ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

Магистратура басқышы

Қол жазба ҳуқықында

УДК 517.98

Уразбаева Гоззал

«Аренс алгебраларында аддитив дифференциллаўлар»

5А460101 Математикалық анализ қәнигелиги бойынша

Магистр

академиялық дәрежесин алыў ушын жазылған

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Магистрлик диссертация функционаллық кафедрасында көрип шығылды ҳәм қорғаўға усынылды

Кафедра баслығы   К.К. Кудайбергенов

_________« »________2011 жыл

Илимий басшы:______________

ф.-м.и.д., академик Аюпов Ш.А.

НӨКИС 2011

Мазмуны

Кирисиў

Теманың актуаллығы: Функционаллық анализдиң тийкарғы обьектлеринен бири бул функционаллық кеңисликлер болып табылады. Функционаллқ кеңисликлердиң әҳмийетли классларынан бири интегралланыўшы функциялар класслары есапланады ([7]-[12], [14]-[18], [24]). Жигирмаланшы әсирдиң орталарында қәлеген натурал дәрежеси интералланыўшы функциялар класы үйрениле басланды. Қәлеген натурал дәрежеси интегралланыўшы функциялар класы алгебра пайда ететуғыны көрсетилди. Бул функциялар класы Аренс алгебралары деп аталып, коммутатив Аренс алгебралары биринши рет 1951 жылы Р. Аренс [25] жумысында қаралған. Коммутатив емес Аренс алгебраларың үйрениў С. Иноудың [28] жумысында қаралған. Коммутатив емес банах функциялары кеңисликлери [26-27] жумысларда кеңнен үйренилген.

Аренс алгебраларының үстпе-үст түсиўи, олардың изоморфизмлери Р.З. Абдуллаевтың [1-3] жумысларында үйренилген. Аренс алгебраларының дифференциалланыўлары ҳәм авторморфизмлери [4-6], [19], [23] жумысларда үйренилген. Коммутатив емес Аренс алгебраларының дифференциалланыўлары [19] жумыста толық баянланған.

Соңғы жылларда өлшемли операторлар алгебралары ҳәм ондағы ҳәр қыйлы операторлар кеңнен үйренилмекте. Өлшемли операторлар алгебраларының тийкарғы қәсийетлери М.А. Муратов ҳәм В.И. Чилинлердиң 2007 жылдағы [13] монографиясында кеңнен үйренилген. Бул монографияда өлшемли, тоталь өлшемли ҳәм локаль өлшемли операторлар алгебраларының тийкарғы қәсийетлери қаралған. Бул алгебралардың бир-бири менен үстпе-үст түсиў шәртлери [13] жумыста табылған. Бул алгебраларда ҳәр қыйлы жыйнақлылықлар ҳәм топологиялар, атап айтқанда, өлшем бойынша жыйнақлылық, тәртип бойынша жыйнақлылық, дерлик жыйнақлылық, еки тәреплеме дерлик жыйнақлылық түрлери [13] жумыста қаралған.

Типи I фон Нейман алгебраларына қарата локаль өлшемли операторлар алгебралары [6], [20-22] жумысларда қаралған. Типи I фон Нейман алгебраларына қарата локаль өлшемли операторлар алгебрасы өлшемли функциялар кольцосы үстиндеги Гильберт – Капླански модулинде анықланған үзликсиз сызықлы операторлар алгебрасына изоморфлығы [21] жумыста дәлилленген. Бундай изоморфизмлер жәрдеминде типи I фон Нейман алгебраларына қарата өлшемли операторлар алгебрасы дифференциалланыўлары толық баянланған. Бул баянлаўлардан пайдаланып, типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебраларының автоморфизмлери [5] жумыста үйренилген.

Мақсети ҳәм ўазыйпалары: Типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебраларының аддитив дифференциаллаўларынын улыўма көринисин табыўдан ибарат.

Изертлеў объекти: фон Нейман алгебралары, коммутатив емес Аренс алгебралары, аддитив дифференциаллаўлар.

Изертлеўди алып барыў усыллары. Магистрлик диссертация жумысында тийкарынан функционаллық анализ ҳәм операторлар алгебралары теориясы усылларынан пайдаланылады.

Изертлеўдиң әмелий әҳмийети: Жумыс теориялық характерге ийе. Диссертацияда келтирилген нәтийжелер ҳәм усыллар функционаллық анализ ҳәм операторлар алгебрасы теориясын изертлеўде қолланылыўы мумкин.

Жумыстың көлеми ҳәм дүзилиси: Магистрлик диссертация жумысы кирисиў, еки бап, төрт параграф, жуўмақлаў ҳәм пайдаланылған әдебиятлар дизиминен ибарат.

Жумыстың биринши бабы еки параграфтан ибарат болып, бунда фон Нейман алгебраларының қәсийетлери қаралған.

Магистрлик диссертация жумысының екинши бабында типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебраларының аддитив дифференциаллаўлары қаралған.

Мейли H комплекс Гильберт кеңислиги, $B(H)$ болса H кеңисликте анықланған барлық шегараланған сызықлы операторлар алгебрасы болсын. M арқалы $B(H)$ алгебрасындағы фон Нейман алгебрасы ҳәм $\|\cdot\|_M$ ондағы норма болсын. $P(M)$ болса M фон Нейман алгебрасы проекторлары көплиги болсын.

Мейли $\tau - M$ фон Нейман алгебрасында анықланған анық шекли нормал из болсын. $S(M,\tau)$ арқалы M алгебрасына бириктирилген барлық τ-өлшемли операторлар көплигин белгилеймиз. Енди ҳәр бир $p \geq 1$ саны ушын

$$L_p(M,\tau) = \left\{ x \in S(M,\tau) : \tau\left(| x |^p \right) < \infty \right\}$$

көплигин қарайық. $L_p(M,\tau)$ кеңислиги усы

$$\|x\|_p = \left(\tau\left(| x |^p \right)\right)^{1/p}, \quad x \in L_p(M,\tau)$$

нормаға қарата Банах кеңислигин пайда етеди. Енди усы

$$L^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p \geq 1} L_p(M,\tau)$$

кесиспени қараймыз. $L^{\omega}(M,\tau)$ кеңисликте

$$\left\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbf{N}\right\}$$

нормалар системасы пайда еткен топология t ны аламыз. Бул топологияға қарата $L^{\omega}(M,\tau)$ толық, локал дөңес метрикалық *-алгебра пайда етеди. Бул $\left(L^{\omega}(M,\tau),t\right)$ алгебрасы Аренс алгебрасы деп аталады.

Коммутатив фон Нейман алгебралары ушын Аренс алгебралары 1951 жылда Р. Аренс тәрепинен үйренилген. Коммутатив емес жағдайда А. Иноу тәрепинен 1976 жылда қаралған.

Мейли M типи I_n $(n \in \mathbf{N})$ фон Нейман алгебрасы ҳәм $Z(M)$ оның орайы болсын. Онда M алгебрасы $Z(M)$ орай үстиндеги $n \times n$ матрицалар алгебрасы $M_n(Z(M))$ алгебрасына *-изоморф болады (қараң [13, теорема 2.3.3]).

Бунда $L^{\omega}(M,\tau)$ Аренс алгебрасы төмендегише анықланады.

2.1.2-теорема. Мейли M типи I_n, $(n \in \mathbf{N})$ фон Нейман алгебрасы, τ ондағы анық нормал из ҳәм $Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)$ Аренс алгебрасы орайы болсын. Онда $L^{\omega}(M,\tau) \cong M_n\left(Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)\right)$.

Енди бир текли типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебралары характеристикасы пайдаланылып, бул алгебраның аддитив дифференциаллаўлары үйрениледи.

Мейли A санлар майданы $\mathbf{C}$ үстиндеги алгебра болсын. $D: A \to A$ сызықлы (аддитив) операторы барлық $x, y \in A$ элементлери ушын усы

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

Лейбниц бирдейлигин қанаатландырса, онда D сызықлы (аддитив) дифференциаллаў делинеди. Ҳәр бир $a \in A$ элементи усы

$$D_a(x) = ax - xa, \quad x \in A$$

формула арқалы A алгебрасында сызықлы дифференциаллаў пайда етеди. Бундай D_a дифференциаллаўы ишки дифференциаллаў деп аталады.

Енди бизге $\delta: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ көринисиндеги аддитив дифференциаллаўлар ҳаққында базы бир фактлер керек. Бундай дифференциаллаўлар ҳәр бир алгебралық санда нолге тең болады. Екинши тәрептен $\lambda \in \mathbf{C}$ трансцендент сан болса, онда усы аддитив дифференциаллаў $\delta: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ бар болып, ол λ санында нол ден парықлы мәнис қабыл етеди. (қараң [12]).

Мейли $M_n(\mathbf{C})$ бул $n \times n$ өлшемли $\mathbf{C}$ майдан үстиндеги матрицалар алгебрасы болсын. Егер $e_{i,j}$, $i, j = \overline{1, n}$ элементлери $M_n(\mathbf{C})$ алгебрасының матрицалық бирликлери болса, онда ҳәр бир $x \in M_n(\mathbf{C})$ элементи төмендеги түрде болады:

$$x = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} e_{ij}, \ \ \lambda_{i,j} \in \mathbf{C}, \ \ i, j = \overline{1, n}.$$

Мейли $\delta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ аддитив дифференциаллаў болсын. Усы

$$D_\delta\left(\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} e_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \delta(\lambda_{ij}) e_{ij} \tag{2.2}$$

формула арқалы D_δ операторын анықлаймыз. Бул оператор $M_n(\mathbf{C})$ аддитив дифференциаллаў болады. Бул оператордың $M_n(\mathbf{C})$ алгебрасының орайындағы мәнислери δ менен үстпе-үст түседи.

