qilingan tengsizlikdan foydalansak,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} \geq k + 1$$

kelib chiqadi.

Koshi tengsizligida tenglik bajarilib, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar orasida bir-biriga teng bo'lmaganlari bor bo'lsin deb faraz qilaylik. U holda

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}, x_2 = \frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}},$$

belgilashlardan so'ng, bu fikr

$$x_1 x_2 \dots x_n = 1, x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$$

bo'lib, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar orasida 1 ga teng bo'lmaganlari borligini bildiradi. Qulatlilik uchun $x_n \neq 1$ deb hisoblasak, $x = \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} \neq 1$ bo'ladi va bundan

$$\begin{aligned} n &= x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} \geq \\ &\geq (n-1) \sqrt[n-1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}} = (n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}} > n, (x \neq 1) \end{aligned}$$

ziddiyat kelib chiqadi. **Isbot tugadi.**

9-§. Koshi tengsizligi isbotining sakkizhchi usuli

(deduksiya usuli)

Avvalo $n = 2^k$ bo'lgan holda isbotlaymiz. Buning uchun induksiya usulidan foydalanamiz. $k = 1$, ya'ni $n = 2$ bo'lganda Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. $n = 2^k$ bo'lganda bajariladi deb olib, $n = 2^{k+1} = 2m$ uchun isbot qilamiz. Induksiya farazidan ushbu

$$\begin{aligned} n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} &= 2m\sqrt{m\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m} \cdot m\sqrt[m]{a_{m+1} \dots a_{2m}}} \\ &\leq m\left(m\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m} + m\sqrt[m]{a_{m+1} \dots a_{2m}}\right) \leq \\ m\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} + \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}}{m}\right) &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

Baholash kelib chiqadi. Bu esa, $n = 2^{k+1}$ bo'lganda Koshi tengsizligi bajarilishini bildiradi.

Endi biror $n = r + 1$ uchun Koshi tengsizligi bajarilishini isbot qilamiz.

Farazga ko'ra

$$a_1, a_2, \dots, a_r, \sqrt[r]{a_1 a_2 \dots a_r}$$

$r + 1$ ta son uchun

$$\sqrt[r+1]{a_1 a_2 \dots a_r \sqrt[r]{a_1 a_2 \dots a_r}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_r + \sqrt[r]{a_1 a_2 \dots a_r}}{r + 1}$$

tengsizlik bajariladi. Bundan

$$(r+1)(a_1 a_2 \dots a_r)^{\frac{1}{r+1} + \frac{1}{(r+1)r}} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_r + \sqrt[r]{a_1 a_2 \dots a_r}$$

$$(r+1)(a_1 a_2 \dots a_r)^{\frac{1}{r}} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_r + \sqrt[r]{a_1 a_2 \dots a_r}$$

ya'ni

$$\sqrt[r]{a_1 a_2 \dots a_r} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_r}{r}$$

kelib chiqadi. Isbot qilingan illita fikrdan Koshi tengsizligi n uchun ixtiyoriy qiymatida o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Bu usulga tushish usuli yoki deduksiya usuli deyiladi.

Masalan, bu usulga ko'ra $n = 5$ bo'lganda Koshi tengsizligi to'g'ri bo'lishi $n = 8, n = 7, n = 6$ bo'lganda to'g'rib o'lishidan kelib chiqadi. Chunki $n = 8 = 2^3$ bo'lgani uchun Koshi tengsizligi bajariladi. $n = 8$ da to'g'rib o'lishidan $n = 7$ da to'g'rib o'lishi, undan esa $n = 6$ da to'g'rib o'lishi, $n = 6$ da to'g'rib o'lishidan $n = 5$ da to'g'rib o'lishi kelib chiqadi.

Koshi tengsizligida tenglik faqat $a_1, a_2, \dots, a_n$ bo'lganda bajarilishini ko'rsatamiz. Koshi tengsizligida tenglik bajarilib, bu sonlar orasida bir-biriga teng bo'lmaganlari bor deb faraz qilaylik. Soddalik uchun $a_1 \neq a_2$ deb hisoblaymiz. U holda

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} &= \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_1 a_2} \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_2} + a_3 + \dots + a_n}{n} = \\ &= \frac{2\sqrt{a_1 a_2} + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \end{aligned}$$

ziddiyat kelib chiqadi. **Isbot tugadi.**

10-§. Koshi tengsizligi isbotining to'qqizinchi usuli

(deduksiya usuli)

Avvalo $n = 2^k$ bo'lgan holda isbotlaymiz. Buning uchun induksiya usulidan foydalanamiz. $k = 1$, ya'ni $n = 2$ bo'lganda Koshi tengsizligi bajarilishi ravshan. $n = 2^k$ bo'lganda bajariladi deb olib, $n = 2^{k+1} = 2m$ uchun isbot qilamiz. Induksiya farazidan ushbu

$$\begin{aligned} n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} &= 2m\sqrt[m]{\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m} \cdot \sqrt[m]{a_{m+1} \dots a_{2m}}} \\ &\leq m\left(\sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1} \dots a_{2m}}\right) \leq \\ m\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} + \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{2m}}{m}\right) &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

Baolash kelib chiqadi. Bu esa, $n = 2^{k+1}$ bo'lganda Koshi tengsizligi bajarilishini ko'rsatadi.

Endi n ixtiyoriy natural son bo'lsin. Agar $n < 2^k$ bo'lsa, $p = 2^k - n$ deymiz. U holda $n + p = 2^k$ bo'lgani uchun ixtiyoriy $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_{n+p} \geq 0$ sonlar uchun Koshi tengsizligi bajariladi, ya'ni ushbu

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}}{n+p} \geq \sqrt[n+p]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n+p}}$$

tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikda

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{n+p} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A$$

deb olamiz. U holda

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + pA}{n+p} \geq \sqrt[n+p]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot A^p},$$

$$\frac{nA + pA}{n+p} \geq \sqrt[n+p]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot A^p},$$

$$A^{n+p} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot A^p,$$

$$A^n \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Kelib chiqadi, ya'ni Koshi tengsizligi ixtiyoriy natural n da bajarilar ekan. Bu usulga ham tushish usuli yoki deduksiya usuli deyiladi.

