ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 14.07.2016.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҚОШИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ҲАЁТОВ АБДУЛЛО РАХМОНОВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР ФАЗОЛАРИДА КВАДРАТУР ВА ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР ХАТОЛИКЛАРИ ФУНКЦИОНАЛЛАРИНИНГ ОПТИМАЛ АППРОКСИМАЦИЯСИ

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

УДК: 519.652, 519.644

Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской диссертации
Content of the abstract of the doctoral dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 14.07.2016.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҚОШИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ҲАЁТОВ АБДУЛЛО РАХМОНОВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР ФАЗОЛАРИДА КВАДРАТУР ВА ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР ХАТОЛИКЛАРИ ФУНКЦИОНАЛЛАРИНИНГ ОПТИМАЛ АППРОКСИМАЦИЯСИ

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида 30.09.2014/B2014.5.FM131 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Erich Novak** профессор (Йена университети, Германия)
	Алоев Рахматилло Джураевич физика-математика фанлари доктори, профессор
	Солеев Ахмаджон физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Сантьяго де Компостела университетининг Математика институти** (Испания)

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги 14.07.2016.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг «___»__________ 2016 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2016 йил «____» _____________куни тарқатилди.
(2016 йил «____» __________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.А. Абдушукуров
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ғ.И. Ботиров
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Р.Д. Алоев
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижасида вужудга келадиган муаммоларнинг ечимлари интеграл ва дифференциал тенгламаларга келтирилади. Улар асосан кубатур ва интерполяцион формулалар ёрдамида тақрибий ечилади. Бундай формулаларни қуришнинг алгебраик ва вариацион ёндашишлари мавжуд бўлиб, дастлабки алгебраик формулалар Ньютон-Котес, Гаусс типидаги квадратур формулалар ҳамда Лагранж ва Ньютон интерполяцион кўпҳадларидир. Варицион ёндашишга асосланиб бундай формулалар қуриш назарияси АҚШ ва Россия олимлари томонидан ишлаб чиқилган. Функцияларнинг турли синфларида алгебраик ва вариацион ёндашувларга асосланиб оптимал формулалар ва интерполяцион сплайнларни қуришнинг янги алгоритмларини ишлаб чиқиш ҳамда уларнинг хатоликларини баҳолаш ҳисоблаш математикасининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларга этибор кучайтирилди, хусусан, ҳисоблаш математикасининг кубатур формулалар назарияси бўйича юқори алгебраик аниқлик даражасига эга бўлиб, бирор бир мунтазам кўпёқнинг айланишлар группаси акслантиришларига нисбатан инвариант ҳамда ортогонал кўпҳадлар назариясига асосланган Гаусс типидаги кубатур формулаларни қуришга алоҳида эътибор қаратилди. Ҳосиласи квадрати билан интегралланувчи даврий ва даврий эмас, бир ва кўп ўзгарувчили функцияларнинг Соболев фазоларида панжарали оптимал кубатур формулалар қуриш сезиларли натижаларга эришилди.

Ҳозирги кунда табиий жараёнларнинг юқори аниқликдаги математик моделлари сифатида қараладиган дифференицал ва интеграл тенгламалар, ҳамда уларнинг системаларини тақрибий ечиш учун дифференциалланувчи функцияларнинг гильберт фазоларида оптимал квадратур, кубатур формулалар ва интерполяцион сплайнларни қуриш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: даврий, даврий бўлмаган функцияларнинг турли гильберт ва банах фазоларида панжарали асимптотик оптимал кубатур формулалар қуриш; Монте-Карло методларига асосланган кубатур формулаларни ишлаб чиқиш; оптимал квадратур, кубатур формулалар қуриш ва уларнинг хатоликларини баҳолаш; аниқ фунционалларни минималлаштирувчи сплайнлар қуриш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2006 йил 7 августдаги ПҚ-436-сон «Фан ва технологияларни ривожлантиришни мувофиқлаштириш ва бошқаришни такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» ҳамда 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида» Қарорлари ва мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[1].

Квадратур, кубатур формулалар ва сплайнлар қуриш ҳамда уларнинг хатоликларини баҳолаш бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Institute of mathematics of Friedrich-Schiller-Universität Jena, Institute of mathematics of Universität Mannheim, Technische Universität Braunschweig (Германия), Universita degli Studi di Roma La Sapienza, Universita della Basilicata (Италия), University of Meryland, Kettering University, Columbia University, Harvard University, Purdue University, Venderbild University (АҚШ), University of Oslo (Норвегия), Katholieke Universiteit, Leuven (Белгия), Universidad de Zaragoza, Universidad Pública de Navarra (Испания), Universite de Toulouse, Université Joseph Fourier (Франция), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Сербия), Babeş-Bolyai University (Руминия), Россия фанлар академияси Сибирь бўлими Математика институти, Россия фанлар академияси Математика институти, Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск давлат университетлари, Россия фанлар академияси Ҳисоблаш математикаси институти, Уфа илмий марказининг ҳисоблаш марказли Математика институти, Сибирь федераль университети (Россия), Днепропетровск давлат университети (Украина), Қозоқ миллий университети (Қозоғистон) да олиб борилмоқда.

Квадратур ва кубатур формулалар, интерполяцион ва яқинлаштирувчи сплайнлар қуриш ва қурилган формулалар хатоликларини баҳолашни тадқиқ қилишга оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан қуйидаги илмий натижалар олинган: Соболевнинг вазнли фазоларида Монте-Карло методи асосида қурилган кубатур формулалар хатоликлари баҳолари олинган (Institute of mathematics of Jena University (Германия), Columbia University (АҚШ)); сплайн функцияларни ва $\varphi -$функциялар методларини қўллаб, чизиқли дифференциал операторларда аниқланган турли гильберт фазоларида, Сард маъносида оптимал квадратур формулалар ҳисобланган (Columbia University, University of Maryland, University of Wisconsin-Madison (АҚШ), Technische Universität

---

[1] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, Journal of Computational and Applied Mathematics http://www.journals.elsevier.com/mathematics; Calcolo, Numerical Algorithms, BIT Numerical Mathematics, Сибирский журнал вычислительной математики, Журнал вычислительной математики и математической физики, http://www.springer.com/mathematics манбалар асосида ишлаб чиқилган.

Braunschweig (Германия), Babeş-Bolyai University (Руминия), Universita degli Studi di Roma La Sapienza (Италия)); турли гильберт фазоларида, функционал анализ методларидан фойдаланиб, D^m-сплайнлар, L - сплайнлар ва абстракт сплайнлар мавжудлик ва ягоналиги исботланган (University of Wisconsin-Madison, Harvard University, Purdue University, Venderbild University (АҚШ), University of Oslo (Норвегия), Université Joseph Fourier (Франция), Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти (Россия)); регуляр ва кучли тебранувчи интеграллар учун Гаусс типидаги квадратур формулалар қурилган (Mathematical institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts); $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ фазосидаги оптимал панжарали кубатур формулалар коэффициентлари учун Винер-Хопф типидаги система олинган, бу система ечими мавжудлиги ва ягоналиги исботланган (Россия фанлар академияси Сибирь бўлими Математика институти, Новосибирск давлат университети (Россия), Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институти); чекли чегара қатламли кубатур формулалар асимптотик оптималлиги етарлилик шартлари топилган, бундай кубатур формулалар коэффициентларини топиш учун алгоритм ишлаб чиқилган (Уфа илмий марказининг ҳисоблаш марказли Математика институти); асимптотик оптимал кубатур формулалар назарияси $L_p^{(m)}(\Omega)$ фазоларига умумлаштирилган (Санкт-Петербург давлат университети, Сибирь федерал университети); уч ўлчовли сферада эффектив кубатур формулалар қурилган (Россия фанлар академияси Ҳисоблаш математикаси институти); $\widetilde{W}_p^m$ ва W_p^m даврий ва даврийmas функциялар фазоларида энг яхши квадратур формулалар қурилган ва уларнинг хатоликлари баҳолари ҳисобланган (Россия фанлар академияси Математика институти, Днепропетровск давлат университети (Украина), Қозоқ миллий университети (Қозоғистон), Kliment Ohridski University of Sofia (Болгария)).

Дунёда бугунги кунда, кубатур, квадратур формулалар ҳамда интерполяцион сплайнларни қуриш ва уларни татбиқ этиш бўйича бир қатор, жумладан: дифференциалланувчи функцияларнинг гильберт фазоларида квадратур, кубатур формулалар ва интерполяцион сплайнларнинг хатолик функционаллари экстремал функцияларини топиш; топилган экстремал функциялар ёрдамида мос формулалар ва сплайнлар хатолик функционаллари нормаларини ҳисоблаш; оптимал квадратур, кубатур формулалар ва интерполяцион сплайнлар мавжудлик ва ягоналик шартларини топиш; оптимал кубатур формулалар ва интерполяцион сплайнлар қуришнинг дискрет операторларга асосланган янги алгоритмларини ишлаб чиқиш ҳамда оптимал коэффициентларнинг ошкор кўринишини топиш каби устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Функционал анализ методларига асосланиб квадратур формулалар қуриш ва уларнинг хатоликларини баҳолаш дастлаб А.Сард ва С.М.Никольскийнинг илмий изланишларида кубатур формулаларнинг пайдо бўлиши эса С.Л.Соболевнинг илмий тадқиқотларида бошланган. Бу масалага турли фазоларда бир ўзгарувчили ҳолда С.М.Никольский, Н.П.Корнейчук, Н.Е.Лушпай, Т.Н.Бусарова, Б.Боянов, В.П.Моторный, А.А.Лигун, А.А.Женсыкбаев, К.И.Оскольков, М.А.Чахкиев, Т.А.Гранкиналарнинг илмий изланишлари бағишланган. Кўп ўзгарувчили фазоларда инвариант ва асимптотик оптимал кубатур формулалар қуриш бўйича С.Л.Соболев, В.И.Лебедев, И.П.Мысовских, М.Д.Рамазанов, В.И.Половинкин, О.В.Бесов, Ц.Б.Шойнжуров, М.В.Носков, Н.И.Блинов, Л.В.Войтишек, В.Л.Васкевич, Г.Н.Салихов, М.И.Исраилов, С.Ш.Шушбаев, Г.П.Исматуллаев, Э.Шамсиевлар, Монте-Карло методлари асосида сонли интеграллаш бўйича Н.С.Бахвалов, С.М.Ермаков, И.М.Соболь, Н.Н.Ченцов, Г.А.Михайлов, А.С.Расулов, E.Novak, H.Wozniakovskiлар илмий изланишлар олиб боришган.

Тугун нуқталар фиксирланган ҳолда хатолик функционали нормасини коэффициентлар бўйича минималлаштиришдан ҳосил бўлган формулалар қуришнинг сплайн, $\varphi-$функциялар ва Соболев усуллари мавжуд. A.Sard, L.F.Meyers, G.Coman, I.Schoenberg, S.D.Silliman, P.Kohlerлар, сплайн функциялар усулига асосланиб, A.Ghizzetti, A.Ossicini, F.Lanzara, T.Catinaş ва G.Comanлар $\varphi-$функциялар усулини қўллаб $L_2^{(m)}$ фазосида оптимал квадратур формулалар қуришган. Соболев усули бўйича оптимал кубатур формулалар қуришда оптимал квадратур формулалар коэффициентларини излаш бўйича С.Л.Соболевнинг натижалари юқорида эслатилган сплайн усулини қўллаб олинган натижаларни умумлаштирди. $L_2^{(m)}$ фазосида С.Л.Соболев томонидан таклиф қилинган алгоритмни жорий этиш бўйича З.Ж.Жамалов, Ф.Я.Загирова, Х.М.Шадиметов, А.Р.Ҳаётов ва бошқалар илмий тадқиқотлар олиб боришган.

Дастлабки сплайн функциялар учинчи даражали кўпҳадлар бўлакларидан ташкил топган эди. Кейинчалик бу конструкция такомиллаштирилди, кўпҳаднинг даражаси оширилди, лекин уларни қуриш ғояси ўзгармай қолди. Сплайнлар назариясида кейинги муҳим қадам бу I.Schoenberg нинг кубик сплайнини $L_2^{(2)}$ фазосидаги функция нормаси квадратига минимум берувчи вариацион масала ечими билан боғловчи, D.Holladay нинг натижасидир. Кейинчалик D.Holladayнинг натижаси C. de Boor томонидан умумлаштирилди. Бу натижалар катта қизиқишлар уйғотди ва аниқ талабларга боғлиқ равишда вариацион функционал такомиллаштирилган кўплаб сондаги илмий ишлар пайдо бўлди. Вариацион методларга асосланган сплайнлар назарияси J.H.Ahlberg, E.Nilson, J.Walsh, P.J.Laurent, I.Schoenberg, C. de Boor, R.Arcangeli, M.C.Lopez de Silanes, J.J.Torres, B.A. Василенко, M.Attea, Barlinet, C.Tomas-Agnan, L.L.Schumaker, T.Lyche, B.Bojanov, С.Б.Стечкин, Ю.Н.Субботин, М.И.Игнатев, А.Б.Певный, G.Nurnberger, А.Ю.Бежаев, Х.М.Шадиметов, А.Р.Ҳаётовлар изланишларида ривожлантирилди.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтининг ФА-Ф1-Ф004+Ф014 «Кубатур формулалар, сплайнлар назариялари ва муҳим иншоотлар хавфсизлигини таъминловчи ва реал ҳолатини башоратловчи жараёнларни сонли моделлаштириш» (2007-2011), Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари» (2012-2016) мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади гильберт фазоларида оптимал квадратур формулалар, ярим нормани минималлаштирувчи интерполяцион сплайнларни қуриш ва уларнинг оптимал хатолик функционаллари нормаларини ҳисоблашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

гильберт фазоларида квадратур ва интерполяцион формулаларнинг хатолик функционалларининг экстремал функцияларини топиш;

гильберт фазоларида хатолик функционаллари нормаси квадрати ифодасини ҳосил қилиш;

Лагранжнинг номаълум коэффициентлар методини қўллаб, оптимал коэффициентлар учун чизиқли тенгламалар системаларини олиш, олинган системалар ечимининг мавжудлик ва ягоналик шартларини топиш;

конкрет чизиқли дифференциал операторлар дискрет аналогларини қуриш;

дифференциал операторлар дискрет аналогларига асосланган методдан фойдаланиб дифференциалланувчи функциялар фазоларида оптимал квадратур ва интерполяцион формулаларни ҳосил қилиш;

қурилган оптимал квадратур формулалар ва интерполяцион сплайнлар хатолик функционаллари нормасини ҳисоблаш.

Тадқиқотнинг объекти дифференциалланувчи функциялар фазоларида хатолик функционаллари экстремал функциялари учун чегаравий масалалар, квадратур формулалар, интерпояцион формулалар ва сплайн функциялар.

Тадқиқотнинг предмети экстремал функциялар, оптимал коэффициентлар учун Винер-Хопф типидаги чизиқли тенгламалар системалари, оптимал квадратур ва интерполяцион формулалар, ҳамда гильберт фазоларида ярим нормани минималлаштирувчи сплайнлардан иборатдир.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, комплекс ўзгарувчили функциялар, дискрет аргументли функциялар, дифференциал тенгламалар назариялари усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, $K_2(P_m)$ ва $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазоларида квадратур ва интерполяцион формулалар хатолик функционаллари экстремал функциялари топилган;

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, $K_2(P_m)$ ва $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазоларда квадратур ва интерполяцион формулалар хатолик функционаллари нормалари ҳисобланган;

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ ва $K_2(P_m)$ фазоларда оптимал квадратур формулалар ҳамда даврий *n* ўзгарувчили функциялар фазоси $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ да оптимал интерполяцион формулалар коэффициентлари учун Винер-Хопф типидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системаларига келтирилган;

олинган системалар ечимлари мавжудлиги ва ягоналиги шартлари топилган;

$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ ва $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторлар дискрет аналоглари қурилган ва уларнинг хоссалари исботланган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида мусбат коэффициентли оптимал квадратур формулалар қурилган ва оптимал хатолик функционали нормаси ҳисобланган;

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ ва $K_2(P_m)$ фазоларда Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қурилган ҳамда $m=1,2$ ва 3 ҳолларида қурилган оптимал формулалар хатоликлари баҳолари олинган;

$L_2^{(m)}(0,1), W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ ва $K_2(P_m)$фазоларида ярим нормани минималлаштирувчи интерполяцион сплайнлар ҳосил қилинган;

Соболевнинг $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ даврий *n* ўзгарувчили функциялар фазосида оптимал интерполяцион формулалар қурилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси қурилган оптимал квадратур формулалардан фойдаланиб регуляр интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун Maple дастурлаш тилида дастурлар тузилганлигидан, ҳамда чизиқли биринчи тур Фредгольм ва Вольтерра интеграл тенгламаларини интерполяцион сплайнлардан фойдаланиб сонли ечиш мумкинлигидан иборатдир.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси ва дискрет аргументли функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти дифференциалланувчи функциялар фазоларида оптимал кубатур ва квадратур формулалар ҳамда умумлашган сплайнларни қуриш алгоритми билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти қурилган оптимал квадратур формулалар ва интерполяцион сплайнлар регуляр интегралларни сонли ҳисоблашга ҳамда чизиқли биринчи тур Фредгольм ва Вольтерра интеграл тенгламаларини тақрибий ечишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ ва $K_2(P_m)$ фазоларда қурилган Сард маъносида оптимал квадратур формулалар «Optimal Quadrature Formulas for the Space H^1» мавзусидаги DFG – Priority Program 1324 рақамли хорижий грантида шу фазоларда 0 индексли Фурье коэффициентларини сонли ҳисоблаш учун қўлланилган (Йена университети Математика институтининг 2016 йил 14 сентябрдаги маълумотномаси, Германия). Илмий натижанинг қўлланиши H^1 фазода Фурье интеграллари учун қурилган оптимал квадратур формулаларнинг натижаси билан солиштиришга имкон берган;

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосидаги квадратур формулалар хатолик функционалининг топилган экстремал функцияси ва $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ операторнинг қурилган дискрет аналоги «Approximation of integral and differential operators and applications» мавзусидаги 174015 рақамли хорижий грантида $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида Фурье интеграллари учун квадратур формулалар хатолик функционали экстремал функциясини топишга қўлланилган (Сербия фан ва санъат академияси Математика институтининг 2016 йил 6 июндаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Фурье коэффициентлари учун оптимал квадратур формулалар қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқотнинг натижалари илмий-амалий анжуманларда муҳокама қилинган, шу жумладан: «Кўп фазали муҳитларда иссиқлик ва масса алмашуви жараёнларини математик ва сонли моделлаштириш» (Бухоро, 2001), «Математик физика ва информацион технологияларнинг ҳозирги замон муаммолари» (Тошкент, 2003), «Ёш олимларнинг республика конференцияси» (Тошкент, 2003, 2004), «Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва анализ ва информатиканинг турдош муаммолари» (Тошкент, 2004), «Операторлар алгебраси ва квант эҳтимолликлар назарияси» (Тошкент, 2005), «LUMS 2-nd international conference on mathematics and its application in information technology» (Лаҳор, Покистон, 2008), «Ҳисоблаш технологиялари ва математик моделлаштириш» (Тошкент, 2009), «Амалий математика ва информацион технологиялар долзарб муаммолари – ал-Хоразмий 2009» (Тошкент, 2009), «Оператор алгебралари ва турдош муаммолар» (Тошкент, 2012), «Дифференциал тенгламалар замонавий муаммолари ва уларнинг тадбиқлари» (Тошкент, 2013), «Амалий ва геометрик анализ» (Самарқанд-Новосибирск, 2014), «Математик физика ноклассик тенгламалари ва уларнинг тадбиқлари» (Тошкент, 2014) каби анжуманларда маъруза кўринишида баён этилган ҳамда апробациядан ўтказилган. Тадқиқотнинг натижалари Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтининг «Операторлар алгебралари ва уларнинг тадбиқлари» (Тошкент, 2010-2016) ва «Кубатур формулалар назарияси ва сонлар назарияси» (Тошкент, 2005-2016) Республика семинарларида, Тошкент темир йўл муҳандислари институтининг «Ҳисоблаш математикаси ва информатиканинг замонавий муаммолари» илмий семинарида (Тошкент, 2008-2012), Сантьяго де Компостела университети қошидаги Математика институти илмий семинарида (Испания, 2012), Йена университетининг Математика институти илмий семинарида (Германия, 2010, 2015) муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 44 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 23 та мақола, жумладан, 10 таси хорижий ва 13 таси республика журналларда нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар руйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 200 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Дифференциалланувчи функциялар фазоларида квадратур формулалар экстремал функциялари»** деб номланувчи биринчи боби $W_2^{(m,m-1)}$ ва $K_2(P_m)$ гильберт фазоларида квадратур формулалар экстремал функциялари топишга, ҳамда оптимал квадратур формулалар мавжудлиги ва ягоналиги исботлашга бағишланган.

Ушбу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \tag{1}$$

квадратур формулани

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

хатолик функционали билан бирга қараймиз. Бунда C_β ва x_β $(\in [0,1])$ лар (1) формуланинг коэффициентлари ва тугун нуқталари, $\varepsilon_{[0,1]}(x) - [0,1]$ кесманинг характеристик функцияси, $\delta(x) -$Диракнинг дельта-функцияси, $\varphi -$ функция эса қуйидагича аниқланган

$W^{P_m}L_2 = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \varphi^{(m-1)}$ - абсолют узлуксиз ва $\varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\}$,

$\left\|\varphi \mid W^{P_m}L_2\right\| = \left\{\int\limits_0^1 \left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$ ярим нормали фазо элементи бўлиб, бунда $P_m\left(\frac{d}{dx}\right) \equiv a_m \frac{d^m}{dx^m} + ... + a_1\frac{d}{dx} + a_0,\ a_m \neq 0$ ва $\int\limits_0^1 \left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2 dx < \infty$.

$W^{P_m}L_2$ - гильберт фазолари бўлиб, $L_2^{(m)}$ фазоларининг умумлашмасидир.

Қуйидаги айирма

$$(\ell,\varphi) = \int\limits_\Omega \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta\varphi(x_\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}} \ell(x)\varphi(x)dx \qquad (3)$$

(1) квадратур формуланинг хатолиги дейилади.

Қуйидаги Коши-Шварц тенгсизлигига асосан

$$|(\ell,\varphi)| \le \left\|\ell \mid W^{P_m}L_2^*\right\| \cdot \left\|\varphi \mid W^{P_m}L_2\right\|$$

(3) хатоликнинг абсолют қиймати (2) хатолик функционалининг $W^{P_m}L_2^*$ қўшма фазодаги

$$\left\|\ell \mid W^{P_m}L_2^*\right\| = \sup_{\left\|\varphi \mid W^{P_m}L_2\right\|=1} |(\ell,\varphi)| \qquad (4)$$

нормаси орқали баҳоланади. ℓ хатолик функционали (4) нормасини тугун нуқталар фиксирланганда коэффициентлар бўйича минимумини топиш Сард масаласи дейилади. Ҳамда олинган формула Сард маъносида оптимал квадратур формула дейилади.

Биздан қуйидаги икки масалани кетма-кет ечиш талаб қилинади.

Масала 1. $W^{P_m}L_2$ фазосида (1) квадратур формула ℓ хатолик функционали нормаси (4) ни топиш.

Масала 2. $\left\|\overset{\circ}{\ell} \mid W^{P_m}L_2^*\right\| = \inf\limits_{C_\beta}\left\|\ell \mid W^{P_m}L_2^*\right\|$ тенгликни қаноатлантирувчи $\overset{\circ}{C}_\beta$ коэффициентларни топиш.

