

**O'ZBEKISTAN RESPUBLIKASI JOQARI HA'M ORTA ARNAWLI
BILIMLENDIRIW MINISTRLOGI
BERDAQ ATINDAG'I QARAQALPAQ MA'MLEKETLIK
UNIVERSITETI**

Magistratura basqishi

Qol jazba huqiqında

UDK 512.554

Seytekova Venera

« p -adikalıq sanlar maydanı u'stindegı

bazı-bir ten'lemeler»

5A130101 Matematika qa'nigeligi boyınsha

Magistr

akademiyalıq da'rejesin alıw ushın jazılǵ'an

D I S S E R T A C I Y A

Magistrlik dissertaciya funktsionallıq
analiz kafedrasında ko'rip shıǵ'ıldı ha'm
qorg'awǵ'a usınıldı

Kafedra baslıǵ'ı K.K. Kudaybergenov
_____ «___» _____ 2015 jıl

MAK da jaqlawǵ'a ruxsat

Magistratura bo'limi baslıǵ'ı

_____ A.Gulimov

İlimiy basshı: _____

f.-m.i.d. prof. Ayupov Sh.A.

İlimiy ma'slaxatshı: _____

f.-m.i.k. Kurbanbaev T.K.

NO'KIS 2015

M a z m u n i

	Kirisiw.....
I BAP.	DA'SLEPKİ TUSİNIKLER HA'M BELGİLEWLER
§1.1.	p -adikalıq sanlar maydanı
§1.2.	p -adikalıq kvadrat ten'lemeler
	I bap boyınsha juwmaq
II BAP.	p-ADIKALIQ U'SHINSHİ DA'REJELI TEN'LEME- LER
§2.1.	Bazı-bir p -adikalıq kvadrat ten'lemeler
§2.2.	$x^3 = a$ ha'm $x^3 + ax = b$ ko`rinishindegi p -adikalıq ten'lemeler
	II bap boyınsha juwmaq
III BAP.	TO`RTİNSHİ DA'REJELI p-ADIKALIQ TEN'LEME- LER
§3.1.	$x^4 = a$ ko`rinishindegi p -adikalıq ten'lemeler.....
§3.2.	Ayırım u`shinshi ha'm to`rtinshi da`rejeli ten'lemeler
	III bap boyınsha juwmaq
	Juwmaqlaw
	Paydalanılǵ'an a'debiyatlar dizimi

Kirisiw

Prezidentimiz o'z bayanatlarında «Birinshi ret 2004-jilda saylang'an eki palatalı parlamentimizdin' jumısı turmısımızdın' a'hmiyetli bir da'wirine-elimizde teren' o'zgerisler, siyasiy ha'm sotsiallıq-ekonomikalıq turmıstın' barlıq ta'replerin izbe-iz reformalaw ja'ne liberallastırıw, ja'miyetimizdi demokratiyalıq jan'alaw ha'm modernizatsiyalaw protsessleri jedel pa'tler menen rawajlanıp atırg'an bir da'wirge tuwra kelgeni ma'lim.

O'zbekistan Respublikasının' aldında turg'an usı a'hmiyetli wazıypalardın' barlıg'in sheshiwde parlamenttin' buring'ı quramı elimizde alıp barılıp atırg'an ja'miyetlik-siyasiy, sotsiallıq-ekonomikalıq reformalardı teren'lestiriw isinde u'lken a'hmiyetke iye bolg'an 250 den aslam nızamdı qabıl etip, a'hmiyetli u'les qostı.

«Ku'shli ma'mleketten-ku'shli puqaralıq ja'miyetke qaray» bag'darlamasın a'melge asırıw boyınsha islerdi bunnan bılay da ku'sheytiw ma'selesin bu'gin turmıstın' o'zi ku'n ta'rtibine barg'an sayın qatan' tu'rde qoymaqta [1-4].

Bu'gingi ku'nde o'mirimizdi kompyuter texnikası, informatsion texnologiyaları, Internet, mobil telefon tarmag'ısız ko'z aldımızg'a keltirip bolmaydı.

Yelimizde 2011 jılı may ayındag'ı Prezidentimizdin' №1533 sanlı qararında Joqarı oqıw orınlarında materiallıq – texnikalıq bazanı jaqsılaw ha'm joqarı da'rejeli qa'niygelerdi tayarlaw boyınsha shara tadbirler ko'rsetilgen edi. Prezidentimizdin' № 1533 sanlı qararında ko'rsetilgenindey 2012 jıldın' 16-17 fevral ku'nleri «Bilimli ha'm aqıl zakovatli jetik a'wladlardı ta'rbiyalaw elimizdi turaqlı rawajlandırıwdın' ha'm modernizatsiyalawdın' tiykarg'i sha'rti» atamasındag'i xalıq aralıq konferentsiyanın' o'tkeriliwinde de u'lken ma'ni bar.

Biz perzentlerimiz tek g'ana fizikalıq ha'm ruhiy salamat wo'siwi, wolardın' yen' zamanago'y intellektuallerge iye bolg'an insanlar bolıp, XXI a'sir talaplar'na tolıq juwap beretug'ın na'wqıran a'wlat bolıp jetisiwi ushın imkaniyat ha'm sharayatlardı jaratıp beriwdi o'zimizge maqset qılıp aldıq [1-4].

Dissertaciya temasının' tiykarlanıwı ha'm wonın' aktualıg'ı:

Sanlar teoriyasının' en' a'hmiyetli bo'limlerinen biri bul salıstırıwlar teoriyası bolıp tabıladı. Salıstırıwlar teoriyası menen tıg'ız baylanıslı bolg'an tarawlardın' biri bul p -adikalıq sanlar. Bul sanlarga anıqlama p -adikalıq norma ja'rdeminde beriledi, yag'nıy ratsional sanlar ko'pligin p -adikalıq norma dep atalıwshı norma menen tolıqtırıladı. Payda bolg'an ratsional sanlardın' ken'eytpesi jan'a sanlı ko'plik bolıp, bul sanlar p -adikalıq sanlar delinedi.

p -adikalıq sanlar teoriyası ha'zirgi zaman rawajlanıp atırg'an matematikanın' en' tez rawajlanıp atırg'an tarawlarının' biri bolıp tabıladı. Sol sebepli de bul teoriyag'a qızıg'ıwshılıq a'dewir joqarı. biz endi p -adikalıq analiz benen haqıyqıy analaizdi salıstırıp ko'rsek, p -adikalıq analizde haqıyqıy analizden parıqlanadı. Ayırım jag'daylarda qızıg'arlı qa'siyetlerge iye boladı. Bul p -adikalıq sanlardın' jaqsı qa'siyetlerinen biri bul qatar jıynaqlı bolıwı ushın onın' ulıwma ag'zası nolge umtılwı za'ru'r ha'm jeterli boladı, al haqıyqıy sanlarda tek jeterli sha'rt bar. Bul sanlar maydanın' jaman qa'siyetlerinen biri bul maydanda ta'rtıp kiritip bolmaydı, yag'nıy p -adikalıq sanlardı salıstırıp bolmaydı.

Ha'zirgi waqıtta ha'r qıylı matematikalıq tarawlar p -adikalıq sanlar maydanında u'yrenilip atır. p -adikalıq sanlar teoriyası zamanago'y matematikanın' en' tez rawajlanıp atırg'an oblastlarının' biri bolıp tabıladı. Ma'selen p -adikalıq matematikalıq fizika, p -adikalıq itimallıqlar teoriyası, r -adikalıq differentsiallıq ten'lemeler, r -adikalıq dinamikalıq sistema ha'm tag'ı basqalar. p -adikalıq sanlardı birinshi bolıp XIX a'sirdin' aqırlarında nemets matematigi K.Genzel' ta'repinen kiritilgen.

Bizge ma'lim bolg'anınday eger ratsional sanlar maydanın a'piwayı norma menen (absolyut shama) ken'eyttirsek biz haqıyqıy sanlar maydanın payda etemiz. Usıg'an uqsas ratsional sanlar maydanın p -adikalıq norma dep atalıwshı norma bilan ken'eyttirsek p -adikalıq sanlar maydanı payda boladı. p -adikalıq norma arximed bolmag'an norma esaplanadı. Arximed bolmag'an

norma bull «ku'shli u'shmu'yeshlik ten'sizligin» qanaatlantırıwshı norma boladı. Sonın' ushında p -adikalıq sanlardın' qa'siyetleri haqıyqıy sanlardın' qa'siyetlerinen parıqlanıp, a'jayıp qa'siyetlerge iye. p -adikalıq sanlar teoriyasında Ostrovskiy teoreması dep atalıwshı teorema bar bolıp, bull teoremanın' ma'nisi ratsional sanlar maydanında qa'legen kiritilgen jan'a norma yamasa absolyut shamag'a (yag'nıy a'piwayı normag'a), yamasa bazı-bir a'piwayı p ushın p -adikalıq normag'a ekvivalent bolıwınan iborat. Arximed bolmag'an geometriya evklid geometriyasına uqsamaydı. Dara jag'dayda, bull jerde barlıq u'shmu'yeshlikler ten' qaptallı boladı. Eki shardın' biri ekinshisinin' ishinde jatsa, bir-biri menen kesilisedi.

Joqarıdag'ılardı esapqa alg'an halda biz bazı-bir p -adikalıq ten'lemelerdi qaradıq.

Izertlew obekti ha'm predmeti: sanlar teoriyası, salıstırıwlar, ratsional sanlar, maydan ken'eytpesi, p -adikalıq sanlar teoriyası.

Jumıstın' maqseti ha'm wazıypaları: p -adikalıq sanlar teoriyasındag'ı kvadrat ten'lemelerdi, u'shinshi ta'rtpili ten'lemelerdi ha'm to'rtinshi ta'rtpili ten'lemelrdi sheshiw kriteriyasın qaraw ha'm olardıń ayırım tu'rlerin u'yreniw.

Izertlewdiń tiykarg'ı ma'seleleri ha'm boljawları. Bazı-bir kvadrat an'latpalar, u'shinshi ta'rtpili anlatpalardı p -adikalıq sanlar maydanında u'yrenip, olardıń bar bolıw jag'dayların keltiriw.

Tema boyınsha a'debiyatlardıń qısqasha analizi. Dissertatsiya tema boyınsha tiykarınan temag'a tiyisli 25 a'debiyat u'yrenilip shıg'ıldı. Bulardan son'g'ı on jıllıq ishindegi a'debiyatlar ko'rilip shıg'ıldı. [12,16, 17]

Izertlewdi qollanılǵ'an usıllarındıń qısqasha sıpatlaması.

Magistrlik jumısta tiykarınan sanlar teoriyasının' salıstırıwlardıń usıllarınan qollanıladı.

Izertlew na'tiyjelerinin' teoriyalıq ha'm a'meliy a'hmiyeti:

Dissertatsiyada keltirilgen na'tiyjeler ha'm usıllar assotsiativ bolmag'an algebralar p -adikalıq sanlar maydanında u'yreniwde ha'm p -adikalıq sanlar teoriyasın izertlewde wo'z qollanılıwlarına iye boladı.

Izertlewdiń ilimiy jan'alıg'ı: Dissertatsiya teoriyalıq xarakterge iye bolıp, tiykarınan bazı-bir p -adikalıq kvadrat an'latpalardıń, u'shinshi ta'rtipli anlatpalardıń qaysı $\square_p$ maydanda bar bolıwı da'llillendi.

Dissertatsiya quramının' qısqasha sıpatlaması: Magistrlik dissertatsiya jumısı kirisiw, u'sh bap, altı paragraf, juwmaqlaw ha'm paydalanılǵ'an a'debiyatlar diziminen ibarat.

Bul magistrlik dissertatsiya jumısı tiykarınan bazı-bir p -adikalıq ten'lemelerdi u'yreniwge arnalg'an.

Birinshi bapın' birinshi paragrafında p -adikalıq sanlar maydanındag'ı da'slepki tu'sinikler keltirilgen. Ekinshi paragrafda p -adikalıq kvadrat ten'lemeler haqqında ayılǵ'an.

Ekinshi bapın' birinshi paragrafta p -adikalıq kvadrat ten'lemelerdin' ayırım tu'rlerinin' bar bolıw jag'dayları keltirilgen. Bul bapın' ekinshi paragrafta p -adikalıq sanlar maydanında $x^3 = a$ ha'm $x^3 + ax = b$ ten'lemelerdin' sheshiw kriteriyaları u'yrenilgen.

Dissertatsiya jumısının' u'shinshi bapın' birinshi paragrafında $x^4 = a$ ko'rinishindegi p -adikalıq ten'lemenin' sheshiw kriteriyası u'yrenilgen.. Bapın' ekinshi paragrafında bazı-bir to'rtinshi ta'rtipli p -adikalıq ten'lemelerdin' qaysı p -adikalıq maydang'a tiyisli bolıwı jag'dayı da'llillengen.

I BAP. DA'SLEPKİ TU'SİNİKLER HA'M BELGİLEWLER

§1.1. p -adikalq sanlar maydanı

Haqıyqıy sanlar $\mathbb{R}$ ratsional sanlardı tolıqtırırw dep atalatug'ın protsessten payda boladı. Bul protsess qa'legen metrikalıq ken'islik ushın qollanıw mu'mkin, yag'nıy d aralıq funktsiyası menen M ken'islik. Bos bolmag'an M ko'pliginde elementlerdin' (x, y) ta'rтіplengen juplıqlardın' ko'pliginde anıqlang'an $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ funktsiyası *aralıq* delinedi, eger sha'rtlerdi qanaatlandırısa:

- 1) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in M$;
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in M$.

M metrikalıq ken'isликтin' $\{r_n\}$ nuqatlar izbe-izligi *Koshi izbe-izligi* delinedi, eger qa'legen $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday natural N sanı bar bolıp, barlıq $n, m > N$ larde $d(r_n, r_m) < \varepsilon$ bolsa. Eger M degi qa'legen izbe-izlik M de limitke iye bolsa, onda M *tolıq metrikalıq ken'islik* delinedi. Eger M tolıq emes bolsa, onda sonday metrikalıq $\bar{M}$ ken'isligi bar bolıp ha'm

- 1) $\bar{M}$ tolıq;
- 2) $\bar{M}$ ken'isligi $\bar{M}_0$ u'les ko'plikti o'z ishine aladı ha'm bul $\bar{M}_0$ ko'plik M ge izometrikalıq;
- 3) $\bar{M}_0$ ko'pligi $\bar{M}$ de ha'mme jerde tıg'ız ($\bar{M}$ degi ha'r bir noqat $\bar{M}_0$ noqatlardın' limit noqatı boladı)

$\bar{M}$ nin' tolıqtırırwshısının' anıq konstruktsiyasın beredi. Onın' elementi – bul M degi Koshi izbe-izliginin' ekvivalentlik klassları $(x_n$ ha'm y_n izbe-izlikleri *ekvivalent* delinedi, eger $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ bolsa).

$M = \mathbb{Q}$ ushın biz ratsional sanlar arasındag'ı a'piwayı evklid aralıg'ın to'mendegishe anıqlaymız:

$$d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|. \quad (1.1.1)$$

Bunda aralıq $\mathbb{Q}$ degi evklid normasidan payda boladı, bul norma absolyut shama delinedi ha'm "sanlı ko'sherdegi" a'piwayı aralıqtı beredi.