Koshi tengsizligita tenglik faqat $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ bo'lganda bajarilishini ko'rsatamiz. Koshi tengsizligida tenglik bajarilib, bu sonlar orasida bir-biriga teng bo'lmaganlari bor deb faraz qilaylik. Sodda uchun $a_1 \neq a_2$ deb hisoblaymiz. U holda

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} &= \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \\ &\geq \sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \end{aligned}$$

Bo'ladi. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar orasida nolga teng bo'ladiganlari bo'lmasa, $a_1 \neq a_2$ bo'lgani uchun

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} > \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Kelib chiqadi. Ohirgi tengsizlik, $a_3, a_4, \dots, a_n$ sonlar orasida nolga teng bo'ladiganlari bo'lsa ham bajariladi, chunki bu holda oxirgi tengsizlikning o'ng tomoni nolga teng bo'ladi, chap tomoni esa musbat bo'ladi. **Isbot tugadi.**

11-§. Koshi tengsizligi isbotining o'ninchi usuli

(logarifmik tengsizlik usuli)

Avvalo, $x > 0$ bo'lganda ushbu

$$\ln x \leq x - 1$$

Tengsizlik bajarilishini isbotlab olamiz. Bu yerda tenglik faqat $x = 1$ bo'lganda bajariladi. Buning uchun $f(x) = \ln x - x + 1$ yordamchi funksiya tuzib olamiz va bu funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. Ushbu

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Tenglikka asosan $f(x)$ funksiya $(0,1]$ oraliqda o'suvchi va $[1,\infty)$ oraliqda kamayuvchi bo'ladi. Bunga ko'ra $0 < x < 1$ bo'lganda $f(x) < f(1)$ va $x > 1$ bo'lganda $f(x) > f(1)$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya eng katta qiymatini $x = 1$ bo'lganida qabul qiladi. Shuning uchun $f(x) \leq f(1)$ bo'ladi, ya'ni

$$\ln x - x + 1 \leq 0,$$

$$\ln x \leq x - 1.$$

$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ ixtiyoriy sonlar bo'lsin. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, x_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \dots, x_n = \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Belgilashlarni kiritsak, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ bo'ladi.

Yuqrida isbot qilingan tengsizlikka ko'ra

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} &= e^{\ln(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n})} = e^{\frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}} \\ &\leq e^{(x_1-1) + (x_2-1) + \dots + (x_n-1)} = e^{1-1} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

bo'ladi. Bundan esa belgilashlarga asosan

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Darhol kelib chiqadi. Bu yerda tenglik bajarilishi uchun yuqoridagi tengsizlikda $x_1 = 1, x_2 = 1, \dots, x_n = 1$ bo'lishi karak. Aks holda tengsizlik belgisi qat'iy bo'ladi. **Isbot tugadi.**

12-§. Koshi tengsizligi isbotining o`n birinchi usuli.

Avvalo quyidagi muhim lemmani va undan kelib chiqadigan natijalarni isbotlab olamiz.

Lemma. Agar $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ va $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ bo`lsa, ushbu

$$\begin{aligned} a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 &\leq a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \\ &\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \end{aligned}$$

Teng sizlikrar o`rinli bo`ladi. Bu yerdagi $j_1, j_2, \dots, j_n$ sonlarning har biri 1 dan n gacha o`zgaradigan va bir-biriga teng bo`lmagan sonlardir.

Isbot. 1) Agar biror $S = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n}$ yig`indida  $a_p b_{j_p}$  va  $a_r b_{j_r}$ , ( $p < r$ ) hadlar uchun,  $b_{j_p} \leq b_{j_r}$  bo`lsa, u holda $a_p - a_r \geq 0$ va $b_{j_p} - b_{j_r} \leq 0$ bo`lgani uchun

$$(a_p - a_r)(b_{j_p} - b_{j_r}) \leq 0,$$

$$a_p b_{j_p} + a_r b_{j_r} \leq a_p b_{j_r} + a_r b_{j_p}$$

O`rinli bo`ladi. Demak, $S = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n}$ yig`indidagi  $a_p b_{j_p}$  va  $a_r b_{j_r}$  hadlarni  $a_p b_{j_r}$  va  $a_r b_{j_p}$  hadlarga almashtirishdan hosil bo`lgan S_1 yig`indi uchun  $S \leq S_1$  bo`ladi. Agar S_1 yog`indida  $b_{j_q} \leq b_{j_k}$ , ( $q < k$ ) bo`lsa, yanada yuqoridagi amalni qo`llab  $S_2$  yig`indini olamiz, S_2 yig`indi uchun  $S_1 \leq S_2$  bo`ladi. Bu jarayonni davom qildirish natijasida chekli qadamdan so`ng  $M = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$  yig`indini olamiz. Bu yig`indi uchun $S \leq M$ bajariladi.

