

**O'zbekistan Respublikasi' Joqari' ha'm orta arnawli' bilim
ministrliqi**

Berdaq ati'ndag'i' Qaraqalpaq ma'mleketlik universiteti

Fizika-matematika fakulteti

Fizika kafedrası'

Fizika-matematika fakultetinin' 4-kurs studenti
Jalg'asbaev Maqsettin' pitkeriw qa'nigelik jumi'si'

**Relyativistlik kvantli'q teoriyani'n' ayi'ri'm
ma'seleleri**

Ilimiy basshi'si'

Kafedra basli'g'i'

Fakultet dekani'

professor B.Abdikamalov.

fizika-matematika ilimlerinin'
kandidati', docent J.Akimova.

fizika-matematika ilimlerinin'
kandidati', docent
B.Otemuratov.

No'kis 2016

Mazmuni'

Kirisiw	3
I bap. Relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' tiykarg'i' ten'lemeleri.	6
1-1 §. Relyativistlik tolqi'n ten'lemeleri.	6
1-2 §. Dirak ten'lemesinin' fizikali'q ma'nisi.	8
1-3 §. Dirak ten'lemesi ha'm kvantli'q teoriya.	10
1-4 §. Dirak ten'lemesin sheshiw (uli'wmali'q principi).	10
1-5 §. Dirak ten'lemesin keltirip shi'g'ari'w.	12
1-6 §. Tolqi'n funkciyasi'ni'n' ta'biyati'.	15
1-7 §. Energiya spektri ha'm tesikler teoriyasi'.	17
1-8 §. Elektromagnitlik ta'sirlesiw.	20
1-9 §. Dirak ten'lemesi menen Shredinger ten'lemesi arasi'ndag'i' baylani'slardi'n' fizikali'q tiykarlari'.	21
1-10 §. Bazi' bir juwmaqlar ha'm ma'selenin' qoyi'li'wi'.	35
II bap. Relyativistlik kvantli'q teoriyani'n' ayi'ri'm ma'seleleri.	37
2-1 §. Bir qatar matematikali'q proceduralar.	37
2-2 §. Dirak ten'lemesin kvadratlaw (kvadratqa ko'teriw).	39
2-3 §. On' ma'nisli energiyag'a iye tegis tolqi'nlar.	42
2-4 §. Eki qurawshi' tu'rinde jazi'lg'an Dirak ten'lemesi	45
2-5 §. Dirak teoriyasi'ndag'i' orayli'q ku'shler.	49
2-6 §. Dirak teoriyasi'ndag'i' Kepler mashqalasi'.	53
Pitkeriw qa'nigelik jumi'si' boyi'nsha uli'wmali'q juwmaqlar.	57
Paydalani'lg'an a'debiyatlar dizimi	58

Kirisiw

Eger biz enciklopediyalarg'a, a'sirese fizikali'q enciklopediyalarg'a itibar beretug'i'n bolsaq, onda relyativistlik kvantli'q mexanika haqqi'nda to'mendegidey mag'li'wmatlardi' tabami'z:

Relyativistlik kvantli'q mexanika teoriyali'q fizikani'n' bir bo'limi boli'p, onda mikrobo'lekshelerdin' (elektronlardin' ha'm basqa da bo'lekshelerdin') qozg'ali'si'ni'n' relyativistlik (yag'ni'y sali'sti'rmali'q teoriyasi'ni'n' talaplari'n qanaatlandi'ratug'i'n) kvantli'q ni'zamlari' bir bo'lekshelik jaqi'nlas'i'w dep atalatug'i'n jaqi'nlas'i'wda qaraladi'.

Relyativistlik effektler bo'lekshelerdin' ti'ni'shli'qtag'i' energiyalari'nday energiyalarda u'lken a'hmiyetke iye. Bunday energiyalarda haqi'yqi'y yamasa virtualli'q bo'lekshelerdin' tuwi'li'wi' mu'mkin. Sonli'qtan uli'wmali'q jag'daylarda bir bo'leksheni qaraw duri's emes. Relyativistlik kvantli'q bo'lekshelerdin' qa'siyetlerin duri's izbe-izlikte ta'riyiplew tek maydanni'n' kvantli'q teoriyasi'nda g'ana a'melge asi'ri'ladi'. Biraq relyativistlik effektler ku'shli baqlanatug'i'n bazi' bir ma'selelerde bo'lekshelerdin' payda boli'wi'n esapqa almawg'a ha'm bir bo'lekshenin' qozg'ali'si'n ta'riyipleytug'i'n tolqi'n ten'lemelerin paydalani'wg'a boladi' (buni' bir bo'lekshelik jaqi'nlas'i'w dep ataymi'z). Tap usi'nday jollar menen atomdag'i' energiya qa'ddilerine relyativistlik du'zetiwlir kirgiziledi (juqa struktura). Biraq ma'seleni usi'nday tu'rde sheshiw logikali'q jaqtan tuyi'q emes. Sonli'qtan usi'nday tiptegi ma'seleler sheshiletug'i'n relyativistlik kvantli'q mexanika maydanni'n' relyativistlik kvantli'q teoriyasi' menen relyativistlik emes kvantli'q mexanikadan u'lken ayi'rmag'a iye boladi'. Al ayi'rma relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' logikali'q izbe-izlikke iye teoriya emes ekenliginde boli'p tabi'ladi'.