$\mathbb{Q}$ ko'pliktin' $\mathbb{R}$ ge shekem bolg'an toliqtırıwshısı sheksiz onlıq bo'lsheklerge tiykarlanadı. Ratsional sanlardı sheksiz onlıq bo'lshekler korinisinde su'wretlewi periodlı bolg'anlıqtan xarakterlenedi. Ekinshi ta'repten, qa'legen sheksiz onlıq bo'lshekler "san ko'sherinde" bazı-bir noqattı beredi. Demek, *haqıyqıy sanlardı* sheksiz onlıq bo'lshekler menen jazıw qolaylı boladı. Ha'r bir haqıyqıy on' a sanı onlıq bo'lshek ko'rinisinde jazıw mu'mkin

$$a = \sum_{k=m}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad (1.1.2)$$

bunda m – bazı-bir pu'tun san ha'm a_k tsifrlar yamasa koeffitsientler

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

ma'nislerin qabıl qıladı. Bulday su'wretlew barlıq $k > n$ ushın $a_k = 0$ jag'daydan basqa jag'daylarda birden-bir, bunday jag'dayda a sanının' basqasha su'wretleniwi bar: $a'_n = a_n - 1$, $a'_k = 9$, $k > n$ ha'm $a'_k = a_k$, $k < n$. $\mathbb{Q}$ da limitke iye bolmag'an ratsional sanlardan turatug'ın Koshi izbe-izliklerin du'ziw qıyın emes:

$$0,1, 0,1011, 0,10110111, 0,1011011101111, \dots$$

Ekinshi ta'repten, ratsional sanlardan du'zilgen Koshi izbe-izliklerinin' ekvivalentli klasslardın' ha'r biri o'z ishine (1.1.2) qatardın' dara qosındılarının' izbe-izligin aladı bul izbe-izliktin' limiti sheksiz onlıq bo'lshekler boladı. Basqasha aytqanda, haqıyqıy sanlar ko'pligi evklid aralıg'ına qarata tolıq boladı ha'm sheksiz onlıq bo'lshekler menen haqıyqıy sanlardı du'ziw evklid aralıg'ına qarata toliqtırıw protsessine ekvivalent boladı. (1.1.2) ni g tiykarı boyınsha sheksiz bo'lsheklerge jayıw menen ulıwmalastırıw mu'mkin, bunda $g - 2$ den u'lken yamasa ten' bolg'an qa'legen natural san; demek

$$a = \sum_{k=m}^{\infty} a_k g^{-k},$$

bul jerde a_k koeffitsientleri $\{0,1,\dots,g-1\}$ ko'pliginin' ma'nislerin qabıl qıladı. Ko'pshilik jag'daylarda tolıqtırıw tu'mendegi konstruktsiya ja'rdeminde qurıladı:

Teorema 1.1.1. *Meyli M – tolıq metrikalıq ken'islik ha'm X ko'pligi M nin' u'les ko'pligi bolsın. Onda X tolıq bolıwı ushın M de tuyıq bolıwı za'ru'r ha'm jeterli boladı. Dara jag'dayda, X u'les ko'pliktin' M degi tuyıqlanıwı X u'les ko'pliktin' tolıqtırıwı sıpatında qaraw mu'mkin.*

Ratsional ha'm haqıyqıy sanlar maydanlar dep atalıwshı algebralıq strukturalardıń tiykarg'ı mısalları bolıp tapıladı. F maydanı – bul qosıw ha'm ko'beytiw dep atalıwshı eki binar operatsiyalı ko'plik bolıp bul operatsiyalar to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlantıradı:

- 1) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in F$ (qosıwdın' kommutativligi);
- 2) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad a, b, c \in F$ (qosıwdın' assotsiativligi);
- 3) $\forall a \in F$ elementi ushın $0 + a = a$ bolatug'ın sonday $0 \in F$ elementi bar boladı (noldin' bar bolıwı);
- 4) $\forall a \in F$ elementi ushın $a + (-a) = 0$ bolatug'ın sonday $-a \in F$ elementi bar boladı (qosıw boyınsha kerı elementtin' bar bolıwı);
- 5) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in F$ (ko'beymenin' kommutativligi);
- 6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in F$ (ko'beymenin' assosiativligi);
- 7) $\forall a \in F^x = F \setminus 0$ ushın $1 \cdot a = a$ bolatug'ın sonday $1 \in F$ elementi bar boladı (birlik elementtin' bar bolıwı);
- 8) $\forall a \in F^x$ elementi ushın $a \cdot a^{-1} = 1$ bolatug'ın $a^{-1} \in F^x$ elementi bar boladı (ko'beyme boyınsha kerı elementtin' bar bolıwı);
- 9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in F$ (distributivlik);
- 10) $0 \neq 1$.

1) - 4) qa'siyetlerin qanaatlantırıwshı bir binar operatsiyalı algebralıq struktura *abel* (yamasa *kommutativ*) gruppası delinedi. Sa'ykes tu'rde qosıw menen F ko'pligi F maydanının' *additiv gruppası* delinedi, F maydanının' ko'beyme menen F^x ko'pligi *multiplikativ gruppası* delinedi. Maydannın' a'hmiyetli qa'siyeti ol noldin' *bo'liwshisin* o'z ishine almaydı, yag'nıy $a \cdot b = 0$ bolatug'ın $a, b \in F^x$ elementleri ushın.

Anıqlama 1.1.1. Meyli F maydan bolsın. F te norma dep F ti teris emes haqıyqıy sanlarg'a sa'wlelendiriwshi ha'm to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlantırıwshı $\|\cdot\|$ sa'wleleniwine aytiladı:

- 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $\|xy\| = \|x\|\|y\|, \forall x, y \in F$;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in F$ (*u'shmu'yeshlik ten'sizligi*).

Norma *trivial* delinedi, eger barlıq $x \neq 0$ ler ushın $\|0\| = 0$ ha'm $\|x\| = 1$ bolsa.

Qa'legen $n \in N$ ushın biz

$$n \cdot 1 := \underbrace{1 + \dots + 1}_n \in F$$

qatnaslarg'a iye bolamız.

Biz bul natural sang'a sa'ykes keliwshi elementi n simvoli arqalı belgileymiz.

Tastıyqlaw 1.1.1. *Qa'legen $x, y \in F$ ler ushın to'mendegiler orınlı:*

- a) $\|1\| = \|-1\| = 1$;
- b) $\|x\| = \|-x\|$;
- c) $\|x \pm y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$;
- d) $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- e) $\|x / y\| = \|x\| / \|y\|$;
- f) $\|n\| \leq n, \forall n \in N$.

Anıqlama 1.1.2. Eki d_1 ha'm d_2 metrikaları F te ekvivalent delinedi, eger d_1 metrikasında qa'legen izbe-izlik Koshi izbe-izligi boladı sonda tek sonda

g' ana eger d_2 metrikasında da Koshi izbe-izligi bolsa. Eki $\|\cdot\|_1$ ha'm $\|\cdot\|_2$ normaları ekvivalent $(\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2)$ delinedi, eger olar ekvivamlent metrikaların indutsirlasa.

Tastıyqlaw 1.1.2. Meyli $\|\cdot\|_1$ ha'm $\|\cdot\|_2 - F$ maydanındag'ı eki norma bolsın. Bul normalar ekvivalent bolıwı ushın

$$\|x\|_2 = \|x\|_1^\alpha, \forall x \in F, \quad (1.1.3)$$

bolatug'in sonday on' α haqıyqıy sanı bar bolıwı za'ru'r ha'm jeterli boladı.

Tastıyqlaw 1.1.3. $\|x\| = |x|^\alpha, \alpha > 0$ funktsiyası $\mathbb{Q}$ da norma boladı sonda tek sonda g' ana, eger $\alpha \leq 1$ bolsa. Bunda ol $|\cdot|$ normasına ekvivalent.

Anıqlama 1.1.3. Norma arximed bo'lmag'an norma delinedi, eger barlıq x ha'm y lar ushın

$$\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

ten'sizligi orınlansa.

Eskertiw 1.1.1. Arximed bolmag'an norma qa'siyetinen u'shmu'yeshlik ten'sizligi kelip shıg'ıwı anıq. Biz bul qa'siyetti *ku'shli u'shmu'yeshlik ten'sizligi* dep ataymız.

Tastıyqlaw 1.1.4. Eger F arximed bolmag'an maydannın' a ha'm x elementleri $\|x - a\| < \|a\|$ ten'sizligin qanaatlantırsa, onda $\|x\| = \|a\|$ boladı.

Tastıyqlaw 1.1.5. Eger $\|\cdot\|$ norması F maydanda arximed bolmasa, onda tuyıq $\overline{B(a, r)} = \{x : \|x - a\| \leq r\}$ shardin' qa'legen noqatı F te oray boladı.

Tastıyqlaw 1.1.6. Eki $(\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2)$ ekvivalent normalar F te yamasa arximed, yamasa arximed bolmag'an norma boladı.

Meyli $p \in \mathbb{N}$ – qa'legen a'piwayı san bolsın. $\mathbb{Q}$ da $|\cdot|_p$ normasın to'mendegishe kiritemiz:

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\text{ord}_p x}} & \text{eger, } x \neq 0, \\ 0, & \text{eger, } x = 0, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

bunda $\text{ord}_p x = \begin{cases} x \text{ ti bo'letug'in } p \text{ nin'en'u'lken da'rejesi, eger } x \in \mathbb{Q}, \\ \text{ord}_p a - \text{ord}_p b, \text{ eger } x = a/b, a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0. \end{cases}$

Bul $|\cdot|_p$ norma p -adikalq *norma* deyiladi.

Eskertiw 1.1.2. funksiyasi tek $\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ ma'nislerin qabil qiladi.

1.1.3. Eger $a, b \in B$ bolsa, onda $a \equiv b \pmod{p^n}$ boladi tek ha'm tek $|a - b|_p \leq 1/p^n$ bolg'anda.

Tastiiqlaw 1.1.7. $|\cdot|_p$ norma $\mathbb{Q}$ da *arximed bolmag'an norma* boladi.

Eskertiw 1.1.4. $\mathbb{Q}$ maydanı $|\cdot|_p$ norma boyınsha toliq emes.

1.1.5. $|\cdot|_{p_1}$ normasi $|\cdot|_{p_2}$ normasına ekvivalent emes, eger p_1 ha'm p_2 – ha'r qıylı a'piwayı sanlar bolsa.

Endi p – a'piwayı sandı fikserleyemiz. $\mathbb{Q}$ ratsional sanlar maydanın p -adikalq $|\cdot|_p$ normasi boyınsha toliqtiramız. Bul sanlar maydanı *p-adikalq sanlar maydanı* dep ataladı ha'm onı $\mathbb{Q}_p$ dep belgileymiz.

Lemma 1.1.1. Eger $x \in \mathbb{Q}$ ha'm $|x|_p \leq 1$ bolsa, onda qa'legen i ushin $|\alpha - x|_p \leq p^{-i}$ bolatug'in $\alpha \in \mathbb{Q}$ pu'tin sanı bar boladı. Bunda α sanı $\{0, 1, 2, \dots, p^i - 1\}$ ko'pligine tiyisli dep alsaq boladı ha'm α ko'plikten birden-bir ra'wishte alınadı.

Teorema 1.1.1. $|a|_p \leq 1$ tengsizlikti qanaatlandiratug'in ha'r bir $a \in \mathbb{Q}_p$ ekvivalentli klassta tek bir $\{a_i\}$ Koshi izbe-izligin o'z ishine aladı, ha'm bul izbe-izlik to'mendegi sha'rtlerdi orınlaydı:

- 1) $a_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_i < p^i$, $i = 1, 2, \dots$;
- 2) $a_i \equiv a_{i+1} \pmod{p^i}$, $i = 1, 2, \dots$.

Eger $a \in \mathbb{Z}_p$ ha'm $|a|_p \leq 1$ bolsa, olding'ı teoramadağı a_i izbe-izliginin' ag'zaların to'mendegishe jazıw qolaylı:

$$a_i = d_0 + d_1p + \dots + d_{i-1}p^{i-1},$$

bunda $d_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ko'plikitegi pu'tin sanlar. Bizin' 2) sha'rtimiz

$$a_{i+1} = d_0 + d_1p + \dots + d_{i-1}p^{i-1} + d_i p^i$$

ekenligin an'latadı, d_0 den d_{i-1} ge shekem bolg'an « p -adikalıq sanlar» sol sanlar bolıp ha'm a_i ushın da sonday boladı. Demek, a jıynaqlı qatar ko'rinishinde boladı (p -adikalıq norma boyınsha)

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} d_n p^n,$$

bul qatardı p tiykarı boyınsha ha'm shepten sheksiz dawam etetug'in san dep qarasaqta boladı, yamasa sheksiz ko'p p -adikalıq sanlardı o'z ishine aladı. Keyinshelik biz

$$a = \dots d_n \dots d_2 d_1 d_0$$

deb jazsaq boladı ha'm bul jazıwdı *kanonikalıq p -adikalıq jayılma* yamasa a sanının' *kanonikalıq forması* depte ataymız.

Eger $|a|_p > 1$ bolsa, onda a nı p sanının' bazı-bir da'rejesine ko'beytsek boladı ($p^m = |a|_p^{-1}$ g'a) ha'm $|a'|_p \leq 1$ bolatug'in $a' = ap^m$ p -adikalıq sanın alamız.

Onda

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n p^n, \quad (1.1.5)$$

dep jazsaq boladı, bunda $d_{-m} \neq 0$ ha'm $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Bunday jag'dayda a sanının' *kanonikalıq p -adikalıq jayılması* to'mendegishe boladı:

$$a = \dots d_n \dots d_2 d_1 d_0, d_{-1} \dots d_{-m}. \quad (1.1.6)$$

p -adikalq sannın' norması onın' kanonikalq jayılmısına birinshi nollik koeffitsienttin' indeksin anıqlaydı. a sanı ushın (1.1.6) dan $ord_p(x) = -m$ ha'm $|a|_p = p^{-ord_p(a)} = p^m$ alamız.

Eskertiw 1.1.6. Teorema 1.1.1 tin' ta'miyinleytug'ın birden-birligi birinshi paragrafta ayılq'an g tiykarı boyınsha sheksiz bo'lshekler ko'rinisinde anıqlang'an sanlar ushın joq, ma'selen

$$1,0000...=0,9999...$$

p -adikalq jag'dayda bunday protsessler bolmaydı. Eger eki p -adikalq jayılmalar bir p -adikalq sanga jaqınlassa, onda olar u'stpe-u'st tu'sedi, yag'nıy onın' barlıq tsifrları u'stpe-u'st tu'sedi.

Anıqlama 1.1.4. *Pu'tin p -adikalq san dep kanonikalq jayılmısında p nın' tek teris emes bolg'an $a \in \mathbb{Q}_p$ sanlarına ayıladı.*

Barlıq pu'tin p -adikalq sanlar ko'pligi $\mathbb{Z}_p$ arqalı belgilenedi:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \right\}.$$

$\mathbb{Z}_p = \{ a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1 \}$ ekenligin ko'riw qıyın emes.

Teorema 1.1.2. *Pu'tin p -adikalq sanlardın' ha'r bir sheksiz izbe-izligi jıynaqlı bolıwshı u'les izbe-izlikti o'z ishına aladı.*

Endi p -adikalq sanlar ustida arifmetikalıq a'mellerdi qaraymız.

p -adikalq jayılmalar $\mathbb{Q}_p$ maydanının' elemantleri u'stinde arifmetikalıq a'mellardi orınlawdı ta'miyinleydi ($\mathbb{Q}$ degige uqsas). $\mathbb{Q}_p$ maydanının' elemantleri u'stinde arifmetikalıq a'mellerdi orınlaw haqıyqıy sanlar u'stinde qarag'anda jen'illirek!

Meyli

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n, \quad b = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n p^n,$$

bolsın, bunda a_n ha'm b_n – p -adikalq sanlar ha'm $a_{-m} \neq 0$, lekin $b_{-m}, b_{-m+1}, \dots$ lerdin' bir yamasa bir neshe tsifrları 0 ge ten'. Onda

$$a \pm b = \sum_{n=-m}^{\infty} (a_n \pm b_n) p^n,$$

ten'liginin' on' ta'repi jıynaqlı izbe-izlik boladı, lekin ol (1.1.6) kanonikalıq forma bolmaydı. Eger $a_n + b_n$ qosındının' qaysı bir n de p g'a ten' bolsa, onda ol keyingi ag'zag'a o'tedi. Bunı anıq tusınıw ushın keyinshelik mısalda qaraymız.

Endi qızıg'arlı fakt, -1 sanının' $\square_p$ degi p -adikalıq jayılmassının' algoritmin qaraymız. Biz $1 = \dots 00001$ ge iye bolamız. Meyli $a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0$ sanı $1 + a = 0$ qatnasların qanaatlantırsın (onda $a = -1$). On' ta'repten baslasaq $1 + a_0 = 0$ alamız, lekin $a_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ bolg'anlıktan a_0 di tabıwdın' birden-bir usılı bul $1 + a_0 = p$ an'latpada birdi shep ta'repke o'tkizemiz. Sonın' ushın $a_0 = p-1$. Bul protsessti dawam ettitrip barlıq a_n lerdi tabamız $a_n = p-1$, yag'nıy

$$-1 = \dots (p-1)(p-1)(p-1).$$

Bul -1 sanının' p -adikalıq jayılmassı.

Ko'beyme de usıg'an uqsas. Meyli a ha'm b sanının' kanonikalıq jayılmassı berilgen bolsın:

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n, \quad b = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n p^n.$$

Qatarlardı ko'beytip ha'm uqsas ag'zalardı jıynap

$$ab = \sum_{n=-m-k}^{\infty} u_n p^n,$$

alamız, bunda

$$u_{-m-k} = a_{-m} b_{-k},$$

$$u_{-m-k+1} = a_{-m+1} b_{-k} + a_{-m} b_{-k+1},$$

.....

Bul qatar da ulıwma aytqanda kanonikalıq jayıлма emes, lekin teorema 1.1.1 din' usılı bizge onı kanonikalıq ko'rıniske keltiredi.

Bo'liwdi anıqlaw ushın bizge eki $a, b \in \mathbb{Z}_p$ berilgen bolsın, $b \neq 0$. Bizde

$b \in \mathbb{Z}_p$, $b = \dots b_2 b_1 b_0$, $\mu \cdot \frac{1}{\eta}$. Meyli a sanının' p -adikalıq jayılmısı

$$a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-k}$$

bolsın. $b_0 \neq 0$ ha'm p a'piwayı sanı ushın $\mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$ qaldıqlar koltsosı maydan bolg'anlıqtan, hamme waqıt $c_{-k} b_0 \equiv a_{-k} \pmod{p}$ orınlanatug'ın $c_{-k} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ sanın tabıw mu'mkin. A'piwayı protsessti dawam ettirsek biz a / b nı kanonikalıq formada alamız.

Joqarıda ayılğ'anday, eger $a = \dots a_2 a_1 a_0$ – pu'tin p -adikalıq san bolsa ha'm $a_0 \neq 0$ bolsa, onda onın' ko'beyme bo'yınsha kerı $1/a$ da pu'tin p -adikalıq san boladı.

Ekinshi ta'repten,

$$p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i = a_0 p + a_1 p^2 + \dots \neq 1 + 0p + 0p^2 + \dots,$$

bolıwınan p sanı $\mathbb{Z}_p$ da ko'beyme boyınsha kerisine iye emes.

Tastıyqlaw 1.1.8. *Pu'tin p -adikalıq*

$$a = \dots a_1 a_0 \in \mathbb{Z}_p$$

sanı $\mathbb{Z}_p$ da ko'beyme bo'yınsha kerı elementke iye bolıwı ushın $a_0 \neq 0$ bolıwı za'rurli ha'm jeterli boladı.