2) Agar biror $S = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n}$ yig'indida $a_p b_{j_p}$ va $a_r b_{j_r}$, ($p < r$) hadlar uchun, $b_{j_p} \geq b_{j_r}$ bo'lsa, u holda $a_p - a_r \geq 0$ va $b_{j_p} - b_{j_r} \geq 0$ bo'lgani uchun

$$(a_p - a_r)(b_{j_p} - b_{j_r}) \geq 0,$$

$$a_p b_{j_p} + a_r b_{j_r} \geq a_p b_{j_r} + a_r b_{j_p}$$

o'rinli bo'ladi. Demak, $S = a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n}$ yig'indidagi $a_p b_{j_p}$ va $a_r b_{j_r}$ hadlarni $a_p b_{j_r}$ va $a_r b_{j_p}$ hadlarga almashtirishdan hosil bo'lgan s_1 yig'indi uchun $S \geq s_1$ bo'ladi. Agar s_1 yig'indida $b_{j_q} \geq b_{j_k}$, ($q < k$) bo'lsa, yana yuqoridagi amalni qo'llab s_2 yig'indini olamiz, s_2 yig'indi uchun $s_1 \geq s_2$ bo'ladi. Bu jarayonni davom qildirish natijasida chekli qadamdan so'ng $m = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ yig'indini olamiz. Bu yig'indi uchun $S \geq m$ bajariladi. **Lemma isbotlandi.**

Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar ketma-ketligi uchun $a_i \geq a_j$ va $b_i \geq b_j$ tengsizliklar birgalikda bajarilsa, $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ ketma-ketliklar bir xil tartiblangan deyiladi, aksincha, $a_i \geq a_j$ va $b_i \leq b_j$ tengsizliklar birgalikda bajarilsa, qarama-qarshi tartiblangan deyiladi.

Masalan, $a_1, a_2, \dots, a_n$ musbat sonlar bo'lsa,

1) $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$ bir xil tabtiblangan deyiladi,

2) $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ qarama-qarshi tartiblangan bo'ladi,

3) $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlar o'sish tartibida joylashtirilgan bo'lsa, $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ qarama-qarshi tartiblangan bo'ladi.

1-natija. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar ketma-ketliklari bir xil tabtiblangan bo'lsa, ushbu

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

tengsizliklar o`rinli bo`ladi. Bu yerdagi $j_1, j_2, \dots, j_n$ sonlarning har biri 1 dan n gacha o`zgaradigan va bir-biriga teng bo`lmagan sonlardir.

Isboti. $a_1, a_2, \dots, a_n$ conlarni kamayish tartibida joylashtiramiz $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \dots \geq a_{i_n}$, u holda $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}$ sonlar ham kamayish tartibida joylashgan bo`ladi. Haqiqatdan ham, $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar ketma-ketliklari bir xil tartiblangani uchun $a_{i_k} \geq a_{i_{k+1}}$ ekanligidan $b_{i_k} \geq b_{i_{k+1}}$ kelib chiqadi, bu esa $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}$ sonlar ham kamayish tartibida joylashganligini ildiradi. Yuqoridagi lemmaga ko`ra

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \leq a_{i_1} b_{i_1} + a_{i_2} b_{i_2} + \dots + a_{i_n} b_{i_n},$$

ya'ni ushbu

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

tengsizliklar o`rinli bo`ladi. **Isbot tugadi.**

2-natija. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar ketma-ketliklari qarama-qarshi tartiblangan bolsa, ushbu

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

tengsizliklar o`rinli bo`ladi. Bu yerdagi $j_1, j_2, \dots, j_n$ sonlarning har biri 1 dan n gacha o`zgaradigan va bir-biriga teng bo`lmagan sonlardir.

Isboti. Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar ketma-ketliklari qarama-qarshi tartiblanganidan, $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $-b_1, -b_2, \dots, -b_n$ sonlar ketma-ketliklari bir xil tartiblanganligi kelib chiqadi. 1-natijaga ko`ra

$$a_1(-b_{j_1}) + a_2(-b_{j_2}) + \dots + a_n(-b_{j_n}) \leq a_1(-b_1) + a_2(-b_2) + \dots + a_n(-b_n),$$

$$a_1 b_{j_1} + a_2 b_{j_2} + \dots + a_n b_{j_n} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

bo`ladi. **Isbot tugadi.**

Endi Koshi tengsizligini isbot qilishga o'tamiz. $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ ihtiyoiriy sonlar bo'lsin. Ushbu $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ belgilashni kiriyib olamiz va quyidagi ikkita ketma-ketlikni ko'rib chiqamiz:

$$\frac{a_1}{G}, \frac{a_1 a_2}{G^2}, \dots, \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{G^n},$$

$$\frac{G}{a_1}, \frac{G^2}{a_1 a_2}, \dots, \frac{G^n}{a_1 a_2 \dots a_n},$$

Bu ketma-ketliklar o'zaro qarama-qarshi tartiblanganligi ravshan. Lemmaning 2-natijasiga ko'ra

$$\begin{aligned} n &= \frac{a_1}{G} \cdot \frac{G}{a_1} + \frac{a_1 a_2}{G} \cdot \frac{G}{a_1 a_2} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{G^n} \cdot \frac{G^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \\ &\leq \frac{a_1}{G} \cdot \frac{G^n}{a_1 a_2 \dots a_n} + \frac{a_1 a_2}{G} \cdot \frac{G}{a_1} + \dots + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{G^n} \cdot \frac{G^{n-1}}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{G} \end{aligned}$$

bo'ladi. Koshi tengsizligi isbotlandi.

Izoh. Yuqorida keltirilgan lemma va uning natijalari yordamida ko'pgina tengsizliklarni isbotlash mumkin. Misol uchun Chebishev tengsizligini isbot qilamiz (*Pafnutiy Lvovich Chebishev (1821-1894) buyuk rus matematigi*).

Agar $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ bo'lsa, ushbu

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar ketma-ketliklari bir hil tartiblanganligi uchun yuqorida keltirilgan lemmaning 1-natijasiga ko'ra ushbu

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$a_1b_2 + a_2b_3 + \dots + a_nb_1 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

.....

$$a_1b_n + a_2b_1 + \dots + a_nb_{n-1} \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklarni bir-biriga qo'shsak,

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)$$

kelib chiqadi. Chebishev tengsizligi isbotlandi.