Мейли M типи I_n, $n \in \mathbf{N}$ болған фон Нейман факторы болсын. Онда M алгебрасындағы ҳәр бир D аддитив дифференциаллаў жалғыз усылда төмендеги түрде жазылады

$$D = D_a + D_\delta,$$

бунда D_a оператоы $a \in M$ элементи пайда еткен ишки дифференциаллаў ҳәм D_δ болса M алгебраның орайында анықланған δ аддитив дифференциаллаўдың (2.2) түрдеги изинен ибарат аддитив дифференциаллаў болады.

Енди M қәлеген шекли өлшемли фон Нейман алгебрасы ҳәм $Z(M)$ оның орайы болсын. Онда M алгебрасында сондай өз-ара ортогонал орайлық проекторлар $\{z_1, z_2, ..., z_k\}$, $\bigvee\limits_{i=1}^{k} z_i = 1$ ҳәм $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbf{N}$ бар болып, M алгебрасы типи I_{n_i} болған $z_i M$ фон Нейман факторларының C^*-көбеймесине *- изоморф болады, яғный

$$M \cong M_{n_1}(\mathbf{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbf{C}) \oplus ... \oplus M_{n_k}(\mathbf{C}).$$

Мейли енди D операторы M алгебрасындағы аддитив дифференциаллаў ҳәм δ оның алгебраның орайы $Z(M)$ алгебрасына шегараланыўы болсын. Онда $\delta(zx) = z\delta(x)$ бунда $z \in Z(M)$ орайлық проектор ҳәм $x \in M$. Буннан δ операторы ҳәр бир $z_i Z(M) \cong \mathbf{C}$ кесимди өз-өзине сәўлелендиреди. Демек δ операторы δ_i дифференциаллаўды алгебрасы $\mathbf{C}$ пайда етеди, бунда $i = \overline{1,k}$.

Мейли D_{δ_i} операторы $M_{n_i}(\mathbf{C})$, $i = \overline{1,k}$ алгебрасындағы (2.2) формула жәрдеминде пайда етилген аддитив дифференциаллаў болсын. Усы

$$D_\delta\left(\left(x_i\right)_{i=1}^k\right)=\left(D_{\delta_i}\left(x_i\right)\right),\quad \left(x_i\right)_{i=1}^k \in M \tag{2.3}$$

формула арқалы қурылған D_δ операторы M алгебрасында аддитив дифференциаллаў болады.

Енди биз $L^\omega(M,\tau)$ аддитив дифференциаллаў операторы D ны ҳәм оның алгебра орайы $Z\left(L^\omega(M,\tau)\right)$ ге шегараланыўшы δ ны қарайық. $z_\delta M$ шекли өлшеўли фон Нейман алгебрасы болады ҳәм $z_\delta^\perp \delta \equiv 0$, яғный $\delta = z_\delta \delta$.

Мейли D_δ операторы $z_\delta L^\omega(M,\tau) = z_\delta M$ алгебрасында (4) формула бойынша анықланған болсын. бул дифференциаллаўдың $L^\Lambda(M,\tau) = z_\delta L^\Lambda(M,\tau) \oplus z_\delta^\perp L^\Lambda(M,\tau)$ алгебрасында даўамы болған D_δ операторын усы

$$D_\delta\left(x_1+x_2\right) := D_\delta\left(x_1\right),\ x_1 \in z_\delta L^\Lambda(M,\tau),\ x_2 \in z_\delta^\perp L^\Lambda(M,\tau) \tag{2.6}$$

арқалы анықлаймыз.

Төмендеги нәтийже жумыстың тийкарқы нәтийжеси болып, типи I_n фон Нейман алгебрасына сәйкес $L^\omega(M,\tau)$ Аренс алгебрасындағы аддитив дифференциаллаўдың улыўма көринисин береди.

2.2.4-теорема. Мейли M типи I_n фон Нейман алгебрасы ҳәм τ ондағы анық нормал шекли из болсын. Онда $L^{\omega}(M,\tau)$ алгебрасындағы ҳәр бир аддитив дифференциаллаў D усы түрде бирден-бир көринисте жазылады

$$D = D_a + D_\delta$$

бунда D_a аддитив дифференциаллаўы $a \in L^{\omega}(M,\tau)$ элементи менен пайда етилген. D_δ болса орайда анықланған δ аддитив дифференциаллаўдың (2.6) бойынша $L^{\omega}(M,\tau)$ алгебрасының даўамы болады.

I БАП

ФОН НЕЙМАН АЛГЕБРАЛАРЫ

Биринши бап еки параграфтан ибарат болып, бунда инволютив алгебралар, $C*$-алгебралар, фон Нейман анықламалары, мысаллар ҳәм айырым қәсийетлери қарастырылған. Биринши параграфта инволютив алгебралар, $C*$-алгебралар ҳаккында тийкарғы түсиниклер келтирилген. Ал екинши параграфта фон Нейман алгебралардың анықламалары, бир неше мысаллар ҳәм базы бир белгили нәтийжелер келтириледи.

§ 1.1 Фон Нейман алгебралары

Мейли A – $\mathbb{C}$ комплекс санлар майданы үстиндеги алгебра болсын. A алгебрада аниқланған

$$x \to x*$$

сәўлелендириў ҳәр бир $x, y \in A,\ \ \lambda \in \mathbb{C}$ ушын төмендеги шәртлерди қанаатлантырса, онда бул сәўлелендириўге *инволюция* делинеди:

(i) $(x+y)* = x*+y*$;

(ii) $(\lambda x)* = \bar{\lambda} x*$;

(iii) $(xy)* = y*x*$;

(iv) $(x*)* = x$.

Инволюциялы алгебраға $*$-алгебра делинеди.

A $*$- алгебра ҳәм $x \in A$ болсын. x элементи ушын $x = x^*$ теңлиги орынланса, ол эрмит элементи,

$$x^* x = x x^*$$

теңлиги орынланса, онда нормаль элемент делинеди.

A $*$-алгебраның барлық эрмит элементлери көплиги A_h сыяқлы белгиленеди. Ҳәр бир $x \in A$ элементи ушын

$$x^* x, \quad x x^* \in A_h$$

орынлы болады.

A_h көплиги A алгебраның ҳақықый үлес кеңислиги болып, $x, y \in A_h$ элементлери ушын

$$xy \in A_h$$

қатнасы тек-ғана бул элементлер коммутирланғанда орынланады, яғный

$$xy = yx.$$

Ҳәр бир $x \in A$ ушын

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{x + x^*}{2},$$
$$\mathrm{Im}(x) = \frac{x - x^*}{2i}$$

деп белгилейик. Онда $\mathrm{Re}(x),\ \mathrm{Im}(x) \in A_h$. Екинши тәрептен, егер $x \in A$ элементи ушын

$$x = x_i + i x_2,$$

бунда $x_1, x_2 \in A_h$, болса, онда

$$x_1 = \mathrm{Re}(x), \qquad x_2 = \mathrm{Im}(x)$$

теңликлери орынлы болады. $\mathrm{Re}(x)$ ҳәм $\mathrm{Im}(x)$ элементлери сәйкес түрде, x элементтиң ҳақықый ҳәм жорыма бөлимлери делинеди. A алгебрасында мультипликатиялық бирлик пайда болса, бул алгебра униталь алгебра делинеди.

Униталь A алгебраның $x \in A$ ушын сондай $y \in A$ элементи табылып,

$$xy = yx = \mathbf{1}$$

теңлиги орынланса, онда x керилениўши элемент делинеди. Бул шәртти қанаатлантырыўшы у элемент бирден-бир түрде анықланады ҳәм у x^{-1} сыяқлы белгиленеди. $x \in A$ элементи ушын

$$\left(x^{-1}\right)^* = \left(x^*\right)^{-1}$$

теңлиги орынлы болады. Егер $u \in A$ элементи

$$u^* u = u u^* = \mathbf{1}$$

теңлигин қанаатлантырса, онда бул элемент унитар делинеди. $u \in A$ унитар элементи болыўы ушын, ол керилениўши ҳәм

$$u^* = u^{-1}$$

шәртти қанаатландырыўы зәрүр ҳәм жетерли.

A алгебраның барлық унитар элементлери көплиги $U(A)$ сыяқлы белгиленеди ҳәм ол көбеймеге қарата группа пайда етеди.

$p \in A$ элементи

$$p^2 = p = p^*$$

теңлигин қанаатлантырса, онда проектор делинеди. A алгебраның барлық проекторлары көплиги $P(A)$ көринисинде белгиленеди.

A ҳәм B $*$-алгебралар болсын.

$$\phi : A \to B$$

сәўлелендириўи, барлық $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbf{C}$ элементлари ушын

(i) $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$;

(ii) $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$;

(iii) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$;

(iv) $\phi(x^*) = \phi(x)^*$.

шәртлерди қанаатландырса, онда ϕ $*$-гомоморфизм делинеди.

Егер ϕ биектив $*$-гомоморфизм болса, онда ϕ $*$-изоморфизм, A ҳәм B алгебралары болса $*$-изоморф делинеди.

A $*$-алгебраның S үлес алгебрасы ушын $x \in S$ екенлигинен $x^* \in S$ келип шықса, онда S $*$-үлес алгебра делинеди.

Егер A $*$-алгебра $\|\cdot\|$ нормаға қарата банах кеңислиги болып, қәлеген $x, y \in A$ элементлери ушын

(i) $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$;

(ii) $\|x\| = \|x^*\|$

шәртлерин қанаатландырса, онда A банах $*$-алгебрасы делинеди.

