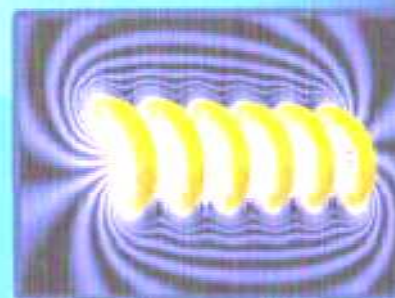
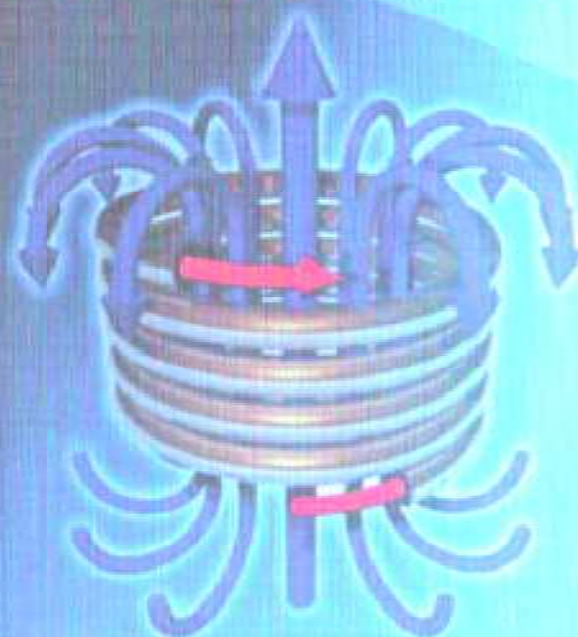


M.T.Yerejepov, A.S.Muratov,
G.R.Qa'dirimbetova

ELEKTRODINAMIKA



MA'SELELER TOPLAMI
I-BO'LIM



No'rus-2016

QMU, yari'mo'tkizgishler fizikasi' kafedrası' basli'g'i', f-m.i.d., professor Q. Ismaylov

NMPI, uli'wma fizika kafedrası' basli'g'i' f-m-i.d., docent A. Kamalov

M. T. Yerejepov, A. S. Muratov, G. R. Qa'dirimbetova

Elektrodinamika. Woqi'w qollanba. No'kis. Qaraqalpaq ma'mleketlik universitetinin' baspaxanasi'. 2016- ji'l. 67– bet.

Bul qollanba «Elektrodinamika» kursi' boyi'nsha a'meliy sabaqlardi' o'tiw ushi'n arnalg'an (5140200-fizika). Qollanba materiallari' kursti'n' birinshi bo'limine tiyisli, wonda vakuumdag'i' elektromagnitlik qubi'li'slar u'yreniledi. Ha'rbir bap teoriyali'q bo'limdi, ma'seleler sheshiwge mi'sallar ha'm o'zbetinshe islew ushi'n ma'selelerdi o'z ishine aladi'. Teoriyani'n' tiykari', ani'q formulalar tu'rinde berilgen ha'm wolar sa'ykes temalar boyi'nsha ma'seleler sheshiw menen tikkeley baylani'sqan. Ma'selelerdi tan'lap ali'wda teoriyali'q materialdi' toli'q qanti'w ha'm wolardi' sheshiwdin' tiykarg'i' usi'llari'n ko'rsetiw alg'a su'rilgen. Qollanbada sheshilgen ma'seleler bazali'q xarakterge iye ha'm u'yrenilip ati'ri'lg'an tema boyi'nsha toli'q tu'sinik beriwi ha'm studentlerge usi' ma'selelerdi ha'mde a'debiyatlar dizimindegi ma'seleler toplamlari'n sheshiwge ja'rdem ko'rsetiwi na'zerde tuti'lg'an.

QQMU Ilimiy ken'esinin' qarari' menen baspag'a usi'ni'lg'an. 2016 –ji'l, _____fevral. Protokol № .

© M. T. Yerejepov, A. S. Muratov, G. R. Qa'dirimbetova. 2016- ji'l.

© Qaraqalpaq ma'mleketlik universiteti (QQMU). 2016- ji'l.

	Mazmuni'	3
1.	Elektrodinamikani'n' matematikali'q metodlari'	4
1.1	Vektorli'q algebra.....	4
1.2.	Vektorli'q analiz.....	7
1.3.	Iymek si'zi'qli' koordinatalar.....	17
2.	Turaqli' elektrlik maydan	27
3.	Turaqli' magnitlik maydan	47
	Qosi'msha	64
1.	Sferali'q ha'm cilindrlik koordinatalardag'i' tiykarg'i' differencialli'q operaciyalar.....	64
2.	Sferali'q funkciyalar.....	65
	A'debiyatldar dizimi	67

1. Elektrodinamikani'n' matematikali'q metodlari'

Elektromagnitlik maydan, waqi't ha'm ken'islik noqati'nan g'a'rezli bolg'an eki vektorli'q $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ — tu'rinde berilgen elektrlik ha'm magnitlik maydanlar menen ta'riyipleniwi mu'mkin. Sonli'qtan elektrodinamikani'n' matematikali'q ta'repi vektorli'q maydanlardi' esaplaw menen baylani'sqan. Bul jerde biz vektorli'q analiz, vektorlardi' integralli'q esaplaw ha'm vektorli'q algebrani'n' tiykarg'i' na'tiyjelerin eske ali'wi'mi'z kerek boladi'.

1.1 Vektorli'q algebra

Vektorli'q shamalar, absolyut ma'nisi ha'm bag'i'ti' menen si'patlanadi'. Vektor qa'legen koordinatalar sistemasi'nda, u'sh san menen ani'qlanadi' (wolar koordinata sistemasi'n tan'lap ali'wdan g'a'rezli). Meyli, mi'salg'a noqatti'n' hali'n ani'qlawshi' $\mathbf{r}$ - radius vektor qandayda bir dekartli'q esaplaw sistemasi'nda (d.e.s.) x, y, z komponentlerine iye: sonda $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ($\mathbf{r} = x, y, z$ tu'rindeg belgilewde qollani'ladi'). Usi' esaplaw sistemasi' menen bir baslamag'a iye, biraqta wog'an sali'sti'rg'anda buri'lg'an basqa (ekinshi) dekartli'q esaplaw sistemasi'nda $\mathbf{r}$ vektori' basqa x', y', z' komponentlerine iye boladi': $\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$. Shtrixlang'an komponentler shtrixlanbag'an komponentler arqali' to'mendegi usi'l boyi'nsha an'lati'ladi'.

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j$$

bul jerde α_{ij} - tu'rlendiriw koefficienti, da'slepki j shi ko'sher menen buri'lg'an sistemani'n' i shi ko'sheri arasi'ndag'i' mu'yeshtin' kosinusi'n o'z ishine aladi'. Bul transformaciyali'q qa'siyetti, vektorli'q shama tu'sinigin ani'qlawdi'n' tiykari' dep atawg'a boladi': u'sh a_i ($i = 1, 2, 3$) shamasi'ni'n' ji'yi'ndi'si'n $\mathbf{a}$ vektori' dep ataymi'z, wol koordinatali'q sistemani' buri'wda x_1, x_2, x_3 koordinatalari' tu'rinde

tu'rlenedi.

$$a'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} a_j \quad (1.1)$$

Eki $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ha'm $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektorlari'na sa'ykes tu'rde skalyar shamani' qoyi'p, skalyar ko'beymeni payda etiwge boladi' (basqa koordinata sistemasi'na o'tiwde o'zgermeydi)

$$\mathbf{ab} = ab \cos \alpha ,$$

α - $\mathbf{a}$ ha'm $\mathbf{b}$ arasi'ndag'i' mu'yesh. Dekartli'q koordinatalar sistemasi'nda skalyarli'q ko'beyme vektorlardi'n' proekciyasi' arqali' to'mendegi formula boyi'nsha esaplanadi'.

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Egerde $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ bolsa, wonda $\mathbf{ab} = 0$ boladi'.

Eki $\mathbf{a}$ ha'm $\mathbf{b}$ vektorlari'na to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlandi'ri'wshi' sa'ykes $\mathbf{c}$ vektori'n qoyi'wg'a boladi': 1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$; 2) $\mathbf{c}$ vektori' $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorlari'na ortogonal; 3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorlari' on' u'shlikti payda etedi. Usi'nday taqlette quri'lg'an $\mathbf{c}$ vektori' $\mathbf{a}$ ha'm $\mathbf{b}$ vektorlari'ni'n' vektorli'q ko'beymesi dep ataladi' ha'm $[\mathbf{ab}]$ tu'rinde belgilenedi. Dekartli'q koordinatalar sistemasi'nda $[\mathbf{ab}]$ to'mendegi usi'lda esaplanadi'.

$$[\mathbf{ab}] = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} ,$$

yamasa qi'sqa simvolikali'q jazi'li'wda

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Ko'beytiwshilerdin' worni'n almasti'ri'wda vektorli'q ko'beyme belgisin o'zgartedi. Solay etip, $[\mathbf{ab}] \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$; $[\mathbf{ba}] = -[\mathbf{ab}]$. Dara jag'dayda, yag'ni'y egerde vektorli'q ko'beymenin' ko'beytiwshileri kollinear (yag'ni'y, parallel yamasa antiparallel) bolsa, wonda vektorli'q ko'beyme no'lge ten' boladi'.

$[ab] = 0$, egerde $a \uparrow\uparrow b$ yamasa $a \uparrow\downarrow b$.

U'sh vektordan, aralas ko'beymeni ($a[bc]$) yamasa ekilengen vektorli'q ko'beymeni $[a[bc]]$ du'ziwge boladi'. Aralas ko'beymenin' ko'beytiwshilerin cikl tu'rinde (yamasa cikllik emes, biraq belgisin o'zgertiwi) worni'n almasti'ri'p, birdeylik an'latpani' ali'wg'a boladi':

$$(a[bc]) = (c[ab]) = (b[ca]) = -(b[ac]) = -(c[ba]) = -(a[cb]).$$

Aralas ko'beymenin' moduli, ko'beytiwshilerden du'zilgen parallelepipedtin' ko'lemine ten'. Bunnan to'mendegi ani'q boladi', yag'ni'y ko'beytiwshiler bir tegislikte jatqanda (tek usi' jag'dayda) aralas ko'beyme no'lge ten' boladi'.

Ekilengen vektorli'q ko'beymeni to'mendegi tu'rde jayi'wg'a boladi':

$$[a[bc]] = b(ac) - c(ab).$$

(1.1) sha'rti boyi'nsha tu'rleniwshi vektorlar buri'li'wda, koordinata sistemasi'ni'n' inversiyasi'nda o'zin ekilemshi tu'rde tuti'wi' mu'mkin, yag'ni'y to'mendegi tu'rdegi tu'rleniwde

$$x'_i = -x_i \quad (1.2)$$

bul jerde $\alpha_{ij} = -\delta_{ij}$ tu'rleniw matricasi'. Komponentleri x_i tu'rindagi vektorlar, inversiyada belgisin o'zgertiredi, wolar haqi'yqi'y yamasa polyarli'q dep ataladi'. Koordinatani'n' inversiyasi'nda komponentleri belgilerin o'zgertirmeytug'i'n vektorlar psevdovektorlar yamasa aksialli'q dep ataladi' (aylani'wdi'n' mu'yeshlik tezligi, eki polyar vektorlardi'n' vektorli'q ko'beymesi $[ab]$ ha'm t.b.).

O'zbetinshe sheshiw ushi'n ma'seleler

1.1. To'mendegilerdi esaplan'i'z: a) $[ab]$ vektorli'q ko'beymeni; b) $(a[ba])$ aralas ko'beymeni; v) egerde $a = i - k$, $b = i + k$ bolsa, wonda a ha'm b arasi'ndagi' mu'yeshiti.

1.2. $a_1 + a_2$ vektori' boylap bag'i'tlang'an birlik vektordi' tabi'n'i'z, bul jerde $a_1 = 2i + 3j - 4k$, $a_2 = i + 3j + 2k$.

1.3. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektori'ni'n' $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ vektori'na proekciyasi'n tabi'n'i'z.

1.4. $(\mathbf{ab})^2 + [\mathbf{ab}]^2 = a^2b^2$ ten'ligin da'lillen'iz.

1.5. $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ha'm $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorlari': a) ortogonalli'q; b) kollinearli'q boli'wi' ushi'n, $\mathbf{a}$ ha'm $\mathbf{b}$ vektorlari' qanday sha'rtti qanaatlandi'ri'wi' kerek?

1.6. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ vektorlari' berilgen. Wolardi'n' qaysi' biri bir-birine perpendikulyar, qaysi'lari' parallel yamasa antiparallel ekenligin ani'qlan'i'z.

1.7. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ha'm $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektorlari'na perpendikulyar, birlik vektordi' tabi'n'i'z.

1.8. $\mathbf{A}$ ha'm $\mathbf{B}$ vektorlari' belgili. $\mathbf{A}$ vektori'n eki vektordi'n' qosi'ndi'si' tu'rinde ko'rsetin'iz: $\mathbf{B}$ vektori'na $\mathbf{A}_{\parallel}$ -parallellik ha'm $\mathbf{A}_{\perp}$ -perpendikulyarli'q vektorlar.

1.2. Vektorli'q analiz

Tiykarg'i' differencialli'q operaciyalar. Egerde ken'isliktin' qa'legen noqati'na (yamasa ken'isliktin' bir bo'limine) sa'ykes tu'rde qandayda shama qoyi'lsa, wonda usi' shamani'n' maydani' ken'islikte berilgen dep ayti'ladi'. Egerde ken'isliktin' qa'legen noqati'na sa'ykes tu'rde san qoyi'lsa, wonda maydan skalyarli'q; egerde ken'isliktin' qa'legen noqati'na sa'ykes tu'rde vektor qoyi'lsa, wonda maydan vektorli'q dep ataladi'.

Formalli'q ko'z qarasta maydan noqatti'n' funkciyasi' boladi'. Meyli skalyar maydan berilgen bolsi'n: $f = f(\mathbf{r})$. Egerde ken'islikte qandayda bir dekartli'q koordinatalar sistemasi' tan'lap ali'ng'an bolsi'n, sonda mi'nani' jaza alami'z: $f = f(x, y, z)$. Ken'islikte qandayda bir M noqati'n alami'z. Barli'q mu'mkin bolg'an bag'i't boyi'nsha wonnan shi'g'i'wi' mu'mkin. Qandayda bir l bag'i'ti'n tan'lap alami'z (1-su'wret). l din' bag'i'ti' boyi'nsha f tin' tuwi'ndi'si', berilgen bag'i'ttag'i' maydanni'n' o'zgeriw tezligi dep ataladi':

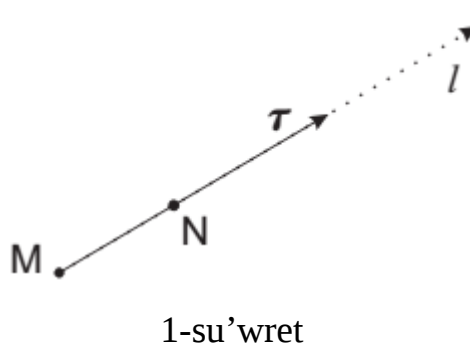
$$\frac{df}{dl} = \lim_{N \rightarrow M} \frac{f(N) - f(M)}{MN}.$$

l din' berilgen bag'i'ti'nda x, y, z koordinatalari' l arali'qti'n' funkciyasi' boli'p tabi'ladi' $f = f(x(l), y(l), z(l))$, sonli'qtan f ti quramali' funkciya tu'rinde differenciallaw mu'mkin boladi':

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dl}.$$

Keyingi an'latpani' eki vektordi'n' skalyarli'q ko'beymesi tu'rinde ko'rsetemiz:

$$\frac{df}{dl} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \left(\frac{dx}{dl} \mathbf{i} + \frac{dy}{dl} \mathbf{j} + \frac{dz}{dl} \mathbf{k} \right).$$



Bul jerde birinshi vektor, f maydani'ni'n' **gradienti** dep ataladi'

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.3)$$

Ekinshi vektor

$$\frac{dx}{dl} \mathbf{i} + \frac{dy}{dl} \mathbf{j} + \frac{dz}{dl} \mathbf{k} = \frac{d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{dl} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \boldsymbol{\tau}$$

- bul l din' bag'i'ti'ndag'i' birlik vektor. Solay etip,

$$\frac{df}{dl} = (\text{grad } f \cdot \boldsymbol{\tau}). \quad (1.4)$$

Keyingi an'latpadan to'mendegi kelip shi'g'adi', yag'ni'y M noqati'ndag'i' $\text{grad } f$ vektori', f maydani'ni'n' en' joqari' tezlikli o'siw ta'repin ko'rsetedi, soni'n' menen birge bul en' joqari' tezlik $|\text{grad } f|$ ke ten'. Bul tasti'yi'qlawdan (wol gradienttin' geometriyali'q ma'nisin beredi) gradienttin' qarali'p ati'ri'lg'an maydan menen invariantli' baylani'sqanli'g'i'n ko'rsetedi, yag'ni'y dekartli'q ko'sherlerdi almasti'ri'wda o'zgerissiz qaladi' (qandayda bir koordinata sistemasi'na «baylang'an» invriant emes tu'rde berilgen (1.3) degi ani'qlamada bul ko'rinbeydi). Solay etip, skalyar maydanni'n' gradienti vektorli'q maydandi' payda etedi.

Egerde vektorli'q differencialli'q **operator** ∇ («**nabla**») ni' kiritsek

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{yamasa } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

wonda (1.3) to'mendegi tu'rde jazi'wg'a boladi'

$$\text{grad } f = \nabla f,$$

al (1.4) in bolsa mi'na tu'rde jazi'wg'a boladi'

$$\frac{df}{dl} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla f) = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) f.$$

Sferali'q simmetriyali' f funkciyasi'ni'n' dara jag'dayi'n qarap o'temiz (yag'ni'y, koordinata basi'na shekemgi $r = |\mathbf{r}|$ arali'qtan g'a'rezli funkciyani').

1- ma'sele. $\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$ ekenligin ko'rsetin'iz.