Relyativistlik kvantli'q teoriyani'n' ma'selelerin sheshiw ushi'n Shredinger ten'lemesin relyativistlik uli'wmalasti'ri'w joli' menen ali'ng'an to'mendegi ten'lemeler qollani'ladi':

Spini $\frac{1}{2}$ ge ten' bolg'an bo'leksheler ushi'n Dirak ten'lemesi.

Spini 0 ge ten' bolg'an bo'leksheler ushi'n Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi.

Biz bul dizimdi yaponiyali' fizik YUkavani'n' jumi'si' menen dawam etiwimiz mu'mkin. Ol atom yadrolari' ishindegı ku'shlerdi u'yreniw bari'si'nda mezonni'n' bar ekenligin boljadi', al mezon bolsa ko'p uzamay eksperimentlerde ashi'ldi' [20].

Dirak teoriyasi' boyi'nsha elektron menen pozitron jubi' menen tuwi'li'wi' mu'mkin. Bunday processtin' ju'zege keliwi ushi'n bul bo'lekshelerdin' ti'ni'shli'qtag'i' massasi'na ten' energiyani'n' jumsali'wi' kerek (energiyani'n' mug'dari' $2 \times 0,511$ MeV shaması'na ten'). Energiyasi' 1 MeV ten kem bolmag'an gamma-kvantlari'n shi'g'aratug'i'n radioaktivli zatlar belgili bolg'anli'q tan pozitrondi' laboratoriyali'q sharayatlarda ali'wdi'n' mu'mkinshiligi bar edi. Bul ma'sele 1932-jı'li' amerikali' fizik-eksperimentator Anderson (Karl Deyvid Anderson, ingliz tilinde Carl David Anderson, 1905-jı'li' 3-sentyabr ku'ni tuwi'lg'an ha'm 1991-jı'li' 11-yanvar ku'ni qayti's bolg'an, fizika iliminde pozitrondi' ashqani' menen belgili ha'm usi' jumi'si' ushi'n 1936-jı'li' fizika boyi'nsha Nobel si'yli'g'i'n ali'wg'a miyasar boldi') ta'repinen sheshildi. Pozitronlar menen elektronlardi'n' qa'siyetlerin sali'sti'ri'lg'anda olardi'n' elektr zaryadlari'nan basqa barli'q fizikali'q xarakteristikaları'ni'n' birdey ekenligi ani'qlandi' [11].

Joqari'da keltirilgen mi'sallar relyativistlik kvantli'q teoriyani'n' tiykarg'i' jetiskenlikleri boli'p tabi'latug'i'n uli'wmali'q principtin' ayri'qsha ko'rinishleri boli'p tabi'ladi'. Bul principtin' ma'nisi mi'nadan ibarat: **shekli sandag'i' bo'lekshelerdin' relyativistlik kvantli'q teoriyasi'ni'n' ori'n ali'wi' mu'mkin emes**. Demek biz izertleyin dep ati'rg'an relyativistlik kvantli'q mexanika bir bo'lekshelik teoriya boli'p tabi'ladi'.

Relyativistlik kvantli'q teoriya o'z ishine to'mendegilerdi aladi':

- a) bir yamasa bir neshe tiptegi sheksiz ko'p bo'leksheler,
- b) bir tiptegi bo'leksheler bir biri menen birdey ha'm biri ekinshisinen ayri'lmaydi'.
- c) bo'leksheler menen antibo'lekshelerdin' tuwi'li'wi' menen annigilyaciyasi'ni'n' mu'mkinshiligi.

Ha'zirgi zaman relyativistlik kvantli'q teoriyasi' (yag'ni'y relyativistlik maydan teoriyasi') og'ada da'l na'tiyjelerdi beretug'i'n, soni'n' menen matematikali'q jaqtan og'ada quramali' bolg'an teoriyali'q fizikani'n' bir tarawi' boli'p tabi'ladi'. Bul

teoriyani'n' rawajlani'wi'ni'n' bari'si'nda qa'liplesken ma'seleler matematika iliminin' bir qatar tarawları'ni'n' u'lken pa'tler menen rawajlani'wi'na ali'p keldi.