Егер A банах $*$- алгебрасы униталь болып,

$$\|\mathbf{1}\| = 1$$

теңлиги орынланса, онда A униталь банах $*$- алгебрасы делинеди.

A банах $*$- алгебрасында барлық $x \in A$ ушын

$$\|x^* x\| = \|x\|^2$$

теңлиги орынланса, онда A C^*-алгебра делинеди.

Егер A C^*-алгебрада бирлик элемент пайда болса, онда $\|\mathbf{1}\| = 1$ теңлик автомат түрде орынланады, себеби

$$\|\mathbf{1}\| = \|\mathbf{1}^* \mathbf{1}\| = \|\mathbf{1}\|^2.$$

C^*-алгебраларға мысаллар келтиремиз.

1) X қәлеген бос болмаған көплик. X көпликте анықланған барлық шегараланған комплекс мәнисли функциялар көплигин $l_\infty(X)$ сыяқлы белиглеймиз. Бул көпликте алгебралық әмеллерди точкалар бойынша, яғный

(i) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$;

(ii) $(fg)(x)=f(x)g(x)$;

(iii) $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$;

сыяқлы, инволюция әмелин $f\to\overline{f}$ сыяқлы, норманы болса

$$\|f\|=\sup_{x\in X}\left|f(x)\right|,$$

сыяқлы анықлаймыз. Онда, $l_\infty(X)$ коммутатив униталь C^*-алгебра болады. Еслетип өтемиз, A алгебраның қәлеген $x,y\in A$ элементлери ушын

$$xy=yx$$

теңлиги орынланса, онда A коммутатив делинеди.

2) K топологиялық кеңислик болсын. $C_b(K)$ арқалы K кеңисликте анықланған барлық шегараланған үзликсиз комплекс мәнисли функциялар көплигин белгилеймиз. Онда $C_b(K)$ алгебрасы $l_\infty(K)$ C^*- алгебраның үлес алгебрасы болады.

Солай етип, $C_b(K)$ униталь коммутатив C^*- алгебра болады. Егер K компакт кеңислик болса, онда $C_b(K)$ алгебрасы $C(K)-K$ кеңисликте анықланған үзликсиз функциялар алгебрасы менен үстпе-үст түседи.

3) K локаль компакт хаусдорф кеңислик болсын.

Егер $f:K\to\mathbf{C}$ функция қәлеген $\varepsilon>0$ саны ушын $\left\{x\in K:\left|f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}$

көплиги компакт болса, онда f шексизликте нолге айланады делинеди. K кеңисликте анықланған шексизликте нолге айланыўшы функциялар көплиги $C_0(K)$ $*$ - алгебра болады.

Ҳәр бир $f \in C_0(K)$ ушын

$$\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$$

дейик. Онда, $(C_0(K), \|\cdot\|)$ коммутатив $C*$-алгебра болады. $C_0(K)$ унитал болыўы ушын K компакт екенлиги зәрүр ҳәм жетерли. Бунда $C_0(K)$ алгебрасы $C(K)$ менен үстпе-үст түседи.

4) $(\Omega, \varepsilon, \mu)$ толық локаль шекли өлшемли кеңислик болсын.

Еслетип өтемиз, егер қәлеген $A \in \Sigma,\ \mu(A) > 0$ ушын шундай $B \in \Sigma$, $B \subset A,\ 0 < \mu(B) < \infty$ табылса, онда μ локаль шекли өлшем делинеди.

$L_\infty(\Omega, \varepsilon, \mu)$ арқалы $(\Omega, \varepsilon, \mu)$ да анықланған шегараланған комплекс мәнисли өлшемли функциялар кеңислигин белгилеймиз. Онда $L_\infty(\Omega, \varepsilon, \mu)$ кеңислиги

$$\|f\|_\infty = ess\sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

норма ҳәм ноқатлар бойынша алгебралық әмеллер, $f \to \overline{f}$ инволюцияға қарата $C*$- алгебра болады.

5) H Гильберт кеңислиги, $B(H)$ бул Гильберт кеңислигинде анықланған барлық шегараланған сызықлы операторлар алгебрасы болсын. Бул кеңисликте норма

$$\|T\| = \sup_{\|\xi\|\le 1} \|T(\xi)\|$$

сыяқлы анықланады. Инволюция

$$T \to T^*$$

қоспа операторға өтиў.

$B(H)$ алгебрасы

6) Айтайық $\{A_j\}_{j\in J}$ $-C^*$- алгебралар системасы болсын, бунда J базы бир индекслар көплиги. A арқалы сондай $\{x_j\}_{j\in A}$ элементлер көплигин белгилеймиз, бунда $x_j \in A_j, \quad j \in J$ ҳәм

$$\sup_{j\in J} \|x_j\|_{A_j} < +\infty$$

Онда, A көплиги төмендеги алгебралық әмеллер инволюция ҳәм нормаға қарата C^*- алгебра пайда етеди:

(i) $\{x_j\}_{j\in J} + \{y_j\}_{j\in J} = \{x_j + y_j\}_{j\in J}$;

(ii) $\lambda\{x_j\}_{j\in J} = \{\lambda x_j\}_{j\in J}$;

(iii) $\{x_j\}_{j\in J}\{y_j\}_{j\in J} = \{x_j y_j\}_{j\in J}$;

(iv) $\{x_j\}^*_{j\in J} = \{x_j^*\}_{j\in J}$;

(v) $\left\|\{x_j\}_{j\in J}\right\|_A = \sup_{j\in J} \|x_j\|_A$;

A C^*- алгебрасы A_j C^*- алгебралардың C^*- көбеймеси делинеди ҳәм

$$A = C^* - \prod_{j\in J} A_j$$

сыяқлы белгиленеди. Онда A алгебрасы

$$\prod_{j\in J} A_j$$

дурыс көбеймеден ибарат $*$-алгебраның $*$-үлес алгебрасы болады. Буннан тысқары,

$$C^* - \prod_{j\in J} A_j = \prod_{j\in J} A_j$$

теңлиги тек ғана $card(J) < \infty$ болғандағана орынлы болады.

Мысал ушын $l_\infty(X)$ C^*- алгебрасы $\prod_{j\in X} A_j$ C^*- алгебрадан ибарат болады, бунда барлық $j \in X$ ушын $A_j = \mathbf{C}$.

Айтайық A базы бир униталь C^*-алгебра болсын. Ҳәр бир $x \in A$ элементи ушын

$$Sp(s) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (x - \lambda 1) - A \ \textit{тескариланувчи эмас}\}$$

көплиги x элементтиң спектри делинеди.

1.1.1-теорема.

(i) ҳәр бир $x \in A$ ушын $sp(x)$ көплиги $\mathbf{C}$ да бос емес компакт үлес көплик болады;

(ii) Егер $x = x^*$ болса, онда $sp(x) \subseteq \mathbf{R}$;

(iii) Егер $x \in A$ нормаль элемент болса, онда $C\left(sp\left(x\right)\right)$ $C*$-алгебрадан A алгебраға ϕ-гомоморфизми бар болады,

$$\phi\left(f_0 \right) = x,$$

бунда $f_0\left(t\right) = t$ ҳәр бир $t \in sp\left(x\right)$. Буннан тысқары, ϕ изометрия болып, $\phi\left(C\left(sp\left(x\right)\right)\right)$ A ның 1 ҳәм x элементлари пайда еткен $C*$-үлес алгебрасынан ибарат болады.

Егер $x \in A$ элементи ушын $x = x*$ ҳәм

$$sp\left(x\right) \subseteq \mathbf{R}_+ = \left\{t \in \mathbf{R} :\ t \geq 0\right\}$$

болса, онда x оң элемент делинеди. A алгебраның барлық оң элементлери көплиги A_+ сыяқлы белгиленеди. Онда

$$A_+ \cap \left(-A_+\right) = \left\{0\right\}$$

ҳәм ҳәр бир $\lambda \geq 0$ ушын

$$\lambda A_+ \subseteq A_+.$$

Төмендеги теорамада $C*$- алгебраның оң элементлариниң тийкарғы қәсийетлери келтирилген:

1.1.2-теорема.

(i) Ҳәр бир $x \in A_+$ элементи ушын сондай $y \in A_+$ элементи бар болып,

$$y^2 = x$$

теңлиги орынлы болады. Бунда y элементи $\sqrt{x}$ сыяқлы белгиленип, y x элементтиң квадрат корени делинеди;

(ii) $A_+ + A_+ \subseteq A_+$;

(iii) $A_+ = \{x^* x : x \in A\} = \{y^2 : y \in A_h\}$;

(iv) Егер $A - B(H)$ тың C^*-үлес алгебрасы болса, онда

$$A_+ = \{T \in A : \langle T\xi, \xi \rangle \geq 0, \quad \forall \xi \in H\}$$

A_h көпликте тәртип қатнасын төмендегише анықлаймыз:

$$x \leq y \Leftrightarrow (y - x) \in A_+$$

Бул үлес тәртип төмендеги шәртлерди қанаатлантырады:

1.1.3-Тастыйықлаў.

(i) Егер $x \leq y$ болса, онда барлық $z \in A_h$, $x \in \mathbf{R}_+$ ушын $x + z \leq y + z, \quad \lambda x \leq \lambda y$ орынлы болады;

(ii) Егер $x \leq y$ болса, онда қәлеген $z \in A$ ушын $z^* + z \leq z^* yz$ орынлы болады.

(iii) Егер $0 \leq x, 0 \leq y$ ҳәм $yx = xy$ болса, онда $0 \leq xy$;

(iv) Егер $0 \leq x < y$ болса, онда $\|x\|_A \leq \|y\|_A$ u $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$; бундан тысқары x ҳәм y керилениўши болса, онда $0 \leq y^{-1} \leq x^{-1}$.