$W^{P_m}L_2^*$ фазода ℓ хатолик функционали нормасини ошкор кўринишда топиш учун берилган функционалнинг экстремал функцияси деб аталувчи ҳамда

$$(\ell,\psi_\ell) = \left\|\ell \mid W^{P_m}L_2^*\right\| \left\|\psi_\ell \mid W^{P_m}L_2\right\|$$

тенгликни қаноатлантирувчи ψ_ℓ функциясидан фойдаланилади. $W^{P_m}L_2$ гильберт фазоси бўлганлигидан ψ_ℓ экстремал функция берилган (2) функционал ёрдамида, чизиқли узлуксуз функционалнинг умумий кўриниши ҳақидаги Рисс теоремаси ёрдамида ифодаланади, яъни

$$\left(\ell,\varphi\right) = \left\langle \psi_\ell,\varphi\right\rangle_{W^{P_m}L_2}, \qquad (5)$$

бу ерда $(\ell,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx$ ва $\left\langle \psi_\ell,\varphi\right\rangle_{W^{P_m}L_2} = \int\limits_0^1 P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\psi_\ell(x)P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)dx$ - иккита ψ_ℓ ва φ функцияларнинг скаляр кўпайтмаси. Ундан ташқари, Risснинг ўша теоремасига асосан, (5) ни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликни оламиз

$$\left\| \ell \,|\, W^{P_m} L_2^* \right\|^2 = \left\| \psi_\ell \,|\, W^{P_m} L_2 \right\|^2 = \left(\ell, \psi_\ell\right).$$

Шундай қилиб, (2) хатолик функционалининг ψ_ℓ экстремал функциясини топиш учун (5) функционал тенгламани ечиш талаб қилинади.

Шуни ҳам таъкидлаш керакки, $P_m(d/dx) = d^{2m}/dx^{2m}$ ҳолда, яъни $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода, масала 1 С.Л.Соболев томонидан ечилган. Бу ҳолда экстремал функция қуйидаги кўринишда

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

бунда $G_m(x) = \dfrac{|x|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!}$ ва $P_{m-1}(x)$ даражаси $m-1$ бўлган ихтиёрий кўпҳад.

Кейин, $L_2^{(m)}$ фазосида оптимал квадратур формулалар коэффициентлари учун С.Л.Соболев томонидан Винер-Хопф типидаги система олинган. Олинган система ечими мавжудлиги ва ягоналиги ўрганилган. Бу системани ечиш учун d^{2m}/dx^{2m} дифференциал оператор аналогига асосланган алгоритм таклиф қилинган.

Биз $P_m(d/dx) = \dfrac{d^m}{dx^m} + \dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}$ ҳолни қараймиз. Мос $W^{P_m}L_2$ фазони қуйидагича белгилаймиз

$$W_2^{(m,m-1)}(0,1) = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, \varphi^{(m-1)} \text{ - абсолют узлуксиз ва } \varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\right\},$$

бунда

$$\left\|\varphi \,|\, W_2^{(m,m-1)}(0,1)\right\| = \left\{ \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x)\right)^2 dx \right\}^{1/2},$$

$\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x)\right)^2 dx < \infty$ ва $\|\varphi\| = 0$ фақат ва фақат $\varphi = P_{m-2}(x) + de^{-x}$ бўлса, бу ерда $P_{m-2}(x)$ - даражаси $m-2$ бўлган ихтиёрий кўпҳад, d - константа.

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида $\psi_{\ell,W}$ экстремал функция қуйидаги чегаравий масала ечимидир

$$\psi_{\ell,W}^{(2m)}(x) - \psi_{\ell,W}^{(2m-2)}(x) = (-1)^m \ell(x), \tag{6}$$

$$\left(\psi_{\ell,W}^{(m+s)}(x) - \psi_{\ell,W}^{(m+s-2)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \ s = \overline{1, m-1}, \tag{7}$$

$$\left(\psi_{\ell,W}^{(m)}(x) + \psi_{\ell,W}^{(m-1)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0. \tag{8}$$

Қуйидаги ўринли

Теорема 1. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазода (6)-(8) чегаравий масала ечими $\psi_{\ell,W}$ функция ℓ хатолик функционали экстремал функцияси бўлиб қуйидаги кўриншга эга

$$\psi_{\ell,W}(x) = (-1)^m \ell(x) * G_{m,W}(x) + P_{m-2}(x) + d\,e^{-x},$$

бунда

$$G_{m,W}(x) = \frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right), \tag{9}$$

d - ихтиёрий ҳақиқий сон, $P_{m-2}(x)$ - даражаси $m-2$ бўлган кўпҳад.

Кейин, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Энди φ функция

$$K_2(P_m)=\left\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,\varphi^{(m-1)} \text{ - абсолют узлуксиз ва } \varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\right\}$$

гильберт фазосига тегишли ҳолни қараймиз. Бунда функция нормаси қуйидагича аниқланади

$$\left\|\varphi|K_2(P_m)\right\|=\left\{\int_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2},$$

бу ерда $P_m\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{d^m}{dx^m}+\omega^2\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}$, $\omega>0$ ва $\int_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2 dx<\infty.$ $\|\varphi\|=0$ фақат ва фақат $\varphi(x)=c_1\sin\omega x+c_2\cos\omega x+R_{m-3}(x)$ ҳолда, бунда $R_{m-3}(x)$ бу $m-3$- даражали кўпҳад, $m\geq 2$.

$K_2(P_m)$ фазода ℓ функционал ва ихтиёрий $\varphi\in K_2(P_m)$ функция учун ягона $\psi_{\ell,K}\in K_2(P_m)$ функция мавжуд бўлиб, у қуйидаги чегаравий масала ечими бўлади

$$\psi_{\ell,K}^{(2m)}(x)+2\omega^2\psi_{\ell,K}^{(2m-2)}(x)+\omega^4\psi_{\ell,K}^{(2m-4)}(x)=(-1)^m\ell(x), \tag{10}$$

$$\left(\psi_{\ell,K}^{(m+s)}(x)+\omega^2\psi_{\ell,K}^{(m+s-2)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad s=0,1,...,m-1. \tag{11}$$

Қуйидаги натижа ўринлидир

Теорема 2. (10)-(11) чегаравий масала ечими $K_2(P_m)$ фазосида ℓ хатолик функционалининг $\psi_{\ell,W}$ экстремал функцияси бўлиб, қуйидаги кўринишга эгадир $\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_{m,W}(x)+d_1\sin\omega x+d_2\cos\omega x+R_{m-3}(x),$ бу ерда d_1, d_2 - ҳақиқий сонлар, $R_{m-3}(x)$ бу $m-3$ - даражали кўпҳад ва

$$G_{m,K}(x)=\frac{(-1)^m\mathrm{sgn}x}{4\omega^{2m-1}}\Big((2m-3)\sin\omega x-\omega x\cos\omega x+2\sum_{k=1}^{m-2}\frac{(-1)^k(m-k-1)(\omega x)^{2k-1}}{(2k-1)!}\Big). \tag{12}$$

Ундан ташқари, $K_2(P_m)$ фазосида (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулалар мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

$W_2^{(m,m-1)}$ ва $K_2(P_m)$ фазоларида (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуриш чизиқли тенгламалар системаларига олиб келинган. Ушбу диссертация ишининг мақсади бу системаларнинг аналитик ечимини топишдир. Бунинг учун биз дифференциал операторлар дискрет аналогларига асосланган Соболев методини қўллаймиз. Бунда бизга $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ ва $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ операторлар дискрет аналоглари керак бўлади.

Диссертациянинг **«Дифференциал операторларнинг дискрет аналоглари»** деб номланувчи иккинчи боби $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ ва

$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторлар дискрет аналогларини қуришга ва қурилган аналоглар хоссаларини исботлашга бағишланган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида d^{2m}/dx^{2m} оператор дискрет аналоги $D_m(h\beta)$ ҳақидаги маълум натижалар келтирилган. $L_2^{(m)}$ фазосида оптимал квадратур формулалар ва интерполяцион формулалар қуриш учун бизга $D_m(h\beta)$ дискрет оператор керак бўлади. $D_m(h\beta)$ операторнинг қуйидаги ошкор кўриниши Х.М.Шадиметов томонидан олинган:

$$D_m(h\beta)=p\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k q_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{q_k}, & \beta=0,\end{cases}$$

Бунда $p=\frac{(2m-1)!}{h^{2m}}$, $A_k=\frac{(1-q_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(q_k)}$, $C=-2^{2m-1}$, $E_{2m-1}(x)$ - $2m-1$- даражали Эйлер-Фробениус кўпҳади, q_k лар $E_{2m-2}(x)$ кўпҳад илдизлари, $|q_k|<1$, h - кичкина мусбат параметр. Ундан ташқари, С.Л.Соболев ва Х.Шадиметовлар томонидан $D_m(h\beta)$ операторнинг хоссалари ўрганилган.

Диссертация иккинчи боби иккинчи параграфида қуйидаги тенглама ечилган

$$D_{m,W}(h\beta)*G_{m,W}(h\beta)=\delta_d(h\beta), \tag{13}$$

бу ерда $G_{m,W}(h\beta)$ бу $G_{m,W}(x)$ га мос дискрет аргументли функция.

(13) тенглама ечими ҳақидаги қуйидаги теоремани келтирамиз

Теорема 3. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ дифференциал операторнинг, (13) тенгликни қаноатлантирувчи, $D_{m,W}(h\beta)$ дискрет аналоги қуйидаги кўринишга эга

$$D_{m,W}(h\beta)=\frac{1}{p_{2m-2}}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geqslant 2,\\ -2e^h+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ 2C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases}$$

бунда

$$C=1+(2m-2)e^h+e^{2h}+\frac{e^h\cdot p_{2m-3}}{p_{2m-2}},\quad A_k=\frac{2(1-\lambda_k)^{2m-2}[\lambda_k(e^{2h}+1)-e^h(\lambda_k^2+1)]p_{2m-2}}{\lambda_k\mathcal{P}'_{2m-2}(\lambda_k)},$$

$$\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)=\sum_{s=0}^{2m-2}p_s\lambda^s=(1-e^{2h})(1-\lambda)^{2m-2}-2(\lambda(e^{2h}+1)-e^h(\lambda^2+1))\times$$

$$\times\left[h(1-\lambda)^{2m-4}+\frac{h^3(1-\lambda)^{2m-6}}{3!}E_2(\lambda)+...+\frac{h^{2m-3}E_{2m-4}(\lambda)}{(2m-3!)}\right],$$

p_{2m-2}, p_{2m-3} лар $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$ кўпҳад коэффициентлари, λ_k лар $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$ кўпҳаднинг модули 1 дан кичик илдизлари, $E_k(\lambda)$ бу k-даражали Эйлер-Фробениус кўпҳади.

$D_{m,W}(h\beta)$ оператор хоссалари ўрганилди ва қуйидаги исботланди.

Теорема 4. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ дифференциал операторнинг $D_{m,W}(h\beta)$ дискрет аналоги $m=1,2,3$ ларда қуйидаги тенгликларни қаноатлантиради:

1) $D_{m,W}(h\beta)*e^{h\beta}=0,$ 2) $D_{m,W}(h\beta)*e^{-h\beta}=0,$ 3) $D_{m,W}(h\beta)*(h\beta)^n=0,$
$n\le 2m-3,$ 4) $D_{m,W}(h\beta)*G_{m,W}(h\beta)=\delta_d(h\beta).$

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ оператор дискрет аналоги қурилган, яъни қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи $D_{m,K}(h\beta)$ дискрет аргументли функция топилган

$$D_{m,K}(h\beta)*G_{m,K}(h\beta)=\delta_d(h\beta), \qquad (14)$$

бунда $G_{m,K}(h\beta)$ бу $G_{m,K}(x)$ га мос дискрет аргументли функция, $m\ge 2$, $\omega>0$, $\delta_d(h\beta)$ - дискрет дельта-функция.

(14) тенглама ечими учун қуйидаги теоремалар исботланган

Теорема 5. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ дифференциал операторнинг (14) тенгликни қаноатлантирувчи дискрет аналоги қуйидагича

$$D_{m,K}(h\beta)=\frac{2\omega^{2m-1}}{(-1)^m p_{2m-2}}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\ge 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases}$$

Бунда $A_k=\frac{(1-\lambda_k)^{2m-4}(\lambda_k^2-2\lambda_k\cos h\omega+1)^2 p_{2m-2}}{\lambda_k P'_{2m-2}(\lambda_k)}$, $C=4-4\cos h\omega-2m-\frac{p_{2m-3}}{p_{2m-2}}$,

$$p_{2m-2}=(2m-3)\sin h\omega-h\omega\cos h\omega+2\sum_{k=1}^{m-2}\frac{(-1)^k(m-k-1)(h\omega)^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$P_{2m-2}(\lambda)$ бу $2m-2$-даражали маълум кўпҳад, p_{2m-2}, p_{2m-3} лар шу кўпҳад коэффициентлари ва λ_k лар $P_{2m-2}(\lambda)$ нинг илдизлари, $|\lambda_k|<1$.

Теорема 6. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ операторнинг $D_{m,K}(h\beta)$ дискрет аналоги қуйидаги тенгликларни қаноатлантиради

1) $D_{m,K}(h\beta)*\sin(h\omega\beta)=0,$ 2) $D_{m,K}(h\beta)*\cos(h\omega\beta)=0,$

3) $D_{m,K}(h\beta)*(h\omega\beta)\sin(h\omega\beta)=0,$ 4) $D_{m,K}(h\beta)*(h\omega\beta)\cos(h\omega\beta)=0,$

5) $D_{m,K}(h\beta)*(h\beta)^{\alpha}=0,\ \alpha=0,1,...,2m-5$.

Диссертациянинг **«Оптимал квадратур формулалар коэффициентлари ва улар хатолик функционаллари нормалари»** деб номланувчи учинчи боби $D_m(h\beta), D_{m,W}(h\beta)$ ва $D_{m,K}(h\beta)$ дискрет операторлардан фойдаланиб, мос равишда $L_2^{(m)}, W_2^{(m,m-1)}$ ва $K_2(P_m)$ фазоларда (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуришга, ҳамда уларнинг хатоликлари баҳолашга бағишланган.

Учинчи боб биринчи параграфида асосий мақсад $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида, Соболев методини қўллаб, қуйидагича тугун нуқтали Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуриш

$$x_i=\eta_i h,\ x_{N-i}=1-\eta_i h,\ i=\overline{0,t-1}, 0\le\eta_0<\eta_1<...<\eta_{t-1}<t,\ t\in\mathbb{N},$$

$$x_\beta=h\beta, t\le\beta\le N-t,\ h=\frac{1}{N},\ t=\begin{cases}\dfrac{m}{2} & \text{агар } m \text{ жуфт},\\ \left[\dfrac{m}{2}\right]+1 & \text{агар } m \text{ ток},\end{cases} \tag{15}$$

ва $\eta_i, i=\overline{0,t-1}$ параметрларни танлаб (1) кўринишдаги мусбат коэффициентли оптимал квадратур формулалар олиш. Бу ерда $[a]$ бу a соннинг бутун қисми.

Оптимал коэффициентлар учун система ўрганилиб, қуйидаги лемма исботланган.

Лемма 1. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода (2) хатолик функционалли (15) тугун нуқталар билан (1)- кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги системани каноатлантиради

$$\sum_{\beta=0}^{t-1}\overset{\circ}{C}_\beta\,\eta_\beta^\alpha=h\left(\sum_{\beta=1}^{t-1}\beta^\alpha+\frac{0^\alpha}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}d_k\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(-1)^i q_k^{t+i}-q_k^{N-t+1}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i t^\alpha\right), \tag{16}$$

Бунда $\alpha=\begin{cases}0,2,4,...,m-2 & m-\text{жуфт},\\ 0,2,4,...,m-1 & m-\text{ток},\end{cases}\quad 0^\alpha=\begin{cases}1, & \alpha=0,\\ 0, & \alpha\neq0,\end{cases}$

$$t=\begin{cases}\dfrac{m}{2} & \text{агар } m \text{ жуфт},\\ \left[\dfrac{m}{2}\right]+1 & \text{агар } m \text{ ток},\end{cases}$$

бу ерда $[a]$ - a соннинг бутун қисми, d_k лар номаълум параметрлар, q_k лар $E_{2m-2}(q)$ Эйлера-Фробениус кўпҳади илдизлари, $|q_k|<1$.

Лемма 1 дан фойдаланиб, (1) кўринишда оптимал квадратур формулалар қолган коэффициентлари учун қуйидаги ўринли.

Теорема 7. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода (2) хатолик функционалли ва (15) тугун нуқталар билан (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формула билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}_\beta = h\left(1+\sum_{k=1}^{m-1} d_k\left(q_k^\beta + q_k^{N-\beta}\right)\right),\ t\le\beta\le N-t,$$

бунда d_k, $(k=\overline{1,m-1})$ лар қуйидаги $m-1$ та чизиқли тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{i=1}^{j} \frac{-q_k^{t+1}+(-1)^i q_k^{N-t+i}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i 0^j = \frac{t^{j+1}-B_{j+1}}{j+1} - \sum_{\beta=0}^{t-1}\overset{\circ}{C}_\beta h^{-1}(t-\eta_\beta)^j,\quad j=1,2,3,\ldots,m-1,$$

бунда $\overset{\circ}{C}_\beta = \overset{\circ}{C}_{N-\beta}$ $(\beta=0,1,\ldots,t-1)$ коэффициентлар (16) системадан аниқланади, q_k лар $E_{2m-2}(q)$ Эйлера-Фробениус кўпҳади илдизлари, $|q_k|<1$.

Кейин, $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида қурилган (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулалари хатолигининг юқори баҳосини олишга имкон берувчи (2) хатолик функционали нормасининг квадрати ҳисобланган.

Теорема 8. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (15) тугун нуқталари билан (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар (2) хатолик функционали нормасининг квадрати қуйидаги кўринишда

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\,|\,L_2^{(m)*}\right\|^2 = (-1)^{m+1}\left[\frac{h^{2m}B_{2m}}{(2m)!}+\frac{2h^{2m+1}}{(2m)!}\left\{\sum_{\beta=0}^{t-1}\left(\overset{\circ}{C}_\beta h^{-1}\eta_\beta^{2m}-\beta^{2m}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{m-1} d_k\sum_{i=0}^{2m}\frac{(-1)^i q_k^{t+i}-q_k^{N-t+1}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i t^{2m}\right\}\right],$$

бу ерда B_α Бернулли сонлари, $\overset{\circ}{C}_\beta$, $\beta=\overline{0,t-1}$ лар (16)- системадан аниқланади, q_k лар $E_{2m-2}(q)$ Эйлера-Фробениус кўпҳади илдизлари, $|q_k|<1$, η_β, $\beta=\overline{0,t-1}$ лар (14)- дан аниқланади, $\Delta^i t^{2m}$ бу t^{2m} дан олинган i - тартибли чекли айирма, d_k лар Теоерма 7 да аниқланган.

Таъкидлаш керакки, (15) тугун нуқталар тенг узоқлашган бўлса, яъни (15) да параметрлар $\eta_0=0, \eta_1=1,\ldots,\eta_{t-1}=t-1$ бўлса, у ҳолда теорема 7 ва 8 лардан А.Сард, М.Ф.Мейерс, Г.Коман, И.Шёнберг, С.Д.Силлиман, С.Л.Соболев, Ф.Загирова, Х.М.Шадиметов ва П.Кохлерларнинг баъзи натижаларини оламиз.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида $W_2^{(m,m-1)}$ фазосида (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қурилган. Бунда диссертациянинг иккинчи боби иккинчи параграфида қурилган $D_{m,W}(h\beta)$ дискрет операторидан фойдаланилган. Таъкидлаш керакки, қурилган оптимал квадратур формулалар даражаси $m-2$ дан ошмаган кўпҳадлар ва e^{-x} функцияси учун аниқдир.

$m=1$ ҳол алоҳида қаралган ва қуйидаги исботланган

Теорема 9. $W_2^{(1,0)}(0,1)$ фазосида (1) кўринишдаги тугун нуқталари тенг узоқликда жойлашган оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидагича ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}_\beta = \begin{cases} \dfrac{e^h-1}{e^h+1}, & \beta = 0, N, \\ \dfrac{2(e^h-1)}{e^h+1}, & \beta = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

бунда $h = 1/N$, $N = 1, 2, \ldots$.

Сўнгра, $m \geq 2$ ҳоллар учун ошкор формулалар олинган ва қуйидаги теорема исботланган

Теорема 10. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазода $m \geq 2$ ва $N+1 \geq m$ бўлганда тенг узоқликда жойлашган тугун нуқтали (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}_0 = \frac{e^h-1-h}{e^h-1} + \sum_{k=1}^{m-1}\Big(a_k \frac{\lambda_k(e^h-e)+\lambda_k^2(e-1)+\lambda_k^{N+1}(1-e^h)}{(e-1)(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)} + $$

$$+ b_k \frac{\lambda_k^{N+1}(e^h-e)+\lambda_k^{N}(e-1)+\lambda_k(1-e^h)}{(e-1)(\lambda_k-1)(\lambda_k e^h-1)}\Big),$$

$$\overset{\circ}{C}_\beta = h + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k\lambda_k^{\beta} + b_k\lambda_k^{N-\beta}\right), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_N = \frac{e^h h+1-e^h}{e^h-1} + \sum_{k=1}^{m-1}\Big(a_k \frac{\lambda_k(e-e^{h+1})+\lambda_k^{N}(e^{h+1}-e^h)+\lambda_k^{N+1}(e^h-e)}{(e-1)(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)} + $$

$$+ b_k \frac{\lambda_k^{N+1}(e-e^{h+1})+\lambda_k^{2}(e^{h+1}-e^h)+\lambda_k(e^h-e)}{(e-1)(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big),$$

бу ерда a_k, b_k ва λ_k $(k = \overline{1, m-1})$ лар маълум катталиклар.

Ундан ташқари, қурилган оптимал квадратур формулалар хатолиги баҳоси ўрганилган, яъни $W_2^{(1,0)}$ фазода оптимал хатолик функционали квадрати нормаси ҳисобланган ва фазодаги оптимал квадратур формула $L_2^{(1)}$ фазода асимптотик оптимал эканлиги исботланган.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида $K_2(P_m)$ фазода (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулалар коэффициентлари учун ошкор формулалар олинган. Бунда иккинчи бобнинг учинчи параграфида қурилган $D_{m,K}(h\beta)$ дискрет оператор қўлланилган. Қурилган оптимал квадратур формулалар даражаси $m-3$ дан ошмайдиган кўпҳадлар учун ҳамда $\sin\omega x$ ва $\cos\omega x$ тригонометрик функциялар учун аниқ.

Асосий натижа қуйидагича

Теорема 11. $K_2(P_m)$ фазода $m \geq 3$ ва $N+1 \geq m$ бўлганда (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулалар коэффициентоари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}_0 = \frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} m_k \Big(\frac{\lambda_k - \lambda_k^N}{\lambda_k - 1}\Big), \qquad \overset{\circ}{C}_N = \frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} m_k \Big(\frac{\lambda_k - \lambda_k^N}{\lambda_k - 1}\Big),$$

$$\overset{\circ}{C}_\beta = h + \sum_{k=1}^{m-1} m_k \left(\lambda_k^\beta + \lambda_k^{N-\beta}\right), \quad \beta = 1, 2, ..., N-1,$$

бунда m_k, λ_k $(k = \overline{1, m-1})$ лар маълум катталиклар. Ундан ташқари, $m = 2,3$ҳолларда оптимал хатолик функционали квадратлари нормаси ҳисобланган. $K_2(P_m)$ фазосида қурилган оптимал квадратур формулалар Соболевнинг $L_2^{(m)}$ фазосида асимптотик оптимал эканлиги исботланган.

Диссертациянинг **«Дифференциалланувчи функциялар фазоларида оптимал интерполяцион формулалар»** деб номланувчи тўртинчи боби интерполяцион L сплайнлар ва оптимал интерполяцион формулалар қуришга бағишланган. Бу ерда $L_2^{(m)}$, $W_2^{(m,m-1)}$ ва $K_2(P_m)$ гильберт фазоларида ярим нормани минималлаштирувчи интерполяцион сплайнлар коэффициентларининг ошкор кўриниши топилган, ҳамда $\widetilde{L_2^{(m)}}$ даврий n ўзгарувчили функциялар фазосида оптимал интерполяцион формулалар қурилган.

Ушбу диссертация ишининг натижалари умумлашган сплайнлар билан боғлиқ бўлгани учун, Алберг, Нильсон, Уолш монографиясига асосланиб, уларни таърифини келтирамиз.