$\mathbb{Z}_p$ koltsosının' kerı elementleri gruppasın $\mathbb{Z}_p^\times$ arqalı belgileymiz. Onda

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i : a_0 \neq 0 \right\}$$

boladı. Bul gruppa p -adikalıq birlikler delinedi. Demek,

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1 \right\}.$$

Tastıyqlaw 1.1.9. *Meyli x – p -adikalıq san bolsın ha'm norması p^{-n}*

bolsın. Onda x sanın $x = p^n u$ ko'rinisinde jazıw mu'mkin, bunda $u \in \mathbb{Z}_p^\times$.

§1.2. p -adikalq kvadrat ten'lemeler

Bul paragrafta p -adikalq kvadrat ten'lemenin` sheshiw kriteriyası keltirilgen.

$a \in \mathbb{Z}$ sanı p moduli boyınsha *kvadratlı qaldıq* delinedi egerde

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

ten'lemesi pu`tin  $x \in \mathbb{Z}$  sheshimine iye bolsa; keri jag`dayda p moduli boyınsha kvadratlı qaldıq emes delinedi.

Biz $\left(\frac{a}{p}\right)$ Lejandr simvolının` anıqlamasın keltiremiz. Bull simvol  $p$  g`a bo`linbeytug`ın barlıq a lar ushın anıqlanadı. Lejandr simvolı 1 ge ten` eger  $a$  – kvadrat qaldıq bolsa, -1 ge ten` boladı, egerde a – kvadrat kaldıq bolmasa. $\left(\frac{a}{p}\right)$ simvolın esaplaw to`mendegi teorema boyınsha esaplanadı (Eyer kriteriyası).

Teorema 1.2.1 [11]. p g`a bo`linbeytug`ın  $a$  lar ushın to`mendegi orınlı

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}.$$

Lejandr simvolının` qa'siyetlerin keltiremiz:

- a) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$
- b) $\left(\frac{ab \dots k}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) \dots \left(\frac{k}{p}\right).$

Meyli $a \in \square_p$ bolsın ha'm to`mendegishe kanonikalıq ko`riniske iye bolsın:

$$a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + \dots), a_0 \neq 0, 0 \leq a_j \leq p-1, j = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema 1.2.2. [10].

$$x^2 = a$$

ten'lemesi $x \in \mathbb{F}_p$ sheshimge iye bolıwı ushın to'mendegi sha'rtlerdin' orınlanıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli:

1) $\gamma(a) - \text{jup san,}$

2) $a_0 \text{ sanı } p \text{ moduli boyınsha kvadratlı qaldıq boladı, egerde } p \neq 2 \text{ bolsa;}$
 $a_1 = a_2 = 0 \text{ boladı, egerde } p = 2.$

Meyli $\eta - p$ -adikalıq birlik bolsın ha'm bul san hesh qanday p -adikalıq sannın' kvadratı bolmasın.

Teorema 1.2.2 den to'mendegi saldarlar kelip shıg'adı. Biz bul saldarlardin' tolıq da'lilleniwi menen keltiremiz.

Saldar 1.2.1. $p \neq 2$ bolg'anda $\varepsilon_1 = \eta$, $\varepsilon_2 = p$, $\varepsilon_3 = p\eta$ hesh qanday p -adikalıq sannın' kvadratı bolmaydı. Qa'legen p -adikalıq x sanı to'mendegi to'rt ko'rinislerdin' birewine keltiriwge boladı:

$$x = \varepsilon_i y_i^2, \text{ bunda } y_i \in \mathbb{F}_p, 0 \leq i \leq 3, \varepsilon_0 = 1.$$

Da'lillew. Meyli $\eta \in \mathbb{Z}_p^*$ bolsın ha'm to'mendegishe kanonikalıq ko'riniske iye bolsın:

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 p + \eta_2 p^2 + \dots, \eta_0 > 0, 0 \leq \eta_j \leq p-1, j = 0, 1, \dots$$

η sanı hesh qanday sannın' kvadratı bolmag'an p -adikalıq birlik bolg'anlıqtan teorema 2.1.2 boyınsha η_0 sanı kvadratlıq qaldıq bolmaydı.

$p = p(1 + 0 \cdot p + 0 \cdot p^2 + \dots)$ ha'm $\eta p = p(\eta_0 + \eta_1 p + \eta_2 p^2 + \dots)$, $\eta_0 \neq 0$, $0 \leq \eta_j \leq p-1$, $j=0, 1, 2, \dots$, sanları teorema 1.2.2 boyınsha hesh qanday sannın' kvadratı bolmaydı, sebebi $\gamma(p) = 1$ ham $\gamma(\eta p) = 1$, yag'nıy taq.

Meyli $\mu - p$ -adikalıq birlik bolsın ha'm hesh qanday p -adikalıq sannın' kvadratı bolmasın. μ sanı to'mendegishe kanonikalıq ko'riniske iye bolsın:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 p + \mu_2 p^2 + \dots,$$

bunda $\mu_0 \neq 0$, $\mu_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $i = 0, 1, \dots$. μ sanı kvadrat bolmag'anlıqtan kanonikalıq jayılmadag'ı μ_0 kvadrat qaldıq bolmaydı.

Biz endi $\frac{1}{\eta}$ sanın qarastırayıq. Eger η – kvadrat bolmasa, onda $\frac{1}{\eta}$ sanı kvadrat bolmaydı. Meyli $\frac{1}{\eta}$ sanı to'mendegishe kanonikalıq ko'riniske iye bolsın:

$$\frac{1}{\eta} = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots,$$

bunda $c_0 > 0$, $0 \leq c_i \leq p-1$, $i = 0, 1, \dots$ $\frac{1}{\eta}$ sanı kvadrat bolmag'anlıqtan jayılmadag'ı c_0 – kvadrat qaldıq bolmaydı.

$$\mu = \eta y^2$$

bolatug'ınday $y \in \square_p$ tin' bar ekenligin da'lilleymiz. yag'nıy $\frac{\mu}{\eta} = y^2 \cdot \frac{\mu}{\eta}$ sanı to'mendegishe jayılmag'a iye boladı:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\eta} &= \mu \cdot \frac{1}{\eta} = (\mu_0 + \mu_1p + \mu_2p^2 + \dots)(c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots) = \\ &= \mu_0c_0 + (\mu_0c_1 + \mu_1c_0)p + \dots \end{aligned}$$

Bizde μ_0 ha'm s_0 sanları kvadrat qaldıq bolmag'anlıqtan $\left(\frac{\mu_0}{\eta}\right) = -1$ ha'm $\left(\frac{c_0}{p}\right) = -$

1. Lejandr simvolının' b) qa'siyetin qollasaq to'mendegi qatnasqa iye bolamız:

$$\left(\frac{\mu_0c_0}{p}\right) = \left(\frac{\mu_0}{p}\right)\left(\frac{c_0}{p}\right) = (-1)(-1) = 1.$$

Demek μ_0c_0 kvadrat qaldıq bolıp tabıladı, onda $\frac{\mu}{\eta}$ sanı bazı-bir p -adikalıq sanın' kvadratı boladı.

Endi qa'legen p -adikalıq x sanının' to'rt tu'rdin' birewine alıp kelinetug'inlıg'ın ko'rsetemiz:

$$x = \varepsilon_i y_i^2, \text{ bunda } y_i \in \square_p, \varepsilon_i \in \{1, \eta, p, p\eta\}, 0 \leq i \leq 3,$$

Meyli qa'legen $x \in \square_p$ to'mendegi kanonikalıq ko'riniske iye bolsın:

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots), x_0 \neq 0, 0 \leq x_j \leq p-1, j = 0, 1, \dots$$

$$v = x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots \text{ dep belgileymiz ha'm } |v|_p = 1.$$

Eger x_0 kvadrat qaldıq bolsa, onda sonday $y \in \mathbb{Z}_p$ bar bolıp,

$$v = y^2 \text{ ha'm } x = p^{\gamma(x)}y^2.$$

Eger x_0 kvadratlıq qaldıq bolmasa, onda p -adikalıq v birliği hesh qanday p -adikalıq sannın kvadrati bolmaydı ha'm joqarıda ko'rsetkenimizdey onı to'mendegishe jazıw mu'mkin

$$v = \eta t^2 \text{ ha'm } x = p^{\gamma(x)}\eta t^2.$$

Solay etip biz qa'legen p -adikalıq x sanının to'mendegishe ko'rinske iye bolatug'ınlıg'ın da'lilledik

$$x = p^{\gamma(x)}t^2 \text{ ha'm } x = p^{\gamma(x)}\eta t^2.$$

Eger $\gamma(x) - \text{jup}$ bolsa, onda $\mathbb{Z}_2$ dep belgilep alıp

$$x = y^2 \text{ yamasa } x = \eta y^2$$

iye bolamız.

Eger $\gamma(x) - \text{taq}$ bolsa, onda ja'ne $\mathbb{Z}_2$ dep belgilep alıp

$$x = py^2 \text{ yamasa } x = p\eta y^2$$

iye bolamız.

Demek biz qa'legen p -adikalıq x sanının to'mendegi to'rt tu'rdin birewine keltiriwge bolatug'ınlıg'ın da'lilledik:

$$x = \varepsilon_i y_i^2, \text{ bunda } y_i \in \mathbb{Z}_p, \varepsilon_0 = 1, 0 \leq i \leq 3.$$

Saldar da'lillendi.

Saldar 1.2.2. $p = 2$ bolg'anda $\varepsilon_j = \{2, 3, 5, 6, 7, 10, 14\}$ ($1 \leq j \leq 7$) sanları hesh bir 2-adikalıq sannın kvadrati bolmaydı. Qa'legen 2-adikalıq x sanın to'mendegi segiz ko'rinslerdin birewine keltiriwge boladı:

$$x = \varepsilon_j y_j^2, \text{ bunda } y_j \in \mathbb{Z}_2, \varepsilon_0 = 1, 0 \leq j \leq 7.$$

Da'lillew. Meyli qa'legen $x \in \mathbb{Z}_2$ elementi to'mendegishe kanonikalıq ko'rinske iye bolsın:

$$x = 2^{\gamma(x)}(1 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots), x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots$$

3, 5 ha'm 7 sanlarının kanonikalıq jayılmasında sa'ykes $(x_1, x_2) = (1, 0)$, $(x_1, x_2) = (0, 1)$ ha'm $(x_1, x_2) = (1, 1)$ boladı, $x_j = 0$, $j \geq 3$. Teorema 1.2.2 boyınsha olar hesh qanday 2-adikalıq sannın kvadratı bolmaydı.

Al 2, 6, 10 ha'm 14 sanlarıda hesh qanday 2-adikalıq sannın kvadratı bolmaydı, sebebi bull sanlardın 2-adikalıq jayılmalarında $\gamma(2) = \gamma(6) = \gamma(10) = \gamma(14) = 1$ boladı.

Endi qa'legen 2-adikalıq x to'mendegi segiz ko'rinistin birine alıp keliw mu'mkin ekenligin ko'rsetemiz:

$$x = \varepsilon_j y_j^2, \text{ bunda } y_j \in \square_2, \varepsilon_0 = 1, 0 \leq j \leq 7.$$

$$\text{Meyli } x = 2^{\gamma(x)}(1 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots), x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots$$

Eger $\gamma(x)$ jup ha'm $(x_1, x_2) = (0, 0)$ bolsa, onda x bazı-bir p -adikalıq sannın kvadratı boladı, yag'nıy $x = y^2$. Al $(x_1, x_2) = (1, 0)$ jag'dayda to'mendegige iye bolamız

$$\begin{aligned} x &= 2^{\gamma(x)}(1 + 2 + x_3 2^3 + \dots) = 2^{\gamma(x)}(3 + x_3 2^3 + \dots) = \\ &= 3 \cdot 2^{\gamma(x)}(1 + x'_3 2^3 + \dots) = 3y^2. \end{aligned}$$

Usıg'an uqsas tu'rde $(x_1, x_2) = (0, 1)$ ha'm $(x_1, x_2) = (1, 1)$ jag'daylar ushın x ti sa'ykes $5y^2$ ha'm $7y^2$ ko'riniste bolatug'ınlıg'ı da'llillenedi.

Solay etip, eger $\gamma(x)$ jup bolsa, onda x_1 ha'm x_2 lerge baylanıslıg'ınan $x = \varepsilon y_j^2$ iye bolamız, bunda $y_j \in \square_2$, $\varepsilon \in \{1, 3, 5, 7\}$, $1 \leq j \leq 4$.

Al $\gamma(x)$ taq bolg'an jag'dayda joqarıdag'ıday pikirlew ju'rgizip

$$x = 2y^2 \text{ yamasa } x = 6y^2 \text{ yamasa } x = 10y^2 \text{ yamasa } x = 14y^2$$

iye bolamız, yag'nıy to'mendegi ko'riniste

$$x = \varepsilon y_j^2, \text{ bunda } y_j \in \square_2, \varepsilon \in \{2, 6, 10, 14\}, 1 \leq j \leq 4.$$

Saldar da'llillendi.

I Bap boyınsha juwmaq

Bul bapta p -adikalıq sanlar teoriyasındag`ı da'slepki tu'sinikler keltirilgen, yag`nıy anıqlamalar, ayırım tastıyıqlawlar ha`m teoremlar keltirilgen. Sonday-aq  $p$ -adikalıq kvadrat ten`lemelerdi sheshiw kriteriyası keltirilgen.

II BAP. p -ADİKALIQ U`SHINSHI DA`REJELI TEN`LEMELER

§2.1. Bazı-bir p -adikalq kvadrat ten`lemeler

Biz bul paragrafta bazı-bir kvadrat ten`lemelerdin` $\mathbb{Q}_p$ maydanında bar bolıw jag`dayların qaraymız.

Sh.A.Ayupov ha`m T.K.Kurbanbaevlardin` [15] jumısında to`mendegi teorema da`lillengen.

Meyli η – p -adikalq birlik bolıp, hesh qanday p -adikalq sannın` kvadratı bolmasın.

Teorema 2.1.1. *Qa`legen  $p \neq 2$  ushin  $4 + p^2\varepsilon$  an`latpa $\mathbb{Q}_p$ da kvadrat koren`ge iye boladı, bunda  $\varepsilon \in \{1, \eta, p, p\eta\}$ , al  $4 + 8^2\varepsilon$  an`latpası $\mathbb{Q}_2$ de kvadrat koren`ge iye boladı, bunda $\varepsilon \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14\}$.*

**Da`lillew.**  $4 + p^2\varepsilon$  an`latpasın qaraymız, bunda $\varepsilon \in \{1, \eta, p, p\eta\}$. Meyli

$$\varepsilon = p^{\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 p^2 + \dots), \quad (2.1.1)$$

bunda $\gamma(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_0 \neq 0$, $\varepsilon_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, $i=0, 1, \dots$ – ε sanının` kanonikalq jayılması bolsın.

Onda

$$4 + p^2\varepsilon = 4 + p^{2+\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 p^2 + \dots). \quad (2.1.2)$$

$p \neq 2$ bolg`an jag`dayda 1 ha`m  $\eta$  sanları  $p$ -adikalq birlikler boladı (olardın` normaları $|1|_p = |\eta|_p = 1$). p ha`m  $p\eta$  sanlarının` norması $|p|_p = |p\eta|_p = \frac{1}{p}$ boladı.

Bizde p ha`m  $p\eta$  sanlarının` pu`tin  $p$ -adikalq sanlar bolg`anlíg`ınan $\gamma(\varepsilon)$ tek 0 yamasa 1 sanların qabıl ete aladı.

Meyli $p = 3$ bolsın. Onda (2.1.2) jayılma to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$4 + p^2\varepsilon = 1 + 3 + 3^{2+\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 3 + \varepsilon_2 3^2 + \dots),$$

bunda $\gamma(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_i \in \{0, 1, 2\}$, $\varepsilon_0 \neq 0$, $i = 0, 1, \dots$

Teoreme 1.2.2 boyınsha $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ten`lemesi  $\mathbb{Z}$  te sheshimge iye, yag`nıy $x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$. Demek $4 + p^2\varepsilon$ an`latpası  $\mathbb{Z}_3$  te kvadrat koren`ge iye boladı.

Meyli $p \geq 5$ bolsın, onda

$$4 + p^2\varepsilon = 4 + p^{2+\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 p^2 + \dots)$$

boladı.

Teorema 1.2.2 boyınsha $x^2 \equiv 4 \pmod{p}$ ten`lemesi  $\mathbb{Z}$  te sheshimge iye boladı, yag`nıy $x = pn + 2, n \in \mathbb{Z}$ boladı. Demek $4 + p^2\varepsilon$ an`latpası  $\mathbb{Z}_p$  da kvadrat koren`ge iye boladı.

Meyli $p = 2$ bolsın. Onda $4 + 8^2\varepsilon$ an`latpasın qarastırayıq, bunda  $\varepsilon \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14\}$ . 1, 3, 5, 7 sanları 2-adikalıq birlikler boladı, al qalg`an 2, 6, 10, 14 sanları pu`tin 2-adikalıq sanlar boladı (sebebi $|2|_2 = |6|_2 = |10|_2 = |14|_2 = a_0 \in \{1, 2, \dots, 16\} < 1$). Onda

$$\varepsilon = 2^{\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_2 2^2 + \dots)$$

jayılmadag`ı pu`tin $\gamma(\varepsilon)$ sanı tek 0 yamasa 1 ma`nislerin qabıl etedi. Sonlıqtan  $4 + 8^2\varepsilon$  an`latpasının` kvadrat koreninin` bar bolıwı teorema 1.2.2 den kelip shıg`adı.