Izoh. Koshi tengsizligi isbotining yana ikkita usulini keltirish mumkin, birinchisi ko'p o'zgaruvchili funksiyaning minimumini toppish usuli ikkinchisi esa, n o'lchamli fazodagi parallelepiped va piramidalar hajmlariga asoslangan usul ([20]). Bu ikkala usul ham elementar matematika kursidan tashqariga chiqqanligi bois biz ularni keltirmaslikka qaror qildik.

II BOB. Koshi tengsizligining tadbirlari.

2.1-§. Koshi tengsizligidan foydalanib Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlash.

Ixtiyoriy $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar uchun ushbu

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \quad (24)$$

tengsizlik o`rinli bo`ladi, bu yerda tenglik faqat

$$a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, \dots, a_n = \lambda b_n \quad (25)$$

bo`lganda bajariladi. (24) tengsizlikka Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deyiladi. (*B.Y.Bunyakovskiy (1804-1889) rus matematigi*). Agar  $a_1, a_2, \dots, a_n$  yoki  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sonlarning barchasi nolga teng bo`lsa, (24) tengsizlik bajarilishi ravshan. Shuning uchun biz $a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_1, b_2, \dots, b_n$ sonlar orasida nolga teng bo`lmaganlari bor deb faraz qilamiz.

Yuqorida keltirilgan fikrni Koshi tengsizligidan foydalanib isbotlaymiz. Buning uchun ushbu

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}, x_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}, \dots, x_n \\ &= \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}} \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, y_2 = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}, \dots, y_n$$

$$= \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}$$

belgilashlarni kiritib olamiz. Quyidagi tengsizliklarni bir-biriga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 y_1 \leq \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} y_1^2 \\ x_2 y_2 \leq \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} y_2^2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n y_n \leq \frac{1}{2} x_n^2 + \frac{1}{2} y_n^2 \end{cases} \quad (26)$$

natijada

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

kelib chiqadi. Bungako'ra

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

bo'ladi. Bundan esa

$$-(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$$

tengsizlik ham o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

(24) tengsizlikda tenglik bajarilishi uchun (26) tengsizliklarning har birida tenglik bajarilishi kerak, bundan, belgilashlarga asosan (25) tengliklar kelib chiqadi.

Isbot tugadi.

2.2-§. Koshi tengsizligini umumlashtirish.

O`n birinchi paragrafda isbot qilingan ushbu

$$\ln x \leq x - 1, (x > 0) \quad (27)$$

tengsizlik, Koshi tengsizligini umumlashtirishga imkon beradi. Bunung uchun
yig'indisi 1 ga teng bo'lgan $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ sonlarni olamiz va

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}, \\ x_2 &= \frac{a_2}{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{a_n}{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n} \end{aligned} \tag{28}$$

Belgilashlarni kiritamiz. Bu yerda $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ ixtiyoriy sonlar.

(27) va (28) ga asosan

$$\begin{aligned} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} &= e^{p_1 \ln x_1 + p_2 \ln x_2 + \dots + p_n \ln x_n} \leq e^{p_1(x_1-1) + p_2(x_2-1) + \dots + p_n(x_n-1)} = \\ &= e^{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - (p_1 + p_2 + \dots + p_n)} = e^{1-1} = e^0 = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

bo`ladi. (29) tengsizlikka (28) belgilashlarni qo`yib,

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \leq p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n \quad (30)$$

bo'lishini ko'ramiz. (30) tengsizlik Koshi tengsizligining umumlashmasidir, chunki xususan $p_1 = \frac{1}{n}, p_2 = \frac{1}{n}, \dots, p_n = \frac{1}{n}$, bo'lganda (30) tengsizlik Koshi tengsizligiga aylanadi. (30) tengsizlikda

$$p_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}, p_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}, \dots, p_n = \frac{k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

deymiz. Bu yerda $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_n \geq 0, (k_1 + k_2 + \dots + k_n > 0)$ ixtiyoriy sonlar. Natijada (30) tengsizlik ushbu

$$(a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n})^{\frac{1}{k_1+k_2+\dots+k_n}} \leq \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1+k_2+\dots+k_n} \quad (31)$$

ko`rinishni oladi.

(31) tengsizlikda, xususan $k_1 = 1, k_2 = 1, \dots, k_n = 1$ bo`lganda Koshi tengsizligi kelib chiqadi. Demak, (31) tengsizlik Koshi tengsizligining umumlashmasi ekan.

2.3-§. Yung, Gyolder va Minkovskiy tengsizliklari.

$n=2$ bo`lgan holda, (31) Koshi tengsizligining umumlashmasi ushbu

$$(a_1^{k_1} a_2^{k_2})^{\frac{1}{k_1+k_2}} \leq \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2}{k_1+k_2} \quad (32)$$

ko`rinish oladi. Agar biz bu yerda

$$\frac{1}{p} = \frac{k_1}{k_1+k_2}, \frac{1}{q} = \frac{k_2}{k_1+k_2},$$

$$a = a_1^{\frac{1}{p}}, b = a_2^{\frac{1}{q}}$$

belgilashlarni kiritsak, $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bo`ladi va (32) tengsizlik

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (33)$$

Ko`rinish oladi. (33) tengsizlikka asosan Yung tengsizligi deyiladi. (V.Yung (1882-1946) ingliz matematigi).

Yuqorida belgilashlarga asosan Yung tengsizligida tenglik faqat $a^p = b^q$ bo`lganda bajariladi.