Фараз қилайлик, $L-$қуйидагича берилган чизиқли дифференциал оператор бўлсин

$$L \equiv a_m(x)D^m + a_{m-1}(x)D^{m-1} + ... + a_0(x),$$

бунда $a_j(x)$ $(j = 0,1,...,m)$ функциялар $C^j[a,b]$ фазога тегишли ва $[a,b]$да $a_m(x) \neq 0$ бўлсин. L^* каби L га формал қўшма операторни белгилаймиз:

$$L^* \equiv (-1)^m a_m(x)D^m + (-1)^{m-1} a_{m-1}(x)D^{m-1} + ... + a_0(x).$$

Агар $[a,b]$кесмада $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ тўр берилган бўлса, у ҳолда Δ тўрга нисбатан k $(0 \leq k \leq m)$ дефектли умумлашган сплайн (ёки $L-$сплайн) деб ҳар бир (x_{i-1}, x_i) $(i = 1, 2, ..., N)$ очиқ оралиқда $L^* L S_\Delta = 0$ дифференциал тенгламани қаноатлантирувчи ва $W^{P_{2m-k}} L_2$ синфдан олинган $S_\Delta(x)$ функцияга айтилади. Одатдаги (дефекти 1) сплайн $2m-1$- тартибли ҳосиласи узилишларга эга, аммо фақат тўрнинг тугун нуқталарида.

Алберг, Нильсон, Уолшларнинг ишларидан маълумки, дефекти 1 бўлган умумлашган сплайн учун қуйидаги тасдиқ ўринли: фараз қилайлик $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ тўр ва $Y = \{y_i, i = 0,1,...,N\}$ сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. $W^{P_m} L_2$ синфга тегишли барча $f(x_i) = y_i$, $i = 0,1,...,N$ шартни қаноатлантирувчи $f(x)$ функциялар орасида $S_\Delta(Y, x)$ умумлашган сплайн, агар у мавжуд бўлса, $\int_a^b \left(Lf(x)\right)^2 dx$ интегрални минималлаштиради.

Бу бобда, биз, $L_2^{(m)}$, $W_2^{(m,m-1)}$ ва $K_2(P_m)$ фазоларда дефекти 1 га тенг умумлашган сплайнлар коэффициентлари учун қўллаш жуда қулай бўлган ошкор формулалар оламиз.

Қуйидаги интерполяция масаласини қараймиз.

Масала 3. $\int\limits_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx$ катталикка минимум берувчи ва $S_m(x_\beta) = \varphi(x_\beta),\ \beta = 0,1,...,N$

интерполяция шартларини қаноатлантирадиган $S_m(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$ функцияни топинг, бунда $x_\beta \in [0,1]$ - интерполяция тугун нуқталари ва $\varphi(x_\beta)$ берилган қийматлар.

В.А.Василенко ишларининг натижаларига асосланиб $S_m(x)$ интерполяцион сплайннинг аналитик кўринишини оламиз

$$S_m(x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_m(x - x_\gamma) + P_{m-1}(x),$$

бу ерда C_γ, $\gamma = 0,1,...,N$ -ҳақиқий сонлар, $P_{m-1}(x) = \sum\limits_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha x^\alpha$ - $m-1$-даражали кўпҳад ва $G_m(x) = \dfrac{|x|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!}$.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида, d^{2m}/dx^{2m} оператор дискрет аналоги $D_m(h\beta)$ га асосланган Соболев методини ишлатиб, масала 3 нинг ечими бўлган $S_m(x)$ интерполяцион сплайн коэффициентлари учун ошкор формулалар олинган. Таъкидлаш керакки, бу интерполяцион сплайн даражаси $m-1$ дан ошмаган кўпҳадлар учун аниқдир.

Қуйидаги ўринлидир

Теорема 12. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида тенг узоқлашган тугун нуқтали $S_m(x)$ интерполяцион сплайн коэффициентлари қуйидаги кўринишга эга

$$C_0 = hp\left[C\varphi(0) + \varphi(h) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^- \cdot (-h)^\alpha\right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^\gamma \varphi(h\gamma) + M_k + q_k^N N_k\right],$$

$$C_\beta = hp\left[\varphi(h\beta - h) + C\varphi(h\beta) + \varphi(h\beta + h)\right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{|\beta-\gamma|} \varphi(h\gamma) + q_k^\beta M_k + q_k^{N-\beta} N_k\right],$$

$$\beta = 1, 2, ..., N-1,$$

$$C_N = hp\left[C\varphi(1) + \varphi(1-h) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^+ \cdot (1+h)^\alpha\right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{N-\gamma} \varphi(h\gamma) + q_k^N M_k + N_k\right],$$

$$p_\alpha = \frac{1}{2}\left(p_\alpha^+ + p_\alpha^-\right), \quad \alpha = 0,1,...,m-1,$$

бунда $\Delta^i 0^\alpha = \sum\limits_{l=1}^{i} (-1)^{i-l} C_i^l l^\alpha$ ва M_k, N_k, p, C, A_k, q_k, p_α^-, p_α^+, $\alpha = 0,1,...,m-1$ лар маълум катталиклар.

Хусусан, $m=1$ ва $m=2$ ҳолларда, охирги теоремадан мос равишда $L_2^{(1)}(0,1)$ ва $L_2^{(2)}(0,1)$ фазоларда $\int_0^1(\varphi'(x))^2dx$ ва $\int_0^1(\varphi''(x))^2dx$ катталикларни минималлаштирувчи маълум чизиқли интерполяцион сплайн $S_1(x)=\sum\limits_{\gamma=0}^{N}C_\gamma\frac{|x-h\gamma|}{2}+p_0$ ва кубик сплайн $S_2(x)=\sum\limits_{\gamma=0}^{N}C_\gamma\frac{|x-h\gamma|^3}{12}+p_1x+p_0$ ларни оламиз.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги масала ечилган

Масала 4. $\int\limits_0^1(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x))^2dx$ катталикка минимум берувчи ва

$$S_{m,W}(x_\beta)=\varphi(x_\beta),\ \beta=0,1,...,N$$

интерполяция шартларини қаноатлантирувчи $S_{m,W}(x)\in W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ функцияни топинг, бунда $x_\beta\in[0,1]$ - интерполяция тугун нуқталари ва $\varphi(x_\beta)$ лар маълум.

Масала 4 нинг ечими бўлган $S_{m,W}(x)$ интерполяцион сплайн қуйидаги кўринишга эга

$$S_{m,W}(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_{m,W}(x-x_\gamma)+\sum_{i=0}^{m-2}r_ix^i+de^{-x},$$

бу ерда C_γ, $\gamma=0,1,...,N$, r_i, $i=0,1,...,m-2$, d - ҳақиқий сонлар, $G_{m,W}(x)$ - (9)-тенгликдан аниқланади.

Таъкидлаш керакки, $S_{m,W}(x)$ интерполяцион сплайн e^{-x} функция ва даражаси $m-2$ дан ошмаган кўпҳадлар учун аниқ.

Қуйидаги ўринлидир

Теорема 13. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида тенг узоқликда жойлашган тугун нуқтали $S_{m,W}(x)$ интерполяцион сплайн коэффициентлари қуйидаги кўринишда

$$C_0=\frac{2C}{p}\varphi(0)-\frac{2e^h}{p}\left[\varphi(h)+a^-e^h+\sum_{i=0}^{m-2}r_i^-(-h)^i\right]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_kp}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^\gamma\varphi(h\gamma)+M_k+\lambda_k^NN_k\right],$$

$$C_\beta=\frac{2C}{p}\varphi(h\beta)-\frac{2e^h}{p}[\varphi(h(\beta-1))+\varphi(h(\beta+1))]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_kp}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^\beta M_k+\lambda_k^{N-\beta}N_k\right],\quad \beta=1,2,...,N-1,$$

$$C_N=\frac{2C}{p}\varphi(1)-\frac{2e^h}{p}\left[\varphi(h(N-1))+\frac{a^+}{e^{1+h}}+\sum_{i=0}^{m-2}r_i^+(1+h)^i\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_kp}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^NM_k+N_k\right],$$

$$r_i=\frac{1}{2}\left(r_i^-+r_i^+\right),\ i=0,1,...,m-2,\qquad d=\frac{1}{2}\left(\varphi(0)-r_0^-+e\varphi(1)-e\sum_{i=0}^{m-2}r_i^+\right),$$

бунда $\Delta^{\nu}0^{i}=\sum\limits_{l=1}^{\nu}(-1)^{\nu-l}\binom{\nu}{l}l^{i}$ ва M_k, N_k, p, C, A_k, λ_k, a^-, a^+, r_i^-, r_i^+, $i=0,1,...,m-2$ маълум катталиклар.

$m=2$ да нагрузка коэффициенти 1 бўлган интерполяцион экспоненциал сплайнни оламиз.

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфида қуйидаги масала ўрганилган

Масала 5. $\int\limits_0^1(\varphi^{(m)}(x)+\omega^2\varphi^{(m-2)}(x))^2dx$ катталикка минимум берувчи ва

$$S_{m,K}(x_\beta)=\varphi(x_\beta),\ \beta=0,1,...,N$$

интерполяция шартларини қаноатлантирувчи $S_{m,K}(x)\in K_2(P_m)$ функцияни топинг, бу ерда $x_\beta\in[0,1]$ - интерполяция тугун нуқталари, $\varphi(x_\beta)$ - берилган қийматлар.

$S_{m,K}(x)$ интерполяцион сплайннинг аналитик кўриниши қуйидагича:

$$S_{m,K}(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_{m,K}(x-x_\gamma)+d_1\sin(\omega x)+d_2\cos(\omega x)+R_{m-3}(x),$$

бунда C_γ, $\gamma=0,1,...,N$, d_1 ва d_2 - ҳақиқий сонлар, $R_{m-3}(x)=\sum\limits_{\alpha=0}^{m-3}r_\alpha x^\alpha$ бу $m-3$ - даражали кўпҳад ва $G_{m,K}(x)$ функция (12) тенгликдан аниқланади.

$S_{m,K}(x)$ интерполяцион сплайн $\sin\omega x$ ва $\cos\omega x$ ҳамда $m-3$ - даражали ихтиёрий кўпҳадларга аниқ.

Сўнгра, $S_{m,K}(x)$ интерполяцион сплайн коэффициентлари учун формулалар олинган. Натижа қуйидагича

Теорема 14. $K_2(P_m)$ фазода тенг узоқликда ётган тугун нуқтали $S_{m,K}(x)$ интерполяцион сплайн коэффициентлари қуйидагича

$$C_0=p\left[C\varphi(0)+\varphi(h)-d_1^-\sin(h\omega)+d_2^-\cos(h\omega)+\sum_{\alpha=0}^{m-3}r_\alpha^-\cdot(-h)^\alpha\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_kp}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^\gamma\varphi(h\gamma)+M_k+\lambda_k^NN_k\right],$$

$$C_\beta=p\left[\varphi(h\beta-h)+C\varphi(h\beta)+\varphi(h\beta+h)\right]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_kp}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^\beta M_k+\lambda_k^{N-\beta}N_k\right],$$

$\beta=1,2,...,N-1,$

$$C_N=p\Big[C\varphi(1)+\varphi(1-h)+d_1^+\sin(\omega+h\omega)+d_2^+\cos(\omega+h\omega)+$$
$$+\sum_{\alpha=0}^{m-3}r_\alpha^+\cdot(1+h)^\alpha\Big]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_kp}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^NM_k+N_k\right],$$

$$d_i=\frac{1}{2}\left(d_i^++d_i^-\right),\ i=1,2,\qquad r_\alpha=\frac{1}{2}\left(r_\alpha^++r_\alpha^-\right),\ \alpha=0,1,...,m-3,$$

бу ерда $\Delta^i 0^\alpha = \sum_{l=1}^{i} (-1)^{i-l} C_i^l l^\alpha$ ва $M_k, N_k,\ p,\ C,\ A_k,\ \lambda_k, d_i^-,\ d_i^+,\ i=1,2,\ r_\alpha^-, r_\alpha^+,$ $\alpha = 0,1,...,m-3$ маълум катталиклар.

Диссертация иши тўртинчи бобининг тўртинчи параграфида Соболевнинг $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ даврий n ўзгарувчили функциялар фазосида оптимал интерполяцион формула қурилган.

Фараз қилайлик, φ функциялар $\mathbb{R}^n$ локал жамланувчи m тартибли ҳосилага эга ва Ω_0 чегараланган соҳа учун қуйидаги интеграл чегараланган

$$\int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx,$$

бу ерда α - мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D^\alpha \varphi(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$. $2m > n$ бўлсин ва φ - H матрицали даврий функция, яъни $\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n,$ бунда γ - ихтиёрий бутун қийматли устун вектор, H - $n \times n$ ўлчовли детерминанти 1 га тенг матрица. H матрицага унинг Ω_0 фундаментал параллелепипеди қуйидагича мос қуйилади

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x = Hy,\ \text{где}\ \ 0 \le y_j < 1,\ \ j = 1,2,...,n\}.$$

$\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазо элементлари бири–биридан ўзгармас сонга фарқ қилувчи функциялар. $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазода функциялар нормаси

$$\left\| \varphi \,|\, \widetilde{L_2^{(m)}}(H) \right\| = \left[\int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

формула билан аниқланади.

$\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазода қуйидаги интерполяцион формулани қараймиз

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k(x) \varphi(x^{(k)}) \tag{17}$$

$x^{(k)} \in \Omega_0$ ва $C_k(x)$ параметрлар мос равишда (17) интерполяцион формуланинг тугун нуқталари ва коэффициентлари дейилади.

$\varphi(x) - P_\varphi(x)$ айирма (17) интерполяцион формуланинг хатолиги дейилади. Бу хатоликнинг бирор z нуқтадаги қиймати φ функциялар устида аниқланган функционал бўлади, яъни

$$(\ell, \varphi) \equiv \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \varphi(x^{(k)}) =$$

$$= \int_{\Omega_0} \left[\left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \delta(x - x^{(k)}) \right) * \phi_0(H^{-1}x) \right] \varphi(x) dx,$$

бунда $\delta(x)$ - Диракнинг дельта функцияси, $\phi_0(H^{-1}x) = \sum_\beta \delta(x - H\beta)$,

$$\ell(x)=\left(\delta(x-z)-\sum_{k=1}^{N}C_k(z)\delta(x-x^{(k)})\right)*\phi_0(H^{-1}x) \qquad (18)$$

бу (17) интерполяцион формуланинг хатолик функционали ва $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ фазога тегишли. $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ фазо 1 га ортогонал, яъни $(\ell,1)=0$ бўлган, (18) кўринишдаги барча даврий функционаллардан иборат.

Қуйидаги Коши-Шварца тенгсизлигига асосан

$$|(\ell,\varphi)|\le\left\|\varphi\,|\,\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\right\|\cdot\left\|\ell\,|\,\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\right\|$$

(17) интерполяцион формула хатолиги (18) функционал нормаси

$$\left\|\ell\,|\,\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\right\|=\sup_{\left\|\varphi|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\right\|=1}\left|\left(\ell,\varphi\right)\right|$$

орқали баҳоланади. Демак, (17) интерполяцион формула хатолиги $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазо функцияларида баҳолаш $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ фазода хатолик функционали ℓ нормасини ҳисоблашга олиб келинади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги масалаларга эга бўламиз

Масала 6. $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ фазосида (17) интерполяцион формула хатолик функционали ℓ нормасини топинг.

Аёнки, хатолик функционали ℓ нинг нормаси $C_k(z)$ коэффициентлар ва $x^{(k)}$ тугун нуқталарга боғлиқ. $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ фазосида ҳатолик функционалининг нормаси тугун нуқталар сони N берилганда энг кичик қийматга эга бўладиган формула оптимал интерполяцион формула дейилади. Агар $x^{(k)}$ тугун нуқталар панжаранинг нуқталари бўлса, яъни $x^{(k)}=hHk$ кўринишда бўлса, у ҳолда интерполяцион формула панжарали дейилади. Бу ерда h - кичкина мусбат параметр ва панжара қадами дейилади.

Ушбу параграфнинг асосий мақсади $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазосида $x^{(k)}=hHk$ тугун нуқтали панжарали оптимал интерполяцион формула қуришдир, яъни қуйидаги масалани ечишдир.

Масала 7. Тугун нуқталар $x^{(k)}=hHk$ бўлганда

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\,|\,\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\right\|=\inf_{C_k(z)}\left\|\ell\,|\,\widetilde{L_2^{(m^*)}}(H)\right\|$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\overset{\circ}{C}_k(z)$ коэффициентларни топинг.

Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидагича

Теорема 15. $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазосида (18) хатолик функционалли (17) кўринишдаги ягона панжарали оптимал интерполяцион формула мавжуд ва унинг коэффициентлари қуйидагича аниқланади

$$\overset{\circ}{C}([\beta];z)=h^n\left(1+\sum_{\gamma\ne0}\frac{\exp(2\pi iH^{-1}(Hh\beta^*-z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}}\cdot K(\gamma)\right),\ \ K(\gamma)=\left[\sum_{\substack{t\\ t\ne h\gamma}}\frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t-\gamma)|^{2m}}\right]^{-1}.$$

ХУЛОСА

Диссертация иши турли дифференциалланувчи функциялар фазоларида Сард маъносида оптимал квадратур ва интерполяцион формулалар қуришга ҳамда уларнинг хатоликлари баҳоларини ҳисоблашга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. $W_2^{(m,m-1)}$ ва $K_2(P_m)$ фазолардаги квадратур формулалар ҳамда $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазосидаги интерполяцион формула хатолик функционаллари экстремал функциялари топилганлигини келтириш мумкин.

2. $W_2^{(m,m-1)}$ ва $K_2(P_m)$ фазолардаги квадратур формулалар ва $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазосидаги интерполяцион формула хатолик функционаллари нормалари ҳисоблангангaнлигини таъкидлаш жоиз.

3. $W_2^{(m,m-1)}$, $K_2(P_m)$ ва $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазоларда оптимал квадратур ва итерполятцион формулалар коэффициентлари учун чизиқли тенгламалар системаси олинганлигини ҳамда бу системалар ечими мавжудлиги ва ягоналиги исботланиб, бу ечим мос фазоларда хатолик функционаллари нормаларига минимум беришини таъкидлаш лозим.

4. $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\dfrac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ ва $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\dfrac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\dfrac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ операторлар дискрет аналоглари $D_{m,W}(h\beta)$ ва $D_{m,K}(h\beta)$ лар қурилганлигини эътироф этиш керак.

5. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида мусбат коэффициентли оптимал квадратур формулалар қурилган ва оптимал хатолик функционали нормаси ҳисоблaнганлиги қайд этиш лозим.

6. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазода даражаси $m-2$ дан ошмаган кўпҳадларга ва e^{-x} функцияга аниқ бўлган Сард маъносида оптимал бўлган квадратур формулалар қурилган.

7. $K_2(P_m)$ фазосида даражаси $m-3$ дан ошмаган кўпҳадларга ҳамда $\sin\omega x$ ва $\cos\omega x$ тригонометрик функциялар учун аниқ бўлган Сард маъносида оптимал квадратур формулалар коэффициентлари ошкор формулалари олинганини таъкидлаш лозим.

8. $K_2(P_m)$ фазосида қурилган оптимал квадратур формулалар, $m=2,3$ бўлганда, $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида асимптотик оптимал эканлиги исботланганлиги қайд қилиш лозим.

9. $L_2^{(m)}(0,1), W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ ва $K_2(P_m)$ фазоларда ярим нормани минималлаштирувчи интерполяцион сплайнлар қурилганлиги келтириш жоиз.

10. $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ даврий n ўзгарувчили функциялар фазосида панжарали оптимал интерполяцион формулалар қурилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ 14.07.2016.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК
ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ХАЁТОВ АБДУЛЛО РАХМОНОВИЧ

ОПТИМАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ПОГРЕШНОСТЕЙ КВАДРАТУРНЫХ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Ташкент – 2016

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № 30.09.2014/B2014.5.FM131.

Докторская диссертация выполнена в Институте математики при Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Erich Novak** профессор (Университет Йена, Германия) **Алоев Рахматилло Джураевич** доктор физико-математических наук, профессор **Солеев Ахмаджон** доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Институт Математики Университета Сантьяго де Компостела** (Испания)

Защита диссертации состоится «____» ____________2016 года в ____ часов на заседании Научного совета 14.07.2016.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2016 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2016 года).

А.А. Абдушукуров
Председатель Научного совета по присуждению
ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

Г.И. Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению
ученой степени доктора наук, к.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученой степени доктора
наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решения проблем, возникающих в результате многих научно-прикладных исследований, проводимых на мировом уровне, приводят к интегральным и дифференциальным уравнениям. Они приближенно решаются, в основном, с помощью кубатурных и интерполяционных формул. Имеются алгебраические и вариационные подходы построения таких формул. Первыми алгебраическими формулами являются квадратурные формулы типа Ньютона-Котеса и Гаусса, а также интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона. Основанная на вариационном подходе, теория построения таких формул была разработана учёными США и России. Разработка новых алгоритмов построения оптимальных формул и интерполяционных сплайнов а также оценка их погрешностей в различных классах функций, основанная на алгебраических и вариационных подходах, является одной из важных задач вычислительной математики.

В нашей стране в годы независимости большое внимание уделяется направлениям, имеющим прикладное значение. В частности, в теории кубатурных формул вычислительной математики особое внимание было уделено построению кубатурных формул, обладающих высокой алгебраической точностью и инвариантных относительно преобразований группы вращений какого-нибудь правильного многогранника, а также формулам типа Гаусса, основанных на теории ортогональных многочленов. Значительные результаты были достигнуты по построению решетчатых оптимальных кубатурных формул в пространствах Соболева одного и многих переменных, периодических и непериодических функций, производные которых интегрируемы с квадратом.

В настоящее время важную роль играет построение оптимальных квадратурных, кубатурных формул и интерполяционных сплайнов в гильбертовых пространствах дифференцируемых функций для приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также их систем, которые рассматриваются как высоко точные математические модели естественных процессов. В связи с этим, реализация целевых научных исследований, в следующих направлениях является одной из важных задач: построение решетчатых асимптотически оптимальных кубатурных формул; разработка кубатурных формул, основанных на методах Монте-Карло; построение оптимальных квадратурных, кубатурных формул и оценки их погрешностей; построение сплайнов, минимизирующих определенные функционалы в различных гильбертовых и банаховых пространствах периодических а также непериодических функций. Научные исследования, проводимые в вышеупомянутых направлениях, подтверждают актуальность темы диссертации.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-436 от 7 августа 2006 года «О мерах по совершенствованию координации и управления развитием науки и технологии», № ПП-916 от 15 июля 2008 года «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий производства» а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

Научные исследования по построению квадратурных, кубатурных формул и сплайнов а также по изучению оценки их погрешностей ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: в Institute of mathematics of Jena University, Institute of mathematics of Universität Mannheim, Technische Universität Braunschweig (Германия), Universita degli Studi di Roma La Sapienza, Universita della Basilicata (Италия), University of Meryland, Kettering University, Columbia University, Harvard University, Purdue University, Venderbild University (США), University of Oslo (Норвегия), Katholieke Universiteit, Leuven (Белгия), Universidad de Zaragoza, Universidad Pública de Navarra (Испания), Universite de Toulouse, Université Joseph Fourier (Франция), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Сербия), Babeş-Bolyai University (Румыния), Институте математики Сибирского отделения Российской академии наук, Математическом институте Российской академии наук, Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском государственном университетах, Институте вычислительной математики Российской академии наук, Институте математики с вычислительным центром Уфимского научного центра, Сибирском федеральном университете (Россия), Днепропетровском государственном университете (Украина), Казахском национальном университете (Казахстан).

В результате научных исследований, проведенных по построению кубатурных и квадратурных формул, интерполяционных и сглаживающих сплайнов и по изучению оценки погрешностей построенных формул в мире решены целый ряд актуальных задач, в том числе, получены следующие научные результаты: получены оценки погрешности кубатурных формул построенных на основе метода Монте-Карло на весовых пространствах Соболева (Institute of mathematics of Jena University (Германия), Columbia University (США)); используя сплайн функций и основываясь на метод $\varphi-$функций в различных гильбертовых пространствах, определенных на линейных дифференциальных операторах, построены оптимальные

---

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, Journal of Computational and Applied Mathematics http://www.journals.elsevier.com/mathematics; Calcolo, Numerical Algorithms, BIT Numerical Mathematics, Сибирский журнал вычислительной математики, Журнал вычислительной математики и математической физики, http://www.springer.com/mathematics, также были использованы и другие источники.