Dekartli'q koordinata sistemasi'nda gradient ushi'n (1.3) shi an'latpasi'nan paydalanami'z. $r = |\mathbf{r}|$ di x, y, z ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) arqali' an'latami'z ha'm esaplaymi'z

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r}.$$

Sa'ykes tu'rde $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dr} \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dr} \frac{z}{r}$, bunnan

$$\text{grad } f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \blacksquare \quad (1.6)$$

Endi, $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektorli'q maydandi' qarap o'temiz ha'm divergenciya operatsiyasi'n kiritemiz. Tuyi'q S beti arqali' $\mathbf{a}$ maydani'ni'n', usi' bet penen shegaralang'an bo'lim ko'lemine qatnasi'n du'zemiz

$$\frac{\oint \mathbf{a} d\mathbf{S}}{V}.$$

Usi' bo'limdi M noqati'na ji'ynawda bul qatnasti'n' shegi, M noqati'ndag'i' $\mathbf{a}$ maydani'ni'n' **divergenciya** dep ataladi':

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{(V) \rightarrow M} \frac{\oint \mathbf{a} d\mathbf{S}}{V}. \quad (1.7)$$

Vektorli'q maydanni'n' divergenciyasi' skalyarli'q maydandi' payda etetug'i'nli'g'i'n atap o'temiz.

2- ma'sele. (1.7) shi ani'qlamadan kelip shi'qqan halda, dekartli'q koordinata sistemasi'nda divergenciya ushi'n an'latpani' ali'n'i'z.

(1.7) shi formulasi'ndag'i' ko'lem si'pati'nda qabi'rg'alari' koordinata ko'sherlerine parallel bolg'an sheksiz kishkene tuwri'mu'yeshli parallelepipedti alami'z. Sonda parallelepipedtin' beti arqali' $\mathbf{a}$ vektori'ni'n' ag'i'mi'n, parallelepipedtin' alti' qi'ri'na juwap beriwshi alti' qosi'li'wshi' tu'rinde ko'rsetiwge boladi':

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{a} d\mathbf{S} &= [a_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) - a_x(x, \bar{y}, \bar{z})] dydz \\ &\quad + [a_y(\bar{x}, y+dy, \bar{z}) - a_y(\bar{x}, y, \bar{z})] dx dz \\ &\quad + [a_z(\bar{x}, \bar{y}, z+dz) - a_z(\bar{x}, \bar{y}, z)] dx dy \\ &\approx \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Qaptallari' boyi'nsha betlik integrallardi' esaplawda ortasha haqqi'ndag'i' teorema qollani'lg'an, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ shamalari' sa'ykes keliwshi qaptallardag'i' qandayda noqattag'i' koordinatani'n' ma'nisi. Qarama-qarsi' qaptallardag'i' normal qarama-qarsi' bag'i'tqa iye ekenligi esapqa ali'ng'an, al ko'lemnin' M noqati'na ji'ynali'wi'nda barli'q koordinatalar usi' noqatqa tiyisli ma'nisti qabi'l etedi. Na'tiyjede (1.7) si dekartli'q koordinatalar sistemasi'nda divergenciya ushi'n to'mendegi an'latpag'a ali'p keledi:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad \blacksquare \quad (1.9)$$

(1.5), (1.9) di'qqatqa ali'p, vektorli'q maydanni'n' divergenciyasi'n, ∇

operatori'ni'n' $\mathbf{a}$ vektori'na skalyarli'q ko'beymesi tu'rinde jazi'wg'a boladi':

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a}). \quad (1.10)$$

3-ma'sele. (1.7) degi divergenciyani'n' ani'qlamasi'na tiykarlani'p, qandayda bir ko'lemdi shegaralawshi' bet arqali' $\mathbf{a}$ vektori'ni'n' ag'i'mi' menen usi' ko'lem boyi'nsha $\operatorname{div} \mathbf{a}$ dan ali'ng'an integraldi' baylani'sti'ri'wshi' qatnasti' keltirip shi'g'ari'n'i'z.

S beti menen shegaralang'an qa'legen V ko'lemin alami'z. Oni' kishkene ΔV_i quti'shalarg'a bo'lemiz, wolardi'n' ha'rbiri S_i beti menen shegaralang'an. Si'rtqi' S betine tiyip turg'an quti'shalarda, woni' shegaralawshi' betinin' bo'limi, S penen sa'ykes keledi. S_i betinin' barli'q qalg'an bo'limi, qon'si'las eki quti'sha ushi'n uli'wmali'q boli'p qaladi'. Ha'r bir quti'shani'n' kishiliginen paydalani'p, (1.7) in shama menen to'mendegi tu'rde jazami'z:

$$(\operatorname{div} \mathbf{a})_i \Delta V_i \approx \oint_{S_i} \mathbf{a} dS_i.$$

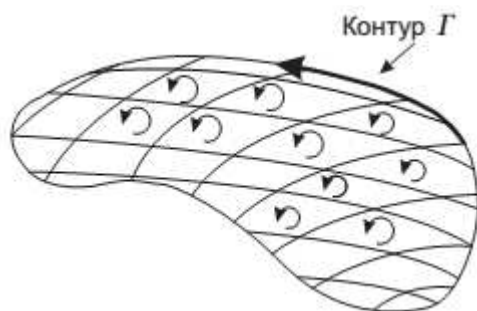
Endi, i boyi'nsha shama menen ali'ng'an aqi'rg'i' ten'liginin' on' ha'm shep ta'replerin qosami'z ha'm ha'rbir quti'shani'n' ko'lemin no'lge umti'ldi'ri'p shekke o'temiz. Bul jag'dayda ten'liktin' shep ta'repi, toli'q ko'lem boyi'nsha divergenciyadan ali'ng'an integralg'a o'tedi. Ten'liktin' on' ta'repindegi, S_i betinin' ishki bo'limlari boyi'nsha ali'ng'an integral biri- birin joq etedi, sebebi eki qon'si'las quti'shalar ushi'n si'rtqi' normal qarama-qarsi' bag'i'tqa iye. Tek S tin' si'rtqi' beti boyi'nsha integral qaladi'. Na'tiyjede to'mendegi qatnasti' alami'z

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oint_S \mathbf{a} dS, \quad (1.11)$$

bul Ostrograd-Gauss teoremasi' dep ataladi'. ■

Endi vektorli'q maydanni'n' rotori' tu'sinigin kiritemiz. Qandayda bir $\mathbf{n}$ bag'i'ti'na perpendikulyar bolg'an tegis maydanshani' qarap o'temiz. Usi' maydanshani' shegaralawshi' kontur boyi'nsha $\mathbf{a}$ vektori'ni'n' cirkulyaciyasi'n ha'm woni'n' maydansha shamasina qatnasi'n tabami'z:

$$\frac{\oint \mathbf{a} d\mathbf{l}}{S}.$$



Maydanshani' (tegisi boli'p qali'wshi') M noqati'na ji'ynawdag'i' bul qatnasti'n' shegi, $\mathbf{n}$ (konturdi' aylani'wshi' bag'i't penen on' vintlik sistemani' payda etiwshi) bag'i'ti'na $\mathbf{a}$ vektorli'q maydan rotori'ni'n' proekciyasi' dep ataladi'

2-su'wret

$$(\text{rot } \mathbf{a})_n = \lim_{(S) \rightarrow M} \frac{\oint \mathbf{a} d\mathbf{l}}{S}. \quad (1.12)$$

To'mendegige di'qqat awdari'wi'mi'z kerek, yag'ni'y rot operaciyasi' vektorli'q maydang'a qollani'ladi' ha'm rotordini'n' o'zi vektorli'q maydan boli'p tabi'ladi'.

Egerde qaptallari' koordinata ko'sherlerine parallel bolg'an sheksiz kishkene tuwri'mu'yeshlik boyi'nsha cirkulyaciyani' qaraytug'i'n bolsaq, wonda dekartli'q koordinatalar sistemasi'nda $\text{rot } \mathbf{a}$ ushi'n an'latpani' tabi'wg'a boladi'.

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Operator ∇ arqali' rotor to'mendegi tu'rde an'lati'ladi':

$$\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}],$$

yag'ni'y, $\mathbf{a}$ vektorli'q maydanni'n' rotori', ∇ vektori'ni'n' $\mathbf{a}$ vektori'na vektorli'q ko'beymesini boli'p tabi'ladi'.

Qa'legen G konturi' boyi'nsha cirkulyaciya, sol G konturi'ni'n' bo'lingan eki kishi konturlari' boylap cirkulyaciyasi'ni'n' qosi'ndi'si' boli'p tabi'ladi':

$\oint_G = \oint_{G_1} + \oint_{G_2}$. Sonda, qa'legen konturdi' sheksiz kishi bo'limlarga bo'lip (2-su'wretke qaran'), ha'rbir bo'lim ushi'n (1.12) in qollani'p ha'm to'mendegi ten'lemenini barli'q bo'lim boyi'nsha qosi'p

$$\oint_{G_i} \mathbf{a} d\mathbf{l} = (\text{rota})_i \Delta S_i$$

mi'nani' alami'z

$$\oint_G \mathbf{a} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{a} d\mathbf{S}. \quad (1.13)$$

Stoks teoremasi' usi'nnan turadi': Tuyi'q kontur boyi'nsha maydanni'n' cirkulyაციyasi', ko'rsetilgen kontur menen shegaralang'an bet orqali' usi' maydanni'n' rotori'ni'n' ag'i'mi'na ten'.

Simvolikali'q esaplap shi'g'ari'wlar. Skalyarli'q ha'm vektorli'q maydanlardi'n' ko'beymelerinen differencialli'q operaciylar ju'rgiziwde, ∇ operatori'n qollani'p esaplawlar ju'rgiziw qolayli' boladi'. ∇ operatori'n qollani'wdag'i' maqset, woni'n' ja'rdeminde vektorli'q analizdin' ha'rqi'yli' formulalari'n jazi'w ha'm ali'w qolayli' boladi'. ∇ - differencialli'q vektorli'q operator, wol ko'beymenin' ha'm vektordi'n' qa'siyetin beredi ha'm wolar menen islengen operaciyalarda vektorli'q algebra formulalari'n ha'm differenciallaw usi'llari'n qollani'w kerek boladi'.

4-ma'sele. Eki skalyarli'q funkciyani'n' ko'beymesinin' gradientin esaplan'i'z.

Vektorli'q algebrani'n' usi'llari'nan ha'm ∇ qa'siyetlerinen to'mendegi kelip shi'g'adi'

$$\text{grad}(fg) = \nabla(fg) = \nabla(\tilde{f}g) + \nabla(f\tilde{g}) = g\nabla f + f\nabla g. \quad \blacksquare$$

Solay etip, ko'beymege differencialli'q operaciyanı' qollani'w ushi'n oni' ∇ operatori' orqali' qayta jazi'w kerek, eki qosi'li'wshi'ni' jazi'w (bunda ∇ operatori' da'slep birinshi ko'beytiwshige, keyin ekinshisine ta'sir jasadı') ha'm vektorli'q algebrani'n' usi'llari'nan paydalani'p ko'beytiwshilerdi sonday etip qoyi'wi'mi'z kerek, yag'ni'y ∇ ta'sir jasadı'ug'i'n ko'beytiwshilerdi ∇ operatori'ni'n' asti'nan «shi'g'ari'w» kerek (mi'salg'a, ko'beytiwshilerdi sonday

etip qoyi'wi'mi'z kerek, yag'ni'y ∇ ta'sir jasamaytug'i'n ko'beytiwshiler woni'n' on' ta'repinde qali'wi' kerek, bizde $\tilde{f}$ -penen ta'sir jasaytug'i'n ko'beytiwshi belgilengen).

Ko'beymedegi differencialli'q operaciylardi' esaplaw ushi'n ja'ne eki mi'sal qarap o'temiz.

5-ma'sele. $div[ab] = b \text{ rota} - a \text{ rot} b$ ekenligin da'lillen'iz.

Simvolikali'q esaplap shi'g'ari'wdi' qollani'p esaplaymi'z:

$$\begin{aligned} div[ab] &= (\nabla[ab]) = (\nabla[\tilde{a}b]) + (\nabla[a\tilde{b}]) = (b[\nabla a]) - (a[\nabla b]) \\ &= b \text{ rota} - a \text{ rot} b. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6-ma'sele. $grad(ab) = [b \text{ rota}] + (b\nabla)a + [a \text{ rot} b] + (a\nabla)b$ ekenligin da'lillen'iz.

Skalyarli'q ko'beymege ∇ operatori' menen ta'sir etemiz

$$\nabla(ab) = \nabla(\tilde{a}b) + \nabla(a\tilde{b}) = \nabla(b\tilde{a}) + \nabla(a\tilde{b}).$$

On' bo'limdegi ag'zalardi' tu'rlendirip:

$$\nabla(b\tilde{a}) = \nabla(b\tilde{a}) - \tilde{a}(b\nabla) + \tilde{a}(b\nabla) = [b[\nabla a]] + (b\nabla)a$$

ha'm sa'ykes tu'rde ekinshi qosi'li'wshi'ni' tu'rlendirip birdeylitkin' duri'sli'g'i'n da'lilleymiz. $\blacksquare$

Eki funkciyani'n' ko'beymesine ∇ operatori'ni'n' ta'sirinin' qalg'an jag'daylari'n o'zbetinshe u'yreniw usi'ni's etiledi (usi' bo'limnin' keynindegi 1.12-1.14 shi ma'selelerge qaran').

Ekinshi ta'rtpili differencialli'q operaciylar. Vektorli'q analizdin' qosi'mshalari'nda, tek $grad, div, rot$ operaciylari'ni'n' ori'nlani'wi' menen emes, al wolardi'n' ha'rqi'yli' kombinaciylari' menen is ali'p bari'wg'a tuwra keledi. Ko'pshilik jag'daylarda ekinshi ta'rtpili operaciylar jiyi ushi'rasadi', yag'ni'y tiykarg'i' u'sh operaciyani'n' jupli'q kombinaciylari'. $grad, div, rot$ simvollari'n jupli'qta kombinaciylap, tog'i'z jupli'qti' du'ziwge boladi', biraqta

to'mendegi besewi ma'niske iye boladi':

$$1) \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \nabla]f = 0;$$

$$2) \operatorname{div} \operatorname{grad} f = (\nabla, \nabla f) = (\nabla, \nabla)f = \nabla^2 f = \Delta f;$$

$$3) \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = (\nabla[\nabla \mathbf{a}]) = 0;$$

$$4) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla[\nabla \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}$$

(«rotordi'n' rotori' divergenciyan'i'n' gradientinen laplasiandi' alg'ang'a ten'»);

$$5) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a} \text{ inshi punktke qaran'i'z.}$$

Skalyarli'q differencialli'q operator $\Delta = \nabla^2$ (2-punktke qaran'i'z) Laplas operatori' dep ataladi' ha'm dekartli'q koordinatalar sistemasi'nda to'mendegishe jazi'ladi'

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.14)$$

Integralli'q qatnasi'qlar. Ostrogradti'n' (1.11) ha'm Stoksti'n' (1.13) teoremlari' basqa integralli'q qatnasi'qlardi' ali'wg'a mu'mkinshilik beredi. Mi'salg'a, Ostrogradti'n' (1.11) shi formulasi'na $\mathbf{a} = \mathbf{c}f$ ti qoysaq, bul jerde $\mathbf{c}$ -qa'legen turaqli' vektor, wonda divergenciyan'i' esaplay oti'ri'p to'mendegini tabami'z

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{c}f) = \mathbf{c} \operatorname{grad} f.$$

(1.11) ne qoyi'p, mi'na ten'likke kelemiz

$$\left(\mathbf{c}, \int_V \operatorname{grad} f dV \right) = \left(\mathbf{c}, \oint_S f d\mathbf{S} \right).$$

yamasa, $\mathbf{c}$ vektori'ni'n' erkinligin esapqa ali'p, to'mendegini alami'z

$$\int_V \operatorname{grad} f dV = \oint_S f d\mathbf{S}.$$

Endi, $\mathbf{a} = \mathbf{c}f$ Stoksti'n' formulasi'na qoyami'z. Rotordi' esaplap, to'mendegini tabami'z

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot}(\mathbf{c}f) = -[\mathbf{c} \operatorname{grad} f],$$

wonda

$$-\left(\mathbf{c}, \int_S [\operatorname{grad} f d\mathbf{S}]\right) = \left(\mathbf{c}, \oint_L f d\mathbf{l}\right).$$

Bunnan integralli'q qatnasi'qti' alami'z

$$-\int_S [\operatorname{grad} f d\mathbf{S}] = \oint_L f d\mathbf{l}.$$

O'zbetinshe sheshiw ushi'n ma'seleler

1.9. Esaplan'i'z: a) $\operatorname{grad} r$; b) $\operatorname{grad} r^2$; v) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$, bul jerde $r = |\mathbf{r}|$,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

1.10. $\operatorname{grad}(\mathbf{c}\mathbf{r})$ tabi'n'i'z, bul jerde $\mathbf{c}$ — turaqli' vektor, $\mathbf{r}$ —koordinata basi'nan ju'rgizilgen radius- vektor.

1.11. Esaplan'i'z: a) $\operatorname{div} \mathbf{r}$; b) $\operatorname{rot} \mathbf{r}$.

1.12. Esaplan'i'z: $\operatorname{div} (f\mathbf{a})$.

1.13. Esaplan'i'z: $\operatorname{rot} (f\mathbf{a})$.

1.14. $\operatorname{rot}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div}\mathbf{a}$ - ekenligin da'lillen'iz.

1.15. Esaplan'i'z: a) $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$; b) $\operatorname{div}[\mathbf{c}\mathbf{r}]$, bul jerde $\mathbf{c}$ —turaqli' vektor.

1.16. Esaplan'i'z: a) $\operatorname{rot}(f(r)\mathbf{r})$; b) $\operatorname{rot}[\mathbf{c}\mathbf{r}]$, bul jerde $\mathbf{c}$ —turaqli' vektor.

1.17. $[(\mathbf{M}\nabla)\mathbf{r}] = -2\mathbf{M}$ ten'ligin da'lillen'iz.

1.18. Esaplan'i'z: $\operatorname{grad} \frac{(\mathbf{d}\mathbf{r})}{r^3}$, bul jerde $\mathbf{d}$ —turaqli' vektor.

1.19. Esaplan'i'z: $\operatorname{rot} \frac{[\mathbf{M}\mathbf{r}]}{r^3}$, bul jerde $\mathbf{M}$ —turaqli' vektor.

1.20. Esaplan'i'z: a) $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r}$; b) $(\mathbf{a}\nabla)f(r)$; v) $(\mathbf{a}\nabla)(\mathbf{c}\mathbf{r})$.