$a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ va $b_1 > 0, b_2 > 0, \dots, b_n > 0$ ixtiyoriy sonlar bo`lsin. Ushbu

$$x_1 = \frac{a_1}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, y_1 = \frac{b_1}{(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}}$$

$$x_2 = \frac{a_2}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, y_2 = \frac{b_2}{(b_1^p + b_2^p + \dots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}}$$

.....

$$x_n = \frac{a_n}{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}}, y_n = \frac{b_n}{(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}}$$

belgilashlarni kiritamiz. Quyidagi tengsizliklarni bir-biriga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 y_1 \leq \frac{x_1^p}{p} + \frac{y_1^q}{q} \\ x_2 y_2 \leq \frac{x_2^p}{p} + \frac{y_2^q}{q} \\ \dots \dots \dots \\ x_n y_n \leq \frac{x_n^p}{p} + \frac{y_n^q}{q} \end{cases}$$

natijada ushbu

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n &\leq \frac{1}{p} (x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p) + \frac{1}{q} (y_1^q + y_2^q + \dots + y_n^q) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Tengsizlik hosil bo'ladi. Yuqoridagi belgilashlarni hisobga olib, oxirgi tengsizlikni quyidagi ko'rinishda yzish mumkin:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \quad (34)$$

(34) tengsizlikka Gyolder tengsizligi deyiladi. (*Otti Lyudvig Gyolder (1859-1937) nemis matematigi*). Gyolder tengsizligida $p = 2, q = 2$ desak, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining umumlashmasi ekan.

Gyolder tengsizligiga asoslanib quyidagi baholashlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned}
& (a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p = \\
& = [a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + a_2(a_2 + b_2)^{p-1} + \dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1}] + \\
& + [b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + b_2(a_2 + b_2)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1}] \leq \\
& \leq [a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} \\
& \cdot [(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + (a_2 + b_2)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} + \\
& + [b_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} \\
& \cdot [(a_1 + b_1)^{(p-1)q} + (a_2 + b_2)^{(p-1)q} + \dots + (a_n + b_n)^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} = \\
& = \left\{ [a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} + [b_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} \right\} \times \\
& \times \{ (a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p \}^{\frac{1}{q}} \quad (35)
\end{aligned}$$

Ohirgi tengsizlikda $(p - 1)q = p$ tenglik ishlatildi. Agar (35) baholashning ikkala tomonini ham

$$\{ (a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p \}^{\frac{1}{q}}$$

Ifodaga bo'lsak va $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ tenglikni e'tiborga olsak, ushbu

$$\begin{aligned}
& \{ (a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \dots + (a_n + b_n)^p \}^{\frac{1}{p}} \leq \\
& \leq [a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} + [b_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p]^{\frac{1}{p}} \quad (36)
\end{aligned}$$

Tenglik hosil bo'ladi. (36) tengsizlikka Minkovskiy tengsizligi deyiladi. (*German Minkovskiy (1864-1909) nemis matematigi*).

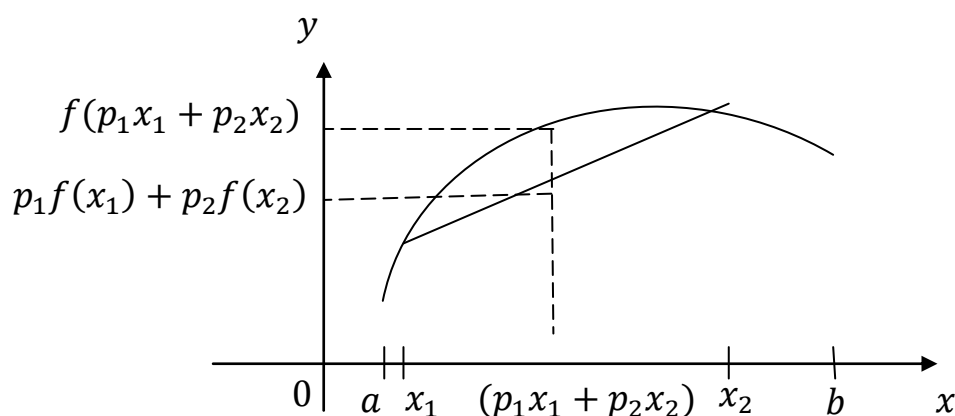
2.4-§. Iensen tengsizligi.

Aslida Koshi tengsizligi $f(x) = \ln x$ funksiya qavariqligining sodda natijasidir. Umumiy holda, ya'ni $f(x)$ ixtiyoriy qavariq yoki botiq funksiya bo'lgan holda Koshi tengsizligiga o'xshash tengsizliklarni isbot qilish mumkin.

Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

Tengsizlik ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ sonlarda o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda qavariq deyiladi (2-rasm).

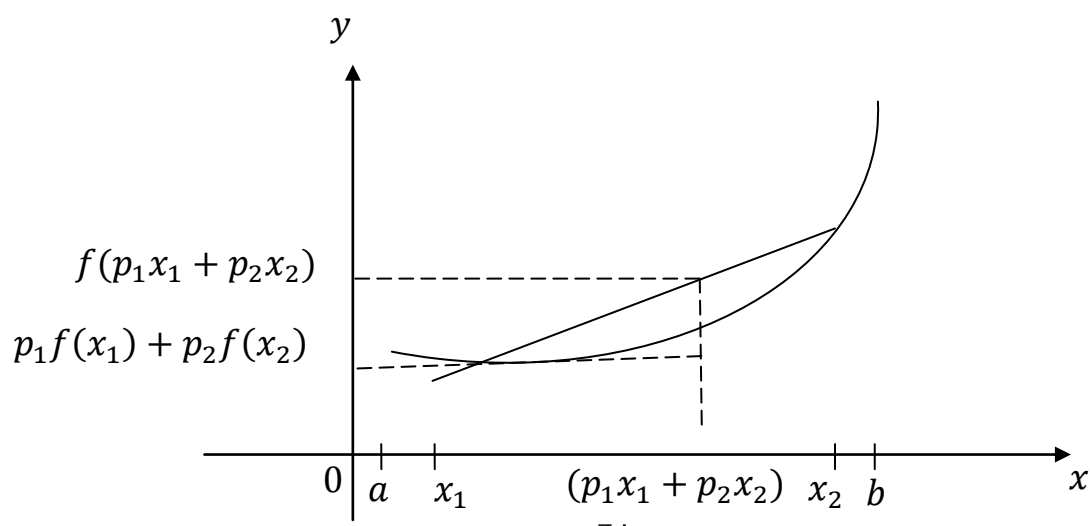


2-rasm.

Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

tengsizlik ixtiyoriy $x_1, x_2 \in (a, b)$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$ sonlarda o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda botiq deyiladi (3-rasm).



3-rasm.

Teorema. a) Agar $f''(x) < 0, x \in (a, b)$ bo'lsa, ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ va $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ sonlar uchun ushbu

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n) \quad (37)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

a) Agar $f''(x) > 0, x \in (a, b)$ bo'lsa, ixtiyoriy $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ va $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ sonlar uchun ushbu

$$f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n) \quad (38)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. a) avvalo ixtiyoriy $c \in (a, b)$ va $x \in (a, b)$ uchun ushbu

$$f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c) \quad (39)$$

tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$g(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)$$

funksiyaning (a, b) oraliqda eng katta qiymatini topamiz.

$$g'(x) = f'(x) - f'(c), g''(x) = f''(x) < 0$$

Bo'lgani uchun $g'(x)$ kamayuvchi bo'ladi. $g'(c) = 0$ ekanligidan $g'(x)$ ning ishorasi $x = c$ nuqtadan o'tishda musbatdan manfiyga o'zgarishi kelib chiqadi. $x = c$ dan boshqa nuqtada $g'(x)$ nolga aylanmasligidan $g(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada o'zining eng katta qiymatini qabul qilishi kelib chiqadi. Demak, $g(x) \leq g(c)$ bo'ladi, ya'ni (39) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

(39) tengsizlikda tenglik faqat $x = c$ bo`lganda bajariladi.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ixtiyoriy sonlar bo`lsin. Agar  $c = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$  bo`lsa, $c \in (a, b)$ bo`ladi. (39) tengsizlikka ko`ra

$$\begin{aligned}
 & p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \dots + p_nf(x_n) \leq \\
 & \leq p_1[f(c) + f'(c)(x_1 - c)] + \\
 & + p_2[f(c) + f'(c)(x_2 - c)] + \dots + \\
 & + p_nf[c + f'(c)(x_n - c)] = \\
 & = f(c) + f'(c)(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n - c) = \\
 & = f(c) + f'(c)(c - c) = f(c) = f(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n)
 \end{aligned}$$

bo`ladi.

b) band ham a) band kabi isbot qilinadi.

Teorema isbot qilindi.

$m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, \dots, m_n \geq 0, (m_1 + m_2 + \dots + m_n > 0)$ ixtiyoriy sonlar bo`lsin. (37) va (38) tengsizlikda

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, p_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \dots, p_n \\
 &= \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}
 \end{aligned}$$

deymiz. U holda (37) va (39) tengsizliklar mos ravishda quyidagi ko`rinishlarni oladi:

$$f\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) \geq \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \dots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad (40)$$

$$f\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}\right) \leq \frac{m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + \dots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (41)$$

(37), (38), (40) va (41) tengsizliklarga Iensen tengsizliklari deyiladi. (*Iogan lyudvich Iensen (1859-1925) daniyalik matematik*).

Iensen tengsizligida $f(x)$ funksiyani turli hil qilib tanlash hisobiga ajoyib tengsizliklarni olish mumkin. Masalan,

1) $f(x) = \ln x$ bo'lsa,

$$\ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}$$

$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ bo'ladi, bu yerda $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$ bo'lsa,

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{n},$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

3) $f(x) = x^p$ bo'lsa,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^p \leq \frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n},$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ va $p > 1$.

4) $f(x) = \sin x$ bo'lsa,

$$\sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n}$$

bo'ladi, bu yerda $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \pi]$.

5) $f(x) = xe^x$ bo'lsa,

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) e^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \leq x_1 e^{x_1} + x_2 e^{x_2} + \dots + x_n e^{x_n}$$

bo'ladi, bu yerda $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

6) $f(x) = x^2$ bo'lsa,

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}\right)^2 \leq \frac{m_1x_1^2+m_2x_2^2+\dots+m_nx_n^2}{m_1+m_2+\dots+m_n},$$

$$\begin{aligned} & (m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n)^2 \\ & \leq (m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + \dots + m_nx_n^2)(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \end{aligned}$$

bo`ladi. Bu tengsizlikda

$$m_1 = b_1^2, m_2 = b_2^2, \dots, m_n = b_n^2, \quad x_1 = \frac{a_1}{b_1}, x_2 = \frac{a_2}{b_2}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

demak,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi kelib chiqadi.

7) $f(x) = x^p, p > 1, x > 0$ bo`lsa,

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}\right)^p \leq \frac{m_1x_1^p+m_2x_2^p+\dots+m_nx_n^p}{m_1+m_2+\dots+m_n},$$

$$\begin{aligned} & (m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n)^p \\ & \leq (m_1x_1^p + m_2x_2^p + \dots + m_nx_n^p)(m_1 + m_2 + \dots + m_n)^{p-1} \end{aligned}$$

bo`ladi. Bu tengsizlikda

$$q = \frac{p}{p-1}, m_1 = b_1^q, m_2 = b_2^q, \dots, m_n = b_n^q,$$

$$x_1 = \frac{a_1}{b_1^{q-1}}, x_2 = \frac{a_2}{b_2^{q-1}}, \dots, x_n = \frac{a_n}{b_n^{q-1}}$$

desak,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^p \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{p}{q}},$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Gyolder tengsizligi kelib chiqadi.