квадратурные формулы в смысле Сарда (Columbia University, University of Maryland, University of Wisconsin-Madison (США), Technische Universität Braunschweig (Германия), Babeş-Bolyai University (Румыния), Universita degli Studi di Roma La Sapienza (Италия)); используя методы функционального анализа доказаны существование и единственность и разработаны теории построения D^m - сплайнов, L - сплайнов и абстрактных сплайнов в различных гильбертовых пространствах (University of Wisconsin-Madison, Harvard University, Purdue University, Vanderbilt University (США), University of Oslo (Норвегия), Université Joseph Fourier (Франция), Институт вычислительной математики и математической геофизики (Россия)); построены квадратурные формулы типа Гаусса для регулярных и сильно осциллирующих интегралов (Mathematical institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts); для коэффициентов оптимальных решетчатых кубатурных формул над пространством $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ получена система типа Винера-Хопфа, доказаны существование и единственность решения этой системы (Институт математики Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирский государственный университет (Россия), Институт математики при Национальном университете Узбекистана); найдены достаточные условия асимптотической оптимальности кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем, разработан алгоритм для нахождения коэффициентов таких кубатурных формул (Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра); теория асимптотически оптимальных кубатурных формул обобщена на пространства $L_p^{(m)}(\Omega)$ (Санкт-Петербургский государственный университет, Сибирский федеральный университет); на трехмерной сфере построен класс эффективных кубатурных формул (Институт вычислительной математики Российской академии наук); построены наилучшие квадратурные формулы и вычислены их оценки погрешностей в пространствах $\widetilde{W}_p^m$ и W_p^m периодических и непериодических функций (Математический институт Российской академии наук (Россия), Днепропетровский государственный университет (Украина), Казахский национальный университет (Казахстан), Kliment Ohridski University of Sofia (Болгария)).

На мировом уровне осуществляются ряд научно-исследовательских работ в приоритетных направлениях, таких как построение квадратурных, кубатурных формул а также интерполяционных сплайнов и по их применению, а именно: нахождение экстремальных функций функционалов погрешностей квадратурных, кубатурных формул и интерполяционных сплайнов в гильбертовых пространствах дифференцируемых функций; вычисление норм функционалов погрешностей соответствующих формул и сплайнов с помощью найденных экстремальных функций; исследование существования и единственности оптимальных квадратурных, кубатурных формул и интерполяционных сплайнов; разработка новых алгоритмов построения оптимальных кубатурных формул и интерполяционных сплайнов, основанных на дискретных операторах а также нахождение явных форм оптимальных коэффициентов.

Степень изученности проблемы. Построение квадратурных формул и изучение их оценки погрешности, основанные на методах функционального анализа, впервые были даны в научных работах А.Сарда и С.М.Никольского, а появление теории кубатурных формул связано с научными исследованиями С.Л.Соболева. Этому вопросу в различных пространствах в одномерном случае посвящены работы С.М.Никольского, Н.П.Корнейчука, Н.Е.Лушпай, Т.Н.Бусаровой, Б.Боянова, В.П.Моторного, А.А.Лигуна, А.А.Женсыкбаева, К.И.Осколькова, М.А.Чахкиева, Т.А.Гранкиной. В пространствах много переменных функций по построению инвариантных и асимптотически оптимальных кубатурных формул вели научные исследования С.Л.Соболев, В.И.Лебедев, И.П.Мысовских, М.Д.Рамазанов, В.И.Половинкин, О.В.Бесов, Ц.Б.Шойнжуров, М.В.Носков, Н.И.Блинов, Л.В.Войтишек, В.Л.Васкевич, Г.Н.Салихов, М.И.Исраилов, С.Ш.Шушбаев, Г.П.Исматуллаев, Э.Шамсиев, а по формулам численного интегрирования основанных на методе Монте-Карло научные исследования проведены в работах Н.С.Бахвалова, С.М.Ермакова, И.М.Соболь, Н.Н.Ченцова, Г.А.Михайлова, А.С.Расулова, E.Novak, H.Wozniakovski.

Существуют сплайн метод, метод $\varphi-$функций и метод Соболева построения формул, полученных при минимизации нормы функционала погрешности при фиксированных узлах. A.Sard, L.F.Meyers, G.Coman, I.J.Schoenberg, S.D.Silliman, P.Kohler, основываясь на методе сплайнов, а A.Ghizzetti, A.Ossicini, F.Lanzara, T.Catinaş и G.Coman, используя метод $\varphi-$функций, построили оптимальные квадратурные формулы в пространстве $L_2^{(m)}$. В построении оптимальных кубатурных формул по методу Соболева результаты С.Л.Соболева по нахождению коэффициентов оптимальных квадратурных формул обобщили вышеупомянутые исследования, в которых был применен метод сплайнов. Реализация предложенного С.Л.Соболевым алгоритма в пространстве $L_2^{(m)}$ велась в научных исследованиях З.Ж.Жамалова, Ф.Я.Загировой, Х.М.Шадиметова, А.Р.Хаётова и др.

Первые сплайн функции были склеены из кусков кубических многочленов. В дальнейшем, эта конструкция модифицировалась, повышалась степень многочленов, но идея их построения осталась неизменной. Следующий существенный шаг в теории сплайнов - это результат D.Holladay, связывающий кубические сплайны I.J.Schoenberg с решением вариационной задачи о минимуме квадрата нормы функции из пространства $L_2^{(2)}$. Далее, результат D.Holladay был обобщен C.de Boor. Эти результаты вызвали большой интерес, и далее, появилось большое количество работ, где в зависимости от конкретных требований модифицировался вариационный функционал. Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, изучалась и развивалась в работах J.H.Ahlberg, E.Nilson, J.Walsh, P.J. Laurent, I.Schoenberg, C. de Boor, R.Arcangeli, M.C.Lopez de Silanes, J.J.Torres, В.А. Василенко, M.Attea, Barlinet, C.Tomas-

Agnan, L.L.Schumaker, T.Lyche, B.Bojanov, С.Б.Стечкина, Ю.Н.Субботина, М.И.Игнатева, А.Б.Певный, G.Nurnberger, А.Ю.Бежаева, Х.М.Шадиметова, А.Р.Ҳаётова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ФА-Ф1-Ф004+Ф014 «Теории кубатурных формул, сплайнов и численное моделирование процессов прогнозирования реального состояния и обеспечения безопасности ответственных сооружений» (2007-2011), Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» (2012-2016) Института математики при Национальном университете Узбекистана.

Целью исследования являются построение оптимальных квадратурных формул и интерполяционных сплайнов, минимизирующих полунормы в гильбертовых пространствах, и вычисление норм их оптимальных функционалов погрешностей.

Задачи исследования:

найти экстремальные функции функционалов погрешностей квадратурных и интерполяционных формул в гильбертовых пространствах;

получить выражения для квадрата нормы функционалов погрешностей на гильбертовых пространствах;

применяя метод Лагранжа неопределенных множителей, получить линейную систему для оптимальных коэффициентов, исследовать условия существования и единственности решения полученных систем;

построить дискретные аналоги конкретных дифференциальных операторов;

в пространствах дифференцируемых функций получить оптимальные квадратурные и интерполяционные формулы пользуясь методом, который основан на дискретных аналогах дифференциальных операторов;

вычислить нормы функционалов погрешностей, построенных оптимальных квадратурных формул и интерполяционных сплайнов.

Объект исследования - краевые задачи для экстремальных функций функционалов погрешностей в пространствах дифференцируемых функций, квадратурные формулы, интерполяционные формулы и сплайн функции.

Предмет исследования - экстремальные функции, системы линейных уравнений типа Винера-Хопфа для оптимальных коэффициентов, оптимальные квадратурные формулы, оптимальные интерполяционные формулы и сплайны, минимизирующие полунормы в гильбертовых пространствах.

Методы исследования. В диссертации использованы методы вычислительной математики, функционального анализа, теории функций комплексных переменных, функций дискретного аргумента, дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдены экстремальные функции функционалов погрешностей квадратурных и интерполяционных формул в пространствах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, $K_2(P_m)$ и $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$;

вычислены нормы функционалов погрешностей квадратурных и интерполяционных формул на пространствах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, $K_2(P_m)$ и $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$;

получены системы линейных алгебраических уравнений типа Винера-Хопфа для коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространствах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и $K_2(P_m)$ и оптимальных интерполяционных формул в пространстве Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических n переменных функций;

найдены условия существования и единственности решений полученных систем;

построены дискретные аналоги дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и доказаны их свойства;

построены оптимальные квадратурные формулы с положительными коэффициентами и вычислена норма оптимального функционала погрешности в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$;

построены оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда в пространствах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и $K_2(P_m)$ а также при $m=1,2$ и 3 получены оценки погрешностей построенных оптимальных формул;

получены интерполяционные сплайны, минимизирующие полунормы в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и $K_2(P_m)$.

построены оптимальные интерполяционные формулы в пространстве Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических n переменных функций.

Практические результаты исследования - создание программ на языке программирования Maple для приближенного вычисления регулярных интегралов, используя построенные оптимальные квадратурные формул, получение численных решений линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра первого рода используя интерполяционные сплайны.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов вычислительной математики, функционального анализа и теории функций комплексных переменных, теории функций дискретного аргумента, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что в пространствах дифференцируемых функций создан алгоритм построения оптимальных квадратурных, кубатурных формул и обобщенных сплайнов.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что построенные оптимальные квадратурные формулы и интерполяционные сплайны служат для численного вычисления регулярных интегралов, а также для приближенного решения линейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра первого рода.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда, построенные в пространствах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и $K_2(P_m)$, использованы в исследованиях зарубежного проекта DFG – Priority Program 1324 «Optimal Quadrature Formulas for the Space H^1» для численного вычисления коэффициентов Фурье с индексом 0 в этих же пространствах (Университет Йена, Германия, справка от 14 сентября 2016 года). Применение этих научных результатов дает возможность сравнить с результатом оптимальных квадратурных формул для интегралов Фурье построенных в пространстве H^1;

найденная экстремальная функция функционала погрешности квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и построенный дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ использованы в исследованиях зарубежного проекта 174015 “Approximation of integral and differential operators and applications” при нахождении экстремальной функции функционала погрешности квадратурных формул для интегралов Фурье в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ (Математический институт Академии наук и искусств Сербии, справка от 6 июня 2016 года). Применение этих научных результатов способствовало построению оптимальных квадратурных формул для коэффициентов Фурье в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

Апробация результатов исследования. Основные результаты исследования обсуждались на научно-практических конференциях, в том числе: «Математические и численные моделирования процессов тепло и массообмена в многофазных средах» (Бухара, 2001), «Современные проблемы математической физики и информационных технологии» (Ташкент, 2003), «Республиканская конференция молодых ученых» (Ташкент, 2003, 2004), «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики» (Ташкент, 2004), «Алгебра операторов и квантовая теория вероятностей» (Ташкент, 2005), «LUMS 2-nd international conference on mathematics and its application in information technology» (Лахор, Пакистан, 2008), «Вычислительные технологии и математическое моделирование» (Ташкент, 2009), «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2009» (Ташкент, 2009), «Операторные алгебры и смежные проблемы» (Ташкент, 2012), «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 2013), «Прикладной и геометрический анализ» (Самарканд-Новосибирск, 2014), «Неклассические уравнения математической физики и их приложения»

(Ташкент, 2014). Выступления и доклады прошли широкую апробацию. Результаты исследования обсуждались на республиканских семинарах «Операторные алгебры и их приложения» (Ташкент, 2010-2016) и «Теория кубатурных формул и теория чисел» (Ташкент, 2005-2016) Института Математики при Национальном университете Узбекистана, на научном семинаре «Современные проблемы вычислительной математики и информатики» (Ташкент, 2008-2012) Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта, на научном семинаре Института математики университета Сантьяго де Компостела (Испания, 2012), на научном семинаре Института математики университета Йена (Германия, 2010, 2015).

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 44 научных работ, из них 23 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе из них 10 опубликованы в зарубежных журналах и 13 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 200 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Экстремальные функции квадратурных формул в пространствах дифференцируемых функций»** посвящена нахождению экстремальных функций квадратурных формул а также доказательству существования и единственности оптимальных квадратурных формул в гильбертовых пространствах $W_2^{(m,m-1)}$ и $K_2(P_m)$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \tag{1}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

где $C_\beta -$ коэффициенты и x_β $(\in[0,1])$ - узлы формулы (1), $\varepsilon_{[0,1]}(x)-$ характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)-$дельта-функция Дирака, $\varphi-$элемент пространства

$$W^{P_m}L_2=\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,\varphi^{(m-1)} \text{ -абс. непр. и } \varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\},$$

с полунормой $\left\|\varphi\,|\,W^{P_m}L_2\right\|=\left\{\int\limits_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$,

где $P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\equiv a_m\frac{d^m}{dx^m}+...+a_1\frac{d}{dx}+a_0,\quad a_m\neq 0$ и $\int\limits_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2dx<\infty$.

Пространства $W^{P_m}L_2$ являются гильбертовыми и обобщением пространств $L_2^{(m)}$.

Следующая разность

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_{\Omega}\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\varphi(x_\beta)=\int\limits_{\mathbb{R}}\ell(x)\varphi(x)dx \tag{3}$$

называется погрешностью кубатурной формулы (1).

Согласно неравенству Коши-Шварца

$$|(\ell,\varphi)|\leq\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|\cdot\left\|\varphi\,|\,W^{P_m}L_2\right\|$$

абсолютное значение погрешности (3) оценивается с помощью нормы

$$\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|=\sup_{\left\|\varphi|W^{P_m}L_2\right\|=1}|(\ell,\varphi)| \tag{4}$$

функционала погрешности (2) в сопряженном пространстве $W^{P_m}L_2^*$. Минимизация нормы (4) функционала погрешности ℓ по коэффициентам при фиксированных узлах называется задачей Сарда и полученная формула называется оптимальной формулой в смысле Сарда.

Нам требуется последовательно решить следующие задачи.

Задача 1. Найти норму (4) функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (1) над пространством $W^{P_m}L_2$.

Задача 2. Найти такие коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta$, чтобы удовлетворялось равенство $\left\|\overset{\circ}{\ell}\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|=\inf\limits_{C_\beta}\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|$.

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности ℓ в пространстве $W^{P_m}L_2^*$ используется так называемая экстремальная функция ψ_ℓ данного функционала, для которой выполняется равенство

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|\left\|\psi_\ell\,|\,W^{P_m}L_2\right\|.$$

Так как $W^{P_m}L_2$ является гильбертовым, то экстремальная функция ψ_ℓ выражается через заданный функционал (2) с помощью теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала, т.е.

$$(\ell,\varphi)=\langle\psi_\ell,\varphi\rangle_{W^{P_m}L_2}, \tag{5}$$

где $(\ell,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx$ и $\left\langle\psi_\ell,\varphi\right\rangle_{W^{P_m}L_2}=\int\limits_0^1 P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\psi_\ell(x)P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)dx$ - скалярное произведение функций ψ_ℓ и φ. Кроме того, по той же теореме Рисса, учитывая (5), получим следующее равенство

$$\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|^2=\left\|\psi_\ell\,|\,W^{P_m}L_2\right\|^2=\left(\ell,\psi_\ell\right).$$

Таким образом, чтобы найти экстремальную функцию ψ_ℓ для функционала погрешности (2) требуется решить функциональное уравнение (5).

Отметим, что в случае $P_m(d/dx)=d^{2m}/dx^{2m}$, т.е. в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, задача 1 решена С.Л.Соболевым. Экстремальная функция в этом случае имеет вид

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x),$$

где $G_m(x)=\dfrac{|x|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!}$ и $P_{m-1}(x)$ - многочлен степени $m-1$.

Далее, для коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}$, С.Л.Соболевым получена система типа Винера-Хопфа. Исследовано существование и единственность решения полученной системы. Предложен алгоритм решения этой системы основаны на дискретном аналоге дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m}.

Мы рассмотрим случай $P_m(d/dx)=\dfrac{d^m}{dx^m}+\dfrac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}$. Соответствующее пространство $W^{P_m}L_2$ обозначим как

$$W_2^{(m,m-1)}(0,1)=\left\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,\varphi^{(m-1)}\text{ - абс. непр. и }\varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\right\},$$

с полу нормой

$$\left\|\varphi\,|\,W_2^{(m,m-1)}(0,1)\right\|=\left\{\int\limits_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x)\right)^2dx\right\}^{1/2},$$

$\int_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x)\right)^2dx<\infty$ и $\left\|\varphi\right\|=0$ тогда и только тогда когда $\varphi=P_{m-2}(x)+de^{-x}$, где $P_{m-2}(x)$ - многочлен степени $m-2$, d - константа.

В пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ экстремальная функция $\psi_{\ell,W}$ является решением краевой задачи

$$\psi_{\ell,W}^{(2m)}(x)-\psi_{\ell,W}^{(2m-2)}(x)=(-1)^m\ell(x), \tag{6}$$

$$\left(\psi_{\ell,W}^{(m+s)}(x)-\psi_{\ell,W}^{(m+s-2)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\ s=\overline{1,m-1}, \tag{7}$$

$$\left(\psi_{\ell,W}^{(m)}(x)+\psi_{\ell,W}^{(m-1)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0. \tag{8}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. В пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ решение краевой задачи (6)-(8) является экстремальной функцией $\psi_{\ell,W}$ функционала погрешности ℓ и имеет вид

$$\psi_{\ell,W}(x)=(-1)^m\ell(x)*G_{m,W}(x)+P_{m-2}(x)+d\,e^{-x},$$

где

$$G_{m,W}(x)=\frac{\operatorname{sgn}x}{2}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right), \tag{9}$$

d - любое действительное число, $P_{m-2}(x)$ - многочлен степени $m-2$.

Далее, доказаны существование и единственность оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

Рассмотрим случай, когда функции φ принадлежат в гильбертовому пространству

$$K_2(P_m)=\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,\varphi^{(m-1)} \text{ - абс. непр. и } \varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\},$$

с нормой

$$\|\varphi|\,K_2(P_m)\|=\left\{\int_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2dx\right\}^{1/2},$$

где $P_m\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{d^m}{dx^m}+\omega^2\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}$, $\omega>0$ и $\int_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2dx<\infty.$ $\|\varphi\|=0$ тогда и только тогда когда $\varphi(x)=c_1\sin\omega x+c_2\cos\omega x+R_{m-3}(x)$, где $R_{m-3}(x)$ - многочлен степени $m-3$, $m\geq 2$.

В пространстве $K_2(P_m)$ для функционала ℓ и для любой функции $\varphi\in K_2(P_m)$ существует единственная функция $\psi_{\ell,K}\in K_2(P_m)$, которая является решением уравнения

$$\psi_{\ell,K}^{(2m)}(x)+2\omega^2\psi_{\ell,K}^{(2m-2)}(x)+\omega^4\psi_{\ell,K}^{(2m-4)}(x)=(-1)^m\ell(x), \tag{10}$$

с краевыми условиями

$$\left(\psi_{\ell,K}^{(m+s)}(x)+\omega^2\psi_{\ell,K}^{(m+s-2)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad s=0,1,...,m-1. \tag{11}$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Решение краевой задачи (10)-(11) в пространстве $K_2(P_m)$ является экстремальной функцией $\psi_{\ell,W}$ функционала погрешности ℓ и она имеет следующий вид

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_{m,W}(x)+d_1\sin\omega x+d_2\cos\omega x+R_{m-3}(x),$$

где d_1, d_2 - действительные числа, $R_{m-3}(x)$ - полином степени $m-3$, и

$$G_{m,K}(x)=\frac{(-1)^m\operatorname{sgn}x}{4\omega^{2m-1}}\Big((2m-3)\sin\omega x-\omega x\cos\omega x+2\sum_{k=1}^{m-2}\frac{(-1)^k(m-k-1)(\omega x)^{2k-1}}{(2k-1)!}\Big). \tag{12}$$

Далее, доказаны существование и единственность оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве $K_2(P_m)$.

Построение оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространствах $W_2^{(m,m-1)}$ и $K_2(P_m)$ приведены к систем линейных уравнений. Целью настоящей диссертации является нахождение аналитического решения этих систем. Для этого мы применяем метод Соболева, основанный на дискретных аналогах дифференциальных операторов. При этом нам требуются дискретные аналоги операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$.

Вторая глава диссертации, названная **«Дискретные аналоги дифференциальных операторов»** посвящена построению дискретных аналогов операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ и доказательству свойств построенных дискретных аналогов.

В первом параграфе второй главы приведены известные результаты по дискретному аналогу $D_m(h\beta)$ оператора d^{2m}/dx^{2m}. При построении оптимальных квадратурных формул и интерполяционных формул в пространстве $L_2^{(m)}$ нам требуется дискретный аналог $D_m(h\beta)$ оператора d^{2m}/dx^{2m}. Следующая явная формула для $D_m(h\beta)$ получена Х.М.Шадиметовым:

$$D_m(h\beta)=p\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_kq_k^{|\beta|-1} & \text{при} \quad |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k & \text{при} \quad |\beta|=1,\\ C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{q_k} & \text{при} \quad \beta=0,\end{cases}$$

где

$$p=\frac{(2m-1)!}{h^{2m}},\quad A_k=\frac{(1-q_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(q_k)},\quad C=-2^{2m-1},$$

$E_{2m-1}(x)$ - полином Эйлера-Фробениуса степени $2m-1$, q_k - корни полинома $E_{2m-2}(x)$, $|q_k|<1$, h - малый положительный параметр.

Кроме того, С.Л.Соболевым и Х.М.Шадиметовым изучены свойства дискретного оператора $D_m(h\beta)$.

Во втором параграфе второй главы решено следующее уравнение

$$D_{m,W}(h\beta)*G_{m,W}(h\beta)=\delta_d(h\beta), \tag{13}$$

где $G_{m,W}(h\beta)$ функция дискретного аргумента, соответствующая $G_{m,W}(x)$.

Справедлива следующая

Теорема 3. Дискретный аналог $D_{m,W}(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$, удовлетворяющий равенству (13), имеет вид:

$$D_{m,W}(h\beta)=\frac{1}{p_{2m-2}}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geqslant 2;\\ -2e^h+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1;\\ 2C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases}$$

где

$$C=1+(2m-2)e^h+e^{2h}+\frac{e^h\cdot p_{2m-3}}{p_{2m-2}},\quad A_k=\frac{2(1-\lambda_k)^{2m-2}[\lambda_k(e^{2h}+1)-e^h(\lambda_k^2+1)]p_{2m-2}}{\lambda_k\mathcal{P}_{2m-2}'(\lambda_k)},$$

$$\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)=\sum_{s=0}^{2m-2}p_s\lambda^s=(1-e^{2h})(1-\lambda)^{2m-2}-2(\lambda(e^{2h}+1)-e^h(\lambda^2+1))\times$$

$$\times\left[h(1-\lambda)^{2m-4}+\frac{h^3(1-\lambda)^{2m-6}}{3!}E_2(\lambda)+\ldots+\frac{h^{2m-3}E_{2m-4}(\lambda)}{(2m-3!)}\right],$$

p_{2m-2}, p_{2m-3} - коэффициенты многочлена $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$, λ_k - корни многочлена $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$, по модулю меньшие единицы, $E_k(\lambda)$ - многочлен Эйлера-Фробениуса степени k.

Изучены свойства оператора $D_{m,W}(h\beta)$ и доказана следующая

Теорема 4. Дискретный аналог $D_{m,W}(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ при $m=1,2,3$ удовлетворяет следующим равенствам:

1) $D_{m,W}(h\beta)*e^{h\beta}=0,$ 2) $D_{m,W}(h\beta)*e^{-h\beta}=0,$ 3) $D_{m,W}(h\beta)*(h\beta)^n=0$, $n\leq 2m-3$, 4) $D_{m,W}(h\beta)*G_{m,W}(h\beta)=\delta_d(h\beta)$.

Далее, в третьем параграфе второй главы, построен дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$, т.е. найдена функция $D_{m,K}(h\beta)$, который удовлетворяет следующему уравнению

$$D_{m,K}(h\beta)*G_{m,K}(h\beta)=\delta_d(h\beta), \tag{14}$$

где $G_{m,K}(h\beta)$ функция дискретного аргумента соответствующая $G_{m,K}(x)$, $m\geq 2$, $\omega>0$, $\delta_d(h\beta)$ - дискретная дельта-функция.