1.21. Esaplan'i'z: $\operatorname{div}(\mathbf{b}(\mathbf{r}\mathbf{a}))$, bul jerde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ —turaqli' vektor.

1.22. Qa'legen tuyi'q kontur boylap $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ vektori'ni'n' cirkulyaciyasi'ni'n'

no'lge ten' ekenligin da'lillen'iz.

1.23. $\int \text{rot } \mathbf{a} dV = \oint [d\mathbf{S}\mathbf{a}]$ - integralli'q ten'ligin da'lillen'iz.

1.3. Iymek si'zi'qli' koordinatalar

Elektrodinamika ma'selelerin sheshiwde, dekartli'q penen bir qatarda, basqa koordinatalar sistemasi'n jiyi qollani'wg'a tuwra keledi. Egerde u_i , $i = 1, 2, 3$ sani'ni'n' u'shligi ken'isliktegi qa'legen noqatti'n' jaylasi'wi'n ani'qlaytug'i'n bolsa, wonda u_i shamasin' ken'isliktegi noqatti'n' koordinatalari' dep qarawg'a boladi'. A'dette u_i koordinatalari', x, y, z dekart koordinatalari' arqali' an'lati'li'wi' mu'mkin: $u_i = u_i(x, y, z)$.

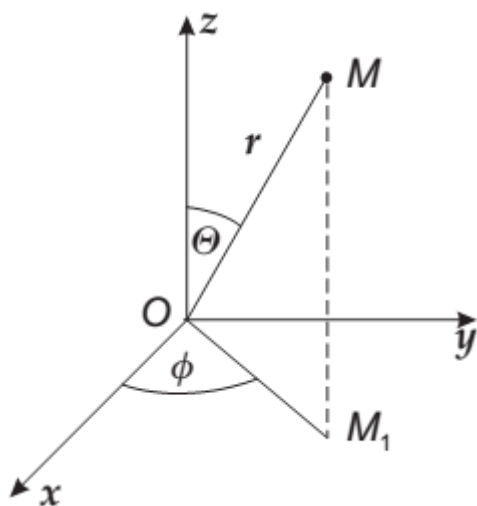
Ken'islikte $u_i(x, y, z) = C_i$ ten'lemesi **koordinatali'q betti** beredi. (dekart koordinatalar sistemasi'nda qanday betler koordinatali'q dep ataladi'?). C_i ge ha'rqi'yli' ma'nislerdi berip, koordinatali'q bettin' uyi'mi'n (semeystvo) alami'z. Solay etip, u'sh koordinatali'q bettin' ($i = 1, 2, 3$ ushi'n) uyi'mi' bar boladi', bunda ken'isliktin' qa'legen noqati' arqali' u'sh uyi'mni'n' ha'rbirinin' bir dana beti o'tedi. Ha'rbir uyi'mni'n' koordinatali'q betleri kesilisetug'i'n si'zi'q **koordinatali'q si'zi'qlar** dep ataladi'. Dekartli'q koordinatalar sistemasi'nda bul si'zi'qlar koordinatali'q ko'sherlerge parallel boladi'. Erkin koordinatalar sistemasi'nda u_i koordinatali'q si'zi'qlari', uli'wma aytqanda iymeklik, sonli'qtan koordinatalar iymek si'zi'qli' dep ataladi'. Egerde ken'isliktin' qa'legen noqati'nda koordinatali'q si'zi'qlar bir-birine ortogonal bolsa, wonda koordinatalar sistemasi' **ortogonalli'q** dep ataladi'. Dara jag'daylarda sferali'q ha'm cilindrlik koordinatalar sistemasi' ortogonalli'q dep ataladi'.

Egerde ken'isliktin' qa'legen noqati'nda koordinatali'q si'zi'qlarg'a uri'nba ju'rgizip ha'm usi' uri'nba boyi'nsha sa'ykes koordinatalardi'n' o'siw ta'repinde birlik $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vektorlari'n bag'i'tlasaq, wonda ortogonalli'q mo'lsherlengen bazisti alami'z. Turaqli' u'sh birlik vektorlar $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ menen ani'qlani'wshi' dekart koordinatalar sistemasi'nan o'zgesheligi, bul bazis noqattan noqatqa o'zgerip

turadi'. Bul zi'yan keltirmeydi, biraqta erkin jaylasi'wshi' M noqati'nda berilgen qa'legen vektordi' (yag'ni'y qa'legen vektorli'q maydan), si'ziqli' e_1, e_2, e_3 kombinatsiyasi' tu'rinde jazi'wg'a boladi'.

Sferali'q ha'm cilindrlik koordinatalar. *Sferali'q koordinatalar sistemasi'n* (s.k.s.) qarap o'temiz, bunda M noqati'ni'n' ken'islikte jaylasi'w hali' to'mendegi u'sh shama menen ani'qlanadi' (3-su'wretke qaran'i'z):

- 1) koordinata basi'nan M noqati'na shekemgi r arali'g'i';
- 2) z ko'sherinin' on' bag'i'ti' ha'm OM kesindisi arasi'ndag'i' θ mu'yeshi;
- 3) OM kesindisinin' xy tegisligine proektsiyasi' OM_1 ha'm x ko'sherinin' on' bag'i'ti' arasi'ndag'i' φ mu'yeshi.



3-su'wret

M noqati'ni'n' dekart koordinatalari' woni'n' sferali'q koordinatalari' menen to'mendegi qatnaslar menen baylani'sqanli'g'i' su'wrette ko'rinip tur:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, & y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

M noqati' barli'q ken'islik boyi'nsha o'tkende, sferali'q koordinatalar to'mendegi sheklerde o'zgeredi

$$\begin{aligned} 0 \leq r < \infty, & \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

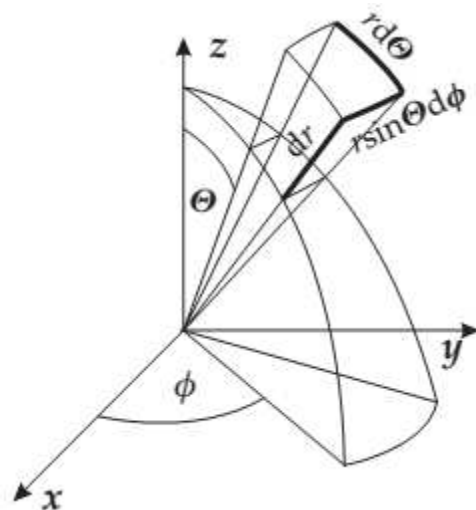
Koordinatali'q betke sheksiz jaqi'n u'sh jupli'q arasi'ndag'i' ko'lem elementin qarap o'temiz: radiuslari' r ha'm $r + dr$ bolg'an eki sferali'qti', θ ha'm $\theta + d\theta$ mu'yeshleri menen ani'qlani'wshi' eki yari'mkonuslardi' ha'm xz tegisligi menen φ ha'm $\varphi + d\varphi$ mu'yeshli payda etiwshi eki yari'mtegisliliklerdi (4-su'wretke qaran'i'z). Bul ko'lem elementi joqari' ta'rtiptin' en' kishisine shekemgi da'llikte, qabi'rg'alari' $r d\theta$, dr ha'm $r \sin\theta d\varphi$ bolg'an tuwri'mu'yeshli parallelepipedti

o'z ishini aladi'. Sonli'qtan, bul parallelepipedtin' ko'lemi mi'nag'an ten'

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi. \quad (1.17)$$

Sa'ykes tu'rde, eki jaqi'n meridianlar ha'm eki jaqi'n paralleller menen shegaralang'an r radiusli' sferani'n' betinin' bir bo'limin, qaptallari' $rd\theta$ ha'm $r \sin\theta d\varphi$ bolg'an sheksiz kishi tuwri'mu'yeshlik tu'rinde qarawg'a boladi', woni'n' maydani' mi'nag'an ten'

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (1.18)$$



4-su'wret

Sfera bo'liminin' dS maydani'ni'n' sferani'n' radiusi'ni'n' kvadrati'na qatnasi', sferada dS betin kesiwshi denelik mu'yeshlin' shamasini' ani'qlaydi'

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2},$$

sonli'qtan sferali'q koordinatalarda

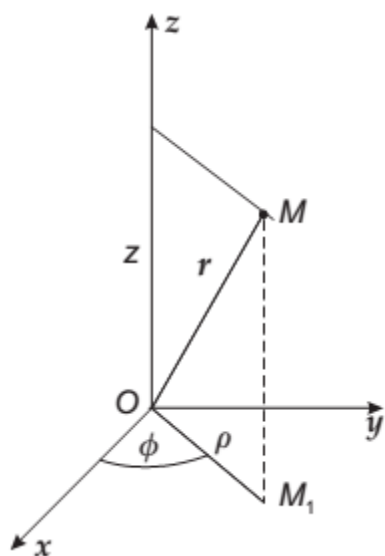
$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (1.19)$$

θ ha'm φ din' barli'q mu'mkin bolg'an ma'nisleri boyi'nsha integrallap, toli'q denelik mu'yeshli alami'z:

$$\Omega = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi, \quad (1.20)$$

sferani'n' maydani'ni'n' $S = 4\pi r^2$ radiusti'n' kvadrati'na qatnasi'na ten'.

Cilindrlik koordinatalar sistemasi'nda (c.k.s.) ken'isliktegi M noqati'ni'n' joylasi'w orni', woni'n' dekartli'q koordinatasi' z ha'm woni'n' xy tegisligine proekciyasi'ni'n' polyarli'q (ρ, φ) koordinatalari' (2 ha'm 3 bo'limlerde cilindrlik koordinatalar ρ, φ dara jag'daylarda r, α menende belgilenedi) menen beriledi. 5-su'wretke muwapi'q M noqati'ni'n' dekartli'q koordinatalari' cilindrlik arqali' to'mendegi formula boyi'nsha an'lati'ladi'



$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (1.21)$$

Egerde M noqati' ken'islikte qa'legen ori'ndi' iyelew mu'mkinshiligine iye bolsa, wonda cilindrlik koordinatalar to'mendegi sheklerde o'zgeredi

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty. \quad (1.22)$$

5-su'wret

ρ ha'm $\rho + d\rho$ radiusli' eki cilindrlik bet penen, z ha'm $z + dz$ qa'ddinde jati'wshi' eki gorizonta' tegislik penen ha'm x ko'sheri menen φ ha'm $\varphi + d\varphi$ mu'yeshlerin qurawshi' ha'm z ko'sheri arqali' o'tiwshi eki tegislik penen shegaralang'an bo'limdi qarap o'temiz. Bul bo'limdi $d\rho, dz$ ha'm $\rho d\varphi$ qabi'rg'alari'na iye tuwri'mu'yeshli parallelepiped dep esaplawg'a boladi', woni'n' ko'lemi mi'nag'an ten'

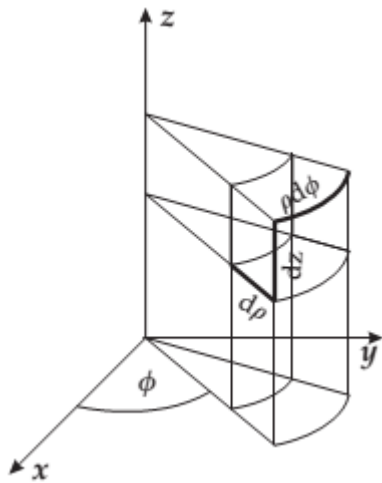
$$dV = \rho d\rho d\varphi dz \quad (1.23)$$

Egerde ρ radiusli' cilindrdin' qaptal betinen koordinata si'zi'qlari'ni'n' eki jupli'g'i' arasi'nan kishkene tuwri'mu'yeshlikti aji'rati'p alsaq, wonda woni'n' maydani' mi'nag'i'n ten' boladi'

$$dS = \rho d\varphi dz \quad (1.24)$$

Ko'lem elementleri ushi'n (1.17), (1.23) formulalar ha'm sferali'q ha'm cilindrlilik koordinatalarda (1.18), (1.24) maydanlar, usi' koordinatalar sistemasi'nda ko'lemlik ha'm betlik integrallardi' esaplawda kerek boladi'.

7-ma'sele. R radiusli' shardi'n' ko'lemi boyi'nsha $\rho = \rho_0(r/R)^2 \sin\theta \cos^2\varphi$ ti'g'i'zli'g'i' menen zaryad bo'listirilgen, bul jerde r, θ, φ — shardi'n' worayi'nan baslani'wshi' sferali'q koordinatalar sistemasi'ndag'i' koordinatalar. Shardi'n' toli'q zaryadi'n tabi'n'i'z.



6-su'wret

Shardi'n' toli'q Q zaryadi' arqali' an'lati'li'wshi' ko'lemlik $\int \rho(\mathbf{r}) dV$ integrali'n sferali'q koordinatalar sistemasi'nda esaplap, to'mendegini alami'z

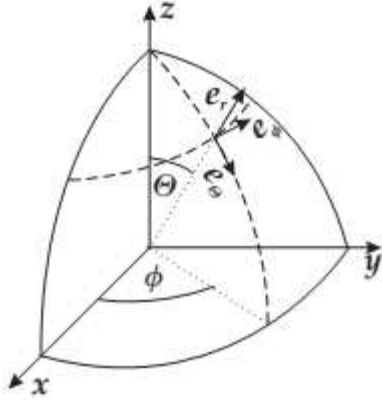
$$\begin{aligned} Q &= \frac{\rho_0}{R^2} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \\ &= \frac{\pi^2}{10} \rho_0 R^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

8-ma'sele. Radiusi' R ha'm biyikligi $2h$ bolg'an cilindrdin' qaptal beti boyi'nsha zaryad $\sigma = \sigma_0 \cos^2\varphi |z|/h$ ti'g'i'zli'g'i' menen bo'listirilgen, bul jerde φ, z cilindrdin' worayi'nan baslani'wshi' cilindrlilik koordinata sistemasi'ni'n' koordinatalari'. Cilindrdin' toli'q zaryadi'n tabi'n'i'z.

$$Q = \int \sigma dS = \frac{\sigma_0 R}{h} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_{-h}^h |z| dz = \frac{\pi}{2} \sigma_0 R h. \quad \blacksquare$$

Iymek si'zi'qli' koordinatalarda differencialli'q operaciylar. Gradient,

divergenciya, rotor si'yaqli' shamalardi' ko'pshilik jag'daylarda qanday da bir iymek si'zi'qli' koordinatalar sistemasi'nda jazg'an maqul boladi'. A'piwayi' geometriyali'q ko'z qarastan wolar ushi'n s.k.s ha'm c.k.s. dag'i' an'latpalardi' tabami'z.



7-su'wret

Sferali'q koordinatalar sistemasi'nda f funkciyasi'ni'n' gradienti bazislik $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ vektorlari' boyi'nsha tarqati'li'wi' mu'mkin (7-su'wret). Qandayda bir bag'i'tqa $\text{grad } f$ tin' proekciyasi', usi' bag'i't boyi'nsha f tin' tuwi'ndi'si' menen sa'ykes keledi ((1.4) qaran'i'z), sonli'qtan, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ bazisinde $\text{grad } f$ vektori'ni'n' komponentlerin esaplaw ushi'n, usi' vektorlar menen ani'qlani'wshi' bag'i't boyi'nsha f tin' tuwi'ndi'si'n esaplaw kerek:

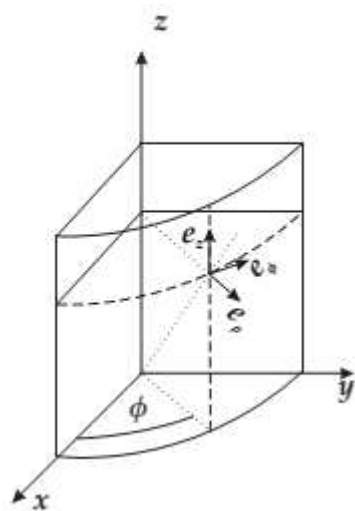
$$(\text{grad } f \cdot \mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial l_i}.$$

Bazislik vektorlar boylap kishi awi'si'wlarda sferali'q koordinatalar sistemasi' to'mendegishe bolsa

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\varphi = r \sin\theta d\varphi$$

(4-su'wretke qaran'i'z), wonda

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.25)$$



8-su'wret

Cilindrlilik koordinatalar sistemasi'nda bazislik $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ vektorlari' boylap sheksiz kishi awi'si'w (8-su'wret) to'mendegige ten' (6-su'wretke qaran'i'z)

$$dl_\rho = d\rho, \quad dl_\varphi = \rho d\varphi, \quad dl_z = dz,$$

Solay etip, cilindrlilik koordinatalar sistemasi'nda gradient to'mendegishe jazi'ladi'

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (1.26)$$

Iymek si'zi'qli' koordinatalarda divergenciyani' ha'm rotordi' esaplaw wolardi'n' invariantli'q ani'qlamalari'na (1.7), (1.12) tiykarlang'an. Sferali'q koordinatalar sistemasi'nda ko'lem elementin qarap o'temiz (4-su'wret), ha'm woni'n' beti arqali' ag'i'mdi' esaplaymi'z. Vektorli'q maydandi' to'mendegi tu'rde jazami'z

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

ha'm, $r + dr$ ha'm r radiusli' sfera elementi arqali' $\mathbf{a}$ vektori'ni'n' ag'i'mi'n da'slep esaplaymi'z:

$$\begin{aligned} & a_r(r + dr, \bar{\theta}, \bar{\varphi}) \cdot (r + dr)^2 \sin\theta d\theta d\varphi - a_r(r, \bar{\theta}, \bar{\varphi}) \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ & \approx \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} \frac{1}{r^2} dV. \end{aligned}$$

ha'm

$$a_\varphi(\bar{r}, \bar{\theta}, \varphi + d\varphi) \cdot [dr \cdot r d\theta] - a_\varphi(\bar{r}, \bar{\theta}, \varphi) \cdot [dr \cdot r d\theta] \approx \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin\theta} dV.$$

Shamalardi'n' u'shewinin' barli'g'i'n qosi'p ha'm dV g'a bo'lip, sferali'q koordinatalar sistemasi'nada divergenciya ushi'n an'latpani' tabami'z:

$$\text{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (1.27)$$

Rotordi'n' invariantli'q ani'qlamasi'nan (1.12) to'mendegi kelip shi'g'adi', yag'ni'y qandayda bir koordinatalar sistemasi'ni'n' M noqati'ndag'i' $rot \mathbf{a}$ komponentin ani'qlaw ushi'n, M noqati'n o'z ishine ali'wshi' ha'm usi' noqat arqali' ju'rgizilgen bazislik vektorg'a perpendikulyar sheksiz kishkene tegis maydansha menen shegaralang'an u'sh kontur boyi'nsha $\mathbf{a}$ ni'n' cirkulyაციyasi'n esaplaw kerek boladi'. Cilindrluk koordinatalar sistemasi'nda elementar ko'lem elementinin' to'mengi qaptali' menen shegaralang'an tuwri' mu'yeshli kontur boylap $\mathbf{a}$ ni'n' cirkulyაციyasi'n esaplaymi'z (6-su'wret). Tuwri'mu'yeshliktin' qaptallari' koordinatali'q si'zi'qlar boyi'nsha bag'i'tlang'an, al shamalari' boyi'nsha $(\rho + d\rho)d\varphi, d\rho, \rho d\varphi, d\rho$ larg'a ten' bolsa, wonda $\mathbf{a}$ ni'n' cirkulyაციyasi' to'rt qosi'li'wshi' arqali' an'lati'ladi':

$$a_\varphi(\rho + d\rho, \bar{\varphi}, z)(\rho + d\rho)d\varphi - a_\rho(\bar{\rho}, \varphi + d\varphi, z)d\rho - a_\varphi(\rho, \bar{\varphi}, z)\rho d\varphi + a_\rho(\bar{\rho}, \varphi, z)d\rho \approx \left[\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right] d\rho d\varphi.$$

Ali'ng'an an'latpani', qaptaldi'n' $dS = \rho d\rho d\varphi$ maydani'na bo'lip, bazislik $\mathbf{e}_z$ vektori'ni'n' bag'i'ti'nda $rot \mathbf{a}$ ni'n' komponentin tabami'z:

$$(rot \mathbf{a})_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}. \quad (1.28)$$

Sa'ykes tu'rde qalg'an eki komponentleride esaplanadi':

$$(rot \mathbf{a})_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}. \quad (1.29)$$

$$(rot \mathbf{a})_\varphi = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}. \quad (1.30)$$

Usi'nday jollar menen cilindrluk koordinatalarda divergenciyaning ha'm sferali'q koordinatalarda rotordi' tabi'wg'a boladi', bul o'zbetinshe islewge tapsi'rma boladi'.