Bul jumi's relyativistlik kvantli'q teoriyani'n' emes, al relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' ayi'ri'm ma'selelerin teren'irek u'yreniw maqsetinde ori'nlandi'. Jumi'sta birinshi gezekte relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' tiykarg'i' ten'lemelerin keltirip shi'g'ari'wdi'n' principi, ten'lemelerdi bir qatar ma'selelerdi sheshiw ushi'n paydalani'w di'qqat orayi'na ali'ng'an.

Jumi's eki baptan turadi'. Birinshi bapta relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' tiykarg'i' principi menen oni'n' tiykarg'i' ten'lemelerin ali'w ma'selelerine tiykarg'i' itibar berilgen. Ekinshi bapta bir bo'lekshelik Dirak ten'lemesin sheshiw ushi'n za'ru'rli bolg'an bir qatar matematikali'q proceduralar, Dirak ten'lemesin kvadratlaw, on' ma'nisli energiyag'a iye tegis tolki'nlar, Dirak teoriyasi'ndag'i' orayli'q ku'shler menen Kepler mashqalasi' si'yaqli' ma'seleler toli'q sheshilgen.

Pitkeriw qa'nigelik jumi'si'n ori'nlawda relyativistlik emes ha'm relyativistlik kvantli'q mexanika, maydanni'n' kvantli'q teoriyasi' boyi'nsha Internet tarmag'i'nda bar ko'p sanli' ilimiy, ilimiy-metodikali'q, oqi'w a'debiyatlari' ken' tu'rde paydalani'ldi'.

I bap. Relyativistlik kvantli'q mexanikasi'n' tiykarg'i' ten'lemeleri

1-1 §. Relyativistlik tolqi'n ten'lemeleri

Biz birinshi relyativistlik tolqi'n ten'lemesinin' 1926-ji'li' bir qatar avtorlar ta'repinen ali'ng'anli'g'i'n ha'm to'mendegidey tu'rge iye bolatug'i'nli'g'i'n atap o'temiz [1-5]:

$$\left[\frac{1}{c^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\varphi \right)^2 - \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - m_0^2 c^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Bul ten'leme arnawli' sali'sti'rmali'q teoriyasi'ni'n' tu'rlendiriwlerin qanaatlandi'radi'. Biraq bul ten'leme menen baylani'sli' bolg'an quramali' jag'day to'mendegiden ibarat. Zaryadti'n' ti'g'i'zli'g'i'n ani'qlaytug'i'n toqti'n' ti'g'i'zli'g'i'ni'n' 4-vektori'ni'n' waqi'tli'q qurawshi'si' bolg'an

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{m_0 c} \left[-\frac{i\hbar}{2c} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{q}{c} \psi^* \varphi \psi \right]$$

shamasi' barli'q waqi'tta on' ma'niske iye bolmaydi'. Bul jag'day kvantli'q mexanikasi'n' itimalli'qli'q interpretaciyasi'na qayshi' keledi (itimalli'qti'n' ma'nisi barldi'q waqi'tta da nolden u'lken boli'wi' kerek). Sebebi ρ/q shamasi' bo'lekshenin' orni'ni'n' itimalli'g'i'n ani'qlaw'i' kerek.

Joqari'da keltirilgen relyativistlik ten'lemenin' sheshimi Kulon maydani'nda qozg'ali'wshi' bo'lekshenin' energiyasi' ushi'n

$$E_{nl} = \frac{m_0 c^2 \left(n + 1/2 + \sqrt{(l + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2} \right)}{\sqrt{\left(n + 1/2 + \sqrt{(l + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2} \right)^2 + (Z\alpha)^2}}$$

tu'rindegi an'latpani' beredi. Bul an'latpadag'i' n menen l bas ha'm azimutalli'q kvantli'q sanlar boli'p tabi'ladi'. Bul an'latpa Layman seriyasi'na kiriwshi spektralli'q si'zi'qlardi'n' juqa strukturasi'ndag'i' spektralli'q si'zi'qlardi'n' bir neshe si'zi'qlarg'a ayri'li'wi'nda α^2 shamasi'na shekemgi da'llikte eksperimentalli'q mag'li'wmatlarg'a sa'ykes keledi. Biraq α^4 shamasi'na shekemgi da'lliklerde eksperimentte ali'ng'an mag'li'wmatlar menen sa'ykes kelmew ayqi'n tu'rde ori'n aladi' (biz bul jag'daydi'n' elektronni'n' spini menen baylani'sli' ekenligin jaqsi' bilemiz).

Sali'sti'rmali'q teoriyasi'ni'n' barli'q talaplari'n qanaatlandi'ratug'i'n spini $\frac{1}{2}$ ge ten' bolg'an mikrobo'leksheler ushi'n tolqi'n ten'lemesin 1928-ji'li' P.Dirak ta'repinen ali'ndi' [6-10].