Ҳәр бир $x \in A_h$ элементи ушын

$$|x| = \sqrt{x^2}, \quad x_+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad x_- = \frac{|x| - x}{2}$$

белгилеўлерин киритемиз.

Анықламадан тиккелей төмендегилер келип шығады.

(i) $|x|,\ x_+,\ x_- \in A_+$;

(ii) $x = x_+ - x_-$;

(iii) $|x| = x_+ x_-$;

(iv) $x_+ x_- = 0$.

$|x|,\ x_+,\ x_-$ элементлери сәйкес түрде эрмит x элементиниң модули, оң ҳәм терис үлеслари делинеди.

Төмендеги қәсийетлер орынлы болады. Нормасы $\|x\|_A \le 1$ болған ҳәр бир $x \in A_h$ элементи ушын $1 - x^2 \in A_+$ болып,

$$u = x + i\sqrt{\mathbf{1} - x^2}$$

ҳәм

$$\vartheta = x - i\sqrt{\mathbf{1} - x^2}$$

унитар элементлер, соның менен бирге

$$x = \frac{u + \vartheta}{2}.$$

Буннан, дара жағдайда A C^*-алгебраның ҳәр бир элементи оның унитар элементлери сызықлы комбинациясына теңлиги келип шығады.

A C^*-алгебрада анықланған f сызықлы функционал ҳәр бир $x \in A_+$ элементи ушын $f(x) \geq 0$ орынлы болса, онда f оң деп аталады. Егер f оң функционал болса, онда f үзликсиз болады.

Ҳәр бир $x \in A$ ушын

(i) $f(x^*) = \overline{f(x)}$;

(ii) $|f(x)|^2 \leq \|f\| f(x^* x)$

қатнаслары орынлы болады. Егер A униталь C^*-алгебра болса, онда

$$\|f\| = f(1)$$

теңлиги орынлы болады.

Айтайық H гильберт кеңислиги, $B(H)$ болса H кеңисликте анықланған барлық шегараланған сызықлы операторлар C^*-алгебрасы болсын. Ҳәр бир $\xi \in H$ ушын

$$\rho_\xi(T) = \|T\xi\|_H, \quad T \in B(H)$$

ярым норманы анықлаймыз.

$B(H)$ алгебрада $\{\rho_\xi\}_{\xi \in H}$ ярым нормалар системасы пайда еткен локаль дөңес топологияға күшли оператор топология, қысқаша, (so)-топология делинеди. Бу топология хаусдорф болады. $\{T_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq B(H)$ операторлар $T \in B(H)$ операторына so-жақынласыўы ушын, барлық $\xi \in H$ точкаларда

$$\left\| T_\alpha \xi - T\xi \right\|_H \to 0$$

қатнасы орынланыўы зәрүр ҳәм жетерли. Онда so-топология $\|\cdot\|_{B(H)}$ норма пайда еткен тегис топологиядан күшсиз болады. so-топологияға қарата $B(H)$ топологиялық сызықлы кеңислик болады.

1.1.4-теорема.

(i) Егер $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ өсиўши (сәйкес түрде кемейиўши) ҳәм барлық $\alpha\in\Lambda$ ушын $T_\alpha \le S$ (сәйкес түрде $T_\alpha \ge S$), бунда $S\in B(H)_h$ болса, онда сондай $T\in B(H)_h$ операторы бар болып, $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ торы T операторына so-жақынласады ҳәм $T=\sup\limits_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha$ (сәйкес түрде $T=\inf\limits_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha$).

$B(H)$ алгебрада ҳәр бир $\xi,\eta\in H$ векторлары ушын

$$\rho_{\xi,\eta}(T) = \left|\langle T\xi,\eta\rangle\right|, \quad T\in B(H)$$

ярым норманы анықлаймыз.

$\{\rho_{\xi,\eta}\}_{\xi,\eta\in H}$ ярым нормалар системасы пайда еткен топология, күшсиз оператор топология, қысқаша, (wo)-топология деп аталады.

Айтайық $M-$ $B(H)$ алгебраның базы бир үлес көплиги болсын. M' арқалы M көпликтиң коммутанты, яғный

$$M' = \{s\in B(H): Ts = sT,\ \forall T\in B(H)\}$$

көплигин белгилеймиз. Онда M' униталь алгебра болады. M көпликтиң бикоммутанты $M''=\left(M'\right)'$ көплиги M көпликти өз ишине алады.

1.1.1-анықлама. $M \subseteq B(H)$ $*$-үлес алгебра ушын $M = M''$ теңлиги орынланса, онда M фон Нейман алгебрасы делинеди.

1.1.5-теорема. Айтайық $M-$ $B(H)$ алгебраның униталь $*$-үлес алгебрасы болсын. Төмендеги шәртлер эквивалент болады:

(i) $M = M''$;

(ii) M күшсиз оператор топологияда жабық болады;

(iii) M күшли оператор топологияда жабық болады;

(iv) M_1 күшсиз оператор топологияда жабық болады;

(v) M_1 күшли оператор топологияда жабық болады;

Айтайық T – $B(H)$ алгебрасына тийисли базы бир оператор болсын. $n(T)$ арқалы бул оператордың ядросы

$$Ker(T)=\{\xi\in H : T\xi=0\}$$

үлес кеңислигине ортогонал проекторды белгилеймиз.

$l(T)$ арқалы болса

$$Ran(T)=\{T\xi : \xi\in H\}$$

үлес кеңислигиниң жайылмасына ортогонал проекторды белгилеймиз.

Төмендеги қатнаслар орынлы болады:

(i) $r(T)=l(T*)$

(ii) $r\left(T\right)$ проекторы $TE=T$ теңлигин қанаатландырыўшы $E\in B\left(H\right)$ проекторлардың ең кишиси, яғный

$$r\left(T\right)=\inf\left\{E\in P\left(B\left(H\right)\right):TET\right\};$$

(iii) $l\left(T\right)$проекторы $ET=T$ теңлигин қанаатландырыўшы $E\in B\left(H\right)$ проекторлардың ең кишиси, яғный

$$l\left(T\right)=\inf\left\{E\in P\left(B\left(H\right)\right):ET=T\right\}.$$

$l\left(T\right)$ ҳәм $r\left(T\right)$ проекторлар төмендеги жағдайларда қолай есапланады.

1.1.6-Тастыйықлаў. Егер $T=EQ$, бунда E,Q-проекторлар, болса, онда

(i) $l\left(T\right)=E-E\wedge\left(1-Q\right);$

(ii) $r\left(T\right)=Q-Q\wedge\left(1-E\right).$

$V\in B\left(H\right)$ операторы ушын сондай L жабық сызықлы үлес кеңислик бар болып,

$$\left\|V\xi\right\|_H=\left\|\xi\right\|_H,\ \forall\xi\in L$$

ҳәм

$$V\xi=0,\quad\forall\xi\in L^{\perp}$$

қатнаслары орынлы болса, онда V үлес изометрия делинеди. Бунда, L үлес кеңислиги V үлес изометрияның басланғыш үлес кеңислиги, $V(L)$ болса финал үлес кеңислиги делинеди.

V^*V ҳәм VV^* операторлары проекторлар болып, олар сәйкес түрде L ҳәм $V(L)$ үлес кеңисликлерге ортогонал проекторлар болады. Олар V үлес изометрияның басланғыш ҳәм финал проекторлары делинеди.

Төмендеги қисмий изометриялардың характеристикасы пайдалы болады.

(i) V үлес изометрия;

(ii) V^*V проектор;

(iii)VV^* проектор;

(iv) $VV^*V=V$;

(v) $V^*VV^*=V^*$.

1.1.7-теорема. (Поляр жайылма ҳаққында). Ҳәр бир $T\in B(H)$ операторы ушын жалғыз оң $S\in B(H)$ операторы ҳәм $V\in B(H)$ қисмий изометрия бар болып,

$$T=VS \text{ ҳәм } V^*V=s(S)$$

теңликлери орынлы болады.

§1.2. фон Нейман алгебралары классификациясы

M фон Нейман алгебрасы барлық проекторлары көплиги $P(M)$ ушын төмендеги нәтийже, оның тийкарғы қәсийетлеринен бири есапланады.

1.2.1-теорема. $P(M)$ көплиги M_h көплигинен индуцирланған үлес тәртипке қарата толық структура болып, бунда 0 операторы оның нол элементи, бирлик оператор 1 оның бирлик элементи болады ҳәм P проектордың толықтырыўшысы $P^{\perp} = 1 - p$ проекторына тең.

$P \to p^{\perp}$ сәўлелендириўи төмендеги қәсийетлерге ийе болады:

i 1) $\left(P^{\perp}\right)^{\perp} = P$;

i 2) $p \vee P^{\perp} = \mathbf{1}$

i 3) Егер $Q \leq P$ болса, онда $P^{\perp} \leq Q^{\perp}$;

i 4) $\{P_i\} \subset P(M)$ проекторлары ушын оның ең киши жоқарғы шегарасы $\underset{i \in I}{V} P_i$ проекторы $\sum_{i \in I} P_i(H)$ жабық үлес кеңислигине ортогонал проектор болады, ең үлкен төменги шегарасы болса $\bigcap_{i \in I} P_i(H)$ үлес кеңисликке ортогонал проектор болады.