$grad f$ ha'm $div \mathbf{a}$ ushi'n an'latpalardan kelip shi'qqan halda, $\Delta f = div grad f$ ti esaplap, iymek si'zi'qli' koordinatalarda Laplas operatori'n tabi'wg'a boladi'.

Sferali'q koordinatalar sistemasi'nda Δ operatori' to'mendegi tu'rge iye:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}, \quad (1.31)$$

bul jerde Δ_r – Laplas operatori'ni'n' radialli'q, al $\frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}$ – mu'yeshlik bo'limleri. θ, φ mu'yeshi boyi'nsha $\Delta_{\theta\varphi}$ tuwi'ndi'g'a iye bolsa, wonda Δ_r ushi'n ani'q an'latpani' mu'yeshlik o'zgeriwshilerden g'a'rezli bolmag'an funkciyag'a Laplas operatori'ni'n' ta'siri na'tiyjesin esaplaw arqali' tabi'wg'a boladi'.

9-ma'sele. $\Delta f(r)$ di esaplan'i'z, bul jerde $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\Delta f(r) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(r) = \operatorname{div} \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{r} = \mathbf{r} \operatorname{grad}(r^{-1} \partial f / \partial r) + r^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} \operatorname{div},$$

ekenligin esapqa ali'p, mi'nani' tabami'z

$$\Delta f(r) = \Delta_r f(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) f. \quad \blacksquare$$

Solay etip,

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (1.32)$$

$\Delta f(r)$ ti to'mendegishe jazi'wg'a bolatug'i'nli'g'i'n atap o'tken maqul boladi'

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf(r)). \quad (1.33)$$

10-ma'sele. $f(\rho)$ funkciyasi'na Laplas operatori'ni'n' ta'sirinin' na'tiyjesin tabi'n'i'z, bul jerde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dekart koordinatalari'nda

$$\Delta f(\rho) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\rho).$$

x boyi'nsha f tin' ekinshi tuwi'ndi'si'n esaplap,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) = \frac{x^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{x^2}{\rho^3} \frac{\partial f}{\partial \rho},$$

ha'm sa'ykes tu'rde y boyi'nsha ekinshi tuwi'ndi'ni' ali'p, to'mendegini tabami'z

$$\Delta f(\rho) = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad (1.34)$$

yamasa

$$\Delta f(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right). \quad \blacksquare \quad (1.35)$$

Cferali'q ha'm cilindrluk koordinatalarda gradient, divergenciya, rotor ha'm Laplas operatori' ushi'n formulalardi'n' twoli'q mag'li'wmati' qollanba aqi'ri'ndag'i' qosi'mshada keltirilgen.

O'zbetinshe sheshiw ushi'n ma'seleler

- 1.25. Cilindrluk koordinatalarda $\operatorname{div} \mathbf{a}$ ushi'n an'latpani' tabi'n'i'z.
- 1.26. Sferali'q koordinatalarda $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ ushi'n an'latpani' tabi'n'i'z.
- 1.27. Sferali'q ha'm cilindrluk koordinatalar sistemasi'nda $\operatorname{rot} \mathbf{r}, \operatorname{div} \mathbf{r}$ ha'm $\operatorname{grad}(\mathbf{ar})$ di esaplan'i'z ($\mathbf{a}$ — turaqli' vektor).
- 1.28. Sferali'q koordinatalarda $\Delta f(r)$ ushi'n, to'mnedegi u'sh tu'rinin' ekvivalentligin tekserin'iz:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right), \quad \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf), \quad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}.$$

- 1.29. Cilindrluk koordinatalarda divergenciya ha'm gradient ushi'n an'latpani' qollani'p, Laplas operatori'ni'n' $f(\rho)$ funkciyasi'na ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) ta'sirinin' na'tiyjesin tabi'n'i'z ((P.5), (P.6) qaran'i'z).
- 1.30. $\Delta \varphi = 0$, Laplas ten'lemesinin' sferali'q simmetriyali' sheshimin tabi'n'i'z.
- 1.31. $\Delta \varphi = 0$, Laplas ten'lemesinin' cilindrluk simmetriyali' sheshimin tabi'n'i'z.

Usi'ni's etiliwshi a'debiyatlar: [1], qosi'msha; [2], I bap; [3], I bap; [4], I bap; [5], qosi'msha.

2. Turaqli' elektrlik maydan

Turaqli' elektrlik maydanni'n' kernewliligi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, Maksvell ten'lemelerin qanaatlandi'radi'

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2.2)$$

bul jerde $\rho(\mathbf{r})$ – elektrlik maydandi' payda etiwshi zaryadlardi'n' ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i'. (2.1) ten'lemenin' integralli'q formasi' to'mendegishe jazi'ladi'

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q_{\text{oxv}} \quad (2.3)$$

(bul jerde $Q_{\text{oxv}} = \int_V \rho dV$ –tuyi'q S betinin' ishinde jaylasi'wshi' zaryad, wol boyi'nsha shep ta'repinde integrallaw a'melge asi'ri'ladi'), bul Gaussti'n' elektrostatikali'q teoremasi'n an'latadi'. Birqatar joqari' da'rejeli simmetriyali' ma'selelerde, Gauss teoremasi' maydanni'n' kernewliligin koordinata funkciyasi' retinde tabi'wg'a mu'mkinshilik beredi.

(2.2) ten'leme, elektrostatikali'q potencialdi' to'mendegi qatnasta kiritiwge mu'mkinshilik beredi.

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (2.4)$$

Turaqli' elektrlik maydandi', $\mathbf{E}$ kernewliligi menen ten'dey da'rejede si'patlawshi' $\varphi(\mathbf{r})$ potenciali' Puasson ten'lemesin qanaatlandi'radi'

$$\nabla\varphi = -4\pi\rho. \quad (2.5)$$

Radius-vektori' $\mathbf{r}'$ bolg'an noqatli'q e zaryadi' $\mathbf{r}$ noqati'nda maydandi' payda etedi, woni'n' potenciali' ha'm kernewliligi to'mendegi an'latpa menen beriledi

$$\varphi = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{E} = \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.6)$$

(Kulon ni'zami').

Egerde zaryadlar ko'lemlik $\rho(\mathbf{r}')$ ti'g'i'zli'g'i' menen bo'listirilgen bolsa,

wonda noqatli'q $\rho(\mathbf{r}')dV'$ zaryadi' ushi'n Kulon ni'zami'na ha'm superpoziciya principine muwapi'q, $\mathbf{r}$ radius vektori'na iye baqlaw noqati'ndag'i' φ potentsiali'n ha'm $\mathbf{E}$ kernewliligini to'mendegi tu'rde ko'rsetiwge boladi':

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (2.8)$$

(2.7) shi potentsial, (2.5) shi Puasson tenglamasini qanaatlandiradi' ha'm egerde ko'lemlik integral jitynalsa, wonda woni'n' sheksiz ken'isliktegi sheshimi bolip tabiladi'.

Egerde zaryadlar ken'islikte σ betlik ti'g'i'zli'g'i' menen betti boylap bo'listirilgen bolsa, wonda potentsial to'mendegi formula bo'yinsha esaplanadi'

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.9)$$

τ si'ziqli' ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadlang'an si'ziqli' kontur, to'mendegi potentsialg'a iye elektrlik maydandi' payda etedi

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\tau(\mathbf{r}')dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.10)$$

Zaryadlar sistemasi'nan uzaq araliqlarda (2.7), (2.8) an'latpalar a'piwayi'lasadi'. Egerde koordinata bosi'nan baqlaw noqati'na ju'rgizilgen $\mathbf{r}$ radius vektori' ha'm zaryadqa ju'rgizilgen radius vektor zaryadlang'an sistemani'n' ishinde ali'nsa, wonda $r \gg a$ (a — sistemani'n' si'ziqli' o'lshemleri) bolg'anda

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{dr}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta}x_{\alpha}x_{\beta}}{2r^5}, \quad (2.11)$$

bul jerde to'mendegi belgilewler kiritilgen

$$q = \int \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{d} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV, \quad (2.13)$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}) (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dV. \quad (2.14)$$

(2.12), (2.13) ha'm (2.14) shamalari' zaryadlar sistemasi'ni'n' sa'ykes tu'rde toli'q zaryadi', dipolli'q momenti ha'm kvadрупwolli'q momenttin' tenzori' dep ataladi'.

$\mathbf{r}_i$ ($i = 1, \dots, N$) radius vektorlari'na iye noqatlarda joylasqan e_i zaryadlari' jag'dayi'nda, zaryadlardi'n' ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i' δ – funkciyasi' arqali' an'lati'ladi':

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (2.15)$$

al (2.13), (2.14) shamalar to'mendegi tu'rge iye boladi'

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{r}_i, \quad (2.16)$$

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N e_i (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}). \quad (2.17)$$

Egerde ken'islikte zaryadlar σ betlik ti'g'i'zli'g'i' menen bet boylap bo'listirilgen bolsa, wonda twoli'q zaryad, dipolli'q moment ha'm kvadрупolli'q momenttin' tenzori' (2.12), (2.13), (2.14) integrallari' arqali' an'lati'ladi', bunda to'mendegishe almasi'w a'melge asi'ri'lg'an

$$\rho(\mathbf{r}) dV \rightarrow \sigma(\mathbf{r}) dS, \quad (2.18)$$

al integrallaw zaryadlang'an bet boyi'nsha o'tkeriledi.

Sa'ykes tu'rde τ si'zi'qli' ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadlang'an si'zi'qli' kontur ushi'n (2.12), (2.13), (2.14) integrallari'nda almasi'w a'melge asi'ri'ladi'

$$\rho(\mathbf{r})dV \rightarrow \tau(\mathbf{r})dl, \quad (2.19)$$

al integrallaw zaryadlang'an kontur boyi'nsha o'tkeriledi.

Elektrostatikali'q maydanni'n' energiyasi'

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dV \quad (2.20)$$

to'mendegi formula menende esaplani'wi' mu'mkin

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (2.21)$$

Ko'lemlik $\rho_1(\mathbf{r})$ ha'm $\rho_2(\mathbf{r})$ ti'g'i'zli'qlari' menen zaryadlang'an eki sistemani'n' elektrostatikali'q ta'sir etisiw energiyasi' to'mendegi formula menen esaplanadi'

$$U = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \quad (2.22)$$

$\varphi(\mathbf{r})$ potentsiali'na iye si'rtqi' elektrlik maydani'nda $\rho(\mathbf{r})$ ti'g'i'zli'g'i' menen bo'listirilgen zaryadlardi'n' potentsialli'q energiyasi' to'mendegi an'latpa menen ani'qlanadi'

$$U = \int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) dV. \quad (2.23)$$

Egerde si'rtqi' elektrlik maydanni'n' $\varphi(\mathbf{r})$ potentsiali', zaryadlang'an sistema boylap kishkene o'zgeriske iye bolsa, wonda (2.23) an'latpa ji'ynali'wshi' qatar menen almasti'ri'ladi'

$$U = q\varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{dE} + \frac{1}{6} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots \quad (2.24)$$

Bul jerde si'rtqi' elektrlik maydanni'n' potenciali' ha'm kernewliligi, ha'mde potencialdan tuwi'ndi', qarali'p ati'ri'lg'an sistemani'n' ishinde jati'wshi' $\mathbf{r}$ radius vektori'na iye noqatta ali'nadi'. Bul ishki noqat dekart koordinatalar sistemasi'ni'n' baslamasi' boli'p xi'zmet etedi, wonda $\mathbf{d}$ ha'm $Q_{\alpha\beta}$ shamalari' ani'qlang'an.

Si'rtqi' elektrlik maydanda kernewliligi $\mathbf{E}$ bolg'an zaryadlang'an sistemag'a tu'sirilgen $\mathbf{F}$ ku'shi ha'm $\mathbf{K}$ ku'sh momenti to'mendegilerge ten'

$$\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E} dV, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{K} = \int [\mathbf{r} \mathbf{E}] \rho dV. \quad (2.26)$$

Dara jag'daylarda, si'rtqi' kvazibirqi'yli' maydani'nda $\mathbf{d}$ dipolli'q momentine iye elektroneytral sistemada (2.25), (2.26) qatnaslari' to'mendegi tu'rdi qabi'l etedi

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{d} \mathbf{E}) = (\mathbf{d} \nabla) \mathbf{E}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{K} = [\mathbf{d} \mathbf{E}]. \quad (2.28)$$

Maksvellik kernew tenzori' ja'rdeminde

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(E_{\alpha} E_{\beta} - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (2.29)$$

Ishinde ρ ko'lemlik ti'g'i'zli'q penen zaryad bo'listirilgen V ko'lemge ta'sir etiwshi elektrostatikali'q ku'shtin' qosi'ndi'si'n (2.25), usi' ko'lem betine tu'sirilgen ku'sh arqali' esaplaw mu'mkin:

$$F_{\alpha} = \int_V \rho E_{\alpha} dV = \oint_S T_{\alpha\beta} n_{\beta} dS, \quad (2.30)$$

bul jerde $\mathbf{n}$ — V ko'lemli qorshawshi' tuyi'q S betine ju'rgizilgen si'rtqi' normaldi'n' orti'.

Ma'seleler sheshiwge mi'sallar

1-ma'sele. R radiusli' shar turaqli' ρ ti'g'i'zli'g'i'na iye Q zaryadi' menen ko'lem

boylap zaryadlang'an. Shardi'n' ishinde ha'm si'rti'ndag'i' E maydan kernewliliginin' bo'listiriliwin tabi'n'i'z.

Zaryadlardi'n' bo'listiriliwindegisi sferali'q simmetriyag'a muwapi'q maydanni'n' kernewliligi E radius boyi'nsha bag'i'tlang'an, al E vektori'ni'n' moduli tek shardi'n' orayi'na shekemgi arali'qtan g'a'ezli: $E(\mathbf{r}) = E(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$. Gausti'n' (2.3) teoremasi'n, konzentrik zaryadlang'an shardi'n' $r \leq R$ radiusli' sferali'q betine qwollani'p, to'mendegini alami'z

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3; \quad E = \frac{4}{3}\pi\rho r; \quad E = \frac{4}{3}\pi\rho r = \frac{Q}{R^3}\mathbf{r}.$$

Sa'ykes, $r > R$ radiusli' sferali'q bet ushi'n mi'nag'an iye bolami'z:

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3; \quad E = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{r^2}; \quad E = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{r^3}\mathbf{r} = \frac{Q}{r^3}\mathbf{r}.$$

Solay etip,

$$E(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho r = \frac{Q}{R^3}\mathbf{r}, & r \leq R \text{ ushi'n} \\ \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{r^3}\mathbf{r} = \frac{Q}{r^3}\mathbf{r}, & r > R \text{ ushi'n} \end{cases} \quad \blacksquare \quad (2.31)$$

Shardi'n' si'rti'ndag'i' maydan mi'naday, yag'ni'y egerde barli'q zaryadlar woni'n' orayi'nda ja'mlengen dep esaplansa, al shardi'n' ishindegisi maydan shardi'n' orayi'nan ju'rgizilgen arali'qqa tuwri' proporcional boladi'.

2-ma'sele. σ betlik ti'g'i'zli'g'i' menen birtekli zaryadlang'an sheksiz tegisliktin' payda etken elektrlik maydanni'n' kernewliligin tabi'n'i'z.

Maydan kernewliliginin' tegislikke perpendikulyar ekenligisi simmetriyadan kelip shi'g'adi'. Ja'rdemshisi bet si'pati'nda tegislikke parallel bolg'an ha'm wonnan ten'dey arali'qta jaylasqan cilindrdin' tiykarlari'n ali'p, Gauss teoremasi'n qollanami'z. Qaptal betleri boyi'nsha E vektori'ni'n' ag'i'mi' no'lge ten', sebebi $E \perp \mathbf{n}_{qapt.}$, sonli'qtan $\oint E d\mathbf{S} = 2ES$, S — cilindrdin' tiykarlari'ni'n' maydani'.