Joqari'da ayti'li'p o'tilgenindey, Dirak ten'lemesi (Dirac equation) Shredinger ten'lemesin relyativistlik uli'wmalasti'ri'wdi'n' na'tiyjesinde ali'ng'an spini $\frac{1}{2}$ ge ten' bolg'an strukturag'a iye emes bo'lekshe ushi'n kvantli'q ten'leme (tolqi'n ten'lemesi) boli'p tabi'ladi'. Bunday bo'leksheler qatari'na elektrondi', pozitroni', myuondi', antimyuondi', kvarkti, antikvarkti, basqa da bo'lekshelerdi kirgiziw mu'mkin. Dirak ten'lemesi si'zi'qli' ha'm sonli'qtan hallardi'n' superpoziciya principi ori'nlanadi'. Ten'lemede bo'lekshenin' tolqi'n funkciyasi' bolg'an $\psi(\mathbf{r}, t)$ funkciyasi'ni'n' waqi't ha'm koordinatalar boyi'nsha ali'ng'an birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lari' qatnasadi'. Na'tiyjede baslang'i'sh momenttegi $\psi(\mathbf{r}, t)$ funkciyasi'n oni'n' bunnan keyingi waqi't momentlerindegi qa'legen ma'nisin ani'qlawg'a mu'mkinshilik beredi. Erkin bo'lekshe ushi'n Dirak ten'lemesi bo'lekshenin' massasi' m , impulsi p ha'm energiyasi' E arasi'ndag'i'

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

tu'rindagi qatnasqa ali'p keledi. Bul qatnastan kvadrat tu'bir ali'w joli' menen

$$E = \pm \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$$

an'latpasi'na iye bolami'z ha'm on' ma'nisli energiya menen bir qatarda teris ma'nisli energiyani' da alami'z. Dirak teris ma'nisli energiyag'a iye sheshimdi antibo'lekshege tiyisli dep interpretaciyaladi'. Dirak boyi'nsha antibo'lekshe $E < 0$ bolg'an og'ada ko'p hallardag'i' tesik (bos ori'n) boli'p tabi'ladi'.

Dirak ten'lemesi

$$\left(\alpha_0 m c^2 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j c \right) \psi(x, t) = i \hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (1.1)$$

tu'rinde jazi'ladi' (biz Dirak ten'lemesinin' basqa tu'rlerde de jazi'latug'i'nli'g'i'n atap o'temiz ha'm olardi'n' ko'pshiliginin' usi' jumi'sta keltiriletug'i'nli'g'i'n aldi'n-ala eskertemiz). Bul ten'lemede m arqali' elektronni'n' massasi', c arqali' jaqti'li'qti'n' vakkumdag'i' tezligi, $\hbar$ arqali' Plank turaqli'si' (keltirilgen Plank turaqli'si'), p arqali' impuls operatori, x penen t arqali' sa'ykes ken'isliklik ha'm waqi'tli'q qurawshi'lar, $\psi(\mathbf{x}, t)$ arqali' to'rt qurawshi'g'a iye tolqi'n funkciyasi' (bispinor) belgilengen.

α_j arqali' tolqi'n funkciyasi'na ta'sir etetug'i'n si'ziqli' operatorlar belgilengen. Olar bir biri menen antikommutaciyalanadi'. Basqa so'z benen aytqanda

$$\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i. \quad (1.2)$$

Bul matriclarda indeksler 0 den 3 ke shekem o'zgeredi. Bunday qa'siyetti keltirip shi'g'ari'wdi'n' en' a'piwayi' usi'li' 4x4 o'lshemge iye matricadan paydalani'w boli'p tabi'ladi'. Antikommutaciya sha'rti ori'nlanatug'i'n matricalardi'n' en' kishi o'lshemi 4x4 boli'p tabi'ladi'.

1-2 §. Dirak ten'lemesinin' fizikali'q ma'nisi

Elektron ha'm pozitron. Dirak ten'lemesinen elektronni'n' shamasi' $\hbar/2$ ge ten' menshikli mexanikali'q momentke (yag'ni'y spinge) ha'm shamasi' $e\hbar/2mc$ Bor magnetoni'na ten' magnit momentine iye ekenligi kelip shi'g'adi'. Bul eki momenttin' bar ekenligi eksperimentte 1925-j'i'li' ashi'lg'an edi. Dirak ten'lemesinin' ja'rdeminde vodorod ja'ne vodorod ta'rizli atomlardag'i' energiyani'n' qa'ddileri ushi'n da'l formula ali'ndi' ha'm Zeeman effekti tu'sindirildi. Dirak ten'lemesinin' tiykari'nda erkin elektronlardag'i' fotonlardi'n' shashi'rawi'ni'n' itimalli'g'i' (buni' Kompton effekti dep ataymi'z) ha'm elektronlardi'n' tormozlani'wi'ni'n' na'tiyjesinde (tormozli'q nurlani'wdi'n') nurlani'wi' ushi'n formulalar ali'ndi' ha'm ali'ng'an formulalardi'n' duri's ekenligi eksperimentlerde tasti'yi'qlandi'. Biraq elektronni'n' qozg'ali'si'n toli'q ta'riyiplew kvantli'q elektrodinamikani'n' ja'rdeminde ori'nlanadi' [12-16].