(ii) Егер M коммутатив фон Нейман алгебрасы болса, онда $P(M)$ толық буль алгебрасы болады. $P(Z(M))$ көплиги $P(M)$ ниң толық буль үлес алгебрасы ҳәм

$$\sup_{P(M)} \{P : P \in F\} = \sup_{P(Z(M))} \{P : P \in F\}$$

бунда $F \subset P\left(Z\left(M\right)\right)$

(iii) ҳәр бир $\left\{P_i\right\}_{i=1}^{n} \subset P\left(M\right), \quad n \in N$

ушын

$$s\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right) = \mathop{V}_{n=1}^{n} P_i;$$

(iv) Егер $\left\{P_i\right\}_{i \in I} \subset P\left(M\right)$ ушын $P_i P_j = 0, \quad i \neq j$ болса, онда

$$\mathop{V}_{i \in I} P_i = \sum_{i \in I} P_i,$$

бунда қатардың жақынласыўы $\left(so\right)$-топологиясы бойынша болады.

1.2.1-теоремадан ҳәр бир $T \in M$ ушын $zT = T$ теңлигин қанаатлантырыўшы барлық орайлық проекторлар көплиги ең үлкен төменги шегараға ийе болады. Бул орайлық проектор $z\left(T\right)$ арқалы белгиленеди, яғный

$$z\left(T\right) = \inf\left\{Z \in P\left(Z\left(M\right)\right) : zT = T\right\}.$$

Егер E ҳәм F проекторлары ушын сондай $V \in M$ үлес изометрия табылып,

$$V^*V = E, \; VV^* = F$$

теңликлери орынланса, онда E ҳәм F проекторлар эквивалент делинеди. $E \sim F$ сыяқлы белгиленеди. Дара жағдайда

$$VE = V = FV, \quad EV^* = V^* = V^*F$$

теңликлери орынлы болады.

$"\sim"$ қатнасы $P(M)$ көпликте эквивалентлик қатнасы болады, яғный

а) $E \sim F \Rightarrow F \sim E$;

в) $E \sim E$;

с) $E \sim F, \quad F \sim Q \Rightarrow E \sim Q.$

Егер E ҳәм F проекторлары ушын сондай $F_1 \in P(M)$ табылып, $F_1 \leq F, \; E \sim F_1$ орынланса, онда $E \precsim F$ арқалы белгиленеди.

1.2.2-теорема. Айтайық M фон Нейман алгебрасы болсын.

i) Егер $E, F \in P(m), \; E \precsim F$ ҳәм $F \precsim E$ болса, онда $E \sim F$;

ii) Егер $E \sim F$ болса, онда $z(E) = z(F)$

iii) Егер $E \sim F$, $Z \in P(z(m))$ болса, онда $EZ \sim FZ$;

iv) Егер $\{E_i\}_{i \in I}$, $\{F_i\}_{i \in I} \subset P(M)$ ушын $E_i E_j = 0, F_i F_j = 0,$ $i \neq j, \; i, j \in I$ ҳәм $E_i \sim F_i, \; i \in I$ болса, онда

$$\bigvee_{i \in I} E_i \sim \bigvee_{i \in I} F_i$$

v) Егер $T \in M$ болса, онда $l(T) \sim r(T)$

vi) Ҳәр бир $E, F \in P(M)$ ушын сондай $Z(P(Z(M)))$ орайлық проектор табылып,

$$ZE \precsim ZF \text{ ҳәм } Z^{\perp}F \precsim Z^{\perp}E$$

қатнаслары орынлы болады.

vii) Қәлеген $E, F \in P(M)$ проекторлары ушын

viii)

$$(E \vee F - F) \sim (E - E \vee F),$$

$$E - E \wedge (\mathbf{1} - F) \sim F - (\mathbf{1} - E) \wedge F,$$

қатнаслары орынланады.

ix) $E, F \in P(M)$ болсын. $EMF \neq 0$ орынлы болыўы ушын сондай нолден өзгеше $E_1, F_1 \in P(M)$ проекторлар табылып

$$E_1 \le E, \;\; F_1 \le F \text{ ҳәм } E_1 \sim F_1$$

орынланыўы зәрүр ҳәм жеткиликли.

Айтайық M фон Нейман алгебрасы ҳәм $E \in P(M)$ болсын.

Егер $Q \in P(M)$ проекторы ушын $0 \neq Q \le E$ екенлигинен, $Q = E$ теңлиги келип шықса, онда E минимал (ямаса атом) делинеди.

Егер EME коммутатив алгебра болса, онда E абель проекторы деп аталады.

Ҳәр бир минимал E проекторы абель проекторы болады,
себеби E минимал болса, онда EME алгебрасы **C** комплекс санлар майданына изоморф болады.

Егер $F \in P(M)$ проекторы ушын $F \le E, \; F \sim E$ екенлигинен $F = E$ келип шықса, онда E шекли проектор делинеди. Бундан тысқары, егер $F \in P(M), \; F \precsim E$ ҳәм E шекли (сәйкес түрде абель) проекторы болса, онда F шекли (сәйкес түрде абель) проекторы болады.

Егер E проекторы ушын

(i) $Z\in P(Z(M))$

(ii) ZE шекли проектор шәртлеринен $ZE=0$ екенлиги келип шықса, онда E шексиз проектор делинеди.

Егер E проектори ушын $P(EME)$ көпликте өз-ара ортогонал

проекторлар системасы көби менен санақлы болса, онда E санақлы типли проектор делинеди.

Егер $\mathbf{1}\in M$ санақлы типли проектор болса, онда M фон Нейман алгебрасы санақлы типли ямаса σ-шекли фон Нейман алгебрасы делинеди.

1.2.3-теорема. Айтайық M фон Нейман алгебрасы ҳәм $E,\,F\in P(M)$ болсын.

(i) Егер $E,\,F$ абель проекторлары ҳәм $z(E)\le z(F)$ (сәйкес түрде $z(E)=z(F)$) болса, онда $E\precsim F$ (сәйкес түрде $E\sim F$) қатнасы орынлы болады;

(ii) Егер E ҳәм F шекли проекторлар болса, онда $E\vee F$ ҳам шекли проектор болады;

(iii) E проекторы **хос** шексиз болыўы ушын сондай өз-ара ортогонал $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}\subset P(M)$ проекторлар бар болып, $E=\bigvee\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ ҳәм $E_n\sim F,\ n\in\mathbf{N}$ орынланыўы зәрүр ҳәм жетерли болады.

(iv) Егер E санақлы типли, F шексиз проекторлар ҳәм

$$z(E)\le z(F)$$

болса, онда $E\precsim F$ орынлы болады.

M алгебрасы ушын

– Егер қәлеген нолден өзгеше $E \in P(M)$ проекторы ушын сондай $P \in P(M),\ P \le E$ минимал проектор бар болса, онда M атомлық;

– Егер **1** шекли проектор болса, онда M шекли;

– Егер қәлеген нолден өзгеше $Z \in M$ орайлық проекторы ушын сондай шекли $E \in P(M),\ E \le Z$ проекторы табылса, онда M ярим шекли;

– Егер қәлеген нолден өзгеше $Z \in M$ орайлық проекторы ушын сондай абель $E \in P(M),\ E \le Z$ проекторы табылса, онда M типи I;

– Егер M нолден өзгеше абель проекторы бар болмаған, ярим шекли алгебра болса, онда M типи II;

– Егер M да нолден өзгеше шекли проектор бар болмаса, онда M типи III;

– Егер M шекли типи I алгебра болса, онда у $I_{\sin}$ типли;

– Егер M шекли болмаған типи I алгебра болса, онда ол I_∞ типли;

– Егер M шекли типи II алгебра болса, онда ол II_1 типли;

– Егер M шекли болмаған типи II алгебра болса, онда II_∞ типли;

– Егер M типи I болса, онда дискрет;

– Егер M типи II ямаса III болса, онда үзликсиз делинеди.

1.2.4-теорема. Ҳәр бир M фон Нейман алгебрасы жалғыз түрде анықланған $Z_i,\ i = 1,2,3,4,5,$ орайлық проекторларға ийе болып,

(i) $\sum_{i=1}^{5} Z_i = \mathbf{1}$;

(ii) $Z_1 M$ типи I_{fin} фон Нейман алгебрасы;

(iii) $Z_2 M$ типи I_∞ фон Нейман алгебрасы;

(iv) $Z_3 M$ типи II_2 фон Нейман алгебрасы;

(v) $Z_4 M$ типи II_∞ фон Нейман алгебрасы;

(vi) Z_5M типи III фон Нейман алгебрасы болады.

Егер M фактор болса, онда төмендеги бесеўинен биреўи болады: I_{fin}, I_∞, II_1, II_∞, III.

Келтирилген теоремадан қәлеген M фон Нейман алгебрасы

$$M = \sum_{i=1}^{5} M_i$$

көринисте болып, бунда M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 алгебралары сәйкес түрде типлери I_{fin}, I_∞, II_1, II_∞, III болған алгебралар болады.

Биринши бап бойынша жуўмақ

Жумыстың биринши бабы еки параграфтан ибарат болып, бунда инволютив алгебралар, C^*-алгебралар, фон Нейман анықламалары, мысаллар ҳәм айырым қәсийетлери қарастырылған. Биринши параграфта инволютив алгебралар, C^*-алгебралар ҳаққында тийкарғы түсиниклер келтирилген. Ал екинши параграфта фон Нейман алгебралардың анықламалары, бир неше мысаллар ҳәм базы бир белгили нәтийжелер сәўлеленген.

II БАП

Аренс алгебралары дифференциаллаўлары

Бул бапта бир текли типи И фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебралары классификациясы алынады ҳәм бул алгебраның аддитив дифференциаллаўлары үйрениледи.