Справедлива следующая

Теорема 5. Дискретный аналог для дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$, удовлятворящий уравнению (14), имеет следующий вид

$$D_{m,K}(h\beta)=\frac{2\omega^{2m-1}}{(-1)^m p_{2m-2}}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases}$$

где

$$A_k=\frac{(1-\lambda_k)^{2m-4}(\lambda_k^2-2\lambda_k\cos h\omega+1)^2 p_{2m-2}}{\lambda_k P'_{2m-2}(\lambda_k)},\qquad C=4-4\cos h\omega-2m-\frac{p_{2m-3}}{p_{2m-2}},$$

$$p_{2m-2}=(2m-3)\sin h\omega-h\omega\cos h\omega+2\sum_{k=1}^{m-2}\frac{(-1)^k(m-k-1)(h\omega)^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$P_{2m-2}(\lambda)$ - известный полином степени $2m-2$, p_{2m-2},p_{2m-3} - коэффициенты и λ_k - корни полинома $P_{2m-2}(\lambda)$, $|\lambda_k|<1$.

Имеет место следующая

Теорема 6. Дискретный аналог $D_{m,K}(h\beta)$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ удовлетворяет следующим равенствам

1) $D_{m,K}(h\beta)*\sin(h\omega\beta)=0,$ 2) $D_{m,K}(h\beta)*\cos(h\omega\beta)=0,$

3) $D_{m,K}(h\beta)*(h\omega\beta)\sin(h\omega\beta)=0,$ 4) $D_{m,K}(h\beta)*(h\omega\beta)\cos(h\omega\beta)=0,$

5) $D_{m,K}(h\beta)*(h\beta)^{\alpha}=0,$ $\alpha=0,1,...,2m-5$.

В третьей главе диссертации, названной **«Коэффициенты оптимальных квадратурных формул и нормы их функционалов погрешностей»**, используя дискретные операторы $D_m(h\beta)$, $D_{m,W}(h\beta)$ и $D_{m,K}(h\beta)$, построены оптимальные квадратурные формулы вида (1) в гильбертовых пространствах $L_2^{(m)}$, $W_2^{(m,m-1)}$ и $K_2(P_m)$, а также исследованы их оценки погрешности.

Основной целью первого параграфа третьей главы является построение оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ с узлами

$$x_i=\eta_i h,\ x_{N-i}=1-\eta_i h,\ i=\overline{0,t-1},0\leq\eta_0<\eta_1<...<\eta_{t-1}<t,\ t\in\mathbb{N},$$

$$x_\beta=h\beta, t\leq\beta\leq N-t,\ h=\frac{1}{N},\quad t=\begin{cases}\frac{m}{2} & \text{при } m \text{ четном},\\ \left[\frac{m}{2}\right]+1 & \text{при } m \text{ нечетном},\end{cases}\tag{15}$$

используя метод Соболева и численный выбор параметров η_i, $i=\overline{0,t-1}$ для получения оптимальных квадратурных формул вида (1) с положительными коэффициентами. Здесь $[a]$ - является целой частью числа a.

Исследуя систему для оптимальных коэффициентов сначала мы доказали следующую лемму, которая позволяет получить явные формулы для оптимальных коэффициентов.

Лемма 1. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) с функционалом погрешности (2) и с узлами (15) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ удовлетворяют системе

$$\sum_{\beta=0}^{t-1} \overset{\circ}{C}_{\beta}\, \eta_{\beta}^{\alpha} = h\left(\sum_{\beta=1}^{t-1} \beta^{\alpha} + \frac{0^{\alpha}}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{(-1)^i q_k^{t+i} - q_k^{N-t+1}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i t^{\alpha} \right), \qquad (16)$$

Здесь $\alpha = \begin{cases} 0,2,4,...,m-2 & \text{при } m - \text{четном}, \\ 0,2,4,...,m-1 & \text{при } m - \text{нечетном}, \end{cases}$ $0^{\alpha} = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha \neq 0, \end{cases}$

$$t = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{когда } m \text{ четное}, \\ \left[\dfrac{m}{2}\right] + 1 & \text{когда } m \text{ нечетное}, \end{cases}$$

где $[a]$ - целая часть числа a, d_k - неизвестные параметры, q_k - корни многочлена Эйлера-Фробениуса $E_{2m-2}(q)$, $|q_k| < 1$.

С помощью леммы 1 для остальных коэффициентов оптимальных квадратурных формул вида (1) доказана следующая

Теорема 7. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) с функционалом погрешности (2) и с узлами (15) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ выражаются формулой

$$\overset{\circ}{C}_{\beta} = h\left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \left(q_k^{\beta} + q_k^{N-\beta} \right) \right), \ t \le \beta \le N - t,$$

где d_k, $(k = \overline{1, m-1})$ удовлетворяют следующей системе $m-1$ линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{i=1}^{j} \frac{-q_k^{t+1} + (-1)^i q_k^{N-t+i}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i 0^j = \frac{t^{j+1} - B_{j+1}}{j+1} - \sum_{\beta=0}^{t-1} \overset{\circ}{C}_{\beta} h^{-1} (t - \eta_{\beta})^j,$$

$$j = 1, 2, 3, ..., m-1,$$

здесь коэффициенты $\overset{\circ}{C}_{\beta} = \overset{\circ}{C}_{N-\beta}$ $(\beta = 0,1,...,t-1)$ определяются из системы (16), q_k - корни многочлена Эйлера-Фробениуса $E_{2m-2}(q)$, $|q_k| < 1$.

Далее, вычислен квадрат нормы функционала погрешности (2), который позволяет получить верхнюю оценку погрешности построенных оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Теорема 8. Квадрат нормы функционала погрешности (2) оптимальных квадратурных формул вида (1) с узлами (15) на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ имеет вид

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \,|\, L_2^{(m)*} \right\|^2 = (-1)^{m+1} \left[\frac{h^{2m} B_{2m}}{(2m)!} + \frac{2h^{2m+1}}{(2m)!} \left\{ \sum_{\beta=0}^{t-1} \left(\overset{\circ}{C}_\beta \, h^{-1} \eta_\beta^{2m} - \beta^{2m} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{i=0}^{2m} \frac{(-1)^i q_k^{t+i} - q_k^{N-t+1}}{(q_k - 1)^{i+1}} \Delta^i t^{2m} \right\} \right],$$

где B_α - числа Бернулли, $\overset{\circ}{C}_\beta$, $\beta = \overline{0, t-1}$ определяются из системы (16), q_k - корни многочлена Эйлера-Фробениуса $E_{2m-2}(q)$, $|q_k| < 1$, η_β, $\beta = \overline{0, t-1}$ определяются из (14), $\Delta^i t^{2m}$-конечная разность порядка i от t^{2m}, d_k - определены в Теореме 7.

Следует отметить, что когда узлы (15) равноотстоящие, т.е. когда в (15) параметры $\eta_0 = 0, \eta_1 = 1, ..., \eta_{t-1} = t-1$, то из теорем 7 и 8 получим результаты некоторых работ А.Сарда, М.Ф.Мейерса, Г.Комана, И.Шёнберга, С.Д.Силлимана, С.Л.Соболева, Ф.Загирова, Х.М.Шадиметова и П.Кохлера.

Во втором параграфе третьей главы диссертации построены оптимальные квадратурные формулы вида (1) в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m,m-1)}$. При этом используется дискретный оператор $D_{m,W}(h\beta)$, построенный во втором параграфе второй главы диссертации. Следует отметить, что построенные оптимальные квадратурные формулы являются точными для полиномов степени $\le m-2$ и для функции e^{-x}.

Случай $m = 1$ рассмотрен отдельно, и доказана следующая

Теорема 9. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(1,0)}(0,1)$ выражаются следующими формулами

$$\overset{\circ}{C}_\beta = \begin{cases} \dfrac{e^h - 1}{e^h + 1}, & \beta = 0, N, \\ \dfrac{2(e^h - 1)}{e^h + 1}, & \beta = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

где $h = 1/N$, $N = 1, 2, ...$

Далее, для случаев $m \ge 2$ получены явные формулы оптимальных коэффициентов и доказана следующая

Теорема 10. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) с функционалом погрешности (2) и с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ при $m \ge 2$ и $N + 1 \ge m$ выражаются формулами

$$\overset{\circ}{C}_0 = \frac{e^h - 1 - h}{e^h - 1} + \sum_{k=1}^{m-1} \Big(a_k \frac{\lambda_k (e^h - e) + \lambda_k^2 (e - 1) + \lambda_k^{N+1} (1 - e^h)}{(e-1)(1-\lambda_k)(e^h - \lambda_k)} +$$

$$+ b_k \frac{\lambda_k^{N+1} (e^h - e) + \lambda_k^N (e - 1) + \lambda_k (1 - e^h)}{(e-1)(\lambda_k - 1)(\lambda_k e^h - 1)} \Big),$$

$$\overset{\circ}{C}_{\beta} = h + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k\lambda_k^{\beta} + b_k\lambda_k^{N-\beta}\right), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_{N} = \frac{e^h h + 1 - e^h}{e^h - 1} + \sum_{k=1}^{m-1}\Big(a_k \frac{\lambda_k(e - e^{h+1}) + \lambda_k^N(e^{h+1} - e^h) + \lambda_k^{N+1}(e^h - e)}{(e-1)(1-\lambda_k)(e^h - \lambda_k)} + \\ + b_k \frac{\lambda_k^{N+1}(e - e^{h+1}) + \lambda_k^2(e^{h+1} - e^h) + \lambda_k(e^h - e)}{(e-1)(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big),$$

где a_k, b_k и λ_k $(k = \overline{1, m-1})$ известные величины.

Кроме того, исследована оценка погрешности построенной оптимальной квадратурной формулы, т.е. вычислен квадрат нормы оптимального функционала погрешности на пространстве $W_2^{(1,0)}$ и доказано, что оптимальная квадратурная формула в пространстве $W_2^{(1,0)}$ является асимптотически оптимальной в пространстве $L_2^{(1)}$.

В третьем параграфе третьей главы диссертации найдены явные формулы для коэффициентов оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве $K_2(P_m)$. При этом применен дискретный аналог $D_{m,K}(h\beta)$, построенный в третьем параграфе второй главы диссертации. Полученные оптимальные квадратурные формулы являются точными и для многочленов степени $\le m-3$ и для тригонометрических функций $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$.

Основным результатом является следующая

Теорема 11. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве $K_2(P_m)$ при $m \ge 3$ и $N+1 \ge m$ выражаются формулами

$$\overset{\circ}{C}_{0} = \frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} m_k\Big(\frac{\lambda_k - \lambda_k^N}{\lambda_k - 1}\Big), \qquad \overset{\circ}{C}_{N} = \frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} m_k\Big(\frac{\lambda_k - \lambda_k^N}{\lambda_k - 1}\Big),$$

$$\overset{\circ}{C}_{\beta} = h + \sum_{k=1}^{m-1} m_k\left(\lambda_k^{\beta} + \lambda_k^{N-\beta}\right), \quad \beta = 1, 2, ..., N-1,$$

где m_k, λ_k $(k = \overline{1, m-1})$ известные величины.

Кроме того, вычислен квадрат нормы оптимального функционала погрешности в случаях $m = 2,3$. Доказано, что оптимальные квадратурные формулы, построенные в пространстве $K_2(P_m)$ являются асимптотически оптимальными в пространстве Соболева $L_2^{(m)}$.

Четвертая глава диссертации, названная **«Оптимальные интерполяционные формулы в пространствах дифференцируемых функций»**, посвящена построению интерполяционных L сплайнов и оптимальных интерполяционных формул. Здесь найдены явные формулы для коэффициентов интерполяционных сплайнов минимизирующих полу нормы в гильбертовых пространствах $L_2^{(m)}$, $W_2^{(m,m-1)}$ и $K_2(P_m)$, также построены оптимальные интерполяционные формулы в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических $n-$переменных функций.

Так как результаты настоящей диссертации связаны с обобщенными сплайнами, приведем их определение следуя монографии Алберга, Нильсона, Уолша.

Пусть $L-$линейный дифференциальный оператор, заданный формулой

$$L \equiv a_m(x)D^m + a_{m-1}(x)D^{m-1} + ... + a_0(x),$$

где функции $a_j(x)$ ($j = 0,1,...,m$) принадлежат $C^j[a,b]$ и $a_m(x) \neq 0$ на $[a,b]$. Обозначим через L^* оператор, формально сопряженный L:

$$L^* \equiv (-1)^m a_m(x)D^m + (-1)^{m-1}a_{m-1}(x)D^{m-1} + ... + a_0(x).$$

Если на отрезке $[a,b]$ задана сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$, то обобщенным сплайном (или $L-$сплайн) дефекта k $(0 \leq k \leq m)$ относительно сетки Δ называется функция $S_\Delta(x)$ из класса $W^{P_{2m-k}}L_2$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $L^*LS_\Delta = 0$ на каждом открытом интервале (x_{i-1}, x_i) $(i = 1,2,...,N)$. Обычный сплайн (дефекта 1) допускает разрывы $2m-1$-й производной, но только в узлах сетки.

Из результатов работ Алберга, Нильсона, Уолша известно, что для обобщенного сплайна дефекта 1 справедливо следующее утверждение: пусть даны сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ и последовательность $Y = \{y_i, i = 0,1,...,N\}$. Среди всех функций $f(x)$, принадлежащих классу $W^{P_m}L_2$ и таких, что $f(x_i) = y_i$, $i = 0,1,...,N$, обобщенный сплайн $S_\Delta(Y,x)$, если он существует, минимизирует интеграл $\int\limits_a^b \left(Lf(x)\right)^2 dx$.

Далее, в настоящей главе мы получаем явные формулы для коэффициентов обобщенных сплайнов дефекта 1 в пространствах $L_2^{(m)}$, $W_2^{(m,m-1)}$ и $K_2(P_m)$, которые очень удобны для применения.

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу.

Задача 3. Найти функцию $S_m(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$, которая дает минимум величине $\int\limits_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx$ и удовлетворяет интерполяционным условиям

$$S_m(x_\beta) = \varphi(x_\beta), \ \beta = 0,1,...,N,$$

где $x_\beta \in [0,1]$ - узлы интерполяции и $\varphi(x_\beta)$ заданные значения.

Следуя результатам работ В.А.Василенко, получаем аналитическое представление интерполяционного сплайна $S_m(x)$

$$S_m(x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_m(x - x_\gamma) + P_{m-1}(x),$$

где C_γ, $\gamma = 0,1,...,N$ - действительные числа, $P_{m-1}(x) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha x^\alpha$ - многочлен степени $m-1$ и $G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!}$.

В первом параграфе четвертой главы, используя метод Соболева, основанный на дискретном аналоге $D_m(h\beta)$ оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, получаем явные формулы коэффициентов интерполяционного сплайна $S_m(x)$, которые являются решением задачи 3. Следует отметить, что этот интерполяционный сплайн является точной для многочленов степени $\leq m-1$.

Справедлива следующая

Теорема 12. Коэффициенты интерполяционного сплайна $S_m(x)$, с равноотстоящими узлами в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, имеют следующий вид

$$C_0 = hp\left[C\varphi(0) + \varphi(h) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^- \cdot (-h)^\alpha\right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^\gamma \varphi(h\gamma) + M_k + q_k^N N_k\right],$$

$$C_\beta = hp[\varphi(h\beta - h) + C\varphi(h\beta) + \varphi(h\beta + h)] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma) + q_k^\beta M_k + q_k^{N-\beta} N_k\right],$$

$\beta = 1,2,...,N-1,$

$$C_N = hp\left[C\varphi(1) + \varphi(1-h) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^+ \cdot (1+h)^\alpha\right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma) + q_k^N M_k + N_k\right],$$

$$p_\alpha = \frac{1}{2}\left(p_\alpha^+ + p_\alpha^-\right), \quad \alpha = 0,1,...,m-1,$$

где $\Delta^i 0^\alpha = \sum_{l=1}^{i} (-1)^{i-l} C_i^l l^\alpha$ и M_k, N_k, p, C, A_k, $q_k, p_\alpha^-, p_\alpha^+$, $\alpha = 0,1,...,m-1$ известные величины.

В частности, в случаях $m=1$ и $m=2$, из последней теоремы получим известные интерполяционные линейный сплайн $S_1(x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \frac{|x-h\gamma|}{2} + p_0$ и кубический сплайн $S_2(x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \frac{|x-h\gamma|^3}{12} + p_1 x + p_0$, которые минимизируют $\int_0^1 (\varphi'(x))^2 dx$ и $\int_0^1 (\varphi''(x))^2 dx$ величины, соответственно в пространствах $L_2^{(1)}(0,1)$ и $L_2^{(2)}(0,1)$.

Во втором параграфе четвертой главы диссертации решена следующая

Задача 4. Найти функцию $S_{m,W}(x) \in W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, которая даёт минимум величине $\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x))^2 dx$ и удовлетворяет условиям интерполяции

$$S_{m,W}(x_\beta) = \varphi(x_\beta), \ \beta = 0,1,...,N,$$

где $x_\beta \in [0,1]$ - узлы интерполяции и $\varphi(x_\beta)$ известны.

Интерполяционный сплайн $S_{m,W}(x)$, который является решением задачи 4, имеет вид

$$S_{m,W}(x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_{m,W}(x - x_\gamma) + \sum_{i=0}^{m-2} r_i x^i + de^{-x},$$

где C_γ, $\gamma = 0,1,...,N$, r_i, $i = 0,1,...,m-2$, d - действительные числа, $G_{m,W}(x)$ определяется равенством (9).

Следует отметить, что интерполяционный сплайн $S_{m,W}(x)$ является точным для функции e^{-x} и для любого многочлена степени $m-2$.

Имеет место следующая

Теорема 13. Коэффициенты интерполяционного сплайна $S_{m,W}(x)$ с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$C_0 = \frac{2C}{p}\varphi(0) - \frac{2e^h}{p}\left[\varphi(h) + a^- e^h + \sum_{i=0}^{m-2} r_i^-(-h)^i\right] + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k p}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^\gamma \varphi(h\gamma) + M_k + \lambda_k^N N_k\right],$$

$$C_\beta = \frac{2C}{p}\varphi(h\beta) - \frac{2e^h}{p}[\varphi(h(\beta-1)) + \varphi(h(\beta+1))] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k p}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma) + \lambda_k^\beta M_k + \lambda_k^{N-\beta} N_k\right], \quad \beta = 1,2,...,N-1,$$

$$C_N = \frac{2C}{p}\varphi(1) - \frac{2e^h}{p}\left[\varphi(h(N-1)) + \frac{a^+}{e^{1+h}} + \sum_{i=0}^{m-2} r_i^+(1+h)^i\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k p}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma) + \lambda_k^N M_k + N_k\right],$$

$$r_i = \frac{1}{2}\left(r_i^- + r_i^+\right), \ i = 0,1,...,m-2, \qquad d = \frac{1}{2}\left(\varphi(0) - r_0^- + e\varphi(1) - e\sum_{i=0}^{m-2} r_i^+\right),$$

где $\Delta^\nu 0^i = \sum_{l=1}^{\nu}(-1)^{\nu-l}\begin{pmatrix}\nu\\ l\end{pmatrix} l^i$ и M_k, N_k, p, C, A_k, λ_k, a^-, a^+, r_i^-, r_i^+, $i = 0,1,...,m-2$ известные величины.

При $m = 2$ получаем интерполяционный экспоненциальный сплайн с коэффициентом нагрузки 1.

В третьем параграфе четвертой главы исследована

Задача 5. Найти функцию $S_{m,K}(x) \in K_2(P_m)$, которая даёт минимум величине $\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \omega^2 \varphi^{(m-2)}(x))^2 dx$ и удовлетворяет условиям интерполяции

$$S_{m,K}(x_\beta) = \varphi(x_\beta), \ \beta = 0,1,...,N,$$

где $x_\beta \in [0,1]$ - узлы интерполяции, $\varphi(x_\beta)$ - заданные значения.

Аналитическое представление интерполяционного сплайна $S_{m,K}(x)$ следующая:

$$S_{m,K}(x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_{m,K}(x - x_\gamma) + d_1 \sin(\omega x) + d_2 \cos(\omega x) + R_{m-3}(x),$$

где C_γ, $\gamma = 0,1,...,N$, d_1 и d_2 - действительные числа, $R_{m-3}(x) = \sum_{\alpha=0}^{m-3} r_\alpha x^\alpha$ - многочлен степени $m-3$ и $G_{m,K}(x)$ определяется равенством (12).

Отметим, что интерполяционный сплайн $S_{m,K}(x)$ является точным для функций $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$ и для любого многочлена степени $m-3$.

Далее, получаем точные формулы для коэффициентов интерполяционного сплайна $S_{m,K}(x)$. Результатом является следующая

Теорема 14. Коэффициенты интерполяционного сплайна $S_{m,K}(x)$, с равноотстоящими узлами в пространстве $K_2(P_m)$, имеют следующий вид

$$C_0 = p\left[C\varphi(0) + \varphi(h) - d_1^- \sin(h\omega) + d_2^- \cos(h\omega) + \sum_{\alpha=0}^{m-3} r_\alpha^- \cdot (-h)^\alpha\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k p}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^\gamma \varphi(h\gamma) + M_k + \lambda_k^N N_k\right],$$

$$C_\beta = p\left[\varphi(h\beta - h) + C\varphi(h\beta) + \varphi(h\beta + h)\right] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k p}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{|\beta-\gamma|} \varphi(h\gamma) + \lambda_k^\beta M_k + \lambda_k^{N-\beta} N_k\right],$$

$\beta = 1, 2, ..., N-1,$

$$C_N = p\Big[C\varphi(1) + \varphi(1-h) + d_1^+ \sin(\omega + h\omega) + d_2^+ \cos(\omega + h\omega) +$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{m-3} r_\alpha^+ \cdot (1+h)^\alpha\Big] + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_k p}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_k^{N-\gamma} \varphi(h\gamma) + \lambda_k^N M_k + N_k\right],$$

$$d_i = \frac{1}{2}\left(d_i^+ + d_i^-\right),\ i = 1,2, \qquad r_\alpha = \frac{1}{2}\left(r_\alpha^+ + r_\alpha^-\right),\ \alpha = 0,1,...,m-3,$$

где $\Delta^i 0^\alpha = \sum_{l=1}^{i} (-1)^{i-l} C_i^l l^\alpha$ и M_k, N_k, p, C, A_k, λ_k, d_i^-, d_i^+, $i = 1,2$, r_α^-, r_α^+, $\alpha = 0,1,...,m-3$ известные величины.

В четвертом параграфе четвертой главы диссертации построены оптимальные интерполяционные формулы в пространстве Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических $n-$ переменных функций. Напомним определение пространства Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических n- переменных функций.

Пусть функции φ имеют в $\mathbb{R}^n$ локально суммируемые производные порядка m и для ограниченной области Ω_0 следующий интеграл ограничен

$$\int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx,$$

где α - мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$. Положим, что $2m > n$ и φ - периодическая функция с матрицей периодов H, т.е. $\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n$, где γ - любой целозначный вектор столбец, H - матрица $n \times n$ с единичным детерминантом. Матрице H соответствует ее фундаментальный параллелепипед Ω_0 следующим образом

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = Hy, \text{ где } 0 \le y_j < 1, \ j = 1,2,...,n\}.$$

Элементы пространства $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ являются функциями, отличающимися друг от друга на постоянное число. Норма функций в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ определяется формулой

$$\left\| \varphi \mid \widetilde{L_2^{(m)}}(H) \right\| = \left[\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k(x) \varphi(x^{(k)}) \tag{17}$$

в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$, точки $x^{(k)} \in \Omega_0$ и параметры $C_k(x)$ соответственно называются *узлами* и *коэффициентами* интерполяционной формулы (17).

Разность $\varphi(x) - P_\varphi(x)$ называется погрешностью интерполяционной формулы (17). Значение этой погрешности на некоторой точке z является линейным функционалом над функциями φ, т.е.

$$(\ell, \varphi) \equiv \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \varphi(x^{(k)}) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} \left[\left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \delta(x - x^{(k)}) \right) * \phi_0(H^{-1}x) \right] \varphi(x) dx,$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, $\phi_0(H^{-1}x) = \sum\limits_{\beta} \delta(x - H\beta)$,

$$\ell(x) = \left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) \delta(x - x^{(k)}) \right) * \phi_0(H^{-1}x) \tag{18}$$

- функционал погрешности интерполяционной формулы (17) и принадлежит пространству $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$. Пространство $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ состоит из всех периодических функционалов (18), которые ортогональны единице, т.е.

$$(\ell, 1) = 0.$$

По неравенству Коши-Шварца $|(\ell, \varphi)| \le \left\| \varphi \mid \widetilde{L_2^{(m)}}(H) \right\| \cdot \left\| \ell \mid \widetilde{L_2^{(m)*}}(H) \right\|$ погрешность (18) формулы (17) оценивается с помощью нормы

$$\left\| \ell \mid \widetilde{L_2^{(m)*}}(H) \right\| = \sup_{\left\| \varphi | \widetilde{L_2^{(m)}}(H) \right\| = 1} \left| (\ell, \varphi) \right|$$

функционала погрешности (18). Следовательно, оценка погрешности интерполяционной формулы (17) на функциях пространства $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ приводится к нахождению нормы функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$.