Dirak ten'lemesinin' o'zine ta'n o'zgesheligi oni'n' sheshimlerinin' arasi'nda bo'lekshenin' erkin qozg'ali'si' ushi'n energiyani'n' teris ma'nislerine iye sheshimlardin' bar ekenliginde. Bul jag'day bo'lekshenin' massasi'ni'n' teris ma'nisine sa'ykes keledi ha'm teoriyani' quramali' awhalg'a saldi'. Sebebi usi'nday hallarda turg'an bo'leksheler ushi'n barli'q mexanikali'q ni'zamlar duri's emes boli'p shi'g'adi' (bo'lekshenin' tezleniwi ta'sir etiwshi ku'shke qarama-qarsi' bag'i'tlang'an boli'p shi'g'adi'). Al kvantli'q teoriyada bolsa bunday hallarg'a o'tiwadin' mu'mkinshiligi bar. Bo'lekshelerdin' bir birine aylani'wi'ni'n' mu'mkinshiligi da'lillengennen keyin teris energiya qa'ddilerine o'tiwadin' haqi'yqi'y fizikali'q ma'nisi

ayqi'n boldi'. Dirak ten'lemesinen massasi' elektronni'n' massasi'nday, al zaryadi' elektronni'n' belgisi zaryadi'na qarama-qarsi' bolg'an bo'lekshenin' bar ekenligi kelip shi'qti'. Bunday bo'leksheni elektronni'n' antibo'lekshesi dep ataymi'z ha'm oni'n' 1932-ji'li' K.Anderson ta'repinen kosmosli'q nurlardi'n' qurami'nda ashi'lg'anli'g'i' joqari'da atap o'tildi. Bul jag'day Dirak teoriyasi'ni'n' ulli' tabi'si' boli'p tabi'ldi'. Elektronni'n' teris ma'niske iye haldan on' energiyag'a iye halg'a o'tiwi ha'm og'an keru o'tiw elektron-pozitron jubi'ni'n' payda boli'wi' ha'm usi'nday jupti'n' annigilyaciyasi' dep interpretaciyalanadi'.

Basqa bo'leksheler ushi'n paydalani'w. Dirak ten'lemesi spini $\hbar/2$ ge ten' basqa da bo'leksheler ushi'n da duri's na'tiyje beredi (myuonlar, neytrinolar). Biraq spini tap sonday bolg'an protonlar menen neytronlar ushi'n magnit momentin esaplag'anda duri's emes na'tiyjeler ali'nadi': Dirak teoriyasi' boyi'nsha protonni'n' magnit momenti yadroli'q magneton bolg'an $e\hbar/2m_p c$ shamasina (m_p arqali' protonni'n' massasi' belgilengen), al neytronni'n' magnit momenti nolge ten' boli'wi' kerek (sebebi neytron zaryadlanbag'an). Ta'jiriybelerde protonni'n' magnit momentinin' yadroli'q magnetonnan shama menen 2,8 ese u'lken ekenligin, al neytronni'n' magnit momentinin' teris ma'niske iye ekenligin ha'm absolyut shamasini boyi'nsha protonni'n' magnit momentinin' shama menen $2/3$ u'lesine ten' ekenligin ko'rsetedi. Bul bo'lekshelerdin' anomalli'q (normal emes) magnit momentleri olardi'n' ku'shli ta'sirlesiwleri menen baylani'sli'.

Haqi'yqati'nda Dirak ten'lemesin spini $\frac{1}{2}$ ge ten' (a'l'bette $\hbar$ birliklerinde) elementar bo'leksheler bolg'an kvarklar ushi'n da qollani'wg'a boladi'. Modifikaciyalang'an Dirak ten'lemesin elementar bo'leksheler qatari'na kirmeytug'i'n protonlar menen neytronlar ushi'n da paydalani'wg'a boladi' (olardi'n' kvarklerden turatug'i'nli'g'i'n eske tu'siremez). Dirak ten'lemesinin' basqa da bir modifikaciyasi'n Mayoran ten'lemesi dep ataydi' ha'm bul ten'leme neytrinolardi' ta'riyipleydi.