§2.1. Коммутатив емес Аренс алгебралары

Бул параграфта бир текли типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебралары классификациясы алынады.

Мейли H комплекс Гильберт кеңислиги, $B(H)$ болса H кеңисликте анықланған барлық шегараланған сызықлы операторлар алгебрасы болсын. M арқалы $B(H)$ алгебрасындағы фон Нейман алгебрасы ҳәм $\|\cdot\|_M$ ондағы норма болсын. $P(M)$ болса M фон Нейман алгебрасы проекторлары көплиги болсын.

M фон Нейман алгебрасы коммутанты төмендегише анықланады:

$$M' = \{y \in B(H) : xy = yx, \quad \forall x \in M\}.$$

D көплиги H кеңисликтиң үлес кеңислиги болсын. Егер M' көпликке тийисли қәлеген u унитар оператор ушын

$$u(D) \subset D$$

байланысы орынлы болса, ол жағдайда D көплиги M бириктирилген делинеди ҳәм $D\eta M$ сыяқлы белгиленеди.

Анықланыў областы $D(x) \subseteq H$ болған x операторы ушын $D(x)\eta M$ ҳәм ҳәр бири $u \in M'$, $\xi \in D(x)$ ушын $u(x(\xi)) = x(u(\xi))$ болса, ол жағдайда x операторы M алгебраға бириктирилген делинеди ҳәм $x\eta M$ сыяқлы белгиленеди.

Мейли $\tau - M$ фон Нейман алгебрасында анықланған анық шекли нормал из болсын.

Егер $D \subset H$ бөлим кеңислиги ушын $D\eta M$ ҳәм қәлеген $\varepsilon > 0$ саны ушын $p \in M$ проекторы табылып $p(H) \subset D(x)$ ҳәм $\tau(p^{\perp}) < \varepsilon$ орынланса, онда D тўплами τ-тығыз делинеди. x болса H Гильберт кеңислигинде анықланған туйық сызықлы оператор болсын. Егер $x\eta M$ ҳәм $D(x)$ көплиги H кеңисликте τ-зич болса, онда x операторы τ- өлшеўли делинеди.

$S(M,\tau)$ арқалы M алгебрасына бириктирилген барлық τ-өлшемли операторлар көплигин белгилеймиз.

Енди ҳәр бир $p \geq 1$ саны ушын

$$L_p(M,\tau)=\left\{x\in S(M,\tau):\tau\left(|x|^p\right)<\infty\right\}$$

көплигин қарайық. $L_p(M,\tau)$ кеңислиги усы

$$\|x\|_p=\left(\tau\left(|x|^p\right)\right)^{1/p},\quad x\in L_p(M,\tau)$$

нормаға қарата Банах кеңислигин пайда етеди.

Енди усы

$$L^{\omega}(M,\tau)=\bigcap_{p\geq 1}L_p(M,\tau)$$

кесиспени қараймыз. $L^{\omega}(M,\tau)$ кеңисликте

$$\left\{\|\cdot\|_n : n\in \mathbf{N}\right\}$$

нормалар системасы пайда еткен топология t ны аламыз. Бул топологияға қарата $L^{\omega}(M,\tau)$ толық, локал дөңес метрикалық *-алгебра пайда етеди. Бул $\left(L^{\omega}(M,\tau),t\right)$ алгебрасы Аренс алгебрасы деп аталады.

Коммутатив фон Нейман алгебралары ушын Аренс алгебралары 1951 жылда Р. Аренс тәрепинен үйренилген. Коммутатив емес жағдайда А. Иноуе тәрепинен 1976 жылда қаралған.

Төмендеги керекли факкти келтиремиз. Егер N көплиги M фон Нейман алгебрасы үлес алгебрасы болса, онда

$$L_p(N,\tau_N)=S(N,\tau_N)\cap L_p(M,\tau),$$

бунда τ_N изи τ изининг N алгебрасына шегараланыўы.

Енди биз $L^{\omega}(M,\tau)$ Аренс алгебрасының орайы характеристикасын келтиремиз.

2.1.1-лемма. Мейли M фон Нейман алгебрасы, τ ондағы анық нормал шекли из ҳәм $Z(M)$ оның орайы болсын. Онда

$$Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)=L^{\omega}(Z(M),\tau_Z).$$

Дәлиллеў. Усы теңликтен пайдалансақ

$$L_p(N,\tau_N)=S(N,\tau_N)\cap L_p(M,\tau),$$

онда

$$L^{\omega}(N,\tau_N)=S(N,\tau_N)\cap L^{\omega}(M,\tau).$$

Буннан

$$\begin{gathered}L^{\omega}(Z(M),\tau_Z)=S(Z(M),\tau_Z)\cap L^{\omega}(M,\tau)=\\=Z(S(M,\tau))\cap L^{\omega}(M,\tau)=Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)\end{gathered}$$

яғный

$$Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)=L^{\omega}(Z(M),\tau_Z).$$

Лемма дәлилленди.

Мейли M типи I_n $(n\in\mathbf{N})$ фон Нейман алгебрасы ҳәм $Z(M)$ оның орайы болсын. Онда M алгебрасы $Z(M)$ орай үстиндеги $n\times n$ матрицалар алгебрасы $M_n(Z(M))$ алгебрасына *-изоморф болады (қараң Сакай С. [теорема 2.3.3]).

Бунда $L^{\omega}(M,\tau)$ Аренс алгебрасы төмендегише анықланады.

2.1.2-теорема. Мейли M типи I_n, $(n\in\mathbf{N})$ фон Нейман алгебрасы, τ ондағы анық нормал из ҳәм $Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)$ Аренс алгебрасы орайы болсын. Онда $L^{\omega}(M,\tau)\cong M_n\left(Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)\right)$.

Дәлиллеў. Мейли $\left\{e_{ij}\ :\ i, j \in \overline{1, n}\right\}$ арқалы $M_n(Z(M))$ алгебрасындағы матрицалық бирликлерин белгилейик. $L^{\omega}(M, \tau)$ алгебрасында төмендеги көплик пайда еткен *-үлес алгебрасын қарайық.

$$Z\left(L^{\omega}(M, \tau)\right) \cup \left\{e_{ij}\ :\ i, j \in \overline{1, n}\right\}.$$

Бул *-үлес алгебра усы түрдеги элементлерден дүзилген болады:

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} e_{ij},\ a_{i, j} \in Z\left(L^{\omega}(M, \tau)\right),\ \ i, j = \overline{1, n}$$

Усы алгебра $M_n\left(Z\left(L^{\omega}(M, \tau)\right)\right) \subseteq L^{\omega}(M, \tau)$ алгебрасына *-изоморф болады. Енди M көплигиниң $L^{\omega}(M, \tau)$ алгебрада тығыз екенлигинен, биз $M_n\left(Z\left(L^{\omega}(M, \tau)\right)\right)$ үлес алгебраның $L^{\omega}(M, \tau)$ алгебрасында тығызлығын көрсетиўимиз жетерли болады.

$Z\left(L^{\omega}(M, \tau)\right)$ орайдың $L^{\omega}(M, \tau)$ алгебрасында туйықлығынан

$$e_{11} Z\left(L^{\omega}(M, \tau)\right) e_{11} = Z\left(L^{\omega}(M, \tau)\right) e_{11}$$

көплиги де туйық болады.

Мейли $M_n\left(Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)\right)$ алгебрасының $x_m=\sum_{i,j}^{n} a_{ij}^{(m)} e_{ij}$ избе-излиги болып, $x_m \to x \in L^{\omega}(M,\tau)$ болсын. Енди $k,l \in \overline{1,n}$ номерлерин фиксирлеп, $e_{1k}x_m e_{l1} \to e_{1k}x_{el1}$ байланысқа ийе боламыз. $e_{1k}x_m e_{l1}=a_{kl}^{(m)}e_{11}$ болғанлықтан $a_{kl}^{(m)}e_{11} \to e_{1k}xe_{l1}$. $Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)$ көпликтиң $L^{\omega}(M,\tau)$ алгебрасында туйықлығынан,

$$a_{kl}^{(m)}e_{11} \to e_{1k}xe_{11} \tag{2.1}$$

бунда $a_{kl} \in Z\left(S(M,\tau)\right)$ бирор-бир фиксирленген элемент. Енди (2.1) теңликти шептен e_{k1} элементине, оңнан e_{1l} элементине көбейтсек, онда $a_{kl}^{(m)}e_{kl} \to a_{kl}e_{kl}$ байланысына ийе боламыз. Демек $x_m \to \sum_{i,j}^{n} a_{ij}e_{ij}$ ҳәм буннан $x=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}e_{ij}$. Буннан болса $L^{\omega}(M,\tau) \cong M_n\left(Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)\right)$. Теорема дәлилленди.

§2.2. Аренс алгебралары аддитив дифференциаллаўлары

Бул бөлимде бир текли типи И фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебралары характеристикасы пайдаланылып, бул алгебраның аддитив дифференциаллаўлары үйрениледи.

Мейли A санлар майданы **C** үстиндеги алгебра болсын. $D: A \to A$ сызықлы (аддитив) операторы барлық $x, y \in A$ элементлери ушын усы

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

Лейбниц бирдейлигин қанаатландырса, онда D сызықлы (аддитив) дифференциаллаў делинеди. Ҳәр бир $a \in A$ элементи усы

$$D_a(x) = ax - xa, \ \ x \in A$$

формула арқалы A алгебрасында сызықлы дифференциаллаў пайда етеди. Бундай D_a дифференциаллаўы ишки дифференциаллаў деп аталады. Егер A алгебрасында D_a дифференциаллаўды пайда еткен a элементи A алгебрасын идеал сыпатында өз ишине алыўшы B алгебрасына тийисли болса, онда D_a фазалық дифференциаллаў делинеди.