Teorema da`lillendi.

Teorema 2.1.2. $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ an`latpası $\mathbb{Z}_{17}$ maydanında bar boladı.

**Da`lillew.**  $\mathbb{Z}_{17}$  maydanında  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  an`latpasının` bar bolıwı  $x^2 = 2 + \sqrt{2}$  ten`lemesinin` sheshiliwinen kelip shıg`adı. Da`slep 2 sanın to`mendegishe kanonikalıq ko`riniste jayıp alamız:

$$2 = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(2) = 0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 2 \pmod{17}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın

tekseremiz. Bul ten`leme  $x_0 = 6$  ha`m $x_0 = 11$ lerde sheshimge iye. Bunnan $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_{17}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Endi $\mathbb{Q}_{17}$ maydanında $\sqrt{2}$ sanının` jayılmassının` da`slepki u`sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın` ushın biz $a^2 = 2$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılmass

$$a = a_0 + a_1 \cdot 17 + a_2 \cdot 17^2 + \dots$$

bolg`an p -adikalıq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 16$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to`mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^2 + 2a_0a_1 \cdot 17 + (a_1^2 + 2a_0a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (2.1.3)$$

Birinshi qa`demde  $a_0^2 \equiv 2 \pmod{17}$  ten`lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 6$ ha`m $a_0 = 11$ sheshimlerine iye boladı.

a) Biz $a_0 = 6$ dep alamız. Onda (2.1.3) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$36 + 12a_1 \cdot 17 + (a_1^2 + 12a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (2.1.3')$$

Bunnan $12a_1 + 2 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın payda etip ha`m onı sheshemiz, bunda  $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$ . Bul salıstırıw  $a_1 = 14$  sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.1.3') ten`ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag`nıy $12a_2 + 9 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. Sheshimi $a_2 = 12$ boladı. Demek

$$\sqrt{2} = 6 + 14 \cdot 17 + 12 \cdot 17^2 + \dots$$

jayılmag`a iye bolamız.

Endi $x^2 = 2 + \sqrt{2}$ ten`ligin to`mendegishe jazamız:

$$x^2 = 2 + \sqrt{2} = 2 + 6 + 14 \cdot 17 + 12 \cdot 17^2 + \dots = 8 + 14 \cdot 17 + 12 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul ten`leme  $\gamma(2 + \sqrt{2}) = 0$  jup. Bul bolsa teorema 1.2.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushın 8 sanının` kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 8 \pmod{17}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul

salıstırıw $x_0 = 5$ ha'm $x_0 = 12$ sheshimlerine iye boladı. Demek $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \in \square_{17}$ ekenligi kelip shıg'adı.

b) Endi biz $a_0 = 11$ bolg'an jag'daydı qaraymız. Onda (2.1.3) to'mendegi ko'rinske iye boladı:

$$121 + 22a_1 \cdot 17 + (a_1^2 + 22a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (2.1.3'')$$

Bunnan $22a_1 + 7 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın payda etip ha'm onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 2$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.2.3'') ten'ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag'nıy $22a_2 + 7 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. Sheshimi $a_2 = 2$ boladı. Demek

$$\sqrt{2} = 11 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 17^2 + \dots$$

jayılmag'a iye bolamız.

Endi $x^2 = 2 + \sqrt{2}$ ten'ligin to'mendegishe jazamız:

$$x^2 = 2 + \sqrt{2} = 2 + 11 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 17^2 + \dots = 13 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul ten'leme $\gamma(2 + \sqrt{2}) = 0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2.2 nin' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2.2 nin' ekinshi sha'rtin tekseremiz. Bul ushın 13 sanının' kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag'nıy $x_0^2 \equiv 13 \pmod{17}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$ da sheshiminin' bar yaki joqlıg'ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 8$ ha'm $x_0 = 9$ sheshimlerine iye boladı. Demek

$\sqrt{2 + \sqrt{2}} \in \square_{17}$ ekenligi kelip shıg'adı.

Teorema da'lillendi.

Teorema 2.1.3. $\sqrt{3 + \sqrt{3}}$ an'latpası $\square_{11}$ maydanında bar boladı.

Da'lillew. $\square_{11}$ maydanında $\sqrt{3 + \sqrt{3}}$ an'latpasının' bar bolıwı $x^2 = 3 + \sqrt{3}$ ten'lemesinin' sheshiliwinen kelip shıg'adı. Da'slep 3 sanın to'mendegishe kanonikalıq ko'rinite jayıp alamız:

$$3 = 3 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(3)=0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 3 \pmod{11}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1,2,\dots,10\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul ten`leme  $x_0=5$  ha`m $x_0=6$ larda sheshimge iye. Bunnan $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}_{11}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Endi $\mathbb{Q}_{11}$ maydanında $\sqrt{3}$ sanının` jayılmassının` da`slepki u`sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın` ushın biz $a^2=3$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılmısı

$$a = a_0 + a_1 \cdot 11 + a_2 \cdot 11^2 + \dots$$

bolg`an p -adikalıq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 10$, $j=1,2,\dots$.

Demek biz to`mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^2 + 2a_0a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 2a_0a_2) \cdot 11^2 + \dots = 3 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.1.4)$$

Birinshi qa`demde  $a_0^2 \equiv 3 \pmod{11}$  ten`lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1,2,\dots,10\}$. Bul salıstırıw $a_0=5$ ha`m $a_0=6$ sheshimlerine iye boladı.

Biz tek $a_0=6$ jag`daydı qaraymız ( $a_0=5$  bolg`an jag`dayda  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}_{11}$  boladı). Onda (2.1.4) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$36 + 12a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 12a_2) \cdot 11^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.1.4')$$

Bunnan $12a_1 + 3 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın payda etip ha`m onı sheshemiz, bunda  $a_1 \in \{0,1,2,\dots,10\}$ . Bul salıstırıw  $a_1=8$  sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.2.4') ten`ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag`nıy $12a_2 + 9 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0,1,2,\dots,10\}$. Sheshimi $a_2=2$ boladı. Demek

$$\sqrt{3} = 6 + 8 \cdot 11 + 2 \cdot 11^2 + \dots$$

jayılmag`a iye bolamız.

Endi $x^2 = 3 + \sqrt{3}$ ten`ligin to`mendegishe jazamız:

$$x^2 = 3 + \sqrt{3} = 3 + 6 + 8 \cdot 11 + 2 \cdot 11^2 + \dots = 9 + 8 \cdot 11 + 2 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul ten'leme $\gamma(3+\sqrt{3})=0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2.2 nin' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2.2 nin' ekinshi sha'rtin tekseremiz. Bul ushın 9 sanının' kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag'nıy $x_0^2 \equiv 9 \pmod{11}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1,2,\dots,10\}$ da sheshiminin' bar yaki joqlıg'ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 3$ ha'm $x_0 = 8$ sheshimlerine iye boladı. Demek $\sqrt{3+\sqrt{3}} \in \square_{17}$ ekenligi kelip shıg'adı.

Teorema da'lillendi.

Teorema 2.1.4. $\sqrt{5+\sqrt{5}}$ an'latpası $\square_{11}$ maydanında bar boladı.

Da'lillew. $\square_{11}$ maydanında $\sqrt{5+\sqrt{5}}$ an'latpasının' bar bolıwı $x^2 = 5 + \sqrt{5}$ ten'lemesinin' sheshiliwinen kelip shıg'adı. Da'slep 5 sanın to'mendegishe kanonikalıq ko'riniste jayıp alamız:

$$5 = 5 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(5)=0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2.2 nin' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2.2 nin' ekinshi sha'rtin tekseremiz, yag'nıy $x_0^2 \equiv 5 \pmod{11}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1,2,\dots,10\}$ da sheshiminin' bar yaki joqlıg'ın tekseremiz. Bul ten'leme $x_0 = 4$ ha'm $x_0 = 7$ lerge sheshimge iye. Bunnan $\sqrt{5} \in \square_{11}$ ekenligi kelip shıg'adı.

Endi $\square_{11}$ maydanında $\sqrt{5}$ sanının' jayılmassının' da'slepki u'sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın' ushın biz $a^2 = 5$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılması

$$a = a_0 + a_1 \cdot 11 + a_2 \cdot 11^2 + \dots$$

bolg'an p -adikalıq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 10$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to'mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^2 + 2a_0a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 2a_0a_2) \cdot 11^2 + \dots = 5 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.1.5)$$

Birinshi qa'demde $a_0^2 \equiv 5 \pmod{11}$ ten'lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1,2,\dots,10\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 4$ ha'm $a_0 = 7$ sheshimlerine iye boladı.

a) Biz da'slep $a_0 = 4$ dep alamız. Onda (2.1.5) to'mendegi ko'rinske iye boladı:

$$16 + 8a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 8a_2) \cdot 11^2 + \dots = 5 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.1.5')$$

Bunnan $8a_1 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın payda etip ha'm onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 4$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.1.5') ten'ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag'nıy $8a_2 + 5 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Sheshimi $a_2 = 9$ boladı. Demek

$$\sqrt{5} = 4 + 4 \cdot 11 + 9 \cdot 11^2 + \dots$$

jayılmag'a iye bolamız.

Endi $x^2 = 5 + \sqrt{5}$ ten'ligin to'mendegishe jazamız:

$$x^2 = 5 + \sqrt{5} = 5 + 4 + 4 \cdot 11 + 9 \cdot 11^2 + \dots = 9 + 4 \cdot 11 + 9 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul ten'leme $\gamma(5 + \sqrt{5}) = 0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushın 9 sanının` kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag'nıy  $x_0^2 \equiv 9 \pmod{11}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 3$ ha'm $x_0 = 8$ sheshimlerine iye boladı. Demek $\sqrt{5 + \sqrt{5}} \in \square_{17}$ ekenligi kelip shıg`adı.

b) Endi biz $a_0 = 7$ bolg'an jag`daydı qaraymız. Onda (2.1.5) to'mendegi ko'rinske iye boladı:

$$49 + 14a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 14a_2) \cdot 11^2 + \dots = 5 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.1.5'')$$

Bunnan $3a_1 + 4 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın payda etip ha'm onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 6$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.1.5'') ten'ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag'nıy $14a_2 + 14 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Sheshimi $a_2 = 10$ boladı. Demek

$$\sqrt{5} = 7 + 6 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + \dots$$

jayılmag'a iye bolamız.

Endi $x^2 = 5 + \sqrt{5}$ ten`ligin to`mendegishe jazamız:

$$x^2 = 5 + \sqrt{5} = 5 + 7 + 6 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + \dots = 12 + 6 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul ten`leme  $\gamma(5 + \sqrt{5}) = 0$  jup. Bul bolsa teorema 1.2.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushin 13 sanının` kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 1 \pmod{11}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 1$ ha`m $x_0 = 10$ sheshimlerine iye boladı. Demek

$$\sqrt{5 + \sqrt{5}} \in \square_{11} \text{ ekenligi kelip shıg`adı.}$$

Teorema da`lillendi.

§3.2. $x^3 = a$ ha`m $x^3 + ax = b$ ko`rinishindegi p -adikalıq ten`lemeler

Bul paragrafda da`slep  $x^3 = a$  ko`rinishindegi p -adikalıq ten`lemelrdi u`yrenemiz.

$a \in \mathbb{Z}$ sanı p moduli boyınsha kublıq qaldıq delinedi, eger $x^3 \equiv a \pmod{p}$ ten`leme  $x \in \mathbb{Z}$  sheshimge iye bolsa; kerı jag`dayda a sanı p moduli boyınsha kublıq qaldıq emes delinedi.

Lemma 2.2.1. *To`mendegi ten`lik orınlı:*

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i \right)^3 = x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \right) p^k.$$

bunda $x_0 \neq 0$, $0 \leq x_j \leq p-1$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $N_1 = 0$ ham $N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ ko`pag`zalısı $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ sanlarınan g`a`rezli.

**Da`lillew.** Lemmadag`ı ten`liktin` shep bo`legi to`mendegige ten`:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i \right)^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=k, \\ 0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq k}} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \right) p^k.$$

Meyli $i_1 + i_2 + i_3 = k$ bolsın. Eger indekslerdin` biri ushın  $i_j = k$  bolsa, onda qalg`anları nolge ten`, yagnıy tek  $x_k p^k$  nı o`z ishine alıwshı ag`zaları:

$$x_0 \cdot x_0 \cdot x_k p^k, \quad x_0 \cdot x_k p^k \cdot x_0, \quad x_k p^k \cdot x_0 \cdot x_0,$$

bunnan $3x_0^2 x_k p^k$ kelip shıg`adı. Al qalg`an jag`daylarda  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  lerden g`a`rezli bolg`an N_k sanı payda boladı.

Lemma da`lillendi.

$N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ an`latpası  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  lerden g`a`rezli bolg`anlıqtan onı to`mendegi ko`riniste jazıwg`ada boladı:

$$N_2(x_0, x_1) = 3x_0 x_1^2,$$

$$N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 6x_0 x_1 x_{k-1}, \quad k \geq 3,$$

bunda $P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})$ an`latpası $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}$ lerge baylanışlı.

To`mendegi teorema  $p$ -adikalıq sanlar maydanı  $\square_p$  da u`shinshi da`rejeli ten`lemelerdi sheshiw kriteriyasın beredi.

Meyli p – fiksirlengen a`piwayı san,  $p \neq 2$  ha`m a – nol bolmag`an  $p$ -adikalıq san bolsın ha`m

$$a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots), \quad 0 \leq a_j \leq p-1, \quad a_0 \neq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

– onın` kanonikalıq jayılmısı bolsın.

Teorema 2.2.1.

$$x^3 = a \tag{2.2.1}$$

ten`lemesi  $x \in \square_p$  sheshimge iye bolıwı ushın to`mendegi sha`rtlerdin` orınlanıw za`ru`rlı ha`m jetkilikli:

- 1) $\gamma(a)$ – sanı 3 ke eseli,
- 2) a_0 – sanı p moduli boyınsha kublıq qaldıq, eger $p \neq 3$ bolsa; $p = 3$ te $(a_0, a_1) = (1, 0)$ yamasa $(2, 2)$.

**Da`lillew.** Za`ru`rliligi. Eger (2.2.1) ten`leme

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + \dots), \quad 0 \leq x_j \leq p-1, \quad x_0 \neq 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

sheshimge iye bolsa, onda Lemmı 2.2.1 boyınsha ten`leme to`mendegi ko`riniske iye:

$$p^{3\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + \dots)^3 = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + \dots),$$

$$p^{3\gamma(x)} \left(x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})) p^k \right) = p^{\gamma(a)} (a_0 + a_1 p + \dots), \quad (2.2.2)$$

bunnan $\gamma(a) = 3\gamma(x)$ ekenligi kelip shıg`adı, yag`nıy $\gamma(a)$ sanı 3 ke eseli, $a_0 \equiv x_0^3 \pmod{p}$ salıstırıwı $\square_p$ da sheshimge iye eger $p \neq 3$ bolsa, yag`nıy a_0 – sanı p moduli boyınsha kublıq qaldıq.

$p=3$ te to`mendegige iye bolamız

$$3^{3\gamma(x)} (x_0^3 + x_0^2 x_1 \cdot 3^2 + (x_0^2 x_2 + x_0 x_1^2 + P_3^2(x_0, x_1)) \cdot 3^3 + \sum_{k=4}^{\infty} (x_0^2 x_{k-1} + P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 2x_0 x_1 x_{k-2}) 3^k) = 3^{\gamma(a)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k 3^k \right). \quad (2.2.3)$$

(2.2.3) ten`likten  $x_0^3 \equiv a_0 \pmod{3}$  ha`m $x_0^3 \equiv a_0 + a_1 \cdot 3 \pmod{3^2}$ iye bolamız. Birinshi salıstırıwdan $x_0 = a_0$ kelip shıg`adı. Eger $x_0 = 1$ bolsa, onda $a_1 = 0$ boladı, al eger $x_0 = 2$ bolsa, onda $a_1 = 2$ boladı.

Jetkilikligi. Meyli p -adikalıq a sanı teoremanın` 1) ha`m 2) sha`rtlerin qanaatlandırınsın. (2.2.1) ten`lemenin`  $x$  sheshimin du`zemiz. $\gamma(x) = \frac{1}{3} \gamma(a)$ dep alamız.

Meyli $p \neq 3$ bolsın. (2.2.2) den x_0 sanı to`mendegi sha`rtti qanaatlandırıwı kelip shıg`adı

$$x_0^3 \equiv a_0 \pmod{p}, \quad 1 \leq x_0 \leq p-1.$$

Bizde a_0 sanı $p \neq 3$ moduli boyınsha kublıq qaldıq bolg`anlıqtan  $x_0$  sanı ha`mme waqıt tabıladı. $M_1(x_0)$ arqalı to`mendegi ten`likti qanaatlandırıwshı sandı belgileymiz

$$x_0^3 = a_0 + M_1(x_0) \cdot p.$$

(2.2.2) ten`likten birden-bir  $x_1$  sheshimge iye bolatug`ın

$$3x_0^2 x_1 + N_1(x_0) + M_1(x_0) \equiv a_1 \pmod{p},$$

salıstırıwına iye bolamız, bunda $(3x_0^2, p) = 1$.