1-3 §. Dirak ten'lemesi ha'm kvantli'q teoriya

Dirak ten'lemesi bir elektron ushi'n itimalli'qti'n' amplitudasi'n ta'riyipleydi. Usi' jag'dayg'a sa'ykes Dirak teoriyasi' bir bo'lekshelik teoriya boli'p tabi'ladi' ha'm ol bo'lekshelerdin' tuwi'li'wi' menen joq boli'wi'n qabi'l etpeydi. Teoriya elektronni'n' magnit momentin ha'm vodorod atomi'ni'n' spektrindegi si'zi'qlardi'n' juqa strukturasi'n ayqi'n tu'rde da'l ko'rsete aladi'. Soni'n' menen birge teoriya elektronni'n' spinin de tu'sindire aladi'. Sebebi ten'lemenin' to'rt sheshiminin' ekewi elektronni'n' eki spinlik hali'na sa'ykes keledi. Energiyani'n' teris ma'nisine iye qalg'an eki sheshim on' zaryadlang'an elektrong'a (pozitrong'a) juwap beredi.

Joqari'da atap o'tilgen tabi'slari' menen birge teoriya bir qatar kemshilikke de iye. Teoriyada sali'sti'rmali'q teoriyasi'ni'n' a'hmiyetli ha'm fundamentalli'q na'tiyjelerinin' biri bolg'an bo'lekshelerdin' tuwi'li'wi' menen joq boli'wi' (o'liwi) ori'n almag'an. Bul qi'yi'nshi'li'q maydanni'n' kvantli'q teoriyasi'nda tabi'sli' tu'rde sheshilgen. Kvantlang'an elektromagnit maydani'n o'zine qosi'p ali'p Dirak teoriyasi' kvantli'q elektrodinamikag'a aylanadi'.

1-4 §. Dirak ten'lemesin sheshiw (uli'wmali'q principi)

Erkin bo'lekshe ushi'n ten'lemeni sheshiw ushi'n χ spinori' qollani'ladi':

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Bul an'latpalarda $\chi^{(1)}$ matricasi' joqari' qaray bag'i'tlang'an, al $\chi^{(2)}$ matricasi' to'men qaray bag'i'tlang'an spinge sa'ykes keledi.

Antibo'leksheler ushi'n qarama-qarsi' bolg'an jag'day ori'nlanadi':

$$\chi^{*(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \chi^{*(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Joqari'dag'i'lar menen bir qatar Pauli matricolari'n kirgizemiz:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Bo'leksheler ushi'n. Dirak ten'lemesinin' sheshimi erkin bo'leksheler ushi'n

$$\psi = u(\mathbf{p})e^{ipx}. \quad (1.6)$$

Bul an'latpada **p** arqali' a'dettegidey u'sh o'lsheqli vektor, al p menen x arqali' to'rt-vektorlar belgilengen.

$u(p)$ bispinori' moment penen spinnin' funkciyasi' boli'p tabi'ladi':

$$u^s(p) = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\sigma \cdot p}{E + m} \chi^{(s)} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Antibo'leksheler ushi'n. Tolqi'n ten'lemesin sheshiw

$$\psi = u(p)e^{ipx}. \quad (1.9)$$

tolqi'n funkciyasi'n beredi. Bul an'latpada

$$u^s(p) = \sqrt{|E| + m} \begin{bmatrix} \frac{-\sigma \cdot p}{|E| + m} \chi^{*(s)} \\ \chi^{(s)} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

an'latpalari'na iye bolami'z.

Bispinorlar. u ha'm v spinorlari' ushi'n toli'q qatnas bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u_p^{(s)} \bar{u}_p^{(s)} &= p + m, \\ \sum_{s=1,2} u_p^{(s)} \bar{u}_p^{(s)} &= p - m, \end{aligned} \quad (1.11)$$

Bul an'latpalarda

$$a = \gamma^\mu p_\mu.$$

Dirakti'n' gamma matricallari'. Dirakti'n' gamma matricallari'n qolayli' biraq birden bir emes saylap alg'anda to'mendegidey an'latpalarg'a iye bolmi'z (biz keyinirek Dirak matricallari'n γ arqali' da belgileymiz):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \alpha_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \alpha_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Bul antikommutatsiyalanatug'i'n matricallardi' Dirakti'n' gamma matricallari' dep ataydi'. Matricallardi'n' antikommutatsiyalanatug'i'ni'g'i'n Mathematica 10 tilinde jazi'lg'an to'mendegi programmani'n' ja'rdeminde tekserip ko'riw mu'mkin:

$m0 = \{\{1,0,0,0\}, \{0,1,0,0\}, \{0,0,-1,0\}, \{0,0,0,-1\}\};$

$m1=\{\{0,0,0,1\},\{0,0,1,0\},\{0,1,0,0\},\{1,0,0,0\}\};$
 $m2=\{\{0,0,0,-I\},\{0,0,I,0\},\{0,-I,0,0\},\{I,0,0,0\}\};$
 $m3=\{\{0,0,1,0\},\{0,0,0,-1\},\{1,0,0,0\},\{0,-1,0,0\}\};$
 $m0.m1//MatrixForm$
 $m0.m2//MatrixForm$
 $m0.m3//MatrixForm$
 $m1.m0//MatrixForm$
 $m1.m2//MatrixForm$
 $m1.m3//MatrixForm$ h.t.b.