Мейли A базы бир алгебра ҳәм $Z(A)$ бул алгебраның орайы болсын. $D: A \to A$ болса аддитив дифференциаллаў болсын.

Егер $x \in A$ ҳәм орайлық $a \in Z(A)$ элементлери берилген болса, онда

$$D(ax) = D(a)x + aD(x)$$

ҳәм

$$D(xa)=D(x)a+xD(a).$$

Енди $ax=xa$ ҳәм $aD(x)=D(x)a$ теңликлерин есапқа алсақ, онда $D(a)x=xD(a)$, бунда $a\in A$. Булардан $D(a)\in Z(A)$ екенлиги, яғный $D(Z(A))\subseteq Z(A)$ келип шығады. Усы себепли A алгебрасындағы ҳәр бир D дифференциаллаў ушын $\delta: Z(A)\to Z(A)$.

Енди бизге $\delta:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ көринисиндеги аддитив дифференциаллаўлар ҳаққында базы бир фактлер керек. Бундай дифференциаллаўлар ҳәр бир алгебралық санда нолге тең болады. Екинши тәрептен $\lambda\in\mathbf{C}$ транцсендент сан болса, онда усы аддитив дифференциаллаў $\delta:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ бар болып, ол λ санында нол ден парықлы мәнис қабыл етеди. (қараң [12]).

Мейли $M_n(\mathbf{C})$ бул $n\times n$ өлшемли $\mathbf{C}$ майдан үстиндеги матрицалар алгебрасы болсын. Егер $e_{i,j}$, $i,j=\overline{1,n}$ элементлери $M_n(\mathbf{C})$ алгебрасының матрицалық бирликлери болса, онда ҳәр бир $x\in M_n(\mathbf{C})$ элементи төмендеги түрде болады:

$$x=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}e_{ij},\ \ \lambda_{i,j}\in\mathbf{C},\ \ i,j=\overline{1,n}.$$

Мейли $\delta:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ аддитив дифференциаллаў болсын. Усы

$$D_\delta\left(\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}e_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\delta(\lambda_{ij})e_{ij} \qquad (2.2)$$

формула арқалы D_δ операторын анықлаймыз. Бул оператор $M_n(\mathbf{C})$ аддитив дифференциаллаў болады. Бул оператордың $M_n(\mathbf{C})$ алгебрасының орайындағы мәнислери δ менен үстпе-үст түседи.

Мейли M типи I_n, $n\in\mathbf{N}$ болған фон Нейман факторы болсын. Онда M алгебрасындағы ҳәр бир D аддитив дифференциаллаў бирден-бир усылда төмендеги түрде жазылады

$$D=D_a+D_\delta,$$

бунда D_a оператоы $a\in M$ элементи пайда еткен ишки дифференциаллаў ҳәм D_δ болса M алгебраның орайында анықланған δ аддитив дифференциаллаўдың (2.2) түрдеги изинен ибарат аддитив дифференциаллаў болады.

Еслетип өтемиз, егер M шекли өлшеўли фон Нейман алгебрасы болса, онда ҳәр бир τ анық нормал шекли из ушын $L^\omega(M,\tau)=M$ теңлиги орынланады.

Енди M қәлеген шекли өлшемли фон Нейман алгебрасы ҳәм $Z(M)$ оның орайы болсын. Онда M алгебрасында сондай өз-ара ортогонал орайлық проекторлар $\{z_1, z_2, ..., z_k\}$, $\overset{k}{\underset{i=1}{V}} z_i = 1$ ҳәм $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbf{N}$ бар болып, M алгебрасы типи I_{n_i} болған $z_i M$ фон Нейман факторларының $C*$-көбеймесине *- изоморф болады, яғный

$$M \cong M_{n_1}(\mathbf{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbf{C}) \oplus ... \oplus M_{n_k}(\mathbf{C}).$$

Мейли енди D операторы M алгебрасындағы аддитив дифференциаллаў ҳәм δ оның алгебраның орайы $Z(M)$ алгебрасына шегараланыўы болсын. Онда $\delta(zx) = z\delta(x)$ бунда $z \in Z(M)$ орайлық проектор ҳәм $x \in M$. Буннан δ операторы ҳәр бир $z_i Z(M) \cong \mathbf{C}$ кесимди өз-өзине сәўлелендиреди. Демек δ операторы δ_i дифференциаллаўды алгебрасы $\mathbf{C}$ пайда етеди, бунда $i = \overline{1,k}$.

Мейли D_{δ_i} операторы $M_{n_i}(\mathbf{C})$, $i = \overline{1,k}$ алгебрасындағы (2.2) формула жәрдеминде пайда етилген аддитив дифференциаллаў болсын. Усы

$$D_{\delta}\left((x_i)_{i=1}^k\right) = \left(D_{\delta_i}(x_i)\right), \quad (x_i)_{i=1}^k \in M \tag{2.3}$$

формула арқалы қурылған D_δ операторы M алгебрасында аддитив дифференциаллаў болады.

2.2.1-лемма. Мейли M шекли өлшеўли фон Нейман алгебрасы болсын. Онда M алгебрасындағы ҳәр бир D аддитив дифференциаллаў төмендеги көринисте бирден бир түрде жазылады

$$D = D_a + D_\delta,$$

бунда D_a ишки дифференциаллаў болып, $a \in M$ элементи тәрепинен пайда етилген, D_δ болса (2.3) көринисиндеги аддитив дифференциаллаў.

Дәлиллеў. Мейли D операторы M алгебрасы аддитив дифференциаллаў ҳәм δ оның алгебра орайы $Z(M)$ дағы шегараланыўы болсын. D_δ операторы $Z(M)$ алгебрасында (2.3) формула ҳәм аддитив дифференциаллаў δ арқалы қурылған болсын. D ҳәм D_δ аддитив дифференциаллаўлар алгебра орайы $Z(M)$ да үстпе-үст түскенлигинен, $D - D_\delta$ аддитив дифференциаллаўы сызықлы дифференциаллаў болады. Онда Сакаидың [14, теорем 4.1.6] нәтийжелеринен $D - D_\delta$ ишки дифференциаллаў болады. Демек сондай $a \in M$ элементи бар болып, $D_a = D - D_\delta$ ҳәм буннан $D = D_a + D_\delta$. Лемма дәлилленди.

Мейли енди M коммутатив фон Нейман алгебрасы ҳәм τ ондайы анық нормал шекли из болсын. δ болса $L^{\omega}(M,\tau)$ алгебрасында анықланған аддитив дифференциаллаў болсын. Усы

$$z_{\delta} = \inf\{z \in P(M) : z\delta = \delta\}$$

формула арқалы анықланған проекторын қарастырамыз.

Енди M коммутатив фон Нейман алгебрасы ҳәм τ ондағы анық нормал шекли из. Бул алгебрада $q_1, q_2, ..., q_k$ атомларды қарайық. Онда

$$L^{\Lambda}(M,\tau) \cong q_1\mathbf{C} \oplus q_2\mathbf{C} \oplus ... \oplus q_k\mathbf{C} \oplus pL^{\Lambda}(M,\tau)$$

бунда $p = 1 - \bigvee_{i=1}^{k} q_i$.

Енди егер $\delta_i : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ аддитив дифференциаллаўлар болса, онда усы

$$\delta(x) = (\delta_1(q_1 x), ..., \delta_k(q_k x),\ 0), \quad x \in L^{\Lambda}(M,\tau) \qquad (2.4)$$

формула арқалы анықланған оператор ҳәм аддитив дифференциаллаў болады. Бул оператор анықланыўынан $z_{\delta} = V\{q_i : \delta_i \neq 0, 1 \leq i \leq k\}$ теңлиги орынлы болады.

2.2.2-лемма. Мейли M коммутатив фон Нейман алгебрасы ҳәм τ ондағы анық нормал шекли из болсын. Ҳәр бир тривиал болмаған

$\delta : L^{\omega}(M,\tau) \to L^{\omega}(M,\tau)$ аддитив дифференциаллаў ушын M алгебрасында сондай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|a_n| \le 1$, $n \in \mathbf{N}$ избе-излик бар болып,

$$|\delta(a_n)| \ge n\, z_{\delta}$$

теңсизлиги барлық $n \in \mathbf{N}$ ушын орынлы болады.

Төмендеги нәтийже (2.4) формула арқалы қурылған аддитив дифференциаллаўлар коммутатив Аренс алгебраларында дифференциаллаўдың улыўма көриниси екенлигин көрсетеди.

2.2.3-лемма. Мейли M коммутатив фон Нейман алгебрасы ҳәм τ ондағы анық нормал шекли из болсын. Мейли δ операторы $L^{\omega}(M,\tau)$ алгебрасындағы аддитив дифференциаллаў болсын. Онда $z_{\delta}M$ шекли өлшемли алгебра боалды.