$M_2(x_0, x_1)$ arqalı to`mendegi ten`likti qanaatlandırıwshı sandı belgileymiz

$$3x_0^2 x_1 + N_1(x_0) = a_1 - M_1(x_0) + M_2(x_0, x_1) \cdot p.$$

Bul protsessti dawam ettirip, (2.2.2) ten`likten

$$3x_0^2x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) \equiv a_k \pmod{p}, \quad k \geq 2,$$

salıstırıwına iye bolamız, bul salıstırıw $(3x_0^2, p) = 1$ sha`rti boyınsha  $x_k$  sheshimine iye. Bunda  $M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ ,  $(k \geq 3)$  sanı to`mendegi qatnastan rekurrent tu`rde anıqlanadı

$$\begin{aligned} 3x_0^2x_{k-1} + N_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) = \\ = a_{k-1} - M_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot p, \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

To`mendegi ten`likler shınjırı x tın` (2.2.1) ten`lemenin` sheshimi ekenligin ko`rsetedi

$$\begin{aligned} x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3x_0^2x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})) p^k = \\ = a_0 + M_1(x_0) \cdot p + (a_1 - M_1(x_0) + M_2(x_0, x_1) \cdot p) \cdot p + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + M_{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_k) \cdot p) p^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^k. \end{aligned}$$

$p = 3$ bolg`an jag`daydı qaraymız. Onda (2.2.3) ten to`mendegige iye bolamız

$$a_0 \equiv x_0^3 \pmod{3} \text{ ha`m } a_0 + a_1 \cdot 3 \equiv x_0^3 \pmod{3^2}.$$

$(a_0, a_1) = (1, 0)$ yamasa $(2, 2)$ bolg`anlıqtan berilgen salıstırıwdan  $x_0$  bir ma`nisli anıqlanadı, $x_0 = a_0$. Meyli $M_1(x_0)$ – sanı

$$x_0^3 = a_0 + a_1 \cdot 3 + M_1(x_0) \cdot 3^2$$

bolatug`ın san bolsın.

Bul protsessti dawam ettirip (2.2.3) ten`likten

$$x_0^2x_1 + M_1(x_0) \equiv a_2 \pmod{3}$$

to`mendegi salıstırıwına iye bolamız,

$$x_0^2x_2 + P_3^2(x_0, x_1) + x_0x_1^2 + M_2(x_0, x_1) \equiv a_3 \pmod{3},$$

$$\begin{aligned} x_0^2x_{k-1} + P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 2x_0x_1x_{k-2} + \\ + M_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) \equiv a_k \pmod{3}, \quad k \geq 4. \end{aligned}$$

$(x_0^2, 3) = 1$ bolsa, onda x_k sheshimi bar boladı. Bunda $M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$, $(k \geq 2)$ sanı

$$\begin{aligned} x_0^2 x_1 &= a_2 - M_1(x_0) + M_2(x_0, x_1) \cdot 3, \\ x_0^2 x_2 + P_3^2(x_0, x_1) + x_0 x_1^2 &= a_3 - M_2(x_0, x_1) + M_2(x_0, x_1, x_2) \cdot 3, \\ x_0^2 x_{k-1} + P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 2x_0 x_1 x_{k-2} &= \\ &= a_k - M_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot 3, \quad k \geq 4 \end{aligned}$$

qatnaslarınan rekurrent tu'rde anıqlanadı.

Bunnan to'mendegige iye bolamız

$$\begin{aligned} &x_0^3 + x_0^2 x_1 \cdot 3^2 + (x_0^2 x_2 + x_0 x_1^2 + P_3^2(x_0, x_1)) \cdot 3^3 + \\ &+ \sum_{k=4}^{\infty} (x_0^2 x_{k-1} + P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 2x_0 x_1 x_{k-2}) 3^k = \\ &= a_0 + a_1 \cdot 3 + M_1(x_0) \cdot 3^2 + (a_2 - M_1(x_0) + M_2(x_0, x_1) \cdot 3) \cdot 3^2 + \\ &+ \sum_{k=3}^{\infty} (a_k - M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + 3M_{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_k)) \cdot 3^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^k. \end{aligned}$$

Solay etip, x sanı (2.2.1) ten'lemenin' sheshimi eken.

Teorema da'lillendi.

Eskertiw 2.2.1. Teorema 2.2.1 din' 2) sha'rti $p = 2$ de barlıq waqıtta orınlanadı. Bunnan (2.2.1) ten'leme $\square_2$ de qa'legen $a \in \square_2$ sheshimge iye bolıwı ushın $\gamma(a)$ 3 ke eseli bolıwı kerek.

Meyli p -adikalıq η birligi hesh qanday p -adikalıq sannın' kubı bolmasın.

Teorema 2.2.1 den to'mendegi saldarlar kelip shıg'adı.

Saldar 2.2.1. Meyli $p \neq 3$ ha'm $k \in \square$. $p = 3k + 2$ de barlıq sanlar bazı-bir p -adikalıq sannın' kubı boladı. $p = 3k + 1$ da $\varphi_i \in \{\eta, p, \eta p, \eta^2, \eta^2 p, p^2, \eta p^2, \eta^2 p^2\}$ ($1 \leq i \leq 8$) sanları hesh qanday p -adikalıq sannın' kubı bolmaydı. Qa'legen p -adikalıq x sanı $p = 3k + 1$ de 9 tu'rdin' birewine keltiriwge boladı: $x = \varphi_i y_i^3$, gde $\varphi_0 = 1, y_i \in \square_p, 0 \leq i \leq 8$.

Saldar 2.2.2. $p = 3$ te $\varphi_i \in \{3, 4, 5, 9, 12, 15, 36, 45\}$ ($1 \leq j \leq 8$) sanları hesh qanday 3-adikalıq sannın` kubı bolmaydı. Qa`legen 3-adikalıq sandı 9 tu`rdin` birewine keltiriwge boladı: $x = \varphi_i y_i^3$, gde $\varphi_0 = 1, y_i \in \square_3, 0 \leq j \leq 8$.

Endi koeffitsientleri $\square_p$ dan bolg`an  $x^3 + ax = b$  ten`lemenin` $\mathbb{Z}_p^*$ da sheshiw kriteriyasın qaraymız.

To`mendegi ten`lik orınlı:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k x_s a_{k-s} \right) p^k. \quad (2.2.4)$$

Endi kublıq ten`lemenı ızzertleymız.

Kublıq ten`lemenin`

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$

ulıwma ko`rinisinde  $y = x - \frac{p}{3}$  orın almastırıwın islese ol to`mendegi ko`riniske keledi

$$x^3 + ax = b. \quad (2.2.5)$$

Sonlıqtan biz keyinshelik $\square_p$ da (2.2.5) ten`lemenı qaraymız, bunda $x = x_0 + x_1 p + \dots$, $a = p^{\gamma(a)} (a_0 + a_1 p + \dots)$, $b = p^{\gamma(b)} (b_0 + b_1 p + \dots)$, $x_j, a_j, b_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $x_0, a_0, b_0 \neq 0$ ($j=0, 1, \dots$).

a, b ha`m  $x$  lardıń kanonikalıq ko`rinisin (2.2.5) ten`lemege alıp barıp qoyıp to`mendegige iye bolamız

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k \right)^3 + p^{\gamma(a)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k \right) = p^{\gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k.$$

(2.2.4) qatnasın (2.2.5) ten`likke qollansaq to`mendegi ko`riniske iye bolamız:

$$\begin{aligned} & x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \right) p^k + \\ & + p^{\gamma(a)} \left(a_0 x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k x_s a_{k-s} \right) p^k \right) = p^{\gamma(b)} \left(b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k p^k \right). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Biz (2.2.5) ten'lemenin' da'slep $p=3$ bolg'an jag'day ushın qaraymız, yag'nıy 3-adikalıq sanlar maydanında u'yrenemiz.

Sonlıqtan $a, b, x \in \square_3$, ha'm ja'nede (2.2.5) ten'lemenin' sheshimin p -adikalıq birlikler ko'pliginde izlew menen sheklenemiz yag'nıy $\gamma(x) = 0$.

$j \leq k$ da to'mendegishe bolsın

$$P_k^j = P_k^j(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{\substack{m_0, m_1, \dots, m_{j-1}: \\ \sum_{i=0}^{j-1} m_i = 3, \sum_{i=1}^{j-1} i m_i = k}} \frac{6}{m_0! m_1! \dots m_{j-1}!} x_0^{m_0} x_1^{m_1} \dots x_{j-1}^{m_{j-1}}. \quad (2.2.7)$$

$p=3$ te (2.2.6) to'mendegi ko'riniste boladı:

$$x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \right) 3^k + \\ + 3^{\gamma(a)} \left(a_0 x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k x_s a_{k-s} \right) 3^k \right) = 3^{\gamma(b)} \left(b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^k \right). \quad (2.2.8)$$

(2.2.7) de $\gamma(a)$ ha'm $\gamma(b)$ sanları qatnasıp olar ushın mu'mkin bolg'an barlıq jag'daylardı qaraymız, yag'nıy:

- 1) $\gamma(a) = 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$; 2) $\gamma(a) > 0$ ha'm $\gamma(b) > 0$; 3) $\gamma(a) > 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$;
- 4) $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) = 0$; 5) $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) > 0$; 6) $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$;
- 7) $\gamma(a) = 0$ ha'm $\gamma(b) > 0$; 8) $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$; 9) $\gamma(a) > 0$ ha'm $\gamma(b) = 0$.

To'mendegi tastıyıqlawda da'slepki bes jag'dayda (2.2.5) ten'leme sheshimge iye bolmaydı.

Tastıyıqlaw 2.2.1. Eger (2.2.8) ten'lemelerde to'mendegi sha'rtlerdin' biri orınlansa:

- 1) $\gamma(a) = 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$;
- 2) $\gamma(a) > 0$ ha'm $\gamma(b) > 0$;
- 3) $\gamma(a) > 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$;
- 4) $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) = 0$;

$$5) \gamma(a) < 0 \text{ ha'm } \gamma(b) > 0,$$

onda (2.2.5) ten'leme $\mathbb{Z}_3^*$ da sheshimge iye emes.

Teorema 2.2.2. Eger $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ bolsa, onda (2.2.5) ten'leme $x \in \mathbb{Z}_3^*$ sheshimge iye boladı sonda ha'm tek sonda g'ana, egerde:

$$a_0 = 1.$$

Endi $\gamma(a) = 0, \gamma(b) > 0$ bolg'an jag'daydı qaraymız ha'm (2.2.5) ten'lemenı sheshiw kriteriyasının' za'ru'rlilik ha'm jeterlilik sha'rtlerin alamız.

Teorema 2.2.3. Meyli $\gamma(a) = 0$ ha'm $\gamma(b) = m > 0$ bolsın. (2.2.5) ten'leme $x \in \mathbb{Z}_3^*$ sheshimge iye boladı sonda ha'm tek sonda g'ana egerde $a_0 = 2$ bolsa.

To'mendegi teorema (2.2.8) ten'lemenin $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$ bolg'andag'ı sheshimin tabıwdın' za'ru'rlilik ha'm jeterlilik sha'rtlerin beredi.

Teorema 2.2.4. Meyli $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$ bolsın. (2.2.5) ten'leme $x \in \mathbb{Z}_3^*$ sheshimge iye boladı sonda ha'm tek sonda g'ana egerde

$$\gamma(a) = \gamma(b) = -m < 0 (m > 0)$$

bolsa.

$\gamma(a)$ ha'm $\gamma(b)$ lardın' mu'mkin bolg'an barlıq jag'dayların' ishinde tek $\gamma(a) > 0$ ha'm $\gamma(b) = 0$ jag'dayları qaldı. $\gamma(a) = 1$ bolg'an jag'dayda (2.2.5) tin' sheshimin tabıwda anıq emeslik payda bolg'anlıg'ı ushın onı eki jag'daylarg'a bo'lemiz: $\gamma(a) > 1$ ha'm $\gamma(a) = 1$.

Teorema 2.2.5. Meyli $\gamma(a) > 1$ ha'm $\gamma(b) = 0$ bolsın. (2.2.5) ten'leme $x \in \mathbb{Z}_3^*$ sheshimge iye boladı sonda ha'm tek sonda g'ana egerde

$$(b_0, b_1) = (1, 0) \text{ yamasa } (2, 2)$$

bolsa.

Endi (2.2.8) ten'likti $\gamma(a) = 1$ ha'm $\gamma(b) = 0$ bolg'an jag'dayda qaraymız, onda to'mendegige iye bolamız:

$$x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})) 3^k + 3 \left(a_0 x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k x_s a_{k-s} \right) 3^k \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= x_0^3 + a_0 x_0 \cdot 3 + \sum_{k=2}^{\infty} (x_0^2 x_{k-1} + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})) 3^k + \\
&+ \sum_{k=2}^{\infty} (x_{k-1} a_0 + x_{k-2} a_1 + \dots + x_0 a_{k-1}) 3^k = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k 3^k. \quad (2.2.9)
\end{aligned}$$

$\gamma(a) = 1$ ha'm $\gamma(b) = 0$ bolg'an jag'dayda (2.2.5) ten'lemenini sheshiw kriteriyası ha'zirshe tabılg'anı joq, biraq ten'lemenin' sheshimin tabıw algoritmin keltiremiz.

To'mendegi belgilewlerdi kiritemiz: $k \geq 1, s \geq 1, i \geq j-1$ de

$$A_0 = x_0^2 + a_0, \quad A_k = \frac{A_{k-1}}{3} + a_k + R_k, \text{ bunda } R_k = \sum_{j=0}^k x_j x_{k-j},$$

$$N'_j = \begin{cases} \frac{N_{j-1}}{3}, j = 3s-1, \\ \frac{N_{j-1}}{3} + x_{\frac{j}{3}}^3, j = 3s, \\ \frac{N_{j-1} - x_{\frac{j-1}{3}}^3}{3}, j = 3s+1, \end{cases} \quad S'_j = \begin{cases} \frac{P_{j-1}^i}{3}, j = 3s-1, \\ \frac{P_{j-1}^i}{3} + x_{\frac{j}{3}}^3, j = 3s, \\ \frac{P_{j-1}^i - x_{\frac{j-1}{3}}^3}{3}, j = 3s+1. \end{cases}$$

Teorema 2.2.6. Meyli $\gamma(a) = 1, \gamma(b) = 0$ bolsın ha'm $x \in \mathbb{Z}_3^*$ elementi $A_0 = x_0^2 + a_0 \not\equiv 0 \pmod{3}$ bolsın. Onda x (2.2.5) ten'lemenin' sheshimi boladı sonda ha'm tek sonda g'ana egerde to'mendegi salıstırıwlar orınlı bolsa:

$$x_0^3 \equiv b_0 \pmod{3},$$

$$a_0 x_0 + M_1(x_0) \equiv b_1 \pmod{3},$$

$$(x_0^2 + a_0) x_{k-1} + N'_k(x_0, \dots, x_{k-2}) + \sum_{s=1}^{k-1} a_s x_{k-1-s} + M_k(x_0, \dots, x_{k-2}) \equiv b_k \pmod{3}, \quad k \geq 2,$$

bunda $M_k(x_0, \dots, x_{k-2})$ rekurrent tu'rde to'mendegi qatnaslar menen anıqlanadı

$$x_0^3 = b_0 + 3 \cdot M_1(x_0),$$

$$a_0 x_0 + M_1(x_0) = b_1 + 3 \cdot M_2(x_0),$$

$$(x_0^2 + a_0) x_{k-1} + N'_k(x_0, \dots, x_{k-2}) + \sum_{s=1}^{k-1} a_s x_{k-1-s} +$$

$$+ M_k(x_0, \dots, x_{k-2}) = b_k + M_{k+1}(x_0, \dots, x_{k-1}) \cdot 3, \quad k \geq 2.$$

Teoremi 2.2.6 dan eger $A_0 = x_0^2 + a_0 \equiv 0 \pmod{3}$ bolsa, onda to'mendegi salıstırıwlar ha'm sa'ykes ten'liklerge iye bolamız:

(2.2.9): a) $x_0^3 \equiv b_0 \pmod{3}$, bunnan $x_0^3 = b_0 + M_1(x_0) \cdot 3$ kelip shıg'adı;

b) $x_0 a_0 + M_1(x_0) \equiv b_1 \pmod{3}$, bunnan

$x_0 a_0 + M_1(x_0) = b_1 + M_2(x_0) \cdot 3$ kelip shıg'adı;

s) $x_0 a_1 + M_2(x_0) \equiv b_2 \pmod{3}$, bunnan

$x_0 a_1 + M_2(x_0) = b_2 + M_3(x_0) \cdot 3$ kelip shıg'adı;

d) $\frac{A_0}{3} x_1 + x_1 a_1 + x_0 a_2 + x_0 x_1^2 + x_1^3 + M_3(x_0) \equiv b_3 \pmod{3}$, bunnan

$\frac{A_0}{3} x_1 + x_1 a_1 + x_0 a_2 + x_0 x_1^2 + x_1^3 + M_3(x_0) = b_3 + M_4(x_0, x_1) \cdot 3$

kelip shıg'adı.

$A_1 = \frac{A_0}{3} + a_1 + 2x_0 x_1$ bolsa, onda d) salıstırıwdı

$$(A_1 - x_0 x_1) x_1 + x_0 a_2 + x_1^3 + M_3(x_0) \equiv b_3 \pmod{3}$$

ko'riniste jazıw mu'mkin ha'm sa'ykes to'mendegige iye bolamız

$$(A_1 - x_0 x_1) x_1 + x_0 a_2 + x_1^3 + M_3(x_0) = b_3 + M_4(x_0, x_1) \cdot 3.$$

To'mendegi lemma orınlı.