Cilindrdin' beti menen qorshalg'an zaryad σS ke ten'. Sonli'qtan (2.3) muwapi'q to'mendegini alami'z

$$E = 2\pi\sigma.$$

Kernewlilik tegisliktin' ha'rbir ta'repinde qarama-qarsi' bag'i'tqa iye boladi', bunnan normal qurawshi'lari' tegislik arqali' o'tkende $4\pi\sigma$ sekirmege ushi'raydi'.

■

3-ma'sele. *Ko'lemi boyi'nsha toli'q Q zaryadi' menen birtekli zaryadlang'an, R radiusli' shardi'n' payda etken elektrlik maydanni'n' potentsiali'ni'n' bo'listiriliwin tabi'n'i'z.*

Usi' ha'm basqada ma'selelerde simmetriyani'n' bar boli'wi', dara tuwi'ndi'da o'zgeriwshilerdi aji'rati'w ha'm oni' a'piwayi' differentsialli'q ten'lemelerge keltiriw joli' menen (2.5) Puasson ten'lemesin tikkeley sheship, potentsialdi' tabi'wg'a mu'mkinshilik beredi. Qarali'p ati'ri'lg'an maydanni'n' potentsiali', tek shardi'n' orayi'na shekemgi arali'qtan g'a'rezli ekenligi tu'sinikli $\varphi = \varphi(r)$, sonli'qtan (1.32) sine muwapi'q Puasson ten'lemesi mi'na tu'rdi iyeleydi:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi\rho, \quad (2.32)$$

bul jerde

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \equiv \frac{Q}{4\pi R^3/3} & r \leq R, \quad \text{bolg'anda} \\ 0 & r > R, \quad \text{bolg'anda} \end{cases}$$

Integrallaw arqali' mi'nalardi' tabami'z:

1) shardi'n' ishinde ($r \leq R$)

$$r^2 \frac{d\varphi_1}{dr} = -\frac{4\pi\rho_0 r^3}{3} + C_1, \quad \varphi_1 = -\frac{4\pi\rho_0}{3} \frac{r^2}{2} - \frac{C_1}{r} + C_2;$$

$r = 0$ bolg'anda potentsialdi'n' sheklengenlik sha'rtinen $C_1 = 0$ ekenligi kelip shi'g'adi'.

2) shardi'n' si'rti'nda ($r > R$)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0, \quad \varphi_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4;$$

$\varphi|_{r=\infty} = 0$ sha'rtinen $C_4 = 0$ ekenligi kelip shi'g'adi'.

C_2 ha'm C_3 integrallaw turaqli'lari', $r = R$ bolg'andag'i' shegarali'q $\varphi_1 = \varphi_2$ ha'm $\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{d\varphi_2}{dr}$ sha'rtleri menen ani'qlanadi' (sebebi (2.32) nin' on' ta'repi bul noqatta u'ziliske iye boladi'), wol to'mendegi ten'lemelerga ali'p keledi:

$$\begin{cases} -2\pi\rho_0 R^2/3 + C_2 = -C_3/R, \\ -4\pi\rho_0 R/3 = C_3/R^2. \end{cases}$$

Usi'lardi' sheship, turaqli'lardi'n' ma'nislerin ani'qlaymi'z $C_3 = -Q$, $C_2 = 3Q/(2R)$ ha'm potencialdi' tabami'z

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{3Q}{2R} - \frac{Q}{2R^3} r^2 & 0 \leq r \leq R, \quad \text{bolg'anda} \\ \frac{Q}{r} & r > R, \quad \text{bolg'anda} \end{cases} \quad \blacksquare$$

4-ma'sele. $\varphi(r) = (q/r)\exp(-\alpha r)$ tu'rine iye sferali'q koordinatalarda, bul jerde α, q – turaqli'lar, zaryadlardi'n' qanday bo'listiriliwinde potencial payda etiledi?

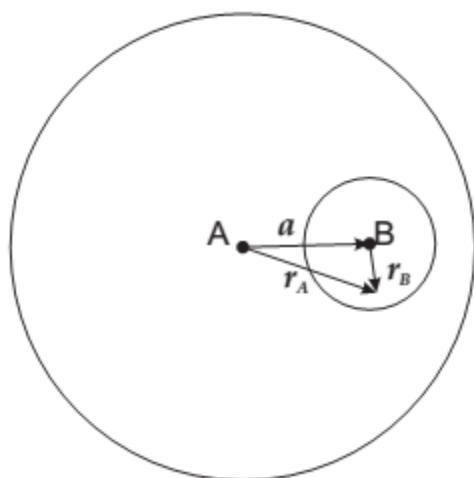
Potencialg'a Laplas operatori' menen ta'sir etip to'mendegini alami'z

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= q\Delta\frac{e^{-\alpha r}}{r} = q\Delta\frac{1}{r} + q\Delta\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r} = -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \frac{q}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left(r\frac{e^{-\alpha r} - 1}{r}\right) \\ &= -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r} \end{aligned}$$

(Δ operatori'ni'n' $1/r$ ge ta'sirinin' na'tiyjesin (2.5), (2.6), (2.15) formulalari'nan ali'wg'a boladi'). Solay etip, koordinata basi'nda q noqatli'q zaryadi' ha'm $\rho = -\frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{4\pi r}$, $\int \rho dV = -q$ ti'g'i'zli'g'i'na iye sferali'q simmetriyali' bo'listirilgen ko'lemlik zaryadi' bar boladi'. ■

5-ma'sele. Ko'lemi boyi'nsha turi'qli' ρ ti'g'i'zli'g'i' menen birtekli zaryadlang'an sharda, orayi' shardi'n' orayi'nan a arali'qta joylasqan sferali'q

jolaqsha bar. Jolaqsha toli'g'i' menen shardi'n' ishinde jaylasqan. Jolaqsha ishindegi maydanni'n' kernewliligin tabi'n'i'z.



9-su'wret

Superpoziciya principin qwollani'p, orayi' A noqati'nda jaylasqan tutas shardi'n' maydani'ni'n' E_A kernewliligin (9-su'wretke qaran'i'z), worayi' V noqati'nda jaylasqan kishi shardi'n' maydani'ni'n' E_V kernewliligi ha'm jolaqshag'a iye denenin' E kernewliliginin' qosi'ndi'si' tu'rinde ko'rsetiwge boladi'. Bunnan

$$E = E_A - E_V. \quad (2.33)$$

(2.31) ne muwapi'q jolaqsha ishindegi noqatlar ushi'n $E_A = \frac{4}{3}\pi\rho r_A$, $E_B = \frac{4}{3}\pi\rho r_B$. Sebebi $r_A - r_B = a$, bolsa, wonda

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho a$$

Solay etip, jolaqsha ishindegi maydan birqi'yli'. Egerde R_A ha'm R_B radiuslari' belgili bolsa, wonda ken'isliktin' qa'legen noqati'nda jolaqshag'a iye shardi'n' maydani'n tabi'wg'a (2.33) formula mu'mkinshilik beretug'i'nli'g'i'na kewil audari'wi'mi'z kerek. ■

6-ma'sele. Betlik ti'g'i'zli'g'i' σ menen birtekli zaryadlang'an a radiusli' do'n'gelek jin'ishke diskani'n' ko'sherindegi elektrlik maydanni'n' kernewliligi E ni ha'm potenciali' φ di tabi'n'i'z.

Oz ko'sherin diskani'n' ko'sheri boylap bag'i'tlaymi'z. Woraydan ρ arali'qta

jaylasi'wshi' dS maydani'na iye diska elementi, diska ko'sherinde z koordinatasi'na iye noqatta $d\varphi = \sigma dS / \sqrt{x^2 + \rho^2}$ potentsiali'n payda etedi. Usi' noqatta diskani'n' barli'g'i' to'mendegi potentsialdi' payda etedi

$$\varphi = \int \frac{\sigma dS}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Polyarli'q (ρ, α) koordinatalar sistemasi'nda integraldi' esaplap, mi'nani' alami'z

$$\varphi = \sigma \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi\sigma \left(\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right). \quad (2.34)$$

Ko'sherdegi elektrlik maydanni'n' kernewliligi E , a'dette ko'sher boylap bag'i'tlang'an, sonli'qtan (2.4) shi formula mi'nani' beredi

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2\pi\sigma \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \text{sign}z \right). \quad (2.35)$$

Kernewlilik (2.8) shi formula menen esaplaw ((2.18) menen almasti'ri'wda) usi' na'tiyjege ali'p keledi (tekserip ko'rin'iz!). Fizikali'q pikirlewde, $|z|$ u'lken ma'nislerinde diskani'n' maydani' noqatli'q zaryadti'n' maydani'na, al kishi ma'nislerde sheksiz tegisliktin' maydani'na uqsas ekenligi tu'sinikli. Buni'n' haqi'yqatli'g'i'n, $|z| \gg a, |z| \ll a$ bolg'an jag'daylarda (2.34), (2.35) an'latpalari'n analizlep biliwge boladi'. ■

7-ma'sele. *2l uzi'nli'qqa iye sabaq kesindisi, si'ziqli' τ ti'g'i'zli'g'i' menen birtekli zaryadlang'an. Ken'isliktin' qa'legen noqati'ndi'g'i' potentsialdi' tabi'n'i'z.*

Koordinata sistemasi'ni'n' basi'n kesindi worayi'nda ha'm z ko'sheri boylap bag'i'tlang'an dep qabi'l etemiz. Sonda (2.10) na muwapi'q

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{-l}^{+l} \frac{\tau dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z' - z)^2}},$$

Integrallaw mi'nani' beredi

$$\varphi = \tau \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (l - z)^2} + l - z}{\sqrt{\rho^2 + (l + z)^2} - l - z}, \quad (2.36)$$

bul jerde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Kesindi orayi'na jaqi'n jerdegi maydandi' qarap o'temiz: $|x|, |y|, |z| \ll l$. Bo'lshektin' ali'mi'ndag'i' logarifm asti'ndag'i' x, y, z tu'sirip ha'm bo'limindegi korendi tarqati'p

$$\sqrt{\rho^2 + (l + z)^2} = (l + z) \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{(l + z)^2}} \approx (l + z) \left(1 + \frac{\rho^2}{2(l + z)^2} \right),$$

mi'nani' tabami'z

$$\varphi \approx -2\tau \ln \frac{\rho}{2l}. \quad (2.37)$$

Kesindi do'gereginde potencial tek ρ dan g'a'rezli bwolg'anli'g'i' sebepli, maydan cilindrlilik koordinatalar sistemasi'nda tek bir komponentag'a iye boladi' ((1.26) na qaran'i'z).

$$E_\rho \approx \frac{2\tau}{\rho}. \quad (2.38)$$

Gauss teoremasi' boyi'nsha zaryadlang'an sheksiz tuwri' jin'ishke o'tkizgishtin' maydani'ni'n' kernewliligini tabi'w arqali' son'g'i' na'tiyjeni an'sat ali'wg'a boladi'.

$l \ll r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ bolg'anda, jin'ishke o'tkizgish kesindisinen ali'sta mi'ni'g'an iye bolami'z

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm l)^2} \approx r(1 \pm zl/r^2).$$

(2.36) an'latpasi'n a'piwayi'lasti'ri'p, $2\tau l$ noqatli'q zaryadi'ni'n' potenciali'n alami'z:

$$\varphi \approx \tau \ln \frac{r - zl/r + l - z}{r + zl/r - l - z} = \tau \ln \frac{r + l}{r - l} \approx \frac{2\tau l}{r}. \quad \blacksquare \quad (2.39)$$

8-ma'sele. *Superpoziciya principin qollani'p, σ betlik ti'g'i'zli'g'i' menen birtekli zaryadlang'an a radiusli' sferani'n' payda etken elektrstatikali'q potenciali'n tabi'n'i'z.*

Kulon ni'zami'n ha'm superpoziciya principin qollani'w (2.9) shi' an'laipag'a ali'p keledi. Sebebi potencialdi'n' ma'nisi tek sferani'n' worayi'na shekemgi arali'qtan g'a'rezli (wonda koordinata basi' jaylasqan), sonda uli'wmali'q penen

shegaralanbay baqlaw noqati'n z ko'sherinde alami'z. $|r'| = a$, $|r - r'| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta'}$, al sferadag'i' ko'lem elementi $dS' = a^2 \sin\theta' d\theta' d\alpha'$ r', θ', α' –sferali'q koordinata sistemasi'ndag'i' koordinatalar ekenliklerin esapqa ali'p, to'mendegige kelemiz

$$\varphi = 2\pi\sigma a^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta'}} = \frac{2\pi\sigma a}{r} (r + a - |r - a|).$$

Sferani'n' ishindeg i ($r < a$) ha'm si'rti'ndag'i' ($r > a$) bo'limlerdi ko'rip shi'g'i'p, mi'nag'an iye bwolami'z

$$\varphi(r) = \begin{cases} 4\pi a \sigma & r \leq a, \text{bolg'anda} \\ \frac{4\pi a^2 \sigma}{r} & r > a, \text{bolg'anda} \end{cases} \quad \blacksquare$$

9-ma'sele. R radiusli' sfera $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ betlik ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadlang'an. Ken'isliktin' qa'legen noqati'ndi'g'i' skalyarli'q potencialdi' tabi'n'i'z.

Uli'wma jag'dayda (2.7), (2.9), (2.10) shi' formulalar zaryadlardi'n' ti'g'i'zli'g'i' boyi'nsha maydanni'n' potenciali'n ani'qlaydi' (egerde wolardag'i' integrallar ji'ynalsa). Integrallardi' esaplap shi'g'ari'w ushi'n sferali'q funkciyalar (multipolli'q tarqati'w) boyi'nsha, $|r - r'|^{-1}$ funkciyasi'ni'n' tarqati'li'wi'n qollang'an maqul boladi':

$$\frac{1}{|r - r'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \alpha) Y_{lm}^*(\theta', \alpha'). \quad (2.40)$$

Bul jerde $r_{<} = \min(r, r')$; $r_{>} = \max(r, r')$; Y_{lm} –sferali'q funkciya (bul haqqi'nda birqansha mag'li'wmatlar 2-qosi'mshada keltirilgen); θ, α – r vektori'ni'n' mu'yeshi; θ', α' – qandayda bir sferali'q koordinatalar sistemasi'ndag'i' r' vektori'ni'n' mu'yeshi. (2.40) shi' qatardi'n' ag'zalari'ni'n' r', θ', α' –g'a'rezliligi faktorizaciyalang'an tu'rde aji'rati'lg'anli'g'i' sebepli, wol (2.7), (2.9), (2.10) formulalari'ndag'i' integrallawdi' a'piwayi'lasti'radi' ha'm potencial ushi'n uli'wma an'latpani' tu'rlendiriwge mu'mkinshilik beredi.

Multipolli'q tarqati'wdi' sferani'n' potenciali'n esaplawg'a qollanami'z. (2.40)

i'n (2.9) na qoyi'p, sferada $dS' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\alpha'$ ekenligin esapqa ali'p ha'm (P.11) formulasi' ja'rдеми менен betlik ti'g'i'zli'qti' to'mendegi tu'rde ko'rsetip

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \alpha'),$$

mi'nani' alami'z

$$\varphi(\mathbf{r}) = R^2 \sum_{lm} \frac{4\pi\sigma_0}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \alpha) \int \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\theta', \alpha') Y_{lm}^*(\theta', \alpha') \sin\theta' d\theta' d\alpha'.$$

Bul jerde integral ortogonalli'q (P.12) sha'rtine muyapi'q, Kroneker simvoli'ni'n' ko'beymesine $\delta_{l1}\delta_{m0}$ proporcional, sonli'qtan qosi'ndi'dan jeke bir ag'za qaladi', ha'm

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\sigma_0}{3} R^2 \frac{r_{<}}{r_{>}^2} \cos\theta.$$

Bunnan to'mendegini tabami'z

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{4\pi\sigma}{3} r \cos\theta & r \leq R \text{ bolg'anda} \\ \frac{4\pi\sigma}{3} \frac{R^3}{r^2} \cos\theta & r > R \text{ bolg'anda} \end{cases} \quad \blacksquare$$

10-ma'sele. Birtekli zaryadlang'an jin'ishke sterjennin' yari'mi' q zaryadi'na, al ekinshi yari'mi' – q zaryadi'na iye. Sterjennin' uzi'nli'g'i' $2l$. Sterjennin' dipolli'q momentin tabi'n'i'z.

Dipolli'q moment $\mathbf{d}$ sterjen boylap on' zaryad ta'repine bag'i'tlang'an. x ko'sherin sterjennin' ortasi'nan baslanatug'i't etip $\mathbf{d}$ boylap bag'i'tlaymi'z ha'm to'mendegini esaplaymi'z

$$d_x = \int_{-l}^{+l} \tau(x) x dx = \int_{-l}^0 (-q/l) x dx + \int_0^{+l} (q/l) x dx = ql. \quad (2.41)$$

To'mendegige di'qqat awdarami'z, yag'ni'y sterjennin' dipolli'q momentin

qa'legen elektroneytral sistema si'yaqli' to'mendegi tu'rde ko'rsetiwge boladi'

$$\mathbf{d} = q(\mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-), \quad (2.42)$$

bul jerde $\mathbf{R}^\pm$ —on' ha'm teris zaryadlar orayi'ni'n' radius vektori', q — on' zaryadlardi'n' qosi'ndi'si'. ■

11-ma'sele. Shardi'n' joqarg'i' yari'mi' q zaryadi', al to'mengi yari'mi' $-q$ zaryadi' menen birtekli tolti'ri'lg'an. Shardi'n' radiusi' R — ten'. Shardi'n' dipolli'q momenti $\mathbf{d}$ ni' tabi'n'i'z.