Izoh. O.Ijboldin va L.Kurlyanchiklarning [22] maqolasida (40) va (41) tengsizliklar «qavariq figuraning og'irlik markazi shu figuraning o'zida joylashgan bo'ladi» degan fikrga asoslanib isbot qilingan, B.A.Zorichning [11] kitobida esa, matematik induksiya usuli qo'llanilgan. Biz keltirgan usul 11-§ va 13-§ dagi g'oyalar orasida kelib chiqdi.

2.5-§. Masalalar yechish namunalari.

1-misol. Perimetri $2p$ bo'lgan uchburchaklar orasida yuzasi eng katta bo'lgan uchburchakni topamiz. Buning uchun Geron formulasi va Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \right)^3} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

Demak, perimetri $2p$ bo'lgan ixtiyoriy uchburchalning yuzasi $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ dan oshmatdi. $\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ ga faqat $p-a = p-b = p-c$, ya'ni $a = b = c$ bo'lganda teng bo'ladi. Bu esa, bir hil perimetrli uchburchaklar orasida eng katta bo'ladigani teng tomonli uchburchak bo'lishini bildiradi.

2-misol. Ixtiyoriy uchburchak uchun ushbu

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4p$$

Tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun berilgan tengsizlik chap tomonini guruhlab yozib olamiz va Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$\left(a^3 + \frac{1}{a}\right) \left(b^3 + \frac{1}{b}\right) \left(c^3 + \frac{1}{c}\right) \geq 2 \sqrt{a^3 \cdot \frac{1}{a}} + 2 \sqrt{b^3 \cdot \frac{1}{b}} + 2 \sqrt{c^3 \cdot \frac{1}{c}} =$$

$$= 2a + 2b + 2c = 4p.$$

Bu yerda tenglik faqat

$$a^3 = \frac{1}{a}, b^3 = \frac{1}{b}, c^3 = \frac{1}{c}$$

Bo'lganda, ya'ni $a = b = c = 1$ bo'lganda bajariladi.

3-misol. Ixtoyiriy uchburchak uchun $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlaymiz. Buning uchun Geron formulasi va Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p \left(\frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} \right)^3} = \\ &= \sqrt{p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{12\sqrt{3}} \leq \\ &\leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2)}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

4-misol. R radiusli sferaga ichki chizilgan eng katta hajmli silindirning hajmini topamiz. Buning uchun avvalo silindir va silindir radiusi orqali ifodalaymiz. Koshi tengsizligidan foydalanish maqsadida $r^4(R^2 - r^2)$ ifodani shunday ko'paytma tarzida tozib olamizki, bu ko'paytma hadlarining yig'indisi r ga bog'liq bo'lmasin va r ning shunday qiymati mavjud bo'lsinki bunda ko'paytma hadlari bir-biriga teng bo'lsin:

$$V = 4\pi \sqrt{\frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (R^2 - r^2)} \leq 4\pi \sqrt{\left(\frac{\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + (R^2 - r^2)}{3} \right)^3} = 4\pi \sqrt{\frac{R^6}{27}} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

Bu yerda tenglik

$$\frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} = R^2 - r^2$$

Bo'ladi, ya'ni $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ bo'lganda bajariladi. Demak, R radiusli sferaga ichki chizilgan silindirlar orasida radiusi $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ bo'lgan silindirni hajmi eng katta bo'ladi: $= \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

5-misol. $y = x^2 + x^6 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}, (x > 0)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz. Buning uchun berilgan funktsiyani ushbu

$$y = x^2 + x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

ko'rinishida yozib olamiz va Koshi tengsizligini qo'llaymiz:

$$y = 7\sqrt{x^2 \cdot x^6 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = 7.$$

Bu yerda tenglik $x = 1$ bo'lganda bajariladi. Demak, berilgan funksiyaning eng kichik qiymati 7 ekam.

6-misol. Uzunligi l bo'lgan kesmaning o'zaro perpendikulyar bo'lgan uchta tekisliklarga proeksiyalari a, b, c bo'ladi, $\frac{a+b+c}{l}$ nisbat eng katta qiymat qabul qilishi uchun bu kesma qanday joylashishi kerak?

Bu masalani yechish uchun berilgan tekisliklarni koordinatalar tekisliklari deb qaraymiz va kesma uchlarini $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ bilan belgilaymiz. U holda

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$b = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$c = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

bo`ladi. Bunga ko`ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2l^2$ bo`ladi. Koshi tengsizligiga asosan

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{l} &= \frac{\sqrt{(a+b+c)^2}}{l} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc}}{l} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{l} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2l^2}}{l} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

Bo`ladi. Bu yerda tenglik bajarilishi uchun  $a = b = c$  bo`lishi kerak. Demak, $\frac{a+b+c}{l}$ nisbat eng katta qiymatiga erishish uchun berikgan kesma berilgan tekisliklarga bir hil og`ishgan bo`lishi lozim. Nisbatning eng katta qiymati esa $\sqrt{6}$ ga teng.

7-misol. Ixtiyoriy uchburchak uchun ushbu

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

tengsizlik bajarilishini isbotlaymiz. Uning uchun kosinuslar teoremasidan foydalanamiz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma ,$$

$$c^2 = (a - b)^2 - 2ab \cos \gamma ,$$

$$c^2 - (a - b)^2 = 2ab(1 - \cos \gamma) ,$$

$$(c - a + b)(c + a - b) = 4ab \sin^2 \frac{\gamma}{2} ,$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \leq \frac{(p-a)+(p-b)}{2\sqrt{ab}} = \frac{c}{2\sqrt{ab}} .$$

Xuddi shu tarzda

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \text{ va } \sin \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

Tengsizliklar keltirib chiqariladi. Hosil bo`lgan tengsizliklarni bir biriga ko`paytirsak, ushbu

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$

Tengsizlik kelib chiqadi. Bu yerda tenglik bajarilishi uchun yordamchi tengsizliklarning har birida tenglik bajarilishi kerak, demak, $a = b = c$ bo'lgandagina bajariladi.