Следовательно отсюда мы получаем следующую задачу.

Задача 6. Найти норму функционала погрешности ℓ *интерполяционной формулы* (17) *в пространстве* $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$.

Ясно, что норма функционала погрешности ℓ зависит от коэффициентов $C_k(z)$ и узлов $x^{(k)}$. *Оптимальной интерполяционной формулой* называется такая формула, которая при заданном числе N узлов функционал погрешности имеет минимальную норму в $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$. Если узлы $x^{(k)}$ являются точками решетки, т.е. расположены в точках вида $x^{(k)}=hHk$ тогда такая интерполяционная формула называется *решетчатой интерполяционной формулой*. Здесь h - малый положительный параметр и называется *шагом решетки*.

Основной целью настоящего параграфа является построить решетчатую оптимальную формулу в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ для узлов $x^{(k)}=hHk$, т.е. решить следующую задачу.

Задача 7. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_k(z)$, удовлетворяющие слудующему равенству

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\,|\,\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\right\|=\inf_{C_k(z)}\left\|\ell\,|\,\widetilde{L_2^{(m^*)}}(H)\right\|$$

при $x^{(k)}=hHk$.

Основным результатом настоящего параграфа является следующая

Теорема 15. В пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ существует единственная решетчатая оптимальная интерполяционная формула вида (17) с функционалом погрешности (18) коэффициенты которые определяются формулой

$$\overset{\circ}{C}([\beta];z)=h^n\left(1+\sum_{\gamma\neq0}\frac{\exp(2\pi iH^{-1}(Hh\beta^*-z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}}\cdot K(\gamma)\right),$$

где $K(\gamma)=\left[\sum_{\substack{t\\ t\neq h\gamma}}\frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t-\gamma)|^{2m}}\right]^{-1}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда и оптимальных интерполяционных формул, а также вычислению оценки их погрешностей в различных пространствах дифференцируемых функций.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Найдены экстремальные функции функционалов погрешностей квадра-турных формул в пространствах $W_2^{(m,m-1)}$ и $K_2(P_m)$ и интерполяционных формул в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$.

2. Вычислены нормы функционалов погрешностей квадратурных формул в пространствах $W_2^{(m,m-1)}$, $K_2(P_m)$ и интерполяционных формул в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$.

3. Получены линейные системы для коэффициентов оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в пространствах $W_2^{(m,m-1)}$, $K_2(P_m)$ и $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$. Доказаны существование и единственность решений этих систем, а также показано, что в соответствующих пространствах эти решения дают минимум нормам функционалов погрешностей.

4. Построены дискретные аналоги $D_{m,W}(h\beta)$ и $D_{m,K}(h\beta)$ операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$.

5. Построены оптимальные квадратурные формулы с положительными коэффициентами и вычислена норма оптимального функционала погрешности в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

6. Построены оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, которые точны для полиномов не выше степени $m-2$ и для функции e^{-x}.

7. Получены явные формулы для коэффициентов оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда в пространстве $K_2(P_m)$. Полученные оптимальные квадратурные формулы точны для многочленов $\le m-3$ и тригонометрических функций $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$.

8. При $m=2,3$ доказано, что оптимальные квадратурные формулы построенные в пространстве $K_2(P_m)$ являются асимптотически оптимальными в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

9. Построены интерполяционные сплайны, минимизирующие полунорму в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и $K_2(P_m)$.

10. Построены решетчатые оптимальные интерполяционные формулы в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических n переменных функций.

SCIENTIFIC COUNCIL 14.07.2016.FM.01.01 ON AWARD
OF SCIENTIFIC DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES
AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

INSTITUTE OF MATHEMATICS
NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KHAYOTOV ABDULLO RAKHMONOVICH

OPTIMAL APPROXIMATION OF ERRORS FUNCTIONALS OF QUADRATURE AND INTERPOLATION FORMULAS IN THE SPACES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

01.01.03 – Computational and discrete mathematics
(Physical and Mathematical Sciences)

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent – 2016

The subject of doctoral dissertation is registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number №30.09.2014/B2014.5.FM131.

Doctoral dissertation is carried out at Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian and English) is placed on web pages of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and information-educational portal «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Scientific adviser:	**Shadimetov Kholmat Makhkambaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Erich Novak** Professor (Jena University, Germany)
	Aloev Rakhmatillo Djuraevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Soleev Ahmadjon Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Institute of mathematics of the University of Santiago de Compostela** (Spain)

Defense will take place «____» _____________2016 at _____ at the meeting of Scientific Council number 14.07.2016.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2016 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2016 year)

A.A. Abdushukurov
Chairman of Scientific Council on award of scientific
degree of Doctor of Sciences, D.F.M.S., Professor

G.I. Botirov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of
scientific degree of Doctor of Sciences, C.F.M.S.

R.D. Aloev
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council
on award of scientific degree of Doctor of Sciences,
D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

Actuality and demand of the theme of dissertation. Solutions of problems arising from the many scientific and applied researches, carried out in the world level, can be reduced to integral and differential equations. They are approximately solved mainly using quadrature and interpolation formulas. There are algebraic and variation approaches for constructing such formulas. The first algebraic formulas are the Newton-Cotes and Gauss type quadrature formulas and the Lagrange and Newton interpolation polynomials. Based on the theory of variation approach constructing such formulas were worked out by scientists of USA and Russia. Development of new algorithms for constructing optimal formulas and spline interpolations as well as an estimation of their errors in different classes of functions, based on algebraic and variation approaches, is one of the important problems of computational mathematics.

In our country in the years of independence great attention is given to directions which have applied sense, in particular, on the theory of cubature formulas of computational mathematics, special attention was paid to construction of cubature formulas with high accuracy and algebraic invariant under transformations of the group of rotations of a regular polyhedron, and the formulas of Gauss type based on the theory of orthogonal polynomials. The significant results have been achieved by the construction of lattice optimal cubature formulas in Sobolev spaces of one and several variables, periodic and non-periodic functions whose derivatives are square integrable.

At the present time, construction of optimal quadrature, cubature formulas and interpolation splines in Hilbert spaces of differentiable functions plays an important role for approximate solution of differential and integral equations and their systems, which are considered as the highly accurate mathematical models of natural processes. In this regard, the implementation of targeted researches, in particular, researches in the following areas is one of the most important tasks: construction of lattice asymptotic optimal cubature formulas; development of cubature formulas which are based on Monte-Carlo methods; construction of optimal quadrature, cubature formulas and estimation their errors; construction of splines minimizing certain functionals in different Hilbert and Banach spaces of periodic and nonperiodic functions. Investigations conducted by the above-mentioned scientific research directions, confirm actuality of the theme of the thesis.

Investigations of this thesis in a certain extent are the challenges identified in the Republic of Uzbekistan Presidential Decree No. PD-436 of 7 August 2006 «On measures to improve the coordination and management of the development of science and technology», No. PD-916 from July 15, 2008 «On additional measures to stimulate innovative projects and technologies» and other normative-legal acts of fundamental sciences.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This work was performed in accordance with the priority direction of development of sciences and technologies of the Republic of Uzbekistan IV. «Mathematics, Mechanics and Informatics».

A review of foreign scientific research on the theme of the dissertation[3].

Investigations on the construction of quadrature, cubature formulas and splines as well as to study the estimation of their errors are maintained in scientific centers and universities of the world, in particular: Institute of mathematics of Friedrich-Schiller-Universität Jena, Institute of mathematics of Universität Mannheim, Technische Universität Braunschweig (Germany), Universita degli Studi di Roma La Sapienza, Universita della Basilicata (Italy), University of Meryland, Kettering University, Columbia University, Harvard University, Purdue University, Venderbild University (USA), University of Oslo (Norway), Katholieke Universiteit, Leuven (Belgium), Universidad de Zaragoza, Universidad Pública de Navarra (Spain), Universite de Toulouse, Université Joseph Fourier (France), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Serbia), Babeş-Bolyai University (Romania), Institute of mathematics of Siberian division of Russian Academy of Sciences, Mathematical institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Saint-Petersburg, Novosibirsk state universities, Institute of computational mathematics of Russian Academy of Sciences, Institute of mathematics with computational center of Ufa scientific center, Siberian federal university (Russia), Dnepropetrovsk state university (Ukraine), Kazakh national university (Kazakhstan).

As a result of scientific investigations, conducted by construction of cubature and quadrature formulas, interpolation and smooth splines and by study of the error estimate of the constructed formulas, in the world the series actual problems were solved, in particular, there are obtained the following scientific results: the error estimations of cubature formulas which are constructed by Monte Carlo method in weighted Sobolev spaces are obtained (Institute mathematics of Jena University (Germany), Columbia University (USA)); using spline functions and based on $\varphi-$function methods in different Hilbert spaces, defined on linear differential operators, optimal quadrature formulas in the sense of Sard are constructed (Columbia University, University of Maryland, University of Wisconsin-Madison (USA), Technische Universität Braunschweig (Germany), Babes-Bolyai University (Romania), Universita degli Studi di Roma La Sapienza (Italy)); using methods of functional analysis existence and uniqueness are proved and the theory of construction of D^m-splines, L-splines and abstract splines in different Hilbert spaces is worked out (University of Wisconsin-Madison, Harvard University, Purdue University, Vanderbilt University (USA), University of Oslo (Norway), Université Joseph Fourier (France), Institute of computational mathematics and mathematical geophysics (Russia)); Gauss type quadrature formulas for regular and high oscillating integrals are constructed (Mathematical

---

[3] Review of foreign scientific research on the theme of the dissertation is worked out based on the sources: Journal of Approximation Theory, Applied Mathematics and Computation, Journal of Computational and Applied Mathematics http://www.journals.elsevier.com/mathematics; Calcolo, Numerical Algorithms, BIT Numerical Mathematics, Siberian journal of Numerical Mathematics, Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, http://www.springer.com/mathematics,

institute of Serbian Academy of Sciences and Arts); the Wiener-Hopf type system for coefficients of optimal lattice cubature formulas on $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ space is obtained as well as existence and uniqueness of the solution of the system is proved (Institute of mathematics of Siberian division of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk state university (Russia), Institute of mathematics at National University of Uzbekistan); sufficient conditions of asymptotic optimality of cubature formulas with limited boundary layer are found, algorithm for finding of coefficients such cubature formulas is worked out (Institute of mathematics with computational center of Ufa scientific center); theory of asymptotic optimal cubature formulas are generalized to $L_p^{(m)}(\Omega)$ spaces (Saint-Petersburg state university, Siberian federal university); class of effective cubature formulas are constructed on three dimensional sphere (Institute of computational mathematics of Russian Academy of Sciences); in the spaces $\widetilde{W}_p^m$ and W_p^m of periodic and nonperiodic function the best quadrature formulas are constructed and the estimation of their error are calculated (Mathematical institute of Russian Academy of Sciences (Russia), Dnepropetrovsk state university (Ukraina), Kazakh national university (Kazakhstan), Kliment Ohridski University of Sofia (Bolgaria)).

Nowadays in the world a number of priority scientific investigations have been carried out on construction of quadrature, cubature formulas and interpolation splines, and their applications, namely: finding the extremal functions of error functionals of quadrature, cubature formulas and interpolation splines in Hilbert spaces of differentiable functions; calculation norms of error functionals of the relevant formulas and splines using found extremal functions; study the existence and uniqueness of the optimal quadrature, cubature formulas and interpolation splines; the development of new algorithms for constructing optimal cubature formulas and interpolation splines based on discrete operators, as well as finding the explicit forms of optimal coefficients.

The degree of scrutiny of the problem. The construction of quadrature formulas and the study of their error estimates based on the methods of functional analysis, was first given in scientific works of A.Sard and S.M.Nikol’skii, and the appearance of the theory of cubature formulas was associated with investigation of S.L.Sobolev. In different spaces in one dimensional case works of S.M.Nikol’skii, N.P.Korneychuk, N.E.Lushpay, T.N.Busarova, B.Bojanov, V.P.Motorniy, A.A.Ligun, A.A.Zhensikbaev, K.I.Oskolkov, M.A.Chakhkiev, T.A.Grankina are devoted to this problem. In the spaces of multivariate functions the invariant and asymptotic optimal cubature formulas were constructed by S.L.Sobolev, V.I.Lebedev, I.P.Mysovskikh, M.D.Ramazanov, V.I.Polovinkin, O.V.Besov, T.B.Shoynjurov, M.V.Noskov, N.I.Blinov, L.V.Voytishek, V.L.Vaskevich, G.N.Salikhov, M.I.Israilov, S.Sh.Shushbaev, G.P.Ismatullaev. E.Shamsiev and numerical integration formulas based on Monte-Carlo methods were constructed in works of N.S.Bakhvalov, S.M.Ermakov, I.M.Sobol, N.N.Chentsov, G.A.Mikhaylov, A.S.Rasulov, E.Novak and H.Wozniakovski.

There are spline method, $\varphi-$function method and Sobolev method of construction of formulas obtained by minimizing the norm of the error functional at fixed nodes. A.Sard, L.F.Meyers, G.Coman, I.Schoenberg, S.D.Silliman, P.Kohler, based on spline method, and A.Ghizzetti, A.Ossicini, F.Lanzara, T.Catinas, G.Coman using $\varphi-$function method constructed optimal quadrature formulas in the space $L_2^{(m)}$. In construction of optimal cubature formulas by Sobolev method the results of Sobolev, on finding the coefficients of optimal quadrature formulas, generalized some above-mentioned investigations in which spline method was used. In the space $L_2^{(m)}$ Sobolev's algorithm was realized by Z.Zh.Zhamalov, F.Y.Zagirova, Kh.M.Shadimetov, A.R.Hayotov and others.

The first spline functions were bonded from pieces of cubic polynomials. Further, this construction was modified, degree of polynomial was increased, boundary values are changed, but the idea remains changeless. The next step in the spline theory is D.Holladay's result connecting I.Schoenberg's cubic spline with the solution of the problem on minimum of the function norm from the space $L_2^{(2)}$. Further, C. de Boor generalized D.Holladay's result. These results have aroused great interest and then appeared a large number of works where depending on the specific requirements the variational functional was modified. The theory of splines, based on variational methods, were studied and developed in works of J.Alberg, E.Nilson, J.Wolsh, P.J. Laurent, I.J.Schoenberg, C. de Boor, R.Arcangeli, M.C.Lopez de Silanes, J.J.Torres, V.A.Vasilenko, M.Attea, Barlinet, C.Tomas-Agnan, L.L.Schumaker, T.Lyche, B.Bojanov, S.B.Stechkin, Y.N.Subbotin, M.I.Ignatev, A.B.Pevniy, G.Nurnberger, A.Y.Bezhaev, Kh.M.Shadimetov, A.R.Hayotov.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation work was performed in accordance with the plan of scientific researches FA-F1-F004+F014 «Theories of cubature formulas, splines and numerical modelling of prediction processes of the real state and security of responsible structures» (2007-2011), F4-FA-F013 «Non-associative and operator algebras, dynamical systems and their application in statistical physics and population biology» (2012-2016) of Institute of Mathematics at National University of Uzbekistan.

The aim of the research is construction of optimal quadrature formulas and interpolation splines minimizing semi-norms in Hilbert spaces and calculation of norms of their optimal error functionals.

Research problems:

to find extremal functions of the error functionals of quadrature and interpolation formulas in Hilbert spaces;

to get expressions for the square of the norm of the error functional on Hilbert spaces;

to get a linear system for optimal coefficients applying Lagrang's method, to study conditions of existence and uniqueness of a solution of the obtained system;

to construct the discrete analogues of certain differential operators;

to construct optimal formulas using methods which are based on discrete analogues of the differential operators in the spaces of differentiable functions;

to calculate norms of error functionals of the constructed optimal quadrature and interpolation formulas.

The object of research - the boundary value problems for extremal functions of error functional in the space of differentiable functions, quadrature formulas, interpolation formulas and spline functions.

The subject of research - extremal functions, system of linear equations of Weiner-Hopf type for optimal coefficients, optimal interpolation formulas and splines minimizing semi-norms in Hilbert spaces.

Methods of research. In the dissertation work methods of computational mathematics, functional analysis, and theory of complex variable functions, discrete argument functions and differential equations are used.

Scientific novelty consists of the following:

extremal functions of the error functionals of quadrature and interpolation formulas in the spaces $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, $K_2(P_m)$ and $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ are found;

norms of the errors functionals for quadrature and interpolation formulas on the spaces $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, $K_2(P_m)$ and $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ are calculated;

linear systems of algebraic equations of Weiner-Hopf type for coefficients of optimal quadrature formulas in the spaces $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ and $K_2(P_m)$ and optimal interpolation formulas in the Sobolev space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ of periodic n variable functions are obtained;

conditions of existence and uniqueness of solutions of the obtained systems are found;

the discrete analogues of the differential operators $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ and $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 2\omega^2 \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} + \omega^4 \frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ are constructed and their properties are proved;

in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ the optimal quadrature formulas with positive coefficients are constructed and the norm of optimal error functional is calculated;

optimal quadrature formulas in the sense of Sard in the spaces $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ and $K_2(P_m)$ are constructed and for $m = 1, 2$ and 3 estimations of errors of the constructed optimal quadrature formulas are obtained;

explicit formulas for interpolation splines minimizing seminorms in the spaces $L_2^{(m)}(0,1)$, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ and $K_2(P_m)$ are found.

optimal interpolation formulas in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ of periodic n variable functions are constructed.

Practical results of the research consist of the creation of programs in Maple programming language for the approximate calculation of regular integrals constructed using optimal quadrature formulas, as well as the possibility of the numerical solution of linear integral equations of Fredholm and Volterra of the first kind using interpolation spline.

The reliability of the research results is proved using methods of computational mathematics, functional analysis and the theory of functions of complex variables and the theory of functions of discrete argument, as well as the rigor of mathematical reasoning.

The scientific and practical significance of the research results.

The scientific significance of the results of the study lies in the fact that in spaces of differentiable functions created an algorithm for constructing optimal quadrature, cubature formulas and generalized splines.

The practical significance of the thesis lies in the fact that the construction of optimal quadrature formulas and spline interpolation used for numerical calculation of regular integrals, as well as for the approximate solution of the first kind Fredholm and Volterra linear integral equations.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis the results were used in the following research projects:

optimal quadrature formulas in the sense of Sard constructed in spaces $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ and $K_2(P_m)$ are used in DFG foreign research projects - Priority Program 1324 «Optimal Quadrature Formulas for the Space H^1» for the numerical computation of the Fourier coefficients with index 0 in the same spaces (Jena University, Germany, certificate dated September 14, 2016). The application of these research results made it possible to compare the result with the best quadrature formulas for Fourier integrals constructed in the space H^1;

the extremal function of the error functional of quadrature formulas in the space and the discrete analogue of the operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ are used in the studies of the foreign project 174015 «Approximation of integral and differential operators and applications» in finding the extremal function of error functional of quadrature formulas for Fourier integrals in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ (Institute of mathematics of the Academy of Sciences and Arts Serbia, certificate dated June 6, 2016). The application of these research results contributed to the construction of optimal quadrature formulas for the Fourier coefficients in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were presented and discussed at the following scientific and practical conferences: «Mathematical and numerical modelling of heat and mass exchange processes in multi-phase environments» (Bukhara, 2001), «Contemporary problems of mathematical physics and information technologies» (Tashkent, 2003), «Republican conference of young scientists» (Tashkent, 2003, 2004), “Differential equations with partial derivatives and related problems of analysis and informatics” (Tashkent, 2004), «Operator algebras and quantum probability» (Tashkent, 2005), «LUMS 2-nd international conference on mathematics and its application in information technology» (Lahore, Pakistan, 2008), «Computational technologies and mathematical modelling» (Tashkent, 2009), «Actual problems of applied mathematics and information technologies–al-Khorezmi 2009» (Tashkent, 2009), «Operator algebras and adjacent problems» (Tashkent 2012), «Contemporary problems of differential equations and their applications» (Tashkent, 2013), «Applied and geometric analysis» (Samarkand-Novosibirsk, 2014), «Nonclassical equations of mathematical physics and their applications» (Tashkent, 2014). The present work was discussed at the Republican seminars «Operator algebras and their applications» (Tashkent, 2010-2016) and «Theory of cubature formulas and number theory» (Tashkent, 2005-2016) of Institute of mathematics at the National University of Uzbekistan, at the seminar «Modern problems of computational mathematics and informatics» (Tashkent, 2008-2012) of the Tashkent institute of railway engineering, at the scientific seminar of Institute of Mathematics, University of Santiago de Compostela (Spain, 2012), at the scientific seminar of Institite of Mathematics, Jena University (Germany, 2010, 2015).

Publications of the research results. On the theme of the dissertation we have published 44 scientific papers, 23 of them are in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for Protection of doctoral theses, including 10 papers in international scientific journals and 13 of them published in national scientific journals.

The volume and structure of the dissertation. The dissertation consists of the introduction and four chapters, conclusion and references. The volume of the work is 200 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In introduction the actuality and demand of the theme of dissertation is verificated, connection of research to priority directions of development of Science and Technologies of the Republic is stated, review of foreign scientific research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem are provided, the aim and problems are formulated, the object and the subject of research are described, scientific novelty and practical results of the research are stated, the theoretical and practical significance of obtained results are revealed, the implementation of research results in practice and date on published works and dissertation structure are given.

The first chapter of dissertation named **«Extremal functions of quadrature formulas in the spaces of differentiable functions»** is devoted to finding of extremal functions of quadrature formulas and proving existence and uniqueness of the optimal quadrature formulas in the spaces $W_2^{(m,m-1)}$ and $K_2(P_m)$.

We consider the quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) \tag{1}$$

with error functional

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - x_\beta), \tag{2}$$

where C_β are the coefficients and x_β $(\in[0,1])$ are the nodes of the formula (1), $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the characteristic function of the interval $[0,1]$, $\delta(x)$ is Dirac's delta function, φ is an element of the space

$$W^{P_m}L_2=\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,\varphi^{(m-1)}\text{ is absolute continuous and }\varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\},$$

with semi-norm $\left\|\varphi\,|\,W^{P_m}L_2\right\|=\left\{\int\limits_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}$,

where $P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\equiv a_m\frac{d^m}{dx^m}+...+a_1\frac{d}{dx}+a_0$, $a_m\neq 0$ and $\int\limits_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2dx<\infty$.

$W^{P_m}L_2$ is the Hilbert space and is generalization of the space $L_2^{(m)}$.

The following difference

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_\Omega\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^N C_\beta\varphi(x_\beta)=\int\limits_{\mathbb{R}}\ell(x)\varphi(x)dx \tag{3}$$

is called the error of the quadrature formula (1).

According to the Cauchy-Schwarz inequality

$$|(\ell,\varphi)|\le\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|\cdot\left\|\varphi\,|\,W^{P_m}L_2\right\|$$

absolute value of the error (3) is estimated by the norm

$$\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|=\sup_{\left\|\varphi|W^{P_m}L_2\right\|=1}|(\ell,\varphi)| \tag{4}$$

of the error functional (2) in the conjugate space $W^{P_m}L_2^*$. Minimization of the norm (4) of the error functional ℓ by coefficients, when the nodes are fixed, is called Sard's problem. The obtained formula is called the optimal quadrature formula in the sense of Sard.

We have to consequently solve the following problems.

Problem 1. Find norm (4) of the error functional ℓ of the quadrature formula (1) on the space $W^{P_m}L_2$.

Problem 2. Find such coefficients $\overset{\circ}{C}_\beta$, which satisfy the equality $\left\|\overset{\circ}{\ell}\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|=\inf\limits_{C_\beta}\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|$.