Lemma 2.2.2. Meyli $\gamma(a) = 1$, $\gamma(b) = 0$ bolsın ha'm bazı-bir fikserlenegen k ushın $A_{k-j} \equiv 0 \pmod{3}$, $1 \leq j \leq k$, $A_k \not\equiv 0 \pmod{3}$ orınlı. Eger (2.2.5) ten'lemenin' sheshimi x bolsa, onda to'mendegi salıstırıwlar sisteması orınlı

(2.2.11): $x_0^3 \equiv b_0 \pmod{3}$,

$$a_0 x_0 + M_1(x_0) \equiv b_0 \pmod{3},$$

$$\sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + S_{2j}^j + M_{2j}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j} \pmod{3},$$

$$(A_j - x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + S_{2j+1}^j + M_{2j+1}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j+1} \pmod{3};$$

$$A_k x_{k+i} + \sum_{s=0}^{k+i-1} x_s a_{2k+i-s} + S_{2k+1+i}^{k+i} + M_{2k+1+i}(x_0, \dots, x_{k+i-1}) \equiv b_{2k+1+i} \pmod{3}, \quad (2.2.12)$$

bunda $1 \leq j \leq k, i \geq 1$ ha'm sa'ykes salıstırıwlarg'a iye bolamız

$$3 \cdot M_1(x_0) = x_0^3 - b_0,$$

$$3 \cdot M_2(x_0) = a_0 x_0 + M_1(x_0) - b_1,$$

$$3 \cdot M_{2j+1}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + S_{2j}^j + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j},$$

$$3 \cdot M_{2j+2}(x_0, \dots, x_j) = (A_j - x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + S_{2j+1}^j + M_{2j+1}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j+1},$$

$$3 \cdot M_{2k+2+i}(x_0, \dots, x_{k+i}) = A_k x_{k+i} + \sum_{s=0}^{k+i-1} x_s a_{2k+i-s} + S_{2k+1+i}^{k+i} + M_{2k+1+i}(x_0, \dots, x_{k+i-1}) - b_{2k+1+i}.$$

To'mendegi teorema lemma 2.2.2 orınlı bolg'anda ten'lemenin sheshimin tabıw algoritmin beredi.

Teorema 2.2.7. Meyli $\gamma(a) = 1, \gamma(b) = 0$ ha'm $x \in \mathbb{Z}_3^*$ bazı-bir fiksirlengen k ($k \geq 1$) ushın $A_k \equiv 0 \pmod{3}, 1 \leq j \leq k, A_k \not\equiv 0 \pmod{3}$ bolsın. Onda (2.2.5) ten'lemenin sheshimi x bolıwı ushın (2.2.12) salıstırıwlar sisteması sheshimge iye bolıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli.

To'mendegi teorema $\gamma(a) = 1, \gamma(b) = 0$ jag'daydı juwmaqlaydı.

Teorema 2.2.8. Meyli $\gamma(a) = 1, \gamma(b) = 0$ ha'm $x \in \mathbb{Z}_3^*$ elementi barlıq $k \in \mathbb{Z}$ ushın $A_k \equiv 0 \pmod{3}$ bolsın. Onda x elementi (2.2.5) tin sheshimi bolıp tabıladı sonda ha'm tek sonda g'ana egerde to'mendegi salıstırıwlar sisteması sheshimge iye bolsa:

$$x_0^3 \equiv b_0 \pmod{3},$$

$$a_0 x_0 + M_1(x_0) \equiv b_0 \pmod{3},$$

$$\sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + S_{2j}^j + M_{2j}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j} \pmod{3}, \quad (2.2.13)$$

$$(A_j - x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + S_{2j+1}^j + M_{2j+1}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j+1} \pmod{3},$$

bunda $j \geq 1$ ha'm

$$3 \cdot M_1(x_0) = x_0^3 - b_0,$$

$$3 \cdot M_2(x_0) \equiv a_0 x_0 + M_1(x_0) - b_1,$$

$$3 \cdot M_{2j+1}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + S_{2j}^j + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j},$$

$$3 \cdot M_{2j+2}(x_0, \dots, x_j) = (A_j - x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + S_{2j+1}^j + M_{2j+1}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j+1}.$$

Endi biz (2.2.5) ten'lemenini $\square_p$ maydanda $p > 3$ bolg'an jag'daydi qaraymiz. Bul jerde de koeffitsientleri $\square_p$ maydandan bolg'an kubliq ten'lemenin $\mathbb{Z}_p^*$ da sheshimin qaraymiz.

$p = 3$ bolg'an jag'dayg'a uqsas 1) $\gamma(a) = 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$; 2) $\gamma(a) > 0$ ha'm $\gamma(b) > 0$; 3) $\gamma(a) > 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$; 4) $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) = 0$; 5) $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) > 0$ sha'rtlerde (2.2.5) ten'leme $\mathbb{Z}_p^*$ da sheshimge iye emes.

Keyingi teoremada kubliq ten'lemenin $\gamma(a) > 0$, $\gamma(b) = 0$ bolg'an jag'daydag'i sheshiw kriteriyasi keltirilgen.

Teorema 2.2.9. Meyli $\gamma(a) > 0$, $\gamma(b) = 0$ bolsin. (2.2.5) tenleme $x \in \mathbb{Z}_p^*$ sheshimge iye boladi sonda ha'm tek sonda g'ana egerde b_0 sani p moduli boyinsha kubliq qaldiq bolsa.

$\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$ jag'dayin qaraymiz.

Teorema 2.2.10. Meyli $\gamma(a) < 0$ ha'm $\gamma(b) < 0$ bolsin. Onda (2.2.5) tenleme $x \in \mathbb{Z}_p^*$ sheshimge iye boladi sonda ha'm tek sonda g'ana egerde

$$\gamma(a) = \gamma(b) = -m < 0 \ (m > 0)$$

bolsa.

Endi eki jag'day qaldi: 1) $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$; 2) $\gamma(a) = 0$ ha'm $\gamma(b) > 0$. $p = 3$ bolg'an jag'daydag'ig'a uqsas bul sha'rtlerde (2.2.5) ten'lemenini sheshiw kriteriyasi ha'zirshe tabilmag'an, biraq ten'lemenin sheshimin tabiw algoritmin keltiriv mu'mkin.

$\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ jag'dayin qaraymiz, yag'nuy $a, b \in \mathbb{Z}_p^*$, onda (2.2.6) ten'lik to'mendegi ko'rinishke iye:

$$x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})) p^k + \\ + a_0 x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k x_s a_{k-s} \right) p^k = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k p^k.$$

Belgilewler kiritemiz:

$$A_0 = 3x_0^2 + a_0,$$

$$A_k = \frac{A_{k-1}}{p} + a_k + 3R_k, \text{ gde } R_k = \sum_{j=0}^k x_j x_{k-j}, k \geq 1.$$

To'mendegi teoremda $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ bolg'an jag'dayda ten'lemenin` sheshimin tabiw algoritmi keltirilgen.

Teorema 2.2.11. Meyli $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ bolsın ha'm $x \in \mathbb{Z}_p^*$ elementi $A_0 = 3x_0^2 + a_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$ bolsın. Onda x element (2.2.5) ten'lemenin` sheshimi boladı sonda ha'm tek sonda g'ana egerde to'mendegi salıstırıwlar orınla bolsa:

$$x_0^3 + a_0 x_0 \equiv b_0 \pmod{p},$$

$$(3x_0^2 + a_0)x_k + N_k(x_0, \dots, x_{k-1}) + \sum_{s=0}^{k-1} x_s a_{k-s} + M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) \equiv b_k \pmod{p}, \quad k \geq 1,$$

bunda $M_k(x_0, \dots, x_{k-1})$ izbe-iz to'mendegi qatnaslardan anıqlanadı

$$x_0^3 + a_0 x_0 = b_0 + M_1(x_0) \cdot p,$$

$$(3x_0^2 + a_0)x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + \sum_{s=0}^{k-1} x_s a_{k-s} +$$

$$+ M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) = b_k + M_{k+1}(x_0, \dots, x_k) \cdot p, \quad k \geq 1.$$

To'mendegi lemma orınlı.

Lemma 2.2.3. Meyli $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ bolsın ha'm x elementi bazı-bir k ushın $A_{k-j} \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq j \leq k$, $A_k \not\equiv 0 \pmod{p}$ bolsın. Eger x elementi (2.2.5) ten'lemenin` sheshimi bolsa, onda salıstırıwlar sisteması orınlı:

$$x_0^3 + a_0 x_0 \equiv b_0 \pmod{p},$$

$$\sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j-1} \pmod{p},$$

$$(A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j} \pmod{p},$$

$$A_k x_{k+i} + \sum_{s=0}^{k+i-1} x_s a_{2k+i-s} + P_{2k+i}^{k+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+i-1}) + M_{2k+i}(x_0, \dots, x_{k+i-1}) \equiv b_{2k+i} \pmod{p},$$

bunda $1 \leq j \leq k, i \geq 1$ ha'm

$$p \cdot M_1(x_0) = x_0^3 + a_0 x_0 - b_0,$$

$$p \cdot M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j-1},$$

$$p \cdot M_{2j+1}(x_0, x_1, \dots, x_j) = (A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + \\ + P_{2j}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) - b_{2j},$$

$$p \cdot M_{2k+1+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+i}) = A_k x_{k+i} + \sum_{s=0}^{k+i-1} x_s a_{2k+i-s} + \\ + P_{2k+i}^{k+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+i-1}) + M_{2k+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+i-1}) - b_{2k+i}.$$

Teorema 2.2.12. Meyli $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ bolsin ha'm x elementi bazı-bir k ($k \geq 1$) ushin $A_k - j \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq j \leq k$, $A_k \not\equiv 0 \pmod{p}$ bolsin. Onda $x \in \mathbb{Z}_p^*$ elementi (2.2.5) ten'lemenin' sheshimi boladı sonda ha'm tek sonda g'ana egerde to'mendegi salıstırıwlar sisteması orınlı bolsa:

$$x_0^3 + a_0 x_0 \equiv b_0 \pmod{p},$$

$$\sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j-1} \pmod{p}, \quad (2.2.14)$$

$$(A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j} \pmod{p},$$

bunda $1 \leq j \leq k$ ha'm

$$p \cdot M_1(x_0) = x_0^3 + a_0 x_0 - b_0,$$

$$p \cdot M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j-1},$$

$$p \cdot M_{2j+1}(x_0, \dots, x_j) = (A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j}.$$

To`mendegi teorema  $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$  jag`daydı juwmaqlaydı.

Teorema 2.2.13. Meyli $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ ha`m  $x \in \mathbb{Z}_p^*$  elementi barlıq  $k \in \mathbb{N}$  lar ushın  $A_k \equiv 0 \pmod{p}$  bolsın. Onda (2.2.5) ten`lemenin` sheshimi  $x$  boladı sonda ha`m tek sonda g`ana egerde to`mendegi salıstırıwlar sisteması orınlı bolsa:

$$x_0^3 + a_0 x_0 \equiv b_0 \pmod{p},$$

$$\sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j-1} \pmod{p}, \quad (2.2.15)$$

$$(A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv b_{2j} \pmod{p},$$

bunda $j \geq 1$ ha`m

$$p \cdot M_1(x_0) = x_0^3 + a_0 x_0 - b_0,$$

$$p \cdot M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j-1},$$

$$p \cdot M_{2j+1}(x_0, \dots, x_j) = (A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) - b_{2j}.$$

$\gamma(a) = 0$ ha`m  $\gamma(b) > 0$  jag`dayları qaldı.

Meyli $\gamma(a) = 0$ ha`m  $\gamma(b) = m > 0$  bolsın. Onda (2.2.6) ten`likten to`mendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})) p^k + a_0 x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k x_s a_{k-s} \right) p^k = \\ = x_0^3 + a_0 x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + \sum_{s=0}^k x_s a_{k-s} \right) p^k = \\ = x_0^3 + a_0 x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((3x_0^2 + a_0) x_k + N_k(x_0, \dots, x_{k-1}) + \sum_{s=0}^{k-1} x_s a_{k-s} \right) p^k = b_0 p^m + \sum_{k=1}^{\infty} b_k p^{m+k}. \end{aligned}$$

Teorema 2.2.14. Meyli $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = m > 0$ bolsın ha`m  $x \in \mathbb{Z}_p^*$  elementi  $A_0 = 3x_0^2 + a_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$  bolsın. Onda  $x$  elementi (2.2.5) ten`lemenin` sheshimi boladı sonda ha`m tek sonda g`ana egerde salıstırıwlar orınlı bolsa:

$$x_0^3 + a_0 x_0 \equiv 0 \pmod{p},$$

$$(3x_0^2 + a_0)x_k + N_k(x_0, \dots, x_{k-1}) + \sum_{s=0}^{k-1} x_s a_{k-s} + M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leq k \leq m-1,$$

$$(3x_0^2 + a_0)x_k + N_k(x_0, \dots, x_{k-1}) + \sum_{s=0}^{k-1} x_s a_{k-s} + M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) \equiv b_{k-m} \pmod{p}, \quad k \geq m,$$

bunda $M_k(x_0, \dots, x_{k-1})$ to' mendegi qatnaslardan rekkurent tu'rde aniqlanadi

$$x_0^3 + a_0 x_0 = M_1(x_0) \cdot p,$$

$$(3x_0^2 + a_0)x_k + N_k(x_0, \dots, x_{k-1}) + \sum_{s=0}^{k-1} x_s a_{k-s} + M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) = M_{k+1}(x_0, \dots, x_k) \cdot p,$$

$$1 \leq k \leq m-1;$$

$$(3x_0^2 + a_0)x_k + N_k(x_0, \dots, x_{k-1}) + \sum_{s=0}^{k-1} x_s a_{k-s} + M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) = b_{k-m} + M_{k+1}(x_0, \dots, x_k) \cdot p,$$

$$k \geq m.$$

To' mendegi lemma orinli.

Lemma 2.2.4. Meyli $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = m > 0$ ha'm x bazı-bir k lar ushın $A_{k-j} \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq j \leq k$, $A_k \not\equiv 0 \pmod{p}$ bolsın. Eger x elementi (2.2.5) tin' sheshimi bolsa, onda salıstırıwlar sisteması orinlı

$$x_0^3 + a_0 x_0 \equiv c_0 \pmod{p},$$

$$\sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \equiv c_{2j-1} \pmod{p},$$

$$(A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv c_{2j} \pmod{p},$$

$$A_k x_{k+i} + \sum_{s=0}^{k+i-1} x_s a_{2k+i-s} + P_{2k+i}^{k+i}(x_0, \dots, x_{k+i-1}) + M_{2k+i}(x_0, \dots, x_{k+i-1}) \equiv c_{2k+i} \pmod{p},$$

bunda $1 \leq j \leq k$, $i \geq 1$ ha'm

$$p \cdot M_1(x_0) = x_0^3 + a_0 x_0 - c_0,$$

$$p \cdot M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) - c_{2j-1},$$

$$p \cdot M_{2j+1}(x_0, \dots, x_j) = (A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) - c_{2j},$$

$$p \cdot M_{2k+1+i}(x_0, \dots, x_{k+i}) = A_k x_{k+i} + \sum_{s=0}^{k+i-1} x_s a_{2k+i-s} + \\ + P_{2k+i}^{k+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+i-1}) + M_{2k+i}(x_0, x_1, \dots, x_{k+i-1}) - c_{2k+i},$$

bul jerde

$$c_j := 0, 0 \leq j \leq m-1,$$

$$c_{m+i} := b_i, i \geq 0.$$

Teorema 2.2.15. Meyli $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = m > 0$ bolsın ha'm $x \in \mathbb{Z}_p^*$ bazı-bir k ($k \geq 1$) ushın $A_{k-j} \equiv 0 \pmod{p}$, $1 \leq j \leq k$, $A_k \not\equiv 0 \pmod{p}$ bolsın. Onda x elementi (2.2.5) ten'lemenin' sheshimi boladı sonda ha'm tek sonda g'ana egerde to'mendegi salıstırıwlar sisteması orınlı bolsa:

$$x_0^3 + a_0 x_0 \equiv c_0 \pmod{p},$$

$$\sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv c_{2j-1} \pmod{p},$$

$$(A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv c_{2j} \pmod{p},$$

bul jerde $1 \leq j \leq k$ ha'm

$$p \cdot M_1(x_0) = x_0^3 + a_0 x_0 - c_0,$$

$$p \cdot M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) - c_{2j-1},$$

$$p \cdot M_{2j+1}(x_0, x_1, \dots, x_j) = (A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + \\ + P_{2j}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) - c_{2j},$$

bunda

$$c_j := 0, 0 \leq j \leq m-1,$$

$$c_{m+i} := b_i, i \geq 0.$$

Keyingi teorema aqırg'ı jag'daydı juwmaqlaydı.