8-misol. Sotuvchi torozisi yelkalarining uzunliklari turli xil edi, ya'ni torozi buzilgan edi. Oluvchiga u 1 *kg* shakarni 1-pallasiga qo'yib, yana 1 *kg* ni 2-pallaga qo'yib o'lchab jami 2 *kg* shakar sotdi, bu holda kim yutqazadi?

Bu misolni yechish uchun o'lchasidagi shakar og'irliklarini m_1 va m_2 orqali belgilaymiz. «mehaniikaning oltin qoidasi» ga ko'ra

$$1 \cdot d_1 = m_1 d_2 \text{ va } m_2 d_1 = 1 \cdot d_2$$

bo'ladi. Bulardan

$$m_1 = \frac{d_1}{d_2} \text{ va } m_2 = \frac{d_2}{d_1}$$

$$m_1 + m_2 = \frac{d_1}{d_2} + \frac{d_2}{d_1} > 2 \sqrt{\frac{d_1}{d_2} \frac{d_2}{d_1}} = 2$$

Kelib chiqadi, chunki $d_1 \neq d_2$. Demak, sotuvchi oluvchiga 2 *kg* dan ko'p shakar sotgan.

9-misol. Agar $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ bo'lsa, ushbu

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

Tengsizlik bajarilishini ko'rsatamiz. Buning uchun berilgan tengsizlikning chap tomonini guruhlab yozamiz va Koshi tengsizligidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} \right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \right) \\
&= \frac{a(d+a) + c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \geq \\
&\geq \frac{4[ad + a^2 + bc + c^2]}{(a+b+c+d)^2} + \frac{4[ab + b^2 + cd + d^2]}{(a+b+c+d)^2} = \\
&= \frac{4[a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + bc + cd + ad]}{(a+b+c+d)^2} = \\
&= \frac{2[(a+b+c+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2]}{(a+b+c+d)^2} \geq 2
\end{aligned}$$

10-misol. Agar $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 > 0$ bo'lsa, ushbu

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_1} + \frac{a_5}{a_1 + a_2} \geq \frac{5}{2}$$

Tengsizlik bajarilishini isbotlaymiz va Iensen tengsizligidan foydalanamiz. Iensen tengsizligini $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya uchun qo'llaymiz:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right)^{-1} \leq \frac{\frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \dots + \frac{m_n}{x_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\
& \frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{x_2} + \dots + \frac{m_n}{x_n} \geq \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)^2}{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}
\end{aligned}$$

Oxirgi tengsizlikda $n = 5, m_i = a_i, x_i = a_{i-1} + a_{i-2}, i = 1, 2, 3, 4, 5$ desak, ushbu

$$\begin{aligned}
& \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_4 + a_5} + \frac{a_4}{a_5 + a_6} + \frac{a_5}{a_6 + a_7} \geq \\
& \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)}
\end{aligned}$$

tengsizlik lelib chiqadi. Endi esa qutidagi tengsizlikni isbotlashga o'tamiz:

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)} \geq \frac{5}{2}$$

$$2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \geq$$

$$5[a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + a_3(a_4 + a_5) + a_4(a_5 + a_6) + a_5(a_6 + a_7)] ,$$

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq$$

$$\geq a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5 ,$$

$$5(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 ,$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) .$$

Isbot tugadi.

Xulosa

Yoshlarni chuqur bilimli, teran fikrlaydigan, har bir masalaga ijobiy yondashadigan insonlar bo`lib yetishishlarida fan olimpiadalari muhim ahamiyatga ega bo`ladi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishida olimpiadachi o`quvchilar sevib ishlatiladigan Koshi tengsizligining turli isbotlari, umumlashmalari va tadbirlari keltirilgan. Bundan tashqari Koshi tengsizligiga oid masalalar ham to`plangan.

Ushbu bitiruv malakaviy ishning kirish qismida Koshi haqida qisqacha ma`lumot keltirilgan. Asosiy qism esa ikki bobdan iborat. Birinchi bobda Koshi tengsizligi isbotining o`nbir xil usuli keltirilgan. Ikkinchi bobda Koshi tengsizligining tadbirlari keltirilgan bo`lib, quidagi paragraflardan iborat:

- I. Koshi tengsizligidan foydalanib Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbotlash
- II. Koshi tengsizligini umumlashtirish
- III. Yung, Gyolder va Minkovski tengsizliklari.
- IV. Iensen tengsizligi.
- V. Masalalar yechish namunalari.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Каримов И.А. *Юксак маънавият – енгилмас куч*. Т. “Маънавият”. 2008.
2. Каримов И.А. *Жаҳон молиявий – иқтисодий инқирози, Ўзбекистон шароитида уни бартараф этишнинг йўллари ва чоралари*. Т. “Ўзбекистон”. 2009.
3. I.A.Karimov *Ona yurtimiz baxt-u iqboli va buyuk kelajagi yo'lida xizmat qilish – eng oliy saodatdir*. Toshkent - “O'zbekiston”, 2015
4. Бабинская И.Л. «Задачи математических». Москва, 1975 г. 112 с.
5. Tohirov A., Mo'minov F. «Matematikadan olimpiada masalari». Toshkent, «O'qituvchi», 1996-yil, 96-bet.
6. Mavashev D.A. «Внеклассная работа по математике». Toshkent, «O'qituvchi», 1989 г, 104 с.
7. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах, Библиотечка «Квант», 1986 г.
8. Сивашинский И.Х. «Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям», Москва, «Квант». 1971 г. 368 с
9. Сивашинский И.Х. «Задачи по математике для внеклассных занятий». Москва, «Просвещение», 1968 г. 311 с.
10. Готман Э.Г., Скопец З.А. «Решение геометрических задач аналитическим методом», Москва, «Просвещение» 1979 г