In order to find explicit form of norm of the error functional ℓ in the space $W^{P_m}L_2^*$ is used such called exptremal function ψ_ℓ of the given functional for which the following equality is fulfilled

$$(\ell,\psi_\ell)=\left\|\ell\,|\,W^{P_m}L_2^*\right\|\left\|\psi_\ell\,|\,W^{P_m}L_2\right\|.$$

Since $W^{P_m}L_2$ is a Hilbert space, the extremal function ψ_ℓ in this space, is found with the help of the general form of a linear continuous functional on Hilbert spaces given by the Theorem of Riesz. Then for the functional ℓ and for any $\varphi\in W^{P_m}L_2$ there exists the function $\psi_\ell\in W^{P_m}L_2$ for which the following equation holds

$$\left(\ell,\varphi\right)=\left\langle\psi_\ell,\varphi\right\rangle_{W^{P_m}L_2}, \tag{5}$$

where $(\ell,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx$ and $\langle\psi_\ell,\varphi\rangle_{W^{P_m}L_2}=\int\limits_0^1 P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\psi_\ell(x)P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)dx$ is the inner product of functions ψ_ℓ and φ. Furthermore, by that theorem of Riesz, taking into account (5), we get the following equality

$$\left\|\ell\,|W^{P_m}L_2^*\right\|^2=\left\|\psi_\ell\,|W^{P_m}L_2\right\|^2=\left(\ell,\psi_\ell\right).$$

Therefore, in order to find the extremal function ψ_ℓ for the error functional (2) it is required to solve the functional equation (5).

We note that in the case $P_m(d/dx)=d^{2m}/dx^{2m}$, i.e. in the space $L_2^{(m)}(0,1)$, Problem 1 was solved by S.L.Sobolev. The extremal function in this case has the form

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x),$$

where $G_m(x)=\frac{|x|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!}$ and $P_{m-1}(x)$ is polynomial of degree $m-1$.

Further, for coefficients of optimal quadrature formulas in the space $L_2^{(m)}$, system of Wiener-Hopf type is obtained by S.L.Sobolev. Existence and uniqueness of the solution of this system is proved. An algorithm was offered for solution of this system which based on the discrete analogue of the operator d^{2m}/dx^{2m}.

We consider the case $P_m(d/dx)=\frac{d^m}{dx^m}+\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}$. Corresponding space $W^{P_m}L_2$ we denote as

$$W_2^{(m,m-1)}(0,1)=\left\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,\varphi^{(m-1)}\text{ is absolutely continuous and }\varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\right\},$$

with the semi-norm

$$\left\|\varphi\,|W_2^{(m,m-1)}(0,1)\right\|=\left\{\int\limits_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x)\right)^2dx\right\}^{1/2},$$

$\int_0^1\left(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x)\right)^2dx<\infty$ and $\|\varphi\|=0$ if and only if $\varphi=P_{m-2}(x)+de^{-x}$, where $P_{m-2}(x)$ is a polynomial of degree $m-2$, d is a constant.

In the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ the extremal function $\psi_{\ell,W}$ is the solution of the boundary value problem

$$\psi_{\ell,W}^{(2m)}(x)-\psi_{\ell,W}^{(2m-2)}(x)=(-1)^m\ell(x),\tag{6}$$

$$\left(\psi_{\ell,W}^{(m+s)}(x)-\psi_{\ell,W}^{(m+s-2)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\ \ s=\overline{1,m-1},\tag{7}$$

$$\left(\psi_{\ell,W}^{(m)}(x)+\psi_{\ell,W}^{(m-1)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0.\tag{8}$$

The following result is true

Theorem 1. In the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ the solution of the boundary value problem (6)-(8) is the extremal function $\psi_{\ell,W}$ of the error functional ℓ and has the form

$$\psi_{\ell,W}(x)=(-1)^m\ell(x)*G_{m,W}(x)+P_{m-2}(x)+d\,e^{-x},$$

where

$$G_{m,W}(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right), \tag{9}$$

d is a real number, $P_{m-2}(x)$ is a polynomial of degree $m-2$.

Further, existence and uniqueness of optimal quadrature formula of the form (1) in the sense of Sard in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ are proved.

Consider the case when the function φ belongs to the Hilbert space

$K_2(P_m)=\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}\mid\varphi^{(m-1)}$ is absolutely continuous and $\varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\}$,

with the semi-norm

$$\|\varphi|\,K_2(P_m)\|=\left\{\int_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2dx\right\}^{1/2},$$

where $P_m\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{d^m}{dx^m}+\omega^2\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}$, $\omega>0$ and $\int_0^1\left(P_m\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right)^2dx<\infty$. $\|\varphi\|=0$ if only if $\varphi(x)=c_1\sin\omega x+c_2\cos\omega x+R_{m-3}(x)$, where $R_{m-3}(x)$ is a polynomial of degree $m-3$, $m\geq 2$.

In the space $K_2(P_m)$ for functional ℓ and for any function $\varphi\in K_2(P_m)$ there exists a unique function $\psi_{\ell,K}\in K_2(P_m)$, which is the solution of the equation

$$\psi_{\ell,K}^{(2m)}(x)+2\omega^2\psi_{\ell,K}^{(2m-2)}(x)+\omega^4\psi_{\ell,K}^{(2m-4)}(x)=(-1)^m\ell(x), \tag{10}$$

with boundary conditions

$$\left(\psi_{\ell,K}^{(m+s)}(x)+\omega^2\psi_{\ell,K}^{(m+s-2)}(x)\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad s=0,1,...,m-1. \tag{11}$$

Theorem 2. The solution of the boundary value problem (10)-(11) in the space $K_2(P_m)$ is the extremal function $\psi_{\ell,W}$ of the error functional ℓ and it has the following form

$$\psi_{\ell}(x)=(-1)^m\ell(x)*G_{m,W}(x)+d_1\sin\omega x+d_2\cos\omega x+R_{m-3}(x),$$

where d_1, d_2 are real numbers, $R_{m-3}(x)$ is a polynomial of degree $m-3$, and

$$G_{m,K}(x)=\frac{(-1)^m\mathrm{sgn}x}{4\omega^{2m-1}}\left((2m-3)\sin\omega x-\omega x\cos\omega x+2\sum_{k=1}^{m-2}\frac{(-1)^k(m-k-1)(\omega x)^{2k-1}}{(2k-1)!}\right). \tag{12}$$

Further, existence and uniqueness of optimal quadrature formula of the form (1) in the sense of Sard in the space $K_2(P_m)$ are proved.

Construction of optimal quadrature formulas of the form (1) in the sense of Sard in the spaces $W_2^{(m,m-1)}$ and $K_2(P_m)$ is reduced to systems of linear equations. Aim of the present dissertation is to find analytic solution of these systems. For this we apply Sobolev method which based on the discrete analogues of the differential operators. And we need discrete analogues of the operators $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ and $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$.

The second chapter which named **«Discrete analogues of differential operators»** is devoted to construction of discrete analogues of the operators

$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ and $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ and investigation of the properties of the constructed discrete operators.

In the first section of the second chapter we give some known results on the discrete analogue $D_m(h\beta)$ of the operator d^{2m}/dx^{2m}. In construction of optimal quadrature formulas and interpolation splines in the space $L_2^{(m)}$ we need the discrete analogue $D_m(h\beta)$ of the operator d^{2m}/dx^{2m}. The following explicit formula for $D_m(h\beta)$ was obtained by Kh.M.Shadimetov:

$$D_m(h\beta)=p\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k q_k^{|\beta|-1} & \text{при} \quad |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k & \text{при} \quad |\beta|=1,\\ C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{q_k} & \text{при} \quad \beta=0,\end{cases}$$

where

$$p=\frac{(2m-1)!}{h^{2m}},\quad A_k=\frac{(1-q_k)^{2m+1}}{E_{2m-1}(q_k)},\quad C=-2^{2m-1},$$

$E_{2m-1}(x)$ is the Euler-Frobenius polynomial of degree $2m-1$, q_k is roots of the polynomial $E_{2m-2}(x)$, $|q_k|<1$, h is a small positive parameter.

Moreover, S.L.Sobolev and Kh.M.Shadimetov studied properties of the discrete function $D_m(h\beta)$.

In the second section of the second chapter the following equation is solved

$$D_{m,W}(h\beta)*G_{m,W}(h\beta)=\delta_d(h\beta), \tag{13}$$

where $G_{m,W}(h\beta)$ is a function of discrete argument corresponding to $G_{m,W}(x)$.

The following is true

Theorem 3. The discrete analogue $D_{m,W}(h\beta)$ of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ satisfying equation (13) has the form:

$$D_{m,W}(h\beta)=\frac{1}{p_{2m-2}}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geqslant 2;\\ -2e^h+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1;\\ 2C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases}$$

where

$$C=1+(2m-2)e^h+e^{2h}+\frac{e^h\cdot p_{2m-3}}{p_{2m-2}},\quad A_k=\frac{2(1-\lambda_k)^{2m-2}[\lambda_k(e^{2h}+1)-e^h(\lambda_k^2+1)]p_{2m-2}}{\lambda_k\mathcal{P}_{2m-2}'(\lambda_k)},$$

$$\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)=\sum_{s=0}^{2m-2} p_s\lambda^s=(1-e^{2h})(1-\lambda)^{2m-2}-2(\lambda(e^{2h}+1)-e^h(\lambda^2+1))\times$$
$$\times\left[h(1-\lambda)^{2m-4}+\frac{h^3(1-\lambda)^{2m-6}}{3!}E_2(\lambda)+\ldots+\frac{h^{2m-3}E_{2m-4}(\lambda)}{(2m-3!)}\right],$$

p_{2m-2}, p_{2m-3} are coefficients of the polynomial $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$, λ_k are roots of the polynomial $\mathcal{P}_{2m-2}(\lambda)$, $|\lambda_k|<1$, $E_k(\lambda)$ is the Euler-Frobenius polynomial of degree k.

The properties of the discrete analogue $D_{m,W}(h\beta)$ are studied and the following is proved

Theorem 4. The discrete analogue $D_{m,W}(h\beta)$ of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ for $m=1,2,3$ satisfies the following equalities:

1) $D_{m,W}(h\beta)*e^{h\beta}=0,$ 2) $D_{m,W}(h\beta)*e^{-h\beta}=0,$ 3) $D_{m,W}(h\beta)*(h\beta)^n=0$, $n\le 2m-3$, 4) $D_{m,W}(h\beta)*G_{m,W}(h\beta)=\delta_d(h\beta)$.

Further, in the third section of the second chapter the discrete analogue of the operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ is constructed, i.e. it is found the function $D_{m,K}(h\beta)$ which satisfy the following equations

$$D_{m,K}(h\beta)*G_{m,K}(h\beta)=\delta_d(h\beta), \tag{14}$$

where $G_{m,K}(h\beta)$ is the function of discrete argument corresponding to $G_{m,K}(x)$, $m\ge 2$, $\omega>0$, $\delta_d(h\beta)$ is the discrete delta function.

The following result is proved.

Theorem 5. The discrete analogue for the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ satisfying equation (14) has the form

$$D_{m,K}(h\beta)=\frac{2\omega^{2m-1}}{(-1)^m p_{2m-2}}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\ge 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ C+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases}$$

where $A_k=\frac{(1-\lambda_k)^{2m-4}(\lambda_k^2-2\lambda_k\cos h\omega+1)^2p_{2m-2}}{\lambda_k P'_{2m-2}(\lambda_k)}$, $\quad C=4-4\cos h\omega-2m-\frac{p_{2m-3}}{p_{2m-2}}$,

$$p_{2m-2}=(2m-3)\sin h\omega-h\omega\cos h\omega+2\sum_{k=1}^{m-2}\frac{(-1)^k(m-k-1)(h\omega)^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$P_{2m-2}(\lambda)$ is the known polynomial of degree $2m-2$, p_{2m-2}, p_{2m-3} are coefficients and λ_k are roots of the polynomial $P_{2m-2}(\lambda)$, $|\lambda_k|<1$.

Further, we have the following

Theorem 6. The discrete analogue $D_{m,K}(h\beta)$ of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ satisfies the following equalities

1) $D_{m,K}(h\beta)*\sin(h\omega\beta)=0,$ 2) $D_{m,K}(h\beta)*\cos(h\omega\beta)=0,$

3) $D_{m,K}(h\beta)*(h\omega\beta)\sin(h\omega\beta)=0,$ 4) $D_{m,K}(h\beta)*(h\omega\beta)\cos(h\omega\beta)=0,$

5) $D_{m,K}(h\beta)*(h\beta)^\alpha=0,\ \alpha=0,1,...,2m-5.$

In the third chapter which is named **«Coefficients of optimal quadrature formulas and norms of their errors functional»**, using the discrete operators $D_m(h\beta)$, $D_{m,W}(h\beta)$ and $D_{m,K}(h\beta)$, optimal quadrature formulas of the form (1) in Hilbert spaces $L_2^{(m)}$, $W_2^{(m,m-1)}$ and $K_2(P_m)$ are constructed, and estimations of their errors are calculated.

The main aim of the first section of the third chapter is to construct optimal quadrature formulas in Sard's sense in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ with the nodes

$$x_i=\eta_i h,\ x_{N-i}=1-\eta_i h,\ i=\overline{0,t-1},\ 0\le\eta_0<\eta_1<...<\eta_{t-1}<t,\ t\in\mathbb{N},$$

$$x_\beta=h\beta,\ t\le\beta\le N-t,\ h=\frac{1}{N},\quad t=\begin{cases}\dfrac{m}{2} & \text{when } m \text{ is even,}\\ \left[\dfrac{m}{2}\right]+1 & \text{when } m \text{ is odd,}\end{cases} \tag{15}$$

using Sobolev's method and to choose numerically parameters η_i, $i=\overline{0,t-1}$ in order to get optimal quadrature formulas of the form (1) with positive coefficients. Here $[a]$ is the integer part of a number a.

Studying the system for optimal coefficients we proved the following lemma which allows to get explicit formulas for optimal coefficients.

Lemma 1. Coefficients of optimal quadrature formulas of the form (1) with the error functional (2) and with the nodes (15) in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ satisfy the system

$$\sum_{\beta=0}^{t-1}\overset{\circ}{C}_\beta\,\eta_\beta^\alpha=h\left(\sum_{\beta=1}^{t-1}\beta^\alpha+\frac{0^\alpha}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}d_k\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(-1)^i q_k^{t+i}-q_k^{N-t+1}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i t^\alpha\right), \tag{16}$$

Here $\alpha=\begin{cases}0,2,4,...,m-2 & \text{when } m \text{ is even,}\\ 0,2,4,...,m-1 & \text{when } m \text{ is odd,}\end{cases}\quad 0^\alpha=\begin{cases}1, & \alpha=0,\\ 0, & \alpha\ne 0,\end{cases}$

$$t=\begin{cases}\dfrac{m}{2} & \text{when } m \text{ is even,}\\ \left[\dfrac{m}{2}\right]+1 & \text{when } m \text{ is odd,}\end{cases}$$

where $[a]$ is the integer part of a number a, d_k are unknowns, q_k are roots of the Euler-Frobenius polynomial $E_{2m-2}(q)$, $|q_k|<1$.

Using lemma 1 for the remaining coefficients of optimal quadrature formulas of the form (1) the following is proved

Theorem 7. Coefficients of optimal quadrature formulas of the form (1) with the error functional (2) and with the nodes (15) in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ are expressed by the formula

$$\overset{\circ}{C}_\beta = h\left(1+\sum_{k=1}^{m-1} d_k\left(q_k^{\beta}+q_k^{N-\beta}\right)\right),\ t \le \beta \le N-t,$$

where d_k, $(k=\overline{1,m-1})$ satisfy the following system of $m-1$ linear equations:

$$\sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{i=1}^{j} \frac{-q_k^{t+1}+(-1)^i q_k^{N-t+i}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i 0^j = \frac{t^{j+1}-B_{j+1}}{j+1} - \sum_{\beta=0}^{t-1} \overset{\circ}{C}_\beta h^{-1}(t-\eta_\beta)^j,$$

$$j=1,2,3,...,m-1,$$

Here coefficients $\overset{\circ}{C}_\beta = \overset{\circ}{C}_{N-\beta}$ $(\beta = 0,1,...,t-1)$ are defined from the system (16), q_k are roots of the Euler-Frobenius polynomial $E_{2m-2}(q)$, $|q_k|<1$.

Further, we have calculated square of the norm of the error functional (2), which allows to get upper bound of the error of the constructed optimal quadrature formulas in the sense of Sard of the form (1) in the space $L_2^{(m)}(0,1)$.

Theorem 8. Square for the norm of the error functional (2) of the optimal quadrature formulas of the form (1) with the nodes (15) on the space $L_2^{(m)}(0,1)$ has the form

$$\left\|\overset{\circ}{\ell} \,|\, L_2^{(m)*}\right\|^2 = (-1)^{m+1}\left[\frac{h^{2m}B_{2m}}{(2m)!} + \frac{2h^{2m+1}}{(2m)!}\left\{\sum_{\beta=0}^{t-1}\left(\overset{\circ}{C}_\beta h^{-1}\eta_\beta^{2m} - \beta^{2m}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{i=0}^{2m} \frac{(-1)^i q_k^{t+i} - q_k^{N-t+1}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i t^{2m}\right\}\right],$$

where B_α are Bernoulli numers, $\overset{\circ}{C}_\beta$, $\beta=\overline{0,t-1}$ are defined from the system (16), q_k are roots of the Euler-Frobenius polynomial $E_{2m-2}(q)$, $|q_k|<1$, η_β, $\beta=\overline{0,t-1}$ are defined form (14), $\Delta^i t^{2m}$ is the finite difference of order i from t^{2m}, d_k are defined in Theorem 7.

It should be noted that when the nodes (15) are equally spaced, i.e. when in (15) the for parameters $\eta_0 = 0, \eta_1 = 1,...,\eta_{t-1} = t-1$, then from theorems 7 and 8 we get the results of some works of A.Sard, L.F.Meyers, G.Coman, I.Schoenberg, S.D.Silliman, S.L.Sobolev, F.Y.Zagirova, Kh.M.Shadimetov and P.Kohler.

In the second section of the third chapter, optimal quadrature formulas of the form (1) in Sard's sense in the space $W_2^{(m,m-1)}$ are constructed. And the discrete operator $D_{m,W}(h\beta)$ is used. It should be noted that the constructed optimal quadrature formulas are exact for polynomials of degree $\le m-2$ and for the function e^{-x}.

The case $m=1$ is considered separately and the following is proved

Theorem 9. Coefficients of optimal quadrature formulas of the form (1) with equally spaced nodes in the space $W_2^{(1,0)}(0,1)$ are expressed by the formulas

$$\overset{\circ}{C}_{\beta}=\begin{cases}\dfrac{e^h-1}{e^h+1}, & \beta=0,N,\\[2ex] \dfrac{2(e^h-1)}{e^h+1}, & \beta=\overline{1,N-1},\end{cases}$$

where $h=1/N$, $N=1,2,\ldots$.

Further, for the cases $m\geq 2$ explicit formulas for optimal coefficients are obtained and the following is proved

Theorem 10. Coefficients of optimal quadrature formulas of the form (1) with the error functional (2) and with equally spaced nodes in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ for $m\geq 2$ and $N+1\geq m$ are expressed by formulas

$$\overset{\circ}{C}_0=\frac{e^h-1-h}{e^h-1}+\sum_{k=1}^{m-1}\Big(a_k\frac{\lambda_k(e^h-e)+\lambda_k^2(e-1)+\lambda_k^{N+1}(1-e^h)}{(e-1)(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+$$

$$+b_k\frac{\lambda_k^{N+1}(e^h-e)+\lambda_k^N(e-1)+\lambda_k(1-e^h)}{(e-1)(\lambda_k-1)(\lambda_k e^h-1)}\Big),$$

$$\overset{\circ}{C}_{\beta}=h+\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k\lambda_k^{\beta}+b_k\lambda_k^{N-\beta}\right),\quad \beta=\overline{1,N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_N=\frac{e^h h+1-e^h}{e^h-1}+\sum_{k=1}^{m-1}\Big(a_k\frac{\lambda_k(e-e^{h+1})+\lambda_k^N(e^{h+1}-e^h)+\lambda_k^{N+1}(e^h-e)}{(e-1)(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+$$

$$+b_k\frac{\lambda_k^{N+1}(e-e^{h+1})+\lambda_k^2(e^{h+1}-e^h)+\lambda_k(e^h-e)}{(e-1)(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big),$$

where a_k, b_k and λ_k $(k=\overline{1,m-1})$ are known quantities.

Moreover, estimation of the error of the constructed optimal quadrature formula is studied, i.e. square of the norm of the optimal error functional is calculated on the space $W_2^{(1,0)}$ and it is proved that the optimal quadrature formula in the space $W_2^{(1,0)}$ is an asymptotic optimal in the space $L_2^{(1)}$.

In the third section of the third chapter, optimal quadrature formulas (1) in the sense of Sard in the space $K_2(P_m)$ are constructed. Also the discrete operator $D_{m,K}(h\beta)$ which is constructed in the second chapter is used. The obtained optimal quadrature formulas are exact for polynomial of degree $\leq m-3$ and for trigonometric functions $\sin\omega x$ and $\cos\omega x$.

The main result is

Theorem 11. Coefficients of optimal quadrature formulas (1) in Sard's sense in the space $K_2(P_m)$ for $m\geq 3$ and $N+1\geq m$ are expressed by formulas

$$\overset{\circ}{C}_0=\frac{h}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}m_k\Big(\frac{\lambda_k-\lambda_k^N}{\lambda_k-1}\Big),\qquad \overset{\circ}{C}_N=\frac{h}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}m_k\Big(\frac{\lambda_k-\lambda_k^N}{\lambda_k-1}\Big),$$

$$\overset{\circ}{C}_\beta = h + \sum_{k=1}^{m-1} m_k \left(\lambda_k^\beta + \lambda_k^{N-\beta}\right), \quad \beta = 1,2,...,N-1,$$

where m_k, λ_k $(k = \overline{1, m-1})$ are known.

Moreover square of the norm of the optimal error functional in the cases $m = 2,3$ are calculated. It is proved that the optimal quadrature formulas in the spaces $K_2(P_m)$ are asymptotic optimal in the space $L_2^{(m)}$.

The fourth chapter which is named **«Optimal interpolation formulas in the spaces of differentiable functions»**, is devoted to construction of interpolation L splines and optimal interpolation formulas. Here explicit formulas for the coefficients interpolation splines minimizing semi-norms in Hilbert spaces $L_2^{(m)}$, $W_2^{(m,m-1)}$and $K_2(P_m)$ are found, and optimal interpolation formulas in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ of periodic n variables functions are also constructed.

Since the results of the dissertation are connected with generalized splines we give definitions following Ahlberg, Nilson and Walsh.

Let L be a linear differential operator given by formula

$$L \equiv a_m(x)D^m + a_{m-1}(x)D^{m-1} + ... + a_0(x),$$

where functions $a_j(x)$ $(j = 0,1,...,m)$ belong to $C^j[a,b]$ and $a_m(x) \neq 0$ on $[a,b]$. We denote by L^* the operator which is formally conjugate to L:

$$L^* \equiv (-1)^m a_m(x)D^m + (-1)^{m-1} a_{m-1}(x)D^{m-1} + ... + a_0(x).$$

If $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ is a mesh on $[a,b]$, then a generalized spline of deficiency k $(0 \leq k \leq m)$ with respect to Δ is a function $S_\Delta(x)$ which is in $W^{P_{2m-k}} L_2$and satisfies the differential equation $L^* L S_\Delta = 0$ on each open mesh interval (x_{i-1}, x_i) $(i = 1,2,...,N)$ of Δ. The ordinary spline (deficiency 1) allows discontinuities in the $2m-1$ th derivative, but only at mesh points.

It is known, from the results of Ahlberg, Nilson and Walsh, that for generalized spline of deficiency 1 the following is true: Let $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ and $Y = \{y_i, i = 0,1,...,N\}$ be given. Then of all functions $f(x)$ in $W^{P_m} L_2$ such that $f(x_i) = y_i$, $i = 0,1,...,N$, the generalized spline $S_\Delta(Y, x)$, when it exists, minimizes $\int_a^b \left(Lf(x)\right)^2 dx$.

Further, we get explicit formulas for coefficients of generalized splines of deficiency 1 in the spaces $L_2^{(m)}$, $W_2^{(m,m-1)}$ and $K_2(P_m)$.

Consider the following interpolation problem.