Shardi'n' worayi'nda koordinata basi'n tan'lap alami'z ha'm z ko'sherin vertikal on' zaryadlar ta'repine bag'i'tlaymi'z. Sonda, $\mathbf{d} = (0, 0, d_z)$ bolatug'i'nli'g'i' belgili. Sferali'q koordinatalarda $d_z = \int z \rho(\mathbf{r}) dV$ esaplap

$$d_z = \frac{3q}{2\pi R^3} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{3q}{2\pi R^3} \int_0^R r^3 dr \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

to'mendegini tabami'z

$$d = \frac{3}{4} qR. \quad \blacksquare$$

12-ma'sele. Ta'repleri $2a$ bolg'an kvadratti'n' to'belerinde qon'si'las zaryadlar qarama-qarsi' belgilerge iye bolatug'i'nday etip noqatli'q $\pm e$ zaryadi' jaylasqan. Kvadratti'n' diagonal'i' boyi'nsha bag'i'tlang'an x ha'm y ko'sherlerine iye koordinatalar sistemasi'nda kvadrupolli'q momenttin' $Q_{\alpha\beta}$ tenzori'n tabi'n'i'z.

Tan'lap ali'ng'an koordinatalar ko'sheri kvadrupwolli'q momenttin' tenzori' ushi'n en' basli'si' dep ataladi', yag'ni'y usi' ko'sherlerde $Q_{\alpha\beta}$ diagonal boladi'. Meyli x ko'sherinde e zaryadi' jaylasqan bolsi'n, sonda y ko'sherinde $-e$ zaryadi' jaylasadi'. (2.17) ne muwapi'q to'mendegini esaplaymi'z:

$$Q_{xx} = 2[e(3 \cdot 2a^2 - 2a^2)] + 2(-e)(-2a^2) = 12ea^2.$$

Sa'ykes tu'rde qalg'anlardi'da esaplaymi'z

$$Q_{yy} = -12ea^2, \quad Q_{zz} = 0 \quad \blacksquare$$

13-ma'sele. *q zaryadi' ten'o'lshemli bo'listirilgen shar, elementar d dipoldan uzaq arali'qta jaylasqan. Dipolg'a ta'sir etiwshi ku'shti tabi'n'i'z.*

(2.24) ne muwapi'q shardi'n' maydani'nda dipoldi'n' energiyasi' to'mendegi an'latpa menen beriledi

$$U = -dE,$$

bul jerde E – shardi'n' payda etken maydani'ni'n' kernewliligi, yag'ni'y $E = \frac{qr}{r^3}$, r – shardan dipolg'a o'tkizilgen radius vektor. Dipolg'a ta'sir etiwshi ku'shti $F = -\nabla U$ tu'rinde esaplap, mi'nani' tabami'z

$$F = -\frac{3q(dr)r}{r^5} + \frac{qd}{r^3}. \quad \blacksquare$$

14-ma'sele. *Q zaryadi', R radiusli' sferani'n' beti boylap birtekli bo'listirilgen. Sferani' ten'dey eki bo'limge bo'liwshi ku'shtin' absolyut shamasini' tabi'n'i'z.*

Sfera betinin' qa'legen dS elementine, usi' betke n normal boyi'nsha bag'i'tlang'an dF ku'shi ta'sir etedi. Usi' ku'shtin' shamasini' tabi'w ushi'n, zaryadlang'an shardi'n' qalg'an barli'q bo'limi menen birgelikte aji'rati'lg'an dS elementinin' payda etken elektrlik maydani'ni'n' kernewliligi E' ti' esaplaw talap etiledi. Superpoziciya principi boyi'nsha zaryadlang'an sferani'n' E maydani'n, dS elementi payda etken E' ha'm E'' maydani'ni'n' vektorli'q qosi'ndi'si' retinde ko'rsetiwge boladi'. Sferag'a ju'da' jaqi'n ori'nlarda sfera si'rti'ndag'i' kernewlilik $E = Q/R^2$, al ishinde $E = 0$ ten' boladi'. Sferani'n' tuwri'dan tuwri' betindegi maydandi' esaplawda dS elementin tegis dep esaplawg'a boladi', sonli'qtan E'' maydani' sfera ishinde ha'm si'rti'nda qarama qarsi' bag'i'tqa ha'm birdey shamag'a iye boladi'. Solay etip, eki ten'leme alami'z: $E' + E'' = Q/R^2$, $E' - E'' = 0$. Bunnan mi'nani' tabami'z $E' = \frac{Q}{2R^2} n$ ha'm

$$d\mathbf{F} = \sigma \mathbf{E}' dS = \frac{Q^2}{8\pi R^4} \mathbf{n} dS.$$

Yari'nsferani'n ko'sheri boyi'nsha z ko'sherin bag'i'tlaymi'z, sonda qosi'ndi' ku'sh $\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = F\mathbf{k}$. Yari'nsferani'n beti boyi'nsha integrallawda $\int \mathbf{n} dS = k \cos \alpha dS = \pi R^2 \mathbf{k}$ (bul jerde $\alpha - \mathbf{n}$ ha'm $\mathbf{k}$ arasi'ndag'i' mu'yesh) ekenligi esaplawlarsi'zda tu'sinikli, sonli'qtan $\int \cos \alpha dS$ –yari'nsfera betinin' woni'n' tiykari'na proekciyasi' boli'p tabi'ladi'. Juwmaqlap aytqanda, sferani'n' yari'mi'na to'mendegi ku'sh ta'sir etedi

$$F = \frac{Q^2}{8R^2}. \quad (2.43)$$

Bul ma'sele, (2.29) shi' Maksvellik kernew tenzori'n qollani'w menende sheshiliwi mu'mkin. (2.30) na muwapi'q

$$F_\alpha = \int T_{\alpha\beta} n_\beta dS.$$

Bettegi $\mathbf{E} = \frac{Q}{R^2} \mathbf{n}$ maydan kernewliligin (2.29) na qoyi'p ha'm esaplawlar ju'rgizip, (2.43) ne kelemiz. ■

O'zbetinshe sheshiw ushi'n ma'seleler

2.1. φ potentsiallari' mi'na variantlarg'a a) $-\mathbf{ar}$; b) $\mathbf{a}[\mathbf{br}]$; v) $d\mathbf{r}/r^3$; g) $F(f(\mathbf{ar}))$ ten' bolg'an elektrostatikali'q maydanni'n' kernewliligi E ni tabi'n'i'z. Bul jerde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ vektorlari' koordinatadan ha'm waqi'ttan g'a'rezli emes, al f ha'm F – o'z argumentinin' qa'legen differentsialli'q funktsiyasi'.

Juwabi': a) $\mathbf{a}$; b) $[\mathbf{ba}]$; v) $3(d\mathbf{r})\mathbf{r}/r^5 - \mathbf{d}/r^3$; g) $-\frac{dF}{df} \frac{df}{d(\mathbf{ar})} \mathbf{a}$.

2.2. Ken'islikte, to'mendegi variantlardag'i' kernewlilikke iye elektrostatikali'q maydandi' payda etiwge bolama? a) $\mathbf{E} = [\mathbf{ar}]$; b) $\mathbf{E} = a(y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y)$.

2.3. Ken'islikte elektr maydani'ni'n' kernewliligi $\mathbf{E}$ to'mendegi variantlarg'a ten': a) $(\mathbf{br})\mathbf{r}$; b) grr ;

v)

$$\frac{er}{r^3} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \right] \exp \left(-\frac{2r}{a} \right) \right\}.$$

bul jerde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vektorlari' ha'm a, g ha'm e shamalari' koordinatadan g'a'rozli emes, al f – o'z argumentinin' qa'legen differencialli'q funkciyasi'. Usi' maydan payda etken zaryadti'n' ko'lemlik ρ ti'g'i'zli'g'i'ni'n' bo'listiriliwin tabi'n'i'z (elektrostatikani'n' kerri ma'selesi).

Juwabi': a) $\frac{b^2}{4\pi}$; b) $\frac{gr}{\pi}$; v) $\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$.

2.4. Elektrostatikali'q maydanni'n' kernewlililikleri to'mendegi an'latpalar menen ani'qlanadi': a) $\mathbf{E} = E_1 \mathbf{e}_x + E_2 \mathbf{e}_y + E_3 \mathbf{e}_z$ (E_1, E_2, E_3 – turaqli'lar); b) $\mathbf{E} = \frac{a}{r^3} \mathbf{r}$ (a – turaqli'). Maydanni'n' potentsiali'n tabi'n'i'z.

2.5. Radiusi' R_2 bolg'an shardi'n' si'rti'nda, ko'lemlik ρ ti'g'i'zli'g'i' menen shar tu'rindagi qatlam zaryadlang'an. Qatlamni'n' ishki radiusi' R_1 . Ken'isliktin' barli'q noqatlari'ndag'i' maydanni'n' $\mathbf{E}$ kernewliligini'n' bo'listiriliwin tabi'n'i'z.

$$\text{Juwabi': } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r \leq R_1 \text{ ushi'n;} \\ \frac{4}{3} \pi \rho \frac{r^3 - R_1^3}{r^3} \mathbf{r}, & R_1 < r \leq R_2 \text{ ushi'n;} \\ \frac{4}{3} \pi \rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^3} \mathbf{r}, & r > R_2 \text{ ushi'n.} \end{cases}$$

2.6. Si'ziqli' τ ti'g'i'zli'g'i' menen birtekli zaryadlang'an sheksiz jin'ishke o'tkizgishtin' elektrlik maydani'ni'n' φ potentsiali'n ha'm E kernewliligini tabi'n'i'z.

Juwabi': $E(\rho) = \frac{2\tau}{\rho}, \quad \varphi(\rho) = -2\tau \ln \frac{\rho}{\rho_0},$

Bul jerde ρ – jin'ishke o'tkizgishke shekemgi arali'q, ρ_0 – potentsialdi' no'lge ten' dep ali'wg'a bolatug'i'n ρ ni'n' ma'nisi.

2.7. Kesiminin' radiusi' R bolg'an sheksiz uzi'n do'n'gelek tuwri' cilindr ρ ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadlang'an. To'mendegi sha'rtlerde ken'isliktin' barli'q noqatlari'ndag'i' elektrlik maydanni'n' kernewliligini'n' $\mathbf{E}$ shamasini tabi'n'i'z: a) Gauss teoremasi' boyi'nsha; b) Puasson ten'lemesini tuwri'dan tuwri'

sheshiw arqali'.

Juwabi': $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 2\pi r, & r \leq R \text{ ushi'n} \\ 2\pi\rho R^2/r, & r > R \text{ ushi'n} \end{cases}$, r – cilindrdin' ko'sherine shekemgi arali'q.

2.8. Zaryad, ken'islikte $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z$ ni'zamli'g'i' boyi'nsha bo'listirilgen. Elektrlik maydanni'n' φ potentsiali'n esaslan'i'z.

2.9. Zaryadti'n' payda etken potentsiali' sferali'q koordinatalar sistemasi'nda to'mendegi tu'rge iye boli'wi' ushi'n, wolardi'n' bo'listiriliwi qanday boli'wi' kerek?

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{a} \left(\frac{a}{r} + 1 \right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right), \quad \text{bul jerde } e_0, a - \text{turaqli'lar}$$

Juwabi': Koordinata basi'ndag'i' e_0 noqatli'q zaryadi' $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$ ti'g'i'zli'g'i'na iye ko'lemlik zaryadi' menen qorshalg'an.

2.10. Zaryad sferali'q simmetriyalig'i' tu'rde bo'listirilgen: $\rho = \rho(r)$. Zaryadlardi'n' bo'listiriliwin sferali'q qatlamlarg'a bo'lip, r' boyi'nsha bir eseli integrallar tu'rinde φ ha'm $\mathbf{E}$ ni jazi'n'i'z.

Juwabi':

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r' dr';$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{4\pi r}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

2.11. Aldi'n'g'i' ma'selenin' na'tiyjelerine tiykarlani'p, birtekli zaryadlang'an shardi'n' maydani'ni'n' kernewliligini ha'm potentsiali'n tabi'n'i'z.

2.12. R radiusli' ha'm q zaryadi'na iye ten' o'lsheqli zaryadlang'an jin'ishke

kolconi'n' potentsiali' φ di bireseli integral arqali' an'lati'n'i'z. Ko'rsetpe: xz tegisligin baqlaw noqati' arqali' o'tkizin'.

Juwabi':

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \sin\theta \cos\alpha'}}.$$

2.13. Bir bo'limi duga dep atali'wshi', τ si'zi'qli' ti'g'i'zli'g'i' menen ten'o'lshemli zaryadlang'an a radiusli' do'n'gelektin' orayi'ndag'i' elektrlik maydanni'n' kernewliligini ha'm potentsiali'n' tabi'n'i'z. Dugani'n' orayli'q mu'yeshi γ ten'.

Juwabi':

$$\varphi = \tau\gamma; \quad E = \frac{2\tau}{a} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

2.14. R radiusli' shar ko'lemlik $\rho = \rho_0 \cos\theta$ ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadlang'an. Ken'isliktin' qa'legen noqati'ndag'i' skalyarli'q potentsialdi' tabi'n'i'z.

Juwabi':

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \pi\rho_0 r \left(\frac{4}{3}R - r \right) \cos\theta, & r \leq R \text{ bolg'anda} \\ \frac{\pi\rho_0 R^4 \cos\theta}{3r^2}, & r > R \text{ bolg'anda} \end{cases}$$

2.15. Uzi'nli'g'i' $2l$ bolg'an jin'ishke sterjende zaryadti'n' si'zi'qli' ti'g'i'zli'g'i' $\tau = kx$ ni'zamli'g'i' boyi'nsha o'zgerse (k —turaqli', koordinata basi' sterjennin' orayi'nda ornalasqan), wonda woni'n' dipolli'q momentin tabi'n'i'z.

Juwabi':

$$\mathbf{d} = \frac{2}{3}kl^3\mathbf{i}$$

2.16. Orayi' koordinata basi'nda joylasqan R radiusli' sfera, $\sigma = \kappa z$ betlik ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadlang'an, bul jerde κ —turaqli', z —sferani'n' sa'ykes noqati'ni'n' koordinatasi'. Sferani'n' dipolli'q momenti $\mathbf{d}$ ni' tabi'n'i'z.

Juwabi':

$$\mathbf{d} = \frac{4\pi}{3} \kappa R^4 \mathbf{k}$$

2.17. Betlik σ ti'g'i'zli'g'i' menen zaryadlang'an sheksiz tegislikte, maydani' S bolg'an tesikshe tesilgen. $\sim \frac{1}{r^2}$ ag'zasi'n esapqa alg'an halda tesiksheden uzaq arali'qtag'i' maydanni'n' kernewliligini tabi'n'i'z.

2.18. Do'n'gelek, zaryadlari' qarama-qarsi' belgige ha'm birdey shamag'a iye ten'o'lshemli zaryadlang'an eki yari'm do'n'gelekten turadi'. Kvadrupolli'q moment tenzori'n ha'm dipolli'q moment vektori'ni'n' komponentini ani'qlan'i'z.

2.19. $q, -2q, q$ zaryadlari', z ko'sherinde sa'ykes tu'rde $-a, 0, a$ koordinatalari'na iye noqatta jaylasqan (si'zi'qli' kvadrupol). Sistemadan uzi'q arali'qtag'i' potencial φ ni tabi'n'i'z.

Juwabi':

$$\varphi \approx \frac{2qa^2}{r^3} P_2(\cos\theta); \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

2.20. Egerde Q zaryadi' R radiusli' shardi'n' ko'lemi boyi'nsha birtekli bo'listirilgen bolsa, wonda zaryadlang'an shardi'n' menshikli elektrlik energiyasi' U ni esaplan'i'z.

Juwabi':

$$U = \frac{3Q^2}{5R}.$$

2.21. $\mathbf{d}_1$ momentine iye dipol koordinata bosi'nda jaylasqan, al basqa $\mathbf{d}_2$ momentine iye dipol radius vektori' $\mathbf{r}$ bolg'an noqatta turi'pti'. Dipollardi'n' ta'sir etisiw energiyasi'n tabi'n'i'z.

Juwabi':

$$U = \frac{\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{d}_1 \mathbf{r})(\mathbf{d}_2 \mathbf{r})}{r^5}.$$

2.22. R radiusli' shar ρ ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i' menen birqi'yli' zaryadlang'an. Maksvellik kernew tenzori'n qollani'p, shardi' ten'dey eki yari'mg'a bo'liwshi ku'sh $\mathbf{F}$ ti tabi'n'i'z. Ali'ng'an na'tiyjeni $\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E} dV$ formulasi'n qollani'p g'a'rezsiz esaplawlar menen tasti'yi'qlan'i'z, bul jerde $\mathbf{E}$ — shardi'n' elektrlik maydani'ni'n' kernewliligi.

Juwabi':

$$F = \frac{3Q^2}{16R^2}.$$

Usi'ni's etiliwshi a'debiyatlar: [1], I bap; [2], II bap; [3], II bap; [4], III, IV bap.

3. Turaqli' magnitlik maydan

Vakuumba turaqli' magnitlik maydan, turaqli' tok arqali' payda etiledi. Ken'islikte tokti'n' bo'listiriliwi ko'lemlik ti'g'i'zli'q $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, al betinde betlik ti'g'i'zli'q $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ menen si'patlanadi'. Bunnan basqa ken'islikte ju'da' jin'ishke uzi'n o'tkizgish arqali' o'tiwshi si'zi'qli' tok $\mathcal{I}$ beriliwi mu'mkin.

Maksvell ten'lemelerin turaqli' magnitlik maydanni'n' indukciyasi' $\mathbf{B}$ qanaatlandi'radi'

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (3.2)$$

Bulardi'n' ekinshisinin' integralli'q formasi' to'mendegishe boli'p,

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} dS \quad (3.3)$$

magnitlik indukciyani'n' cirkulyაციyasi' haqqi'ndag'i' teorema yamasa Amper ni'zami' dep ataladi'. On' ta'reptegi betlik integral

$$J = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} \quad (3.4)$$

$\mathcal{L}$ konturi'na tirelgen S beti arqali' J toli'q tokti' beredi. Tokti'n' bo'listiriliwi aksial simmetriyag'a yamasa tegislikke sali'sti'rg'anda simmetriyali' bolg'an waqi'tta, cirkulyaciya haqqi'ndag'i' teorema magnitlik indukciyani' jeterli da'rejede an'sat tabi'wg'a mu'mkinshilik beredi.