Teorema 2.2.16. Meyli $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = m > 0$ bolsin ha'm $x \in \mathbb{Z}_p^*$ barliq $k \in \mathbb{N}$ lar ushun $A_k \equiv 0 \pmod{p}$ bolsin. Onda (2.2.5) ten'lemenin' sheshimi x boladi sonda ha'm tek sonda g'ana egerde to'mendegi salıstırıwlar sisteması orınli bolsa:

$$x_0^3 + a_0 x_0 \equiv c_0 \pmod{p},$$

$$\sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv c_{2j-1} \pmod{p},$$

$$(A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + P_{2j}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) \equiv c_{2j} \pmod{p},$$

bunda $j \geq 1$ ha'm

$$p \cdot M_1(x_0) = x_0^3 + a_0 x_0 - c_0,$$

$$p \cdot M_{2j}(x_0, \dots, x_{j-1}) = \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-1-s} + P_{2j-1}^j(x_0, \dots, x_{j-1}) + M_{2j-1}(x_0, \dots, x_{j-1}) - c_{2j-1},$$

$$p \cdot M_{2j+1}(x_0, x_1, \dots, x_j) = (A_j - 3x_0 x_j) x_j + \sum_{s=0}^{j-1} x_s a_{2j-s} + \\ + P_{2j}^j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) + M_{2j}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) - c_{2j},$$

bul jerde

$$c_j = 0, 0 \leq j \leq m-1, c_{m+i} = b_i, i \geq 0.$$

Biz joqarıda koeffitsientleri $\mathbb{Z}_p$ da bolg'an $x^3 + ax = b$ ten'lemenin $\mathbb{Z}_3^*$ te sheshiw kriteriyasın keltirdik. Teoremalardın' da'lillewleri u'lken esaplawlardı talap etkenligi sebepli keltirmedik.

II Bap boyınsha juwmaq

Bul bapın' birinshi paragrafında p -adikalıq sanlar maydanındag'ı kvadrat ten'lemenı sheshiw kriteriyası keltirilgen ha'm qa'legen p -adikalıq sannın' bazı-bir kvadrat emes san menen kvadrat sannın' ko'beymesi ko'rinsinde bolıwı ko'rsetilgen. Ekinshi paragrafta $x^3 = a$ ko'rinsindegi ten'lemeler u'yrenilegen. Sonın' menen birge $x^3 + ax = b$ ten'lemesinin' sheshiw kriteriyasında qaralg'an.

III BAP. TO`RTINSHI DA`REJELI p -ADIKALIQ TEN`LEMELER

§3.1. $x^4 = a$ ko`rinishidagi $p$ -adikalq ten`lemeler

Bul paragrafda $x^4 = a$ ko`rinishidagi ten`leme p -adikalq sanlar maydanında u`yrenilgen.

To`mendegi teorema  $\square_p$  maydanında to`rtinshi da`rejeli ten`lemenin` sheshiw kriteriyası keltirilgen.

Meyli a – nol bolmag`an  $p$ -adikalq san bolsın ha`m

$$a = p^{\gamma(a)} (a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots), a_0 \neq 0, 0 \leq a_j \leq p-1, j=0, 1, \dots$$

– onin` kanonikalq jayılmısı.

Teorema 3.1.2.

$$x^4 = a, \quad (3.1.3)$$

ten`leme  $x \in \square_p$  sheshimge iye bolıwı ushın to`mendegi sha`rtlerdin` orınlanıwı za`ryarli ha`m jetkilikli:

- 1) $\gamma(a)$ – sanı 4 ke eseli,
- 2) a_0 sanı p moduli boyınsha 4 da`rejeli qaldıq boladı, eger $r \neq 2$ bolsa; $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ boladı, eger $r = 2$ bolsa.

**Da`lillew. Za`ru`rligi.** Eger (3.1.3) ten`leme

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots), x_0 \neq 0, 0 \leq x_j \leq p-1, j=0, 1, \dots,$$

sheshimge iye bolsa, onda

$$\begin{aligned} p^{4\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots)^4 &= p^{4\gamma(x)}(x_0^4 + \sum_{k=1}^{\infty} (4x_0^3x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}))p^k) = \\ &= p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

boladı, bunnan $\gamma(a) = 4\gamma(x)$ kelip shıg`adı, yag`nıy $\gamma(a)$ 4 ke eseli ha`m $a_0 \equiv x_0^4 \pmod{p}$ salıstırıwı $\square_p$ da sheshimge iye eger $r \neq 2$ bolsa.

$p = 2$ de to`mendegige iye bolamız

$$\begin{aligned}
a &= 2^{4\gamma(x)}(1+x_1 2+x_2 2^2 + \dots)^4 = 2^{4\gamma(x)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2^2 x_k + N_k(1, x_1, \dots, x_{k-1})) p^k \right] = \\
&= 2^{4\gamma(x)} \left(1 + \left(\frac{x_1 + x_1^2}{2} + x_2 \right) 2^4 + \dots \right) \quad (3.1.5)
\end{aligned}$$

ha`m bunnan  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  kelip shıg`adı.

Jetkilikligi. Meyli p -adikalıq a sanı 1) ha`m 2) sha`rtlerdi qanaatlandırsın.

(3.1.3) ten`lemenin` sheshimi x tı du`zemiz. $\gamma(x) = \frac{1}{4} \gamma(a)$ dep alamız.

Meyli $p \neq 2$ bolsın. (3.1.4) ten x_0 sanının`

$$x_0^4 \equiv a_0 \pmod{p}, \quad 1 \leq x_0 \leq p-1$$

sha`rtin qanaatlandırırwı kelip shıg`adı.

Bunday x_0 ler bar boladı, sebebi $1 \leq a_0 \leq p-1$ ha`m  $a_0$  sanı  $p$  moduli boyınsha 4 da`rejeli qaldıq bolıp tabıladı. Solay etip, $x_0^4 = a_0 + M_1(x_0)p$ bolatug`ın $M_1(x_0)$ bar boladı.

$4x_0^3$ sanı p g`a bo`linbese, onda to`mendegishe bolatug`ın x_1 bar boladı

$$4x_0^3 x_1 + N_1(x_0) + M_1(x_0) \equiv a_1 \pmod{p}, \quad 1 \leq x_1 \leq p-1.$$

To`mendegi ten`likti qanaatlandıratug`ın $M_2(x_0, x_1)$ bar boladı

$$4x_0^3 x_1 + N_1(x_0) + M_1(x_0) = a_1 + M_2(x_0, x_1)p.$$

Bul protsessti dawam ettirir to`mendegishe bolatug`ın x_n bar boladı

$$4x_0^3 x_n + N_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + M_n(x_0, \dots, x_{n-1}) \equiv a_n \pmod{p}, \quad 1 \leq x_n \leq p-1,$$

bul jerde $M_{n+1}(x_0, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ to`mendegi ten`likti qanaatlandıradı

$$4x_0^3 x_n + N_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + M_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = a_n + M_{n+1}(x_0, \dots, x_n)p. \quad (3.1.5)$$

Lemma 2.2.1 ha`m (3.1.6) ten`likten

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i \right)^4 &= x_0^4 + \sum_{k=1}^{\infty} (4x_0^3 x_k + N_k(x_0, \dots, x_{k-1})) p^k = a_0 + M_1(x_0)p + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) + M_{k+1}(x_0, \dots, x_k)p) p^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^k
\end{aligned}$$

kelip shıg`adı.

Bunnan (3.1.3) ten'lemenin' kanonikalıq ko'rinistegi $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i$ sheshimi

kelip shıg'adı.

Meyli $p = 2$ bolsın. (3.1.5) ten barlıq x_1 ha'm a_4 parametrlar ushın

$$a_4 \equiv \frac{x_1 + x_1^2}{2} + x_2 \pmod{2},$$

x_2 sheshimge iye boladı.

$$\begin{aligned} 2^{4\gamma(x)}(1 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots)^4 &= 2^{4\gamma(x)}[1 + (x_1 + x_1^2)2^3 + ((x_1 + x_1^2)^2 + x_2)2^4 + \dots] = \\ &= 2^{4\gamma(x)}[1 + (\frac{x_1 + x_1^2}{2} + x_2)2^4 + \dots] = 2^{\gamma(2)}(1 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + \dots) \end{aligned}$$

ten'liginen qalg'an x_j lar

$$x_j \equiv a_{j+2} + N'_j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \pmod{2}, \quad x_j = 0, 1, j = 3, 4, \dots, \quad (3.1.7)$$

sha'rtin qanaatlandırıwı sha'rt, bul jerde pu'tin N'_j sanları $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ lerge baylanıslı. Sonlıqtan x_j sanları izbe-iz (birma'nisli) (3.1.7) sha'rtinen anıqlanadı. (3.2.8) salıstırıw (1, 2)=1 bolg'anlıqtan sheshimge iye.

Teorema da'lillendi.

Meyli η – p -adikalıq birlik bolıp, hesh bir p -adikalıq sannın' kvadratı bolmasın.

Teorema 3.1.2 den to'mendegi lemma kelip shıg'adı.

Lemma 3.1.2. Meyli η – hesh qanday p -adikalıq sannın' kvadratı bolmag'an p -adikalıq birlik bolsın. Onda $p = 4k-1$ de $\{\eta, \eta^3\}$ sanları, al $p=4k+1$ de $\{\eta, \eta^2, \eta^3\}$ sanları hesh qanday p -adikalıq sannın' to'rtinshi da'rejesi bolmaydı, $k \in \mathbb{N}$.

Da'lillew. Meyli η – p -adikalıq birlik ha'm ol hesh qanday p -adikalıq sannın' kvadratı bolmasın. $|\eta|_p = 1$ bolsa, onda onın' kanonikalıq ko'rinisi to'mendegishe:

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 p + \eta_2 p^2 + \dots,$$

bunda $\eta_0 \neq 0$, $0 \leq \eta_i \leq p-1$, ($i = 0, 1, \dots$), eger η kvadrat bolmasa, onda $x^2 \not\equiv \eta_0 \pmod{p}$.

1) Eger η kvadrat bolmasa, onda ol hesh qanday sannın` kvadrati bolmaydı. Haqıyqatında da, kerisinshe boljayıq, meyli  $\eta$  qandayda bir  $p$ -adikalıq sannın` to`rtinshi da`rejesi bolsın, onda teorema 3.1.2 boyınsha

$$y^4 \equiv \eta_0 \pmod{p}$$

ıye bolamız.

Bul $\frac{y^4 - \eta_0}{p} \in \mathbb{Z}$ ekenligin an`latadı. Eger $x = y^2$ dep alsaq, onda

$$\frac{y^4 - \eta_0}{p} = \frac{x^2 - \eta_0}{p} \notin \mathbb{Z}$$

ıye bolamız, al bul tastıyıqlawg`a qarama-qarsı. Solay etip,  $\eta$  sanı hesh qanday  $p$ -adikalıq sannın` to`rtinshi da`rejesi bolmaydı.

2)

$$\eta^2 = \eta_0^2 + 2\eta_0\eta_1p + \dots,$$

sanın qarayıq, bul jerde $\eta_0 \neq 0$, $0 \leq \eta_i \leq p-1$, ($i = 0, 1, \dots$). $|\eta|_p = 1$ bolsa, onda $|\eta^2|_p = |\eta|_p \cdot |\eta|_p = 1$ boladı, yag`nıy $\eta^2 - p$ -adikalıq birlik.

Eger $y^4 \equiv \eta_0^2 \pmod{p}$ bolsa, onda

$$\frac{y^4 - \eta_0^2}{p} = \frac{(y^2 - \eta_0)(y^2 + \eta_0)}{p} \in \mathbb{Z}.$$

$\frac{y^2 - \eta_0}{p} \notin \mathbb{Z}$ bolsa, onda $\frac{y^2 + \eta_0}{p} \in \mathbb{Z}$ bolıwı sha`rt. Bul bolsa $(-\eta_0)$

sanının` kvadrat qaldıq ekenligin an`latadı.

Lejandr simvolının` qa`siyetleri boyınsha

$$\left(\frac{-\eta_0}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{\eta_0}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1) = (-1)^{\frac{p+1}{2}}.$$

$p = 4k - 1$ de $(-1)^{\frac{p+1}{2}} = 1$ ıye bolamız, bunnan $\frac{y^2 + \eta_0}{p} \in \mathbb{Z}$ kelip shıg`adı; $p = 4k +$

1 de $(-1)^{\frac{p+1}{2}} = -1$ ha`m $\frac{y^2 + \eta_0}{p} \notin \mathbb{Z}$ ıye bolamız, bul jerje $k \in \mathbb{Z}$. Bul $p = 4k - 1$

de η^2 sanı bazı-bir p -adikalıq sannın` to`rtinshi da`rejesi ekenligin an`latadı, al p

$= 4k + 1$ de η^2 sanı bazı-bir p -adikalq sannın to`rtinshi da`rejesi emesligin an`latadı, bunda $k \in \mathbb{Z}$.

3) Endi η^3 sanının hesh qanday p -adikalq sannın to`rtinshi da`rejesi bolmaytug`nılg`ın ko`rsetemiz.  $\eta^3$  tın ayılması to`mendegi ko`riniske iye

$$\eta^3 = \eta_0^3 + 3\eta_0^2\eta_1p + (3\eta_0\eta_1^2 + 3\eta_0^2\eta_2)p^2 + \dots,$$

bunda $\eta_0 \neq 0$, $0 \leq \eta_i \leq p-1$, ($i = 0, 1, \dots$).

$|\eta|_p=1$ bolsa, onda $|\eta^3|_p=|\eta|_p \cdot |\eta|_p \cdot |\eta|_p=1$ boladı, yag`nıy η^3 — p -adikalq birlik.

$\frac{y^4 - \eta_0^3}{p}$ an`latpanın pu`tin san bolıwın yaki bolmaslıg`ın tekseremiz. $y^2 = x$ dep

belgileyemiz. Onda $\frac{y^4 - \eta_0^3}{p} = \frac{x^2 - \eta_0^3}{p}$ iye bolamız. Lejandr simvolının qa`siyetleri boyınsha

$$\left(\frac{\eta_0^3}{p}\right) = \left(\frac{\eta_0}{p}\right)\left(\frac{\eta_0}{p}\right)\left(\frac{\eta_0}{p}\right) = (-1)^3 = -1.$$

Bunnan $\frac{y^4 - \eta_0^3}{p} \notin \mathbb{Z}$ kelip shıg`adı.

Solay etip, η^3 hesh qanday p -adikalq sannın to`rtinshi da`rejesi bolmaydı.

Saldar da`lillendi.

Teorema 3.1.2 ha`m Lemma 3.1.2 den to`mendegi saldar kelip shıg`adı.

Saldar 3.1.3. Meyli $p \neq 2$ bolsın. $p = 4k - 1$ de $\varphi_i \in \{\eta, p, p\eta, p^2, p^2\eta, p^3, p^3\eta\}$ ($1 \leq i \leq 7$) sanları, al $p = 4k + 1$ de $\varphi_i \in \{\eta, p, p\eta, \eta^2, \eta^2p, \eta^3, \eta^3p, p^2, p^2\eta, p^2\eta^2, p^2\eta^3, p^3, p^3\eta, p^3\eta^2, p^3\eta^3\}$ ($1 \leq i \leq 15$) sanları hesh qanday p -adikalq sannın to`rtinshi da`rejesi bolmaydı, bul jerde $k \in \mathbb{Z}$. Qa`legen  $x$  sanı  $p = 4k - 1$  de segiz tu`rdin` birewine keltiriwge boladı:  $x = \varphi_j y_j^4$ , bunda  $\varphi_0 = 1$ ,  $y_j \in \mathbb{F}_p$ ,  $0 \leq j \leq 7$ , al  $p = 4k + 1$  de onaltı tu`rdin` birewine keltiriwge boladı: $x = \varphi_j y_j^4$, bul jerde $\varphi_0=1$, $y_j \in \mathbb{F}_p$, $0 \leq j \leq 15$, $k \in \mathbb{Z}$.

**Da`lillew.** Meyli  $p$ -adikalıq  $x$  sanı to`mendegi kanonikalıq ko`riniske iye bolsın:

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots),$$

bunda $0 \leq x_j \leq p-1$, $x_0 \neq 0$, $j=0, 1, \dots$ $u = x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots$ dep belgileyemiz.

Lemmi 3.1.2 boyınsha p -adikalıq u birlikti to`mendegishe jazıw mu`mkin

$$u = t^2 \text{ yamasa } u = \eta t^2,$$

bunda η – hesh qanday p -adikalıq sannın` kvadratı bolmag`an p -adikalıq birlik,

t – sanı u g`a baylanıslı bolg`an p -adikalıq birlik. Lemma 3.1.2 den

$$t = y^2 \text{ yamasa } t = \eta y^2$$

iye bolamız.

Onda x sanın to`mendegi to`rt tu`rdin` birine keltiriwge boladı

$$x = p^{\gamma(x)}y^4, x = p^{\gamma(x)}\eta y^4, x = p^{\gamma(x)}\eta^2 y^4, x = p^{\gamma(x)}\eta^3 y^4.$$

$p = 4k - 1$ de lemma 3.1.2 degidey $z \in \square_p$ bar bolıp, ol $\eta^2 = z^4$ ha`m  $\eta^3 = \eta z^4$ ,  $k \in \square$ . Sonlıqtan  $p = 4k - 1$  ( $k \in \square$ ) de  $x$  sanın to`mendegi eki tu`rdin` birine keltiriwge boladı

$$x = p^{\gamma(x)}y^4, x = p^{\gamma(x)}\eta y^4.$$

Meyli $p = 4k + 1$ ($k \in \square$) bolsın. Onda $\gamma(x) = 4n$ ($n \in \square$) de $x = \varphi_i y_i^4$ iye bolamız, bul jerde $\varphi_i \in \{1, \eta, \eta^2, \eta^3\}$, $0 \leq i \leq 3$. $\gamma(x) = 4n + 1$ ($n \in \square$) de yamasa

$$x = p \left(p^{\frac{\gamma(x)-1}{4}} y \right)^4, \text{ yamasa } x = p\eta \left(p^{\frac{\gamma(x)-1}{4}} y \right)^4, \text{ yamasa } x = p\eta^2 \left(p^{\frac{\gamma(x)-1}{4}} y \right)^4, \text{ yamasa}$$

$$x = p\eta^3 \left(p^{\frac{\gamma(x)-1}{4}} y \right)^4. \text{ Bunnan } x \text{ sanının` to`mendegi to`rt tu`rdin` birine keltiriwge}$$

bolatug`ınlıg`ı kelip shıg`adı: $x = \varphi_i y_i^4$, bunda $\varphi_i \in \{p, p\eta, p\eta^2, p\eta^3\}$, ($1 \leq i \leq 4$).