1-5 §. Dirak ten'lemesin keltirip shi'g'ari'w

Dirak ten'lemesin Shredinger ten'lemesin relyativistlik uli'wmalasti'ri'wdi'n' ja'rdeminde ali'nadi':

$$\hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \quad (11.13)$$

Ma'seleni qolayli' etip sheshiw ushi'n bir koordinatali'q ko'riniste jumi's isleyemiz. Bunday ko'riniste sistemani'n' hali' $\psi(x,t)$ tolqi'n funkciyasi'ni'n' ja'rdeminde ani'qlanadi'. Koordinatali'q ko'riniste Shredinger ten'lemesin bi'layi'nsha jazadi':

$$\hat{H}\psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}. \quad (11.14)$$

Bunday jag'dayda $\hat{H}$ gamiltoniani' $|\psi(t)\rangle$ hal vektori'na emes, al $\psi(x,t)$ tolqi'n funkciyasi'na ta'sir etedi.

Gamiltoniandi' sistemani'n' toli'q energiyasi'n ta'riyipleytug'i'nday etip ani'qlaw kerek. Biz ha'zir si'rtqi' maydanlardan izolyaciyalang'an erkin elektrondi' qaraymi'z. Relyativistlik emes model ushi'n klassikali'q mexanikadag'i' kinetikali'q energiyag'a sa'ykes keletug'i'n gamiltoniandi' alami'z ha'm ha'zirshe elektronni'n' spinine itibar bermeymiz:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^3 \frac{\hat{p}_j^2}{2m}. \quad (11.15)$$

Bul formulada $\hat{p}_j$ arqali' impuls operatori'ni'n' qurawshi'lari' belgilengen. $j = 1, 2, 3$ indeksleri impuls operatori'ni'n' proekciyalari'na sa'ykes keledi. Ha'r bir usi'nday operator tolqi'n funkciyasi'na ken'isliklik tuwi'ndi' si'pati'nda ta'sir etedi:

$$\hat{p}_j \psi(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} -i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}. \quad (11.16)$$

Relyativistlik sistemani' ta'riyiplew ushi'n biz impuls operatori' ushi'n joqari'da keltirilgen ani'qlamani' saqlaydi' dep esaplap sa'ykes gamiltoniandi' tabi'wi'mi'z kerek. Sali'sti'rmali'q teoriyasi' boyi'nsha sistemani'n' toli'q energiyasi'

$$E^2 = m^2 c^4 + \sum_{j=1}^3 p_j^2 c^2 \quad (11.17)$$

formulasi'ni'n' ja'rdeminde ani'qlanadi'. Bul formulani'n' ja'rdeminde

$$\sqrt{m^2 c^4 + \sum_{j=1}^3 p_j^2 c^2} \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \quad (11.18)$$

ten'lemesine iye bolami'z ha'm bul ten'lemede waqi't penen ken'islik birdey huqi'qta qatnaspaytug'i'n bolg'anli'qtan qanaatlandi'rarli'q emes an'latpa ekenligine an'sat ko'z jetkeremiz. Sali'sti'rmali'q teoriyasi' boyi'nsha ten'lemelerge waqi't penen ken'islik birdey huqi'qta qatnashi'wi' sha'rt (mi'sali' waqi't boyi'nsha ali'ng'an birinshi ta'rtpili tuwi'ndi' qatnasatug'i'n bolsa, ken'isliklik koordinatalar boyi'nsha da birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lardi'n' ori'n ali'wi' kerek).

(11.18)-an'latpani'n' kvadrati' Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesine ali'p keledi. Bul ten'lemenin' on' ta'repi waqi't boyi'nsha ali'ng'an birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'g'a iye bolg'anli'qtan Dirak ten'lemenin' shep ta'repi koordinatalar boyi'nsha da birinshi ta'rtpili ten'lemege iye boli'wi' kerek dep esapladi' (yag'ni'y impuls operatorlari'na). Bul jag'dayg'a ali'p keliwdin' usi'llari'ni'n' biri kvadrat tu'birdin' asti'ndag'i' an'latpani' idealli'q kvadratqa ali'p keliw boli'p tabi'ladi'. Usi'nday ko'z-qarasta turi'p

$$EI = \alpha m c^2 + c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j \quad (11.19)$$

tu'rindagi an'latpani' ali'w maqsetke muwapi'q keledi. Bul an'latpada I arqali' birlik element belgilengen. Na'tiyjede biz Dirakti'n' erkin ten'lemesi dep atalatug'i'n