Birinshi ta'rtpili eki (3.1), (3.2) ten'lemelerinen ekinshi ta'rtpili bir ten'leme vektorli'q $\mathbf{A}$ potencialg'a o'tiw qolayli', wol to'mendegi qatnas penen ani'qlanadi'

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (3.5)$$

$\mathbf{B}$ indukciyasi'ni'n' o'zgermeytug'i'nli'g'i' sebepli vektorli'q potencial bir ma'nili emes ani'qlang'an, egerde to'mendegi tu'rlendiriw ja'rdeminde basqa vektorli'q potencialg'a o'tsek

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi, \quad (3.6)$$

bul jerde $\chi = \chi(\mathbf{r})$ –qa'legen funkciya. Vektorli'q potencialdi' tan'lap ali'wdag'i' birma'nili emeslikti qwollansaq, og'an qosi'msha sha'rtler qosi'ladi'.

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (3.7)$$

Bul jag'dayda magnitlik maydanni'n' vektorli'q potenciali' Puasson ten'lemesin qanaatlandi'radi'

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.8)$$

(3.8), (3.5) muwapi'q ko'lemlik toklardi'n' vektorli'q potenciali' ha'm magnitlik maydanni'n' indukciyasi' ko'lemlik integrallar menen ta'riyiplenedi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (3.10)$$

Bio-Savar ni'zami'nan ha'm superpoziciya principinende (3.10) formulasi'n ali'wg'a boladi'.

Si'zi'qli' tok jag'dayi'nda $\mathbf{A}$ ha'm $\mathbf{B}$ shamalari' to'mendegi almasti'ri'wlardi' kiritken halda (3.9), (3.10) an'latpalari'nan ali'nadi'

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \rightarrow J d\mathbf{l}' \quad (3.11)$$

bul ko'lemlik integrallardi' (3.9), (3.10) iymek si'zi'qli'g'a aylandi'radi'. (3.9), (3.10) integrallarg'ada betlik toklar ushi'n sa'ykes almasti'ri'wlar ju'rgiziw kerek

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \rightarrow \mathbf{i}(\mathbf{r}') dS' \quad (3.12)$$

Tok o'tiwshi shegaralang'an oblasttan u'lken r arali'qta magnitlik maydanni'n' indukciyasi' ha'm vektorli'q potencial to'mendegi tu'rge iye boladi'

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{M}\mathbf{r}]}{r^3}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3}, \quad (3.14)$$

bul jerde $\mathbf{M}$ —sistemani'n' magnitlik momenti. Ko'lemlik toklar jag'dayi'nda to'mendegishe boladi'

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}\mathbf{j}(\mathbf{r})] V. \quad (3.15)$$

Tegis kontur jag'dayi'nda magnitlik moment tok J din' konturdi'n' maydani' S ke ko'beymesi menen ani'qlanadi' (yag'ni'y konturdi'n' formasi'nan g'a'rezli emes) ha'm kontur tegisligne normal $\mathbf{n}$ boyi'nsha bag'i'tlang'an:

$$\mathbf{M} = \frac{J}{c} S \mathbf{n} \quad (3.16)$$

Magnitlik maydanni'n' energiyasi'

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 dV \quad (3.17)$$

ja'nede mi'na formula menende esaplawg'a boladi'

$$U = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV \quad (3.18)$$

Indukciyasi' $\mathbf{B}$ bwolg'an si'rtqi' magnitlik maydanda ko'lemlik tokqa tu'sirilgen $\mathbf{F}$ ku'shi mi'na tu'rqi qabi'l etedi

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j} \mathbf{B}] dV, \quad (3.19)$$

Ko'rsetilgen tokti'n' si'rtqi' magnitlik maydan menen ta'sir etisiwinin' magnitlik energiyasi', usi' maydanni'n' vektorli'q potentsiali' $\mathbf{A}$ arqali' an'lati'ladi'

$$U = \frac{1}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV \quad (3.20)$$

Egerde tok o'tip ati'rg'i'n ken'isliktin' bo'limi boylap si'rtqi' magnitlik maydanni'n' $\mathbf{B}$ indukciyasi' az o'zgerse, wonda (3.20) dag'i' ta'sir etisiw energiyasi' toklardi'n' magnitlik momenti $\mathbf{M}$ arqali' an'lati'ladi'

$$U = \mathbf{M} \mathbf{B} \quad (3.21)$$

Magnitostatikada fizikali'q $\mathbf{M} \mathbf{B}$ shamasi' potentsialli'q energiya boli'p tabi'lmaydi'. Usi'g'an baylani'sli' ko'rip shi'g'i'w ushi'n potentsialli'q funkciya V kiritiledi, wol $\mathbf{M} \mathbf{B}$ –ten' boli'p shi'g'adi'. Potentsialli'q funkciya si'rtqi' magnitlik maydanda magnitlik momentke tu'sirilgen ku'shti a'piwayi' $\mathbf{F} = -grad V$ tu'rde ko'rsetiwge mu'mkinshilik beredi. Solay etip, kvazi birqi'yli' si'rtqi' $\mathbf{B}$ maydanda, magnitlik momentke to'mendegi ku'sh ta'sir etedi

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{M} \mathbf{B}) \quad (3.22)$$

ha'm ku'sh momenti

$$\mathbf{K} = [\mathbf{M} \mathbf{B}] \quad (3.23)$$

(3.19) dag'i' qosi'ndi' ko'lemlik ku'shti, ishinen ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i' $\mathbf{j}$ bolg'an tok o'tetug'i'n V ko'lem betine tu'sirilgen betlik ku'sh sistemasi' menen almasti'ri'wg'a boladi',

$$F_{\alpha} = \frac{1}{c} \int_V [\mathbf{jB}]_{\alpha} dV = \oint_S T_{\alpha\beta} n_{\beta} dS, \quad (3.24)$$

bul jerde $\mathbf{n}$ –ko'lem V ni' qorshawshi' tuyi'q S betine ju'rgizilgen si'rtqi' normaldi'n' orti', al $T_{\alpha\beta}$ –maksvellik kernew tenzori':

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(B_{\alpha} B_{\beta} - \frac{1}{2} B^2 \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (3.25)$$

Ma'seleler sheshiwge mi'sallar

1-ma'sele. *Ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i' $\mathbf{j}$ bolg'an birqi'yli' tok, R radiusli' sheksiz cilindr boyi'nsha, woni'n' ko'sherine parallel tu'rde o'tedi. Cilindrdin' ishindeg'i ha'm si'rti'ndag'i' magnitlik maydanni'n' indukciyasi'n tabi'n'i'z.*

En' a'piwayi' tu'rde, bul ma'sele cirkulyaciya haqqi'ndag'i' teorema ja'rdeminde sheshiledi. Sistemani'n' simmetriyalig'i'nan to'mendegi kelip shi'g'adi', yag'ni'y qa'legen noqatta indukciya vektori' $\mathbf{B}$, ko'sherge ortogonal tegislik ha'm orayi' cilindrdin' ko'sherinde bolg'an shen'berge uri'nba boyi'nsha bag'i'tlang'an. $\mathbf{B}$ vektori'ni'n' shamasi' cilindrdin' orayi'na shekemgi r arali'qtan g'a'rezli. Cirkulyaciya haqqi'ndag'i' (3.3) teorema ushi'n, $r > R$ bolg'an jag'dayda kontur si'pati'nda r radiusli' shen'berdi tan'lap ali'p, $B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j\pi R^2$ ti' alami'z. Sa'ykes tu'rde $r < R$ bolg'anda, $B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j\pi r^2$.

Usi' ten'liklerden magnitlik indukciyani' tabami'z:

$$B = \begin{cases} \frac{2\pi jr}{c} & r \leq R \text{ bolg'anda,} \\ \frac{2\pi jR^2}{cr} & r > R \text{ bolg'anda,} \end{cases} \quad \blacksquare$$

2.ma'sele. Turaqli' i ti'g'i'zli'g'i'na iye birqi'yli' tok, xy tegisligi boyi'nsha y ko'sherine parallel tu'rde o'tedi. Magnitlik maydanni'n' indukciyasi'n tabi'n'i'z.

Magnitlik indukciya $z > 0$ bolg'anda tegislik u'stinde x ko'sheri boylap, al $z < 0$ bolg'anda x ko'sherine qarama-qarsi' bag'i'tlanadi' (bul jag'daydi', berilgen noqatqa sali'sti'rg'anda simmetriyali' jaylasqan tokti'n' eki liniyasi'ni'n' u'lesin qarap erisiwge boladi'). Tuwri'mu'yeshli konturdi' to'mendegishe tan'lap alami'z, yag'ni'y woni'n' bir ta'repi x ko'sheri bag'i'ti'nda tegislik u'stinen, al ekinshisi og'an simmetriyali' tegislik asti'nan o'tedi. Cirkulyaciya haqqi'ndag'i' teoremadan to'mendegini alami'z: $2Bl = \frac{4\pi}{c}il$, yag'ni'y

$$B = \frac{2\pi i}{c}. \quad \blacksquare$$

3-ma'sele. R radiusli' shardi'n' ko'lemin birqi'yli' Q zaryadi' tolti'radi'. Egerde shar o'zinin' diametri do'gereginde turaqli' ω mu'yeshlik tezligi menen aylansa, wonda shardi'n' orayi'ndag'i' magnitlik maydan indukciyasi' B ni' tabi'n'i'z.

Koordinatalar basi'n shardi'n' worayi'na jaylasti'rami'z ha'm z ko'sherin ω vektori' boylap bag'i'tlaymi'z. (3.10) na muwapi'q shardi'n' orayi'ndag'i' magnitlik indukciya to'mendegi an'latpa arqali' beriledi

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{r}\mathbf{j}(\mathbf{r})]}{r^3} dV,$$

bul jerde integrallaw o'zgeriwshilerinin' shtrixi ali'p taslang'an. Aylandi'ri'w na'tiyjesinde shardi'n' ishinde $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho\mathbf{V} = \rho[\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]$ ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i'na iye tok bar boladi', bul jerde $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$. Eki ma'rteli vektorli'q ko'beymeni ashi'p, to'mendegini alami'z

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int \rho \frac{r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^3} dV.$$

$\mathbf{B}(0)$ vektori, x ha'm y ko'sherlerine proekciyasi'na iye emes (tekserip ko'rin'iz!) ha'm to'mendegishe an'lati'li'wi' mu'mkin

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\omega}{c} \int \frac{\rho(1 - \cos^2 \theta)}{r} dV.$$

Ali'ng'an formula ishindegı zaryad ko'lemlik $\rho = \rho(r, \theta)$ ti'g'i'zli'g'i' menen bo'listirilgen qa'legen aylani'wshi' dene ushi'n ori'nli' boladi'. Sferali'q koordinatalarda ten'o'lshemli zaryadlang'an shar ushi'n ko'lemlik integraldi' esaplap

$$\mathbf{B}(0) = \rho \frac{\omega}{c} \int_0^R r dr \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

to'mendegini tabami'z

$$\mathbf{B}(0) = \frac{Q\omega}{cR}. \quad \blacksquare$$

4-ma'sele. Qozdi'ri'lg'an vodorod atomi'nan o'tiwshi orbital tokti'n' ortasha ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i'ni'n' sferali'q koordinatalardag'i' $\mathbf{j}$ vektori'ni'n' komponenti to'mendegige ten'

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\varphi = \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{e\hbar}{\pi m a^7} r^3 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^3 \theta,$$

bul jerde a – borli'q radius, $\hbar$ – Plank turaqli'si', m ha'm e elektronni'n' massasi' ha'm zaryadi', al r – protong'a shekemgi arali'q. Ken'islikte orbital tok magnitlik maydandi' payda etedi. Usi' maydanni'n' koordinatalar basi'ndi'g'i' indukciyasi'n tabi'n'i'z.

Bio-Savar ni'zami'na muwapi'q koordinatalar basi'ndag'i' magnitlik indukciya to'mendegi an'latpa menen beriledi

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{r}\mathbf{j}(\mathbf{r})]}{r^3} dV.$$

Simmetriya ko'z qarasi'nan bizge belgili, yag'ni'y koordinatalar basi'nda $\mathbf{B}$ vektori' tek z –komponentine iye boladi'. Aldi'n'g'i' formuladag'i' ko'lemlik integraldi' sferali'q koordinatalarda esaplag'an maqul boladi'. To'mendegi qatnaslardi' esapqa alg'an halda, wolar arqali' $[\mathbf{r}\mathbf{j}]_z = xj_y - yj_x$, dep an'lati'p

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ j_x &= -j_\varphi \sin \varphi, & j_y &= j_\varphi \cos \varphi, \end{aligned}$$

mi'nani' alami'

$$B_z(0) = \frac{1}{c} \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{e\hbar}{\pi m a^7} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{3a}} dr \int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Sebebi

$$\int_0^\infty r^3 e^{-\alpha r} dr = (-1)^3 \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \int_0^\infty e^{-\alpha r} dr = \frac{3!}{\alpha^4}$$

ha'm

$$\int_0^\pi \sin^5 \theta d\theta = - \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta)^2 d(\cos \theta) = \frac{16}{15},$$

bunnan en' aqi'ri'nda to'mendegini tabami'z

$$B_z(0) = \frac{2e\hbar}{405mca^3}.$$

Esaplawlar arqali' $B_x(0) = B_y(0) = 0$ ekenligin tekserin'iz. ■

5-ma'sele. Qaptallari' $2a$ bwolg'an kvadratti' payda etiwshi jin'ishke o'tkizgish boyi'nsha J togi' o'tedi. Kvadratti'n' tegisligine perpendikulyar halda woni'n' orayi' arqali' o'tiwshi ko'sherdegi magnitlik indukciya $\mathbf{B}$ ni' tabi'n'i'z. Uzaq arali'qlardag'i' $\mathbf{B}$ ni' ani'qlap, magnitlik moment $\mathbf{M}$ di tabi'n'i'z.

Kvadratti' xy tegisligine, woni'n' ta'replerin ko'sherlerge parallel etip, al z ko'sherin kvadratti'n' orayi'nan o'tetug'i'n ha'm tokti'n' bag'i'ti' menen on' vintlik sistemani' payda etetug'i'n etip jaylasti'rami'z. Kvadratti'n' ko'sherinde indukciya vektori' tek B_z komponentine iye bwoladi', bunda ha'rbir qaptaldag'i' tok og'an birdey u'les qosadi'. Sonli'qtan to'mendegini esaplaw talap etiledi

$$B_z(z) = \frac{J}{c} \oint \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r} - \mathbf{r}']_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{4J}{c} \int_{-a}^a \frac{ady'}{(y'^2 + a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{8J}{c} \int_0^a \frac{ady'}{(y'^2 + a^2 + z^2)^{3/2}}$$

(y ko'sherine parallel bwolg'an ta'repi boyi'nsha integrallaymi'z). Payda bolg'an integraldi'

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{1}{b^2} \frac{x}{(x^2 + b^2)^{1/2}} + C$$

$x = b/t$ orni'na qoyi'w arqali' ali'wg'a boladi' (esaplawlar ju'rgizin!). Na'tiyjede mi'nani' alami'z:

$$\mathbf{B} = \frac{8a^2J}{c(z^2 + a^2)\sqrt{z^2 + 2a^2}} \mathbf{k}.$$

Konturdan uzaq arali'qlarda $|z| \gg a$, indukciya ushi'n an'latpa a'piwayi'lasadi'

$$\mathbf{B} = \frac{8a^2J}{c|z|^3} \mathbf{k}.$$

Bul formulani' toklar sistemasi'nan uzaq arali'qlardag'i' indukciya ushi'n (3.14) uli'wma an'latpasi' menen sali'sti'rsaq, bizin' jag'dayda (baqlaw noqati'na ju'rgizilgen $\mathbf{r}$ radius-vektor ha'm $\mathbf{M}$ magnitlik moment bir tuwri'da jaylasqanda, al $r = |z|$ bolg'anda) to'mendegi tu'rge iye boladi'

$$\mathbf{B} = \frac{2\mathbf{M}}{|\mathbf{z}|^3}$$

(3.16) na muwapi'q $M = \frac{4a^2J}{c}$ ekenligi ko'rinip tur ■

6-ma'sele. Betlik σ ti'g'i'zli'g'i' menen birtekli zaryadlang'an konusli'q bet ($x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$) o'zinin' ko'sheri do'gereginde ω mu'yeshlik tezligi menen aylanadi'. Konusli'q bettin' to'besindegi magnitlik maydanni'n' indukciyasi'n tabi'n'i'z.

(3.10), (3.12) formulalari'nan konus to'besindegi magnitlik indukciya ushi'n da'slepki an'latpani' alami'z:

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{r}\mathbf{i}]}{r^3} dS,$$

bul jerde integrallaw konusti'n' beti boyi'nsha o'tkeriledi. Betlik tokti'n' ti'g'i'zli'g'i'n zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i' ha'm mu'yeshlik tezlik $\mathbf{i} = \sigma[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ arqali' an'lati'p ha'm ekilemshi vektorli'q ko'beymeni ashi'p, to'mendegini alami'z

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\sigma}{c} \int \frac{\boldsymbol{\omega}r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})}{r^3} dS.$$

Integrallawdi' cilindrlilik koordinatalar sistemasi'nda ρ, φ, z o'tkeremiz. Konusti'n' ko'sheri ha'm du'ziwshisi arasi'ndag'i' α mu'yeshine iye konus betindegi maydansha elementi $dS = \rho d\rho d\varphi / \sin\alpha$ (bug'an dS tin' xy tegisligine proekciyasi'n jasap erisiwge boladi') tu'rinde jazi'ladi'. Bizin' jag'dayda $\alpha = \pi/4$ ten', sonli'qtan $z = \rho = r/\sqrt{2}$. Esaplawlar ju'rgizip to'mendegini tabami'z

$$\mathbf{B}(0) = \frac{\pi}{c} h \sigma \boldsymbol{\omega}. \quad \blacksquare$$

7-ma'sele. Qozdi'ri'lg'an vodorod atomi'nan o'tiwshi orbital tokti'n' ortasha ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i'ni'n' sferali'q koordinatalardag'i' $\mathbf{j}$ vektori'ni'n' komponenti to'mendegige ten'

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\varphi = \frac{1}{3^8} \frac{e\hbar}{\pi m a^7} r^3 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin\theta \cos^2\theta,$$

bul jerde a – borli’q radius, $\hbar$ – Plank turaqli’si’, m ha’m e elektronni’n’ massasi’ ha’m zaryadi’, al r – protong’a shekemgi arali’q. Orbital tokti’n’ magnitlik momenti $\mathbf{M}$ di esaplan’i’z.