Problem 3. Find a function $S_m(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$, which minimizes the quantity $\int_0^1 (\varphi^{(m)}(x))^2 dx$ and satisfies the interpolation condition

$$S_m(x_\beta) = \varphi(x_\beta), \ \beta = 0,1,...,N,$$

where $x_\beta \in [0,1]$ are the interpolation nodes and $\varphi(x_\beta)$ are given numbers.

Following the results of V.I.Vasilenko, we get the analytic form of interpolation formula $S_m(x)$

$$S_m(x)=\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_m(x-x_\gamma)+P_{m-1}(x),$$

where C_γ, $\gamma=0,1,...,N$ are real numbers, $P_{m-1}(x)=\sum\limits_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha x^\alpha$ is a polynomial of degree $m-1$ and $G_m(x)=\dfrac{|x|^{2m-1}}{2\cdot(2m-1)!}$.

In the first section of the fourth chapter, using Sobolev method based on the discrete analogue $D_m(h\beta)$ of the operator $\dfrac{d^{2m}}{dx^{2m}}$, we get explicit formulas of coefficients of the interpolation spline $S_m(x)$, which is the solution of problem 3. It should be noted that this interpolation spline is exact for polynomials of degree $\le m-1$.

The following is true

Theorem 12. Coefficients of the interpolation spline $S_m(x)$ with equally spaced nodes in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ have the following form

$$C_0=hp\left[C\varphi(0)+\varphi(h)+\sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^-\cdot(-h)^\alpha\right]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^\gamma \varphi(h\gamma)+M_k+q_k^N N_k\right],$$

$$C_\beta=hp\left[\varphi(h\beta-h)+C\varphi(h\beta)+\varphi(h\beta+h)\right]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+q_k^\beta M_k+q_k^{N-\beta}N_k\right],$$

$\beta=1,2,...,N-1,$

$$C_N=hp\left[C\varphi(1)+\varphi(1-h)+\sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha^+\cdot(1+h)^\alpha\right]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k hp}{q_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N} q_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+q_k^N M_k+N_k\right],$$

$$p_\alpha=\frac{1}{2}\left(p_\alpha^+ + p_\alpha^-\right),\quad \alpha=0,1,...,m-1,$$

where $\Delta^i 0^\alpha=\sum\limits_{l=1}^{i}(-1)^{i-l}C_i^l l^\alpha$ and M_k, N_k, p, C, A_k, q_k, p_α^-, p_α^+, $\alpha=0,1,...,m-1$ are known.

In particular, in the cases $m=1$ and $m=2$, from the last theorem we get well known linear spline $S_1(x)=\sum\limits_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \dfrac{|x-h\gamma|}{2}+p_0$ cubic spline $S_2(x)=\sum\limits_{\gamma=0}^{N} C_\gamma \dfrac{|x-h\gamma|^3}{12}+p_1x+p_0$, which minimize $\int_0^1(\varphi'(x))^2dx$ and $\int_0^1(\varphi''(x))^2dx$ quantities in the spaces $L_2^{(1)}(0,1)$ and $L_2^{(2)}(0,1)$, respectively.

In the second section of the fourth chapter, the following problem is solved.

Problem 4. Find a function $S_{m,W}(x)\in W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, which minimizes the quantity $\int\limits_0^1(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x))^2dx$ and satisfies the interpolation condition

$$S_{m,W}(x_\beta)=\varphi(x_\beta),\ \beta=0,1,...,N,$$

where $x_\beta\in[0,1]$ are the nodes of interpolation and $\varphi(x_\beta)$ are known.

The interpolation spline $S_{m,W}(x)$, which is the solution of problem 4, has the form

$$S_{m,W}(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_{m,W}(x-x_\gamma)+\sum_{i=0}^{m-2}r_i x^i+de^{-x},$$

where C_γ, $\gamma=0,1,...,N$, r_i, $i=0,1,...,m-2$, d are real numbers, $G_{m,W}(x)$ is defined by equality (9).

It should be noted that interpolation spline $S_{m,W}(x)$ is exact for function e^{-x} and for any polynomial of degree $m-2$.

Theorem 13. Coefficients of the interpolation spline $S_{m,W}(x)$ with equally spaced nodes in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ have the following form

$$C_0=\frac{2C}{p}\varphi(0)-\frac{2e^h}{p}\left[\varphi(h)+a^-e^h+\sum_{i=0}^{m-2}r_i^-(-h)^i\right]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k p}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^\gamma\varphi(h\gamma)+M_k+\lambda_k^N N_k\right],$$

$$C_\beta=\frac{2C}{p}\varphi(h\beta)-\frac{2e^h}{p}[\varphi(h(\beta-1))+\varphi(h(\beta+1))]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k p}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^\beta M_k+\lambda_k^{N-\beta}N_k\right],\quad \beta=1,2,...,N-1,$$

$$C_N=\frac{2C}{p}\varphi(1)-\frac{2e^h}{p}\left[\varphi(h(N-1))+\frac{a^+}{e^{1+h}}+\sum_{i=0}^{m-2}r_i^+(1+h)^i\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k p}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^N M_k+N_k\right],$$

$$r_i=\frac{1}{2}\left(r_i^-+r_i^+\right),\ i=0,1,...,m-2,\qquad d=\frac{1}{2}\left(\varphi(0)-r_0^-+e\varphi(1)-e\sum_{i=0}^{m-2}r_i^+\right),$$

where $\Delta^\nu 0^i=\sum_{l=1}^{\nu}(-1)^{\nu-l}\binom{\nu}{l}l^i$ и M_k,N_k, p, C, A_k, λ_k, a^-,a^+, r_i^-,r_i^+, $i=0,1,...,m-2$ are known.

For $m=2$ we get interpolation exponential spline with tension parameter equal to 1.

In the third section of the fourth chapter the following problem is considered

Problem 5. Find a function $S_{m,K}(x)\in K_2(P_m)$, which minimizes the quantity $\int_0^1(\varphi^{(m)}(x)+\omega^2\varphi^{(m-2)}(x))^2dx$ and satisfies the condition

$$S_{m,K}(x_\beta)=\varphi(x_\beta),\ \beta=0,1,...,N,$$

where $x_\beta\in[0,1]$ are the nodes of interpolation, $\varphi(x_\beta)$ are known.

Analytic representation of the interpolation spline $S_{m,K}(x)$ is the following:

$$S_{m,K}(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_{\gamma}G_{m,K}(x-x_{\gamma})+d_1\sin(\omega x)+d_2\cos(\omega x)+R_{m-3}(x),$$

where C_{γ}, $\gamma=0,1,...,N$, d_1 and d_2 are real numbers, $R_{m-3}(x)=\sum_{\alpha=0}^{m-3}r_{\alpha}x^{\alpha}$ is polynomials of degree $m-3$ and $G_{m,K}(x)$ is defined by (12).

We note that the interpolation spline $S_{m,K}(x)$ is exact for the functions $\sin\omega x$ and $\cos\omega x$ and for any polynomial of degree $m-3$.

Further, we obtain formulas for coefficients of the interpolation spline $S_{m,K}(x)$. The result is

Theorem 14. Coefficients of the interpolation spline $S_{m,K}(x)$ with equally spaced nodes in the space $K_2(P_m)$ have the following form

$$C_0=p\left[C\varphi(0)+\varphi(h)-d_1^-\sin(h\omega)+d_2^-\cos(h\omega)+\sum_{\alpha=0}^{m-3}r_{\alpha}^-\cdot(-h)^{\alpha}\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k p}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{\gamma}\varphi(h\gamma)+M_k+\lambda_k^N N_k\right],$$

$$C_{\beta}=p\left[\varphi(h\beta-h)+C\varphi(h\beta)+\varphi(h\beta+h)\right]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k p}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^{\beta}M_k+\lambda_k^{N-\beta}N_k\right],$$

$\beta=1,2,...,N-1,$

$$C_N=p\big[C\varphi(1)+\varphi(1-h)+d_1^+\sin(\omega+h\omega)+d_2^+\cos(\omega+h\omega)+$$
$$+\sum_{\alpha=0}^{m-3}r_{\alpha}^+\cdot(1+h)^{\alpha}\big]+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{A_k p}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^N M_k+N_k\right],$$

$$d_i=\frac{1}{2}\left(d_i^++d_i^-\right),\ i=1,2,\qquad r_{\alpha}=\frac{1}{2}\left(r_{\alpha}^++r_{\alpha}^-\right),\ \alpha=0,1,...,m-3,$$

where $\Delta^i 0^{\alpha}=\sum_{l=1}^{i}(-1)^{i-l}C_i^l l^{\alpha}$ и M_k, N_k, p, C, A_k, λ_k, d_i^-, d_i^+, $i=1,2$, $r_{\alpha}^-, r_{\alpha}^+$, $\alpha=0,1,...,m-3$ are known.

In the fourth section of the fourth chapter the optimal interpolation formulas in the Sobolev space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ periodic n variables functions are obtained. We recall the definition of the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$.

Assume that in $\mathbb{R}^n$ functions φ have local integriable derivatives of order m and for finite domain Ω_0 the following integral is bounded

$$\int_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}(D^{\alpha}\varphi(x))^2dx,$$

where α is multiindex $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$, $|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j$, $D^{\alpha}\varphi(x)=\dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$. Assume that $2m>n$ and φ is a periodic function with matrix H, i.e. $\varphi(x+H\gamma)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n$, where γ is a integer-valued vector column, H is the $n\times n$ matrix with unique determinant. To the matrix H corresponds its fundamental parallelepiped Ω_0 as follows

$$\Omega_0=\{x\in\mathbb{R}^n:\ x=Hy,\ \text{where }\ 0\le y_j<1,\ \ j=1,2,...,n\}.$$

Elements of the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ are functions which differ each from other to a constant. Norm of functions in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ are defined by the formula

$$\left\|\varphi\,|\,\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\right\|=\left[\int\limits_{\Omega_0}\sum_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}(D^\alpha\varphi(x))^2dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Consider the interpolation formula

$$\varphi(x)\cong P_\varphi(x)=\sum_{k=1}^{N}C_k(x)\varphi(x^{(k)})\tag{17}$$

in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$, points $x^{(k)}\in\Omega_0$ and parameters $C_k(x)$ is called the nodes and the coefficients of the formula (17), respectively.

The difference $\varphi(x)-P_\varphi(x)$ is called the error of the interpolation formula (17). The values of this error at a point z is a linear functional on functions φ, i.e.

$$(\ell,\varphi)\equiv\varphi(z)-P_\varphi(z)=\varphi(z)-\sum_{k=1}^{N}C_k(z)\varphi(x^{(k)})=$$

$$=\int\limits_{\Omega_0}\left[\left(\delta(x-z)-\sum_{k=1}^{N}C_k(z)\delta(x-x^{(k)})\right)*\phi_0(H^{-1}x)\right]\varphi(x)dx,$$

where $\delta(x)$ is Dirac's delta function, $\phi_0(H^{-1}x)=\sum\limits_{\beta}\delta(x-H\beta)$,

$$\ell(x)=\left(\delta(x-z)-\sum_{k=1}^{N}C_k(z)\delta(x-x^{(k)})\right)*\phi_0(H^{-1}x)\tag{18}$$

is the error functional of the interpolation formula (17) and belongs to the space $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$. The space $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ consists of all periodic functionals (18) which are orthogonal to unique, i.e.

$$(\ell,1)=0.$$

By the Cauchy-Schwarz inequality $|(\ell,\varphi)|\le\left\|\varphi\,|\,\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\right\|\cdot\left\|\ell\,|\,\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\right\|$ the error (18) of formula (17) is estimated with the help of the norm

$$\left\|\ell\,|\,\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\right\|=\sup_{\left\|\varphi|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\right\|=1}\left|(\ell,\varphi)\right|$$

of the error functional (18). Therefore, estimation of the error of the formula (17) on functions of the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ is reduced to finding the norm of the error functional ℓ in the conjugate space $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$.

Therefore we get the following problems

Problem 6. Find norm of the error functional ℓ of the interpolation formula (17) in the space $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$.

Clearly that the norm of the error functional ℓ depends on coefficients $C_k(z)$ and the nodes $x^{(k)}$. Optimal interpolation formula means such formula which for given number N of nodes the error functional has minimum norm in $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$. If the nodes $x^{(k)}$ are points of the lattice, i.e. they located in points $x^{(k)} = hHk$ then such interpolation formula is called the lattice interpolation formula. Here h is a small parameter and is called the step of the lattice.

The main aim of this section is to construct the lattice optimal interpolation formula in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ for the nodes $x^{(k)} = hHk$, i.e. to solve the following problem.

Problem 7. Find the coefficients $\overset{\circ}{C}_k(z)$ satisfying the following equality

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \,|\, \widetilde{L_2^{(m)*}}(H) \right\| = \inf_{C_k(z)} \left\| \ell \,|\, \widetilde{L_2^{(m*)}}(H) \right\|$$

for $x^{(k)} = hHk$.

The main result is

Theorem 15. In the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ there exists a unique lattice optimal interpolation formula of the form (17) with the error functional (18) coefficients of which are determined by the formula

$$\overset{\circ}{C}([\beta];z) = h^n \left(1 + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(2\pi i H^{-1}(Hh\beta^* - z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} \cdot K(\gamma) \right),$$

where $K(\gamma) = \left[\sum_{\substack{t \\ t \neq h\gamma}} \frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t - \gamma)|^{2m}} \right]^{-1}.$

CONCLUSION

The dissertation is devoted to construction of optimal quadrature formulas in the sense of Sard and optimal interpolation formulas, and calculation of estimation of their error in different spaces of differentiable functions.

The main results are the following:

1. The extremal functions of the errors functionals of quadrature formulas in the spaces $W_2^{(m,m-1)}$ and $K_2(P_m)$ and interpolation formulas in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ are found.

2. Norms of the errors functionals of quadrature formulas in the spaces $W_2^{(m,m-1)}$, $K_2(P_m)$ and interpolation formulas in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ are calculated.

3. Linear systems for coefficients of optimal quadrature and interpolation formulas in the spaces $W_2^{(m,m-1)}$, $K_2(P_m)$ and $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ are obtained. Existence and uniqueness of the solutions of the systems are proved, and it is shown that the solutions of these systems minimize the norms of the errors functionals in corresponding spaces.

4. The discrete analogues $D_{m,W}(h\beta)$ and $D_{m,K}(h\beta)$ of the differential operators $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}$ and $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\omega^2\frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}}+\omega^4\frac{d^{2m-4}}{dx^{2m-4}}$ are constructed and properties of the constructed discrete operators are proved.

5. Optimal quadrature formulas with positive coefficients are constructed and norm of the optimal error functional in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ is calculated. The obtained quadrature formulas are exact for polynomial of degree $m-1$.

6. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in the space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, which are exact for polynomials of degree $m-2$ and for the function e^{-x}, are constructed.

7. The explicit formulas for the coefficients of optimal quadrature formulas in the sense of Sard in the space $K_2(P_m)$ are obtained. The obtained optimal formulas are exact for polynomial of degree $\leq m-3$ and for functions $\sin\omega x$ and $\cos\omega x$.

8. It is proved that the optimal quadrature formulas constructed in the space $K_2(P_m)$ for $m=2,3$ are asymptotic optimal in the space $L_2^{(m)}(0,1)$.

9. Interpolation splines which minimize semi-norms in the spaces $L_2^{(m)}(0,1)$, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ and $K_2(P_m)$ are constructed.

10. The lattice optimal interpolation formula in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ of periodic n variables functions.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Вычисление коэффициентов и нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул// Узбекский математический журнал.– Ташкент, 1999. -№ 6. -С. 78-90. (01.00.00; №6).

2. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Об одной оптимальной квадратурной формуле Соболева с пограничным слоем// Докл. АН РУз.– Ташкент, 2000, -№.3. -С.6-8. (01.00.00; №7).

3. Хаётов А.Р. Об одной оптимальной квадратурной формуле// Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2001.- № 1. -С. 61-67. (01.00.00; №6).

4. Хаётов А.Р. Об одной задаче теории квадратурных формул// Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2002. -№ 1. -С. 61-68. (01.00.00; №6).

5. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Весовые оптимальные квадратурные формулы в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$// Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2002. -№ 3-4. -С. 92-103. (01.00.00; №6).

6. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Construction of a Discrete Analogue of Differential Operator// Uzbek Mathematical Journal.-Tashkent, 2003, -№.2. -P. 59-69. (01.00.00; №6).

7. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Построение дискретного аналога дифференциального оператора $d^{2m}/dx^{2m}-d^{2m-2}/dx^{2m-2}$// Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2004. -№ 2. -С. 85-95. (01.00.00; №6).

8. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$// Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2004. -№ 3. -С. 67-82. (01.00.00; №6).

9. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Свойства дискретного аналога дифференциального оператора $d^{2m}/dx^{2m}-d^{2m-2}/dx^{2m-2}$ // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2004. -№ 4. -С. 72-83. (01.00.00; №6).

10. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Вычисление коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$// Докл. АН РУз.– Ташкент, 2005, -№.3. -С.3-8. (01.00.00; №7).

11. Хаётов А.Р. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$// Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2007. -№ 4. -С. 77-82. (01.00.00; №6).

12. Хаётов А.Р. Построение дискретного аналога дифференциального оператора $d^4/dx^4+2d^2/dx^2+1$ и его свойства// Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2009. -№ 3. -С. 81-88. (01.00.00; №6).

13. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Optimal quadrature formulas with positive coefficients in $L_2^{(m)}(0,1)$ space// Journal of Comp. and App. Math., 2011, 235, -pp. 1114-1128. (3. Scopus. IF=1.395)

14. Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. On one optimal quadrature formula in the sense of Sard// Numerical Algorithms, 2011, 57, -pp.487-510. (3. Scopus. IF=1.212)

15. Hayotov A.R. Discrete analogues of some differential operators// Uzbek Mathematical Journal. –Tashkent, 2012, -№1, -pp.151-155. (01.00.00; №6).

16. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space// BIT Numer. Math., 2013, 53, -P.545-563. (3. Scopus. IF=1.224)

17. Mamatova N.Kh., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M. Construction of optimal grid interpolation formulas in Sobolev space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ of periodic function of n variables by Sobolev method// Ufa mathematical journal, 2013, -vol. 5, № 1, -pp 90-101. (3. Scopus. IF=0.103)

18. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ space// Calcolo, 2014, -vol. 51, № 2, -pp. 211-243. (3. Scopus. IF=0.938)

19. Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. Interpolation splines minimizing a semi-norm// Calcolo, 2014, -vol.51, № 2, -pp. 245-260. (3. Scopus. IF=0.938)

20. Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formula in the sense of Sard in $K_2(P_3)$ space// Publications de L'Institut Mathematique. 2014, 95 (109), -pp.29-47. (3. Scopus. IF=0.490)

21. Hayotov A.R. The discrete analogue of a differential operator and its applications// Lithuanian Mathematical Journal, 2014, -vol.54, №3, -pp.290-307. (3. Scopus. IF=0.361)

22. Cabada A., Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M. Construction of D^m-splines in $L_2^{(m)}(0,1)$ space// Applied Mathematics and Computation. 2014, 244, -pp.542-551. (3. Scopus. IF=1.568)

23. Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadratures in the sense of Sard in a Hilbert space// Applied Mathematics and Computation. 2015, 259, -pp.637-653. (3. Scopus. IF=1.568)

II бўлим (Часть II; Part II)

24. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Построение оптимальных квадратурных формул с пограничным слоем в пространстве Соболева// Материалы V международного семинара-совещания "Кубатурные формулы и их приложения", - Красноярск, Россия, 2000, -С. 215-227.

25. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Дискретный аналог одного дифференциального оператора// Материалы VI международного семинара–

совещания "Кубатурные формулы и их приложения", - Уфа, Россия, 2001, -С. 149-154.

26. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Свойства дискретного аналога дифференциального оператора// Международная конференция "Современные проблемы математической физики и информационной технологии", -Ташкент, 2003, -С. 185-188.

27. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Оптимальные квадратурные формулы для вычисления коэффициентов Фурье// Международная конференция "Современные проблемы математической физики и информационной технологии", -Ташкент. 2003, -С. 189-194.

28. Хаётов А.Р. Оптимальные квадратурные формулы в пространствах $W_2^{(m,m-1)}(0,N)$// Материалы традиционной научной конференции молодых учёных Республики Узбекистан. -Ташкент, 2003, -С. 23-25.

29. Хаётов А.Р. Коэффициенты весовых оптимальных квадратурных формул// Материалы международного VII семинара-совещания "Кубатурные формулы и их приложения", -Красноярск, 2003, -С.181-183.

30. Хаётов А.Р. Оптимальная аппроксимация некоторых линейных функционалов в $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ пространстве// Тезисы докладов межд. науч. конф. «Алгебра операторов и квантовая теория вероятностей», -Ташкент, 2005, -С.202-204.

31. Хаётов А.Р. Оптимальные квадратурные формулы в W_2^L пространстве при $L = a_1\frac{d}{dx} + a_0$// Материалы международного VIII семинара-совещания "Кубатурные формулы и их приложения", -Улан-Удэ, Россия, 2005, -С.137-140.

32. Hayotov A.R. Coefficients of the optimal quadrature formulas in the $W_2^{(3,2)}(0,1)$ space// Abstracts of the LUMS 2-nd international conference on mathematics and its application in information technology. –Lahore, Pakistan, 2008, -P.30

33. Хаётов А.Р. О свойствах дискретного аналога дифференциального оператора $d^{2m}/dx^{2m} - d^{2m-2}/dx^{2m-2}$ // Тезисы докладов международной кнференции “Дифференциальные уравнения, Пространства функций, Теория приближений”, -Новосибирск, Россия, 5-12 Октября, 2008, -С.577.

34. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Optimal quadrature formula with positive coefficients in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$// Abstracts of the 4-th World Conference on 21 –st Century Mathematics, -Lahore, Pakistan, 4-8 March, 2009, -P.26.

35. Хаётов А.Р. Экстремальная функция и представление нормы функционала погрешности одной оптимальной квадратурной формулы // Тезисы докладов научной конференции. –Ташкент, 27-30 Апрель, 2009.

36. Хаётов А.Р. Оптимальная квадратурная формула в $W_2^{(3,2)}(0,1)$ пространстве // Материалы международного X семинара-совещания

"Кубатурные формулы и их приложения", -Улан-Удэ, Россия, 2009, -С.147-151.

37. Хаётов А.Р. Оптимальная интерполяционная формула в $W_2^{(1,0)}(0,1)$ пространстве// Тезисы докладов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий аль-Хоразмий 2009», -Ташкент, 18-20 Сентября, 2009, -С.124.

38. Хаётов А.Р. Об одной оптимальной квадратурной формуле в смысле Сарда// Материалы международной конференции «Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения» Красноярск, Россия, 2011, -С.115-117.

39. Хаётов А.Р. Вычисление коэффициентов одной оптимальной квадратурной формулы// Тезисы докладов научной конференции «Операторные алгебры и смежные проблемы», -Ташкент, Узбекистан, 12-14 Сентября, 2012, -С. 231-232.

40. Hayotov A.R. On optimal quadrature formulas in $K_2(P_m)$ Hilbert spaces// Материалы республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математического анализа», Ургенч, Узбекистан, 9-10 Ноября, 2012, -С.107-110.

41. Шадиметов Х.М., Хаётов А.Р. Оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда в $K_2(P_m)$ пространстве// Материалы научной конференции, Ташкент, Октябрь, 2013.

42. Hayotov A.R., Boltaev A.K. Interpolation splines minimizing the semi-norm in $K_2(P_3)$ space// Abstracts of the international conference “Applied and Geometric analysis”, -Samarkand-Novosibirsk, 22-25 September, 2014, -P.

43. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Construction of interpolation splines minimizing the semi-norm in $K_2(P_m)$ space // Abstracts of scientific conference “Non classical equations of mathematical physics”, -Tashkent, Uzbekistan, 23-25 October, 2014.

44. Hayotov A.R., Milovanovic G.V., Shadimetov Kh.M. Optimal quadrature formulas and interpolation splines minimizing the semi-norm in $K_2(P_2)$ space // G.V.Milovanovic and M.Th.Rassias (eds.), Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions, Springer, 2014, -pp.573-611.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
31.10.2016 йил.

Босишга рухсат этилди: 3.11.2016 йил
Бичими 60х45 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 5. Адади: 100. Буюртма: №

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ» ДУК