Uqsas tu`rde  $\gamma(x) = 4n + 2$  de  $x$  sanın  $x = \varphi_i y_i^4$  ko`riniste jazıw mu`mkin, bul jerde $\varphi_i \in \{p^2, p^2\eta, p^2\eta^2, p^2\eta^3\}$ ($1 \leq i \leq 4$), al $\gamma(x) = 4n + 3$ te $x = \varphi_i y_i^4$ iye bolamız, bunda $\varphi_i \in \{p^3, p^3\eta, p^3\eta^2, p^3\eta^3\}$, $1 \leq i \leq 4$, $n \in \square$.

Solay etip, $p = 4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) jag'dayda x sanı onaltı tu'rdin' birine keltiriwge boladı: $x = \varphi_j y_j^4$, bul jerde $\varphi_j \in \{1, p, p\eta, p\eta^2, p\eta^3, p^2, p^2\eta, p^2\eta^2, p^2\eta^3, p^3, p^3\eta, p^3\eta^2, p^3\eta^3\}$, $0 \leq j \leq 15$. Al $p = 4k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) jag'dayda x sanı segiz tu'rdin' birine keltiriwge boladı: $x = \varphi_j y_j^4$, bunda $\varphi_j \in \{1, p, \eta, p\eta, p^2, p^2\eta, p^3, p^3\eta\}$, $0 \leq j \leq 7$.

Saldar da'lilendi.

Saldar 3.1.4. $p = 2$ de $\varphi_j = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 36, 40, 44, 52, 56, 60, 72, 88, 104, 120\}$ ($1 \leq j \leq 31$) hesh qanday 2-adikalıq sannın' to'rtinshi da'rejesi bolmaydı. Qa'legen 2-adikalıq sandı otız eki tu'rdin' birine keltiriwge boladı: $x = \varphi_j y_j^4$, bul jerde $\varphi_0 = 1$, $y_j \in \mathbb{N}_2$, $0 \leq j \leq 31$.

§3.2. Ayırım u'shinshi ha'm to'rtinshi da'rejeli ten'lemeler

Bul paragrafta bazı-bir u'shinshi ha'm to'rtinshi ta'rtpi ten'lemeler u'yreniledi.

Bul baptın' tiykarg'ı na'tiyjeleri to'mendegi teoremlar boladı.

Teorema 3.2.1. $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}$ an'latpası 11-adikalıq sanlar maydanında bar boladı.

Da'lillew. $\mathbb{N}_{11}$ maydanında $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}$ an'latpasının' bar bolıwı $x^3 = 2 + \sqrt[3]{2}$ ten'lemesinin' sheshiliwinen kelip shıg'adı. Da'slep 2 sanın to'mendegishe kanonikalıq ko'riniste jayıp alamız:

$$2 = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(2) = 0$ sanı 3 ke bo'linedi. Bul bolsa teorema 2.2.1 dın' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 2.2.1 dın' ekinshi sha'rtin tekseremiz, yag'nıy $x_0^3 \equiv 2 \pmod{11}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ da sheshiminin' bar yaki

joqlıg`ın tekseremiz. Bul ten`leme $x_0 = 7$ sheshimge iye. Bunnan $\sqrt[3]{2} \in \square_{11}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Endi $\square_{11}$ maydanında $\sqrt[3]{2}$ sanının` jayılmassının` da`slepki u`sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın` ushın biz $a^3 = 2$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılmassı

$$a = a_0 + a_1 \cdot 11 + a_2 \cdot 11^2 + \dots$$

bolg`an 11-adikalıq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 10$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to`mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^3 + 3a_0^2a_1 \cdot 11 + (3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2) \cdot 11^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (3.2.1)$$

Birinshi qa`demde  $a_0^3 \equiv 2 \pmod{11}$  ten`lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 7$ sheshimge iye boladı.

Biz $a_0 = 7$ dep alamız. Onda (3.2.1) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$343 + 147a_1 \cdot 11 + (21a_1^2 + 147a_2) \cdot 11^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (3.2.1')$$

Bul ten`likti to`mendegishe jazıwg`a boladı

$$2 + (9 + 4a_1) \cdot 11 + (2 + 13a_1 + 10a_1^2 + 4a_2) \cdot 11^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (3.2.1'')$$

Bunnan $4a_1 + 9 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın payda etip ha`m onı sheshemiz, bunda  $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ . Bul salıstırıw  $a_1 = 6$  sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (3.2.1'') ten`ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag`nıy $4a_2 + 10 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Sheshimi $a_2 = 3$ boladı. Demek

$$\sqrt[3]{2} = 7 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 11^2 + \dots$$

jayılmag`a iye bolamız.

Endi $x^3 = 2 + \sqrt[3]{2}$ ten`ligin to`mendegishe jazamız:

$$x^3 = 2 + \sqrt[3]{2} = 2 + 7 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 11^2 + \dots = 9 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul ten`leme  $\gamma(2 + \sqrt[3]{2}) = 0$  sanı 3 ke bo`linedi. Bul bolsa teorema 2.2.1 din` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 2.2.1 din` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushın 9 sanının` kublıq qaldıq bolıwın tekseremiz, yag`nıy $x_0^3 \equiv 9 \pmod{11}$ salıstırıwının`  $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$  da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın

tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 4$ sheshimge iye boladı. Demek $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}} \in \mathbb{Q}_{11}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Teorema da`lillendi.

Teorema 3.2.2. $\sqrt[4]{2 + \sqrt[4]{2}}$ an`latpa 7-adikalıq sanlar maydanda bar boladı.

**Da`lillew.**  $\mathbb{Q}_7$  maydanında  $\sqrt[4]{2 + \sqrt[4]{2}}$  an`latpasının` bar bolıwı  $x^4 = 2 + \sqrt[4]{2}$  ten`lemesinin` sheshiliwinen kelip shıg`adı. Da`slep 2 sanın to`mendegishe kanonikalıq ko`riniste jayıp alamız:

$$2 = 2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(2) = 0$ sanı 4 ke bo`linedi. Bul bolsa teorema 3.1.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 3.1.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz, yag`nıy $x_0^4 \equiv 2 \pmod{7}$ salıstırıwının`  $x_0 \in \{1, 2, \dots, 6\}$  da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul ten`leme $x_0 = 2$ ha`m  $x_0 = 5$  lerde sheshimge iye. Bunnan  $\sqrt[4]{2} \in \mathbb{Q}_7$  ekenligi kelip shıg`adı.

Endi $\mathbb{Q}_7$ maydanında $\sqrt[4]{2}$ sanının` jayılmawının` da`slepki u`sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın` ushın biz $a^4 = 2$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılmawı

$$a = a_0 + a_1 \cdot 7 + a_2 \cdot 7^2 + \dots$$

bolg`an 7-adikalıq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 6$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to`mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^4 + 4a_0^3a_1 \cdot 7 + (6a_0^2a_1^2 + 4a_0^3a_2) \cdot 7^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7^2 + \dots \quad (3.2.2)$$

Birinshi qa`demde  $a_0^4 \equiv 2 \pmod{7}$  ten`lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 2$ ha`m $a_0 = 5$ sheshimlerine iye boladı.

a) Biz $a_0 = 2$ dep alamız. Onda (3.2.2) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$16 + 32a_1 \cdot 7 + (24a_1^2 + 32a_2) \cdot 7^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7^2 + \dots \quad (3.2.2')$$

Bul ten`likti to`mendegishe jazamız:

$$2 + (2 + 4a_1) \cdot 7 + (4a_1 + 3a_1^2 + 4a_2) \cdot 7^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7^2 + \dots \quad (3.2.2'')$$

Bunnan $4a_1 + 2 \equiv 0 \pmod{7}$ salıstırıwın payda etip ha'm onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0,1,2,\dots,6\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 3$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (3.2.2") ten'ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag'nıy $4a_2 + 6 \equiv 0 \pmod{7}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0,1,2,\dots,6\}$. Sheshimi $a_2 = 2$ boladı. Demek

$$\sqrt[4]{2} = 2 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 + \dots$$

jayılmag'a iye bolamız.

Endi $x^4 = 2 + \sqrt[4]{2}$ ten'ligin to'mendegishe jazamız:

$$x^4 = 2 + \sqrt[4]{2} = 2 + 2 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 + \dots = 4 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 + \dots$$

Bul ten'leme $\gamma(2 + \sqrt[4]{2}) = 0$ jup. Bul bolsa teorema 3.1.2 nin' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 3.1.2 nin' ekinshi sha'rtin tekseremiz. Bul ushın 4 sanının' to'rtinshi da'rejeli qaldıq bolıwın tekseremiz, yag'nıy $x_0^4 \equiv 4 \pmod{7}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1,2,\dots,6\}$ da sheshiminin' bar yaki joqlıg'ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 3$ ha'm $x_0 = 4$ sheshimlerine iye boladı. Demek $\sqrt[4]{2 + \sqrt[4]{2}} \in \square_7$ ekenligi kelip shıg'adı.

b) Endi biz $a_0 = 5$ bolg'an jag'daydı qaraymız. Onda (3.2.2) to'mendegi ko'rinske iye boladı:

$$625 + 500a_1 \cdot 7 + (150a_1^2 + 500a_2) \cdot 7^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7^2 + \dots \quad (3.2.3)$$

Aqırg'ı ten'likti to'mendegishe jazıwg'ada boladı:

$$3 + (5 + 4a_1) \cdot 7 + (5 + 10a_1 + 3a_1^2 + 3a_2) \cdot 7^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 7^2 + \dots \quad (3.2.3')$$

Bunnan $4a_1 + 5 \equiv 0 \pmod{7}$ salıstırıwın payda etip ha'm onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0,1,2,\dots,6\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 4$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (3.2.3') ten'ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag'nıy $3a_2 + 5 \equiv 0 \pmod{7}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0,1,2,\dots,6\}$. Sheshimi $a_2 = 3$ boladı. Demek

$$\sqrt[4]{2} = 5 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 7^2 + \dots$$

jayılmag'a iye bolamız.

Endi $x^4 = 2 + \sqrt[4]{2}$ ten'ligin to'mendegishe jazamız:

$$x^4 = 2 + \sqrt[4]{2} = 2 + 5 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 7^2 + \dots = 7(5 + 3 \cdot 7 + \dots)$$

Bul ten`leme  $\gamma(2 + \sqrt[4]{2}) = 1$  taq. Bul bolsa teorema 3.2.1 din` birinshi sha`rtin qanaatlandırmaydı. Demek bul jag`dayda $x^4 = 2 + \sqrt[4]{2}$ ten`lemesi sheshimge iye emes.

Bul eki jag`daydan ko`rinip turg`anınday  $x^4 = 2 + \sqrt[4]{2}$  ten`lemesi $\sqrt[4]{2}$ nin` jayılmasında birinshi koeffitsient 2 ge ten` bolg`an jag`dayda sheshimge iye bolatug`ın eken. Bunnan  $\sqrt[4]{2 + \sqrt[4]{2}} \in \square_7$  ekenligi kelip shıg`adı.

Teorema da`lillendi.

III bap boyınsha juwmaq

Bul bapnıń birinshi paragrafında $x^4 = a$ ko`rinishindegi  $p$ -adikalıq ten`lemenin` sheshiw kriteriyası keltirilgen. Sonın` menen birge qa`legen  $p$ -adikalıq sannın` to`rtinshi da`reje emes penen to`rtinshi da`rejelerdin` ko`eymeleri ko`rinishinde an`latıw mu`mkin ekenligide u`yrenilgen. Ekinshi paragrafta dissertatsiya jumısının` tiykarg`ı na`tiyjeleri bolg`an ayırım u`shinshi ha`m to`rtinshi da`rejeli p -adikalıq ten`lemelerdin` qaysı $\square_p$ da sheshimge iye bolıwı ko`rsetilgen.

Paydalanilg'an a'debiyatlar dizimi

O'zбекиstan Respublikası Prezidenti pa'rmanları, qararlari:

1. "Barkamol avlod yili" davlat dasturi. - T.: O'zbekiston, 2010 - 80 b.
2. "Qishloq taraqqiyoti va farovonligi yili" davlat dasturi. - T.: O'zbekiston, 2009 - 82 b.

O'zбекиstan Respublikası Prezidenti I.A.Karimovtin' shigarmalari:

3. Karimov I.A. O'zbekistan - sobstvennaya model perexoda na rinochnie otnosheniya. Tashkent, "Uzbekistan" 1993. - str.17
4. Karimov I.A. O'zbekiston XXI asr bo'sagasi. Xavfsizlikka tahdid, barkarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari.- Toshkent,"O'zbekiston", 1997.- 324 b.

Oqiwliq ha'm oqiw qollanbalar:

1. Koblitz N., p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta – functions. // Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin. –1977. –P. 190.
2. Vladimirov V.S., Volovic I.B., Zelenov E.I, p-adic Analysis and Mathematical Physics. // World Scientific. Singapore. –1994. –P. 352.
3. Vinogradov I.M. Osnovı teorii chisel. // M.: Nauka. –1981. –C. 176.
4. Katok S.B., p-adicheskiy analiz v sravnenii s veshestvennim. // M.: -2004.
5. Xrennikov A. Yu. Nearximedov analiz i ego prilozheniya. // M.: Fizmatlit. - 2003. –C. 216.

İlimiy jurnallardag'i maqalalar

6. Mukhamedov F.M., Mendes Jose F.F., On the chaotic behavior of a generalized logistic p-adic dynamical system. // J. Differential Equations 243. –2007. P. 125-145.
7. Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., On rational p-adic dynamical systems. // Methods Funct. Anal. Topology 10 (2). –2004. –P. 21-31.
8. Kurbanbaev T.K. Uravneniya chetvertoy stepeni v pole r-adicheskix chisel. // "Problemy sovremennoy matematiki". Materialy Respublikanskoy nauchnoy konferentsii, -Karshi. -2011. -S.161-162.

9. A.Yu. Khrennikov, p-adic quantum mechanics with p-adic valued functions, J. Math. Phys. 32 (1991) 932{936.
10. A. Yu. Khrennikov, p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics (Kluwer, Dordrecht, 1994).
11. F. Mukhamedov, On dynamical systems and phase transitions for $q + 1$ -state p-adic Potts model on the Cayley tree, Math. Phys. Anal. Geom. 16 (2013) 49{87.
12. F. Mukhamedov and H. Akin, Phase transitions for p-adic Potts model on the Cayley tree of order three, J. Stat. Mechanics (2013) P07014.
13. F. Mukhamedov, B. Omirov and M. Saburov, On cubic equations over p-adic fields, Int. J. Number Theory 10 (2014) 1171-1190.
14. I.M.Rikhsiboev, A.Kh.Khudoyberdiyev, K.K.Masutova, T.Kurbanbaev, On the solutions of the equation $x^3 + ax = b$ in Z_3^* with coefficients from Q_3 , Applied Mathematics, 2014, №5, P 35-46.
15. Ayupov Sh.A., Kurbanbayev T. The classification of 4-dimensional p-adic filiform Leibniz algebras. // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. –2010. -Vol. 1. -No 2. –P. 155-162.
16. Khudoyberdiyev A.Kh., Kurbanbaev T.K., Omirov B.A., Classification of Three-Dimensional Solvable p-Adic Leibniz Algebras. // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. -2010. -Vol. 2. -No. 3, -P. 207-221.
17. Курбанбаев Т.К. Классификация трехмерных p-адических не Лиевых алгебр Лейбница. // Узб. Мат. Журнал. № 3. -2010. -С. 32-37.
18. Курбанбаев Т.К. Описание трехмерных разрешимых p-адических алгебр Ли. // "Дифференциальные уравнения и их приложения". Материалы Республиканской научной конференции, -Нукус. -2009. -С.105-107.
19. Курбанбаев Т.К. Пятимерные p-адические филиформные алгебры Лейбница. // “Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения”. Материалы Республиканской научной конференции, - Фергана. -2011. -С.223-225.

20. Курбанбаев Т.К., Алламбергенов А.Х., Существования некоторый квадрат в поле p -адических чисел, Региональной научно-практической конференции для молодых учёных и студентов под девизом «XXI век – век интеллектуального поколения», Нукус 2014, 17-18 июнь.
21. Курбанбаев Т.К., Эрисбаев С., Существования некоторый куб в поле p -адических чисел, Региональной научно-практической конференции для молодых учёных и студентов под девизом «XXI век – век интеллектуального поколения», Нукус 2014, 17-18 июнь.
22. Seytekova V. Magistrilar toplami.
23. Kurbanbaev T., Erisbaev S., Seytekova V, Nekotoryy chetvertiy stepen` v pole  $p$ -adicheskix chisel, «Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika institutining fan, ta`lim va tarbiya masalalarini rivojlantirishdagi vrni» mavzusidagi Respublika ilmiy-nazariy va amaliy anjuman. Nukus-2014, noyabr`, S 124.

Internet saytlari

1. www.msu.ru
2. www.math.msu.su
3. arxiv.org
4. www.population.org