Magnitlik momenttin’ (3.15) ani’qlamasi’nan kelip shi’g’i’p ha’m usi’ bo’limdegi 4-ma’selege sa’ykes komponentleri boyi’nsha berilgen koordinatalar sistemasi’nda vektorli’q funkciyadan ko’lemlik integraldi’ esaplaymi’z. Haqi’yqati’nda $M_x = M_y = 0$, al M_z ushi’n arali’q an’latpani’ alami’z

$$M_z = \frac{1}{2s} \frac{1}{3^8} \frac{e\hbar}{\pi m a^7} \int_0^\infty r^6 e^{-\frac{2r}{3a}} dr \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Esaplawlar ju’rgizip

$$\int_0^\infty r^6 e^{-\frac{2r}{3a}} dr = \frac{6!}{(2/3a)^7}, \quad \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{4}{15},$$

Orbitali’q tokti’n’ magnitlik momentin tabami’z

$$M_x = M_y = 0, \quad M_z = \frac{e\hbar}{2mc}. \quad \blacksquare$$

8-ma’sele. Elektronni’n’ ishki magnitlik momenti absolyut shamasi’ boyi’nsha Bor magnetoni’na $\mu_0 = \frac{|e|\hbar}{2mc}$ ten’. Klassikali’q modelge muwapi’q, elektron $r_0 = \frac{e^2}{mc}$ radiusli’ birqi’yli’ zaryadlang’an shardi’ elesletedi. Ishki magnitlik momentti, o’zinin’ simmetriya ko’sheri do’gereginde elektronni’n’ aylani’wi’ni’n’ na’tiyjesi dep qarap, usi’ aylani’wdi’n’ mu’yeshlik tezligi ω ni’ ani’qlan’i’z.

O’zinin’ ko’sheri do’gereginde ω mu’yeshlik tezligi menen aylani’wshi’ ten’ o’lshemli zaryadlang’an shardi’n’ magnitlik momentin esaplaymi’z:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}\mathbf{j}] dV = \{\mathbf{j} = \rho[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\} = \frac{\rho\boldsymbol{\omega}}{2c} \int r^2 (1 - \cos^2 \theta) dV = \frac{er_0^2}{5c} \boldsymbol{\omega}.$$

Magnitlik momenttin’ absolyut shamasi’ni’n’ esaplang’an ha’m eksperimentten ali’ng’an ma’nislerin ten’lestirip

$$\frac{|e|r_0^2}{5c}\omega = \frac{|e|\hbar}{2mc},$$

Elektronni'n' aylanishi' kerak bolgan mu'yeshlik tezlikni tabamiz:

$$\omega = \frac{5\hbar}{2mr_0^2}.$$

Fundamental turaqli'lardi'n' san ma'nislerin qoyi'p, $\omega \approx 10^{25} s^{-1}$ ekenligi tabamiz. Elektronni'n' klassikali'q radiusi' $r_0 = e^2/mc^2 \approx 10^{-13} sm$, bolganli'g'i' sebepli, ekvatorida jaylasi'wshi' «elektron noqatlari'» ni'n' si'zi'qli' tezliginin' shamasini' $v = \omega r_0 \approx 10^{12} sm/s$ ten', yag'ni'y jaqti'li'q tezliginen eki ta'rtipke joqari'. Sonli'qtan, qarali'p atiri'lg'an spinlik magnitlik momentin' modeli arnavli' sali'sti'rmali'li'q teoriyasi'ni'n' ekinshi postulati'na qarama-qarsi' keledi. ■

9-ma'sele. *R radiusli' sheksiz cilindrdin' kesim boyi'nsha J togi' birqi'yli' bo'listirilgan. Maksvellik kernew tenzori'n qollani'p, cilindrdin' birdey eki yari'mi'ni'n' bir-birine qi'si'li'wshi' F ku'shin tabi'n'i'z. Bul jerde F –cilindrdin' yari'm birinin' birlik uzi'nli'g'i'na tu'sirilgan ku'sh. Ko'lemlik ku'shti qollani'p g'a'rezsiz esaplawlar arqali' ali'ng'an na'tiyjeni tasti'yi'qlan'i'z.*

z ko'sherin cilindrdin' ko'sheri boylap, al y ko'sherin cilindrdin' yari'm bo'limi tegisligine perpendikulyar tu'rde bag'i'tlaymi'z. Cilindrdin' yari'mi'na tu'sirilgan ku'sh, kernew tenzori' $T_{\alpha\beta}$ arqali' to'mendegi tu'rde ani'qlanadi' ((3.24) qaran'i'z).

$$F_y = \oint (T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z)dS, \quad (3.26)$$

bul jerde integrallaw birlik biyikliktegi yari'mcilindrdin' beti boyi'nsha ali'nadi', $n = (n_x, n_y, n_z)$ –og'an si'rtqi' normaldi'n' vektori'. Ku'shtin' basqa komponentleri no'lge ten': $F_x = F_z = 0$. Indukciya vektori'ni'n' komponentlerin jazami'z

$$B_x = -B\sin\varphi, \quad B_y = B\cos\varphi, \quad B_z = 0$$

wolar arqali' (3.25) ne muwapi'q, $T_{\alpha\beta}$ kernew tenzori'ni'n' komponentleri an'lati'ladi'. Da'slep integraldi' cilindrindin' qaptal beti boyi'nsha esaplaymi'z. Sebebi og'an $n_x = \cos\varphi$, $n_y = \sin\varphi$, maydan elementi $dS = R d\varphi dz$, al indukciya shamasi' turaqli' ma'niske iye boladi' $B = 2J/cR$, wonda to'mendegige iye bolami'z (cilindrindin' birlik uzi'nli'g'i'na sa'ykes keliwshi ku'sh esaplanatug'i'nli'g'i'n eske salami'z).

$$\begin{aligned} F_y^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} R \int_{-1/2}^{1/2} dz \int_0^\pi \left[-B^2 \sin\varphi \cos^2\varphi + \left(B^2 \cos^2\varphi - \frac{1}{2} B^2 \right) \sin\varphi \right] d\varphi \\ &= -\frac{J^2}{\pi c^2 R} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Yari'mcilindrlerdin' bo'limleri betinde (xz tegisliginde jati'wshi')

$$n_x = n_z = 0, \quad n_y = -1, \quad B = \frac{2J}{cR^2} |x|,$$

Sonli'qtan

$$F_y^{(2)} = - \int T_{yy} dS = -\frac{1}{8\pi} \int_{-1/2}^{1/2} dz \int_{-R}^R B^2 dx = -\frac{J^2}{3\pi c^2 R}$$

$F_y^{(1)}$ ha'm $F_y^{(2)}$ lerdi qosi'p, juwmaqlawshi' ku'shtin' absolyut shamasi' boyi'nsha to'mendegige ten' ekenligin tabami'z

$$F = \frac{4J^2}{3\pi c^2 R}.$$

Bul ma'seleni sheshiwadin' basqa usi'li' (3.19) shi' formula boyi'nsha qosi'lg'an ko'lemlik ku'shti esaplawg'a tiykarlang'an:

$$\begin{aligned}
F_y &= \frac{1}{c} \int [\mathbf{jB}]_y dV = \frac{1}{c} \int j B_x dV \\
&= \left\{ j = \frac{J}{\pi R^2}, \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz, \quad B_x = -\frac{2J}{cR^2} \rho \sin\varphi \right\} \\
&= -\frac{2J^2}{\pi c^2 R^4} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_{-1/2}^{1/2} dz = -\frac{4J^2}{3\pi c^2 R}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

O'zbetinshe sheshiw ushi'n ma'seleler

3.1. Ken'islikte, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-\alpha r}$ ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i'na iye turaqli' tokti' payda etiw mu'mkinbe, bul jerde α – turaqli' shama, $\mathbf{j}_0$ – turaqli' vektor?

3.2. Egerde magnitlik indukciya mi'na sha'rtlerdi qabi'l etse: a) $\mathbf{B} = f(r)[\mathbf{ar}]$, b) $\mathbf{B} = (\mathbf{ar})[\mathbf{ar}]$, bul jerde $f(r)$ – qa'legen differencialrani'wshi' funkciya, $\mathbf{a}$ – turaqli' vektor, wonda ken'islikte tokti'n' ko'lemlik ti'g'i'zli'g'i'ni'n' bo'listiriliwin tabi'n'i'z.

Juwabi': a) $\mathbf{j} = \frac{c}{2\pi} \left[f(r)\mathbf{a} + \frac{df(r)}{dr} \frac{r[\mathbf{ar}]}{2r} \right]$, b) $\mathbf{j} = \frac{c}{2\pi} [3(\mathbf{ar})\mathbf{a} - a^2\mathbf{r}]$.

3.3. Birtekli ha'm turaqli' $\mathbf{B}$ magnitlik maydang'a, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{Br}]$ vektorli'q potentsialdi' ten'lestiriwge bolatug'i'nli'g'i'n ko'rsetin'iz. Wwol $\text{div}\mathbf{A} = 0$ sha'rtin qanaatlandi'rama?

3.4. Sheksiz uzi'n o'tkizgishten r arali'qta B indukciyasi'n payda etiwshi tokti'n' ku'shin J di tabi'n'i'z.

3.5. R radiusli' sheksiz cilindrlik bet boyi'nsha, woni'n' ko'sherine parallel tu'rde i_0 betlik ti'g'i'zli'g'i'na iye birqi'yli' tok o'tedi. Ken'isliktin' qa'legen noqati'ndag'i' magnitlik maydanni'n' indukciyasi'n tabi'n'i'z.

3.6. a ta'repli kvadratli'q ramka tuwri'si'zi'qli' J togi' menen bir tegislikte jaylasqan. Egerde ramkani'n' beti arqali' magnitlik maydanni'n' ag'i'mi' F_0 g'a ten' bolsa, wonda ramkani'n' ta'repi toktan qanday en' jaqi'n arali'qta jaylasqan?

Juwabi':

$$l = \frac{a}{\exp\left(\frac{cF_0}{2aj}\right) - 1}$$

3.7. Ti'g'i'z oralg'an (birlik uzi'nli'qtag'i' n o'ram, tok J) sheksiz uzi'n cilindrlk solenoidti'n' magnitlik maydani' to'mendegi formulalar arqali' beriletug'i'nli'g'i'n ko'rsetin'iz:

$$B = \frac{4\pi}{c} nJk \text{ solenoid ishinde, } B = 0 \text{ si'rti'nda}$$

bul jerde z ko'sheri solenoid boylap bag'i'tlang'an.

3.8. Kese kesimi do'n'gelek bolg'an birqi'yli' uzi'n tuwri' o'tkizgish ishinde do'n'gelek cilindrlk jolaqsha bar, woni'n' ko'sheri o'tkizgish ko'sherine parallel ha'm keyingige sali'sti'rg'anda a arali'qqa awi'sqan. O'tkizgish boyi'nsha j ti'g'i'zli'g'i'na iye turaqli' tok o'tedi. Jolaqsha ishindegi magnitlik indukciyani' tabi'n'i'z.

Juwabi': $B = \frac{2\pi}{c} [ja]$, a — si'rtqi' cilindr din' ko'sherinen ishki ko'sherge o'tkizilgen vektor.

3.9. R radiusli' yari'mcilindrlik bet formasi'na iye uzi'n tuwri' o'tkizgish boylap J togi' o'tedi. Berilgen bettin' ko'sherindegi magnitlik indukciyani' tabi'n'i'z.

Juwabi': $B = \frac{4J}{\pi c R}$, B vektori' yari'mcilindr din' simmetriya tegisligine perpendikulyar.

3.10. σ betlik ti'g'i'zli'g'i' menen birtekli zaryadlang'an R radiusli' juqa diska, o'zinin' ko'sheri do'gereginde ω mu'yeshlik tezligi menen aylanadi'. Diskani'n' ko'sherindegi magnitlik maydanni'n' indukciyasi'n tabi'n'i'z.

$$Juwabi': B = 2\pi\sigma|z| \left[\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} - 2 \right] \frac{\omega}{c}.$$

3.11. Jin'ishke sheksiz tuwri' tokli' trubka boyi'nsha J togi' o'tedi, wol R radiusli' yari'mshen'ber tu'rindagi lokalli'q iymeklikke iye. Ko'rsetilgen yari'mshen'berdin' iymeklik orayi'ndag'i' magnitlik indukciyani' tabi'n'i'z.

Juwabi':

$$\mathbf{B} = \frac{\pi J}{cR} \mathbf{n}$$

bul jerde ort $\mathbf{n}$ yari'mshen'ber tegisligine ju'rgizilgen normal, duga boyi'nsha o'tiwshi tokti'n' bag'i'ti' menen on' vint sistemasi'n payda etedi.

3.12. R radiusli' jin'ishke do'n'gelek boyi'nsha J togi' o'tedi. Do'n'gelektin' ko'sherindegi magnitlik indukciyani' tabi'n'i'z.

Juwabi':

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi R^2 J \mathbf{n}}{c(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

bul jerde $\mathbf{n}$ –do'n'gelektin' tegisligine ju'rgizilgen normal, wol J togi'ni'n' bag'i'ti' menen on' vint sistemasi'n payda etedi.

3.13. Ta'repleri a bolg'an ten'qaptalli' u'shmu'yeshlik formasi'ndag'i' juqa tokli' trubka boyi'nsha J togi' o'tedi. Toktan uzaq r arali'qtag'i' magnitlik indukciyani' ha'm vektorli'q potentsialdi' tabi'n'i'z.

3.14. R radiusli' ha'm qa'legen biyikliktegi birqi'yli' zaryadlang'an cilindr o'zinin' simmetriya ko'sheri do'gereginde ω mu'yeshli tezligi menen aylanadi'. Cilindrdin' toli'q zaryadi' Q g'a ten', al woni'n' aylani'w ko'sheri si'rtqi' birqi'yli' magnitlik maydanni'n' $\mathbf{B}$ indukciyasi' menen qandayda bir α mu'yeshin payda etedi. Cilindrdin' magnitlik maydan menen ta'sir etisiw U energiyasi'n ani'qlan'i'z.

Juwabi':

$$U = \frac{QR^2}{4c} (\omega \mathbf{B})$$

3.15. O'zinin' ko'sheri do'gereginde ω mu'yeshlik tezligi menen aylani'wshi' konus beti ($x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h$) boyi'nsha Q zaryadi' birtekli bo'listirilgen. Betten uzaq arali'qtag'i' magnitlik maydanni'n' $\mathbf{B}$ indukciyasi'n ha'm $\mathbf{A}$ vektorli'q potentsiali'n tabi'n'i'z.

Juwabi':

$$\mathbf{A} = \frac{Qh^2}{4cr^3} [\omega \mathbf{r}], \quad \mathbf{B} = \frac{Qh^2}{4cr^3} (3(\omega \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \omega)$$

3.16. R radiusli' eki birdey birtekli zaryadlang'i'n sferali'q bet bir birinen uzaq

arali'qta joylashgan. Har bir sferali'q bettin' toli'q zaryadi' Q g'a teng, al wolaridin' menshikli k5sherleri do'gereginde mu'yeshli aylani'w tezligi sa'ykes ω_1 ha'm ω_2 ga teng. Sferali'q betlerdin' ta'sir etisiwinin' magnitlik energiyasi' U di' ani'qlan'i'z.

Juwabi':

$$U = \left(\frac{QR^2}{3c} \right)^2 \left(\frac{3(\omega_1 \mathbf{r})(\omega_2 \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\omega_1 \omega_2}{r^3} \right)$$

Usi'ni's etiletug'i'n a'debiyatlar: [1], II bap; [2], V bap; [3], III bap; [4], V, VI bap.

Qosi'msha

1. Sferali'q ha'm cilindrlik koordinatalardag'i' tiykarg'i' differencialli'q operaciyalar

Sferali'q koordinatalarda:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (P.1)$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (P.2)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (P.3)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (P.4)$$

Cilindrlik koordinatalarda:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (P.5)$$

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (P.6)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a} = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi \\ & + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (P.7)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (P.8)$$

2. Sferali'q funkciyalar

Sferali'q $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ funkciyasi' to'mendegi formula menen ani'qlanadi'

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad (P.9)$$

bul jerde $-l \leq m \leq l$ ha'm $l = 0, 1, \dots$, al $P_l^m(\cos\theta)$ –Lejandrani'n' baylani'sqan polinomi':

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m}. \quad P.10$$

Qosi'mshalarda ushi'rasi'wshi' $l = 0, 1$, indekslerine iye $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ funkciyasi' to'mendegi formulalar menen beriledi

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta,$$

$$Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}. \quad (P.11)$$

Sferali'q funkciyalar toli'q ortonormag'a keltirlgen sistemani' payda etedi, wolar boyi'nsha jayi'wg'a bir mi'sal multipol qatardi' (2.40) beredi. Y_{lm} funkciyasi'ni'n' ortogonalli'q ha'm normag'a keltiriw sha'rti to'mendegi tu'rge iye:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad P.12$$

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ funkciyasi'na Laplas operatori'ni'n' ta'sirinde keyingi qayta islenedi

$$\Delta Y_{lm}(\theta, \varphi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad P.13$$

yag'ni'y, $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ menshikli $-l(l+1)$ ma'nisine iye $\Delta_{\theta\varphi}$ operatori'ni'n' menshikli funkciyasi' dep ataladi' ((1.31), (P.4) qaran'i'z).

A'debiyatlar dizimi

1. Alekseev A. I. Sbornik zadach po klassicheskoy elektrodinamike / A. I. Alekseev. - M. : Nauka, 1977. -319 s.
2. Bati'gin V. V. Sbornik zadach po elektrodinamike / V. V. Bati'gin, I. N. Topti'gin. – M. : Nauka, 2002. – 639 s.
3. Bati'gin V. V. Sovremennaya elektrodinamika, chast 1. Mikroskopicheskaya teoriya / V. V. Bati'gin, I. N. Topti'gin. – Moskva-Ijevsk : Institut kompyuterni'x issledovaniy, 2003. – 736 s.
4. Zapryagaev S. A. Elektrodinamika / S. A. Zapryagaev. – Voronej : Izd-vo Voronej. gos. un-ta, 2005. – 536 s.
5. Tamm I. E. Osnovi' teorii elektrichestva / I. E. Tamm. – M. : Nauka, 1976. – 620 s.