Дәлиллеў. Мейли $z_{\delta}M$ шексиз өлшемли алгебра деп болжайық. Онда M алгебрасында сондай нолден өзгеше шексиз өз-ара ортогонал проекторлар избе-излиги $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ бар болып, $\bigvee_{n=1}^{\infty} z_n = z_{\delta}$. Енди Лемма 2.1.2 ден M алгебрасында сондай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ избе-излик бар болып, $|a_n| \le 1$, $n \in \mathbf{N}$ ҳәм

$$|\delta(a_n)| \ge 2^n \tau(z_n)^{-1} z_{\delta} \qquad (2.5)$$

теңсизлиги барлық $n\in \mathbf{N}$ ушын орынлы болады. Енди усы

$$a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z_n}{2^n}$$

формула арқалы операторды анықлаймыз. Онда $a\in M\subset L^{\omega}(M,\tau)$ ҳәм

$$\delta(a)=\delta\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n z_n}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n}{2^n}\delta(a_n).$$

Енди (2.5) байланыстан

$$|\delta(a)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n}{2^n}|\delta(a_n)|\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z_n}{2^n}2^n\tau(z_n)^{-1}z_\delta,$$

екенлиги, яғный

$$|\delta(a)|\geq\sum_{n=1}^{\infty}\tau(z_n)^{-1}z_n$$

келип шығады. Буннан

$$\tau\left(\left|\,\delta(a)\right|\right)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\tau(z_n)^{-1}\,\tau\left(z_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty\,.$$

Бул болса $\delta(a)\notin L^1(M,\tau)$ екенлигин аңлатады. Онда (2.5) формуладан биз $\delta(a)\notin L^{\omega}(M,\tau)$ екенлигин көремиз. Бул қарама-қарсылықтан $z_{\delta}M$ алгебрасы шекли өлшеўли екенлиги келип шығады. Лемма дәлилленди.

Енди биз $L^{\omega}(M,\tau)$ аддитив дифференциаллаў операторы D ны ҳәм оның алгебра орайы $Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right)$ ге шегараланыўшы δ ны қарайық. 2.1.3 леммадан $z_{\delta}M$ шекли өлшеўли фон Нейман алгебрасы болады ҳәм $z_{\delta}^{\perp}\delta\equiv 0$, яғный $\delta=z_{\delta}\delta$.

Мейли D_{δ} операторы $z_{\delta}L^{\omega}(M,\tau)=z_{\delta}M$ алгебрасында (4) формула бойынша анықланған болсын. бул дифференциаллаўдың $L^{\Lambda}(M,\tau)=z_{\delta}L^{\Lambda}(M,\tau)\oplus z_{\delta}^{\perp}L^{\Lambda}(M,\tau)$ алгебрасында даўамы болған D_{δ} операторын усы

$$D_{\delta}(x_1+x_2):=D_{\delta}(x_1),\ \ x_1\in z_{\delta}L^{\Lambda}(M,\tau),\ \ x_2\in z_{\delta}^{\perp}L^{\Lambda}(M,\tau) \qquad (2.6)$$

арқалы анықлаймыз.

Төмендеги нәтийже жумыстың тийкарқы нәтийжеси болып, типи I_n фон Нейман алгебрасына сәйкес $L^{\omega}(M,\tau)$ Аренс алгебрасындағы аддитив дифференциаллаўдың улыўма көринисин береди.

2.2.4-теорема. Мейли M типи I_n фон Нейман алгебрасы ҳәм τ ондағы анық нормал шекли из болсын. Онда $L^{\omega}(M,\tau)$ алгебрасындағы ҳәр бир аддитив дифференциаллаў D усы түрде бирден-бир көринисте жазылады

$$D = D_a + D_\delta$$

бунда D_a аддитив дифференциаллаўы $a \in L^{\omega}(M,\tau)$ элементи менен пайда етилген. D_δ болса орайда анықланған δ аддитив дифференциаллаўдың (2.6) бойынша $L^{\omega}(M,\tau)$ алгебрасының даўамы болады.

Дәлиллеў. Мейли D операторы $L^{\omega}(M,\tau)$ алгебрасында аддитив дифференциаллаў ҳәм δ оның алгебра орайы $Z\left(L^{\omega}(M,\tau)\right) = L^{\omega}(Z(M),\ \tau_Z)$ шегараланыўы болсын. 2.2.3 леммадан $z_\delta Z(M)$ шекли өлшемли фон Нейман алгебрасы болады. Буннан $z_\delta M$ алгебрасы шекли сандағы типи I_n фон Нейман факторларының C^*-көбеймесинен ибарат болады.

Енди $L^{\omega}(M,\tau)$ Аренс алгебрасында (2.6) формула менен анықланған ҳәм δ дифференциаллаўдың даўамы болған D_δ аддитив дифференциаллаўды қараймыз. Онда D ҳәм D_δ дифференциаллаўлар

$L^{\omega}(Z(M),\tau)$ орайда үстпе-үст түскенлиги себепли $D-D_{\delta}$ дифференциаллаўы сызықлы дифференциаллаў болады. Демек $D-D_{\delta}$ ишки дифференциаллаў болады. Бул болса сондай $a\in L^{\omega}(M,\tau)$ элементи бар болып, $D_{a}=D-D_{\delta}$ теңлиги, яғный $D=D_{a}+D_{\delta}$ орынлы екенлигин билдиреди. Теорема дәлилленди.

II-бап бойынша жуўмақ

Жумыстың екинши бабында типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебраларының аддитив дифференциаллаўлары қаралған.

Бунда коммутатив емес Аренс алгебралары анықламасы берилип, типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебраларының матрицалар алгебрасына изоморфлығы дәлилленди. Буннан пайдаланып бул алгебралардағы аддитив дифференциаллаўлардың улыўма көриниси табылып, қәлеген аддитив дифференциаллаў үзликсиз ҳәм үзилиске ийе дифференциаллаўларға жайылыўы көрсетилди.

Жуўмақ

Жумыстың биринши бабы еки параграфтан ибарат болып, бунда инволютив алгебралар, C^*-алгебралар, фон Нейман анықламалары, мысаллар ҳәм айырым қәсийетлери қарастырылған. Биринши параграфта инволютив алгебралар, C^*-алгебралар ҳаққында тийкарғы түсиниклер келтирилген. Ал екинши параграфта фон Нейман алгебралардың анықламалары, бир неше мысаллар ҳәм базы бир белгили нәтийжелер сәўлеленген.

Жумыстың екинши бабында типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебраларының аддитив дифференциаллаўлары қаралған.

Бунда коммутатив емес Аренс алгебралары анықламасы берилип, типи I фон Нейман алгебраларына қарата Аренс алгебраларының матрицалар алгебрасына изоморфлығы дәлилленди. Буннан пайдаланып бул алгебралардағы аддитив дифференциаллаўлардың улыўма көриниси табылып, қәлеген аддитив дифференциаллаў үзликсиз ҳәм үзилиске ийе дифференциаллаўларға жайылыўы көрсетилди.

ӘДЕБИЯТЛАР

1. Аюпов Ш.А., Кудайбергенов К.К. Дифференцирования операторных алгебр типа I // Математический форум, 2008, С 34-41.
2. Аюпов Ш.А., Кудайбергенов К.К., Дифференцирования алгебр Аренса // Функционалный анализ и его приложения. – 2007. – № 4 (41). – С. 70-72.
3. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функционалный анализ. Киев: Виша школа, 1990.
4. Гелфанд И.М., Наймарк М.А., О включении нормированного колца в колцо операторов в гилбертовом пространстве, Матем. сб., Т. 12, 1943, 197-213.
5. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Т. 1.: Обшая теория. Изд. иност. лит. 1962.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функционалный анализ. М.: Наука, 1977.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М: Наука, 1977.
8. Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. Новосибирск, 2001.
9. Муратов М.А., Чилин В.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов, Изд-во Института математики НАН Украины, 2007.
10. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
11. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999.
12. Саримсаков Т.А. Функционал анализ курси. Тошкент, Ўқитувчи, 1980.

13. Шерстнев А.Н., Луговая Г.Д. Функциональный анализ. Казан, 2008. Едвардс Р. Функционалниу анализ. М.: Мир, 1969.
14. Albeverio S., Sh.A. Ayupov., Kudaybergenov K.K. Non commutative Arens algebras and their derivations // Journal of Functional Analysis, 2007. – № 1 (253). – P. 287-302.
15. Albeverio S., Sh.A. Ayupov., Kudaybergenov K.K. Derivations on the algebra of measurable operators affiliated o`ith a type I von Neumann algebra // Siberian Advances in Mathematics, – 2008. – № 2 (18). – P. 86-94.
16. Albeverio S., Sh.A. Ayupov., Kudaybergenov K.K. Structure of Derivations on Various Algebras of Measurable Operators for Type I von Neumann algebras // Journal of Functional Analysis. – Amsterdam, 2009. – № 9 (256). – P. 2917-2943.
17. Ayupov Sh. A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funsional analizdan misol va masalalar, Bilim, 2009.
18. Gutman A.E., Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces, Siberian Adv. Math. 6 (1996) 35–102.
19. Kaplansky I. Modules over operator algebras, Amer. J. Math. 75 (1953) 839–859.
20. Kaplansky I. Algebras of type I, Ann. of Math. (2) 56 (1952) 460–472.
21. Kudaybergenov K.K., Kalandarov T.S. The involutive automorphisms of τ-compact operators affiliated o`ith a type I von Neumann algebra // Methods of functional analysis and topology, – Kiev, 2008. – № 1 (14). – P. 54-59.
22. Kusraev A.G., Dominated Operators, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
23. Murrey F.J., von Neumann J. On rings of operators, Ann. Math., V. 37, 1936, 116-229.

24. Murrey F.J., von Neumann J. On rings of operators, II. Trans. Amer. Math. Soc., V. 41, 1937, 208-248.
25. Murrey F.J., von Neumann J. On rings of operators, IV. Ann. Math., V. 44, 1943, 716-808.
26. von Neumann J. On rings of operators, III. Ann. Math., V. 41, 1940, 94-161.
27. Segal I., A non-commutative extension of abstract integration, Ann. of Math. V. 57, 1953, 401–457.
28. Уразбаева Г. Типи I Аренс алгебралари, Магистрантлардың илимий жумыслары бойынша материаллар топламы. Нөкис, 2011, 24 б.