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} = \left[c \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j + \alpha_0 mc^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (11.20)$$

tu'rindegi ten'lemege iye bolami'z. Bul ten'lemedegi α koefficientlari relyativistlik toli'q energiya boyi'nsha ani'qlanadi':

$$E^2 = (mc^2)^2 + \sum_{j=1}^3 (p_j c)^2 = \left(\alpha_0 mc^2 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j c \right)^2. \quad (11.21)$$

Qawsi'rmalardi' ashi'p α ushi'n to'mendegidey sha'rtlerdi alami'z:

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 &= I, & \alpha_i \alpha_0 + \alpha_0 \alpha_i &= 0, & i &= 0, 1, 2, 3, \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij}, & i, j &= 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Son'g'i' sha'rtti qi'sqasha tu'rde bi'layi'nsha jazi'wg'a boladi':

$$\{\alpha_\mu, \alpha_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \cdot I, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (11.23)$$

Bul an'latpada $\{\alpha_\mu, \alpha_\nu\}$ qawsarmasi' $\{A, B\} \equiv AB - BA$ tu'rinde ani'qlanatug'i'n antikommutator, al $\delta_{\mu\nu}$ arqali' Kroneker simvoli' ani'qlanadi'. Eger eki indeks birdey ma'niske iye bolsa Kroneker simvoli'ni'n' ma'nisi 1 ge, al eki indekstin' ma'nisleri ha'r qi'yli' bolsa 0 ge ten' boladi'.

Eger α shamasi' tek san bolsa joqari'da keltirilgen (11.23) sha'rtin qanaatlandi'ra almaydi' (a'dettegi sanlar kommutaciyalanadi', al α kommutaciyalanbaydi'). Sonli'qtan α shamasi' bazi' bir si'zi'qli' operator yamasa matrica boli'p tabi'ladi'. Bunday jag'dayda qatnaslardi'n' on' ta'repindegi birler menen nollerdi sa'ykes birlik ha'm nollik operatorlar yamasa matricalar dep qabi'l etiw kerek. Tap usi' jerde tolqi'n funkciyasi'ni'n' bir qurawshi'dan turatug'i'n funkciya emes (yag'ni'y skalyar funkciya emes), al ko'p qurawshi'dan turatug'i'n vektorli'q tolqi'n funkciyasi' boli'wi'ni'n' sha'rt ekenligi kelip shi'g'adi'. Soni'n' menen birge a'dettegi fizikali'q ken'islik yamasa ken'islik-waqi't penen baylani'sli' bolmag'an qanday da bir ishki abstraktli'q "ishki" ken'islik na'zerde tuti'ladi'.

Gamiltonianni'n' ermitlik operator boli'wi'ni'n' za'ru'rli'ginen matricani'n' da ermitlik matrica boli'wi' talap etiledi. Soni'n' menen birge (11.23)-sha'rtti qanaatlandi'ri'w ushi'n biz ga'p etip ati'rg'an matricani'n' en' kishi o'lishemi 4x4 boli'wi' sha'rt. Biraq bunday matricani' jazi'w, basqa so'z benen aytqanda matricani'n' ko'rinisi bir ma'nisli emes (yag'ni'y ayti'li'p ati'rg'an kriteriydi qanaatlandi'ri'w ushi'n

4x4 o'lshemindeg matricani' ha'r qi'yli' etip saylap ali'w mu'mkin). Gruppali'q ko'rinis (matricani'n' ko'rinisi) Dirak ten'lemesinin' qa'siyetlerine ta'sir etpeydi, biraq ko'rinis tolqi'n funkciyalari'ni'n' qurawshi'lari'ni'n' fizikali'q ma'nisine ta'sir etedi. Bunnan tolqi'n funkciyasi'ni'n' to'rt o'lshemli, kompleksli, abstraktli' (yag'ni'y a'dettegi ken'islik-waqi'tti'n' vektorlari' menen tuwri'dan-tuwri' baylani'sqa iye emes) vektorli'q maydan (yag'ni'y bispinorli'q maydan) boli'wi'ni'n' kerek ekenligi kelip shi'g'adi'.

Joqari'dag'i' (1.12)-an'latpalarda Dirakti'n' o'zi ta'repinen paydalani'lg'an matricani'n' ko'rinisin berildi. Bul ko'rinisti bi'layi'nsha duri's jazi'w mu'mkin:

$$\alpha_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \alpha_j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Bul an'latpada 0 ha'm I arqali' o'lshemleri 2x2 bolg'an nollik ha'm birlik matricalar, al σ_j ($j = 1, 2, 3$) arqali' relyativistlik emes kvantli'q mexanikadan belgili bolg'an Pauli matricalari' belgilengen.

Bul ten'lemedegi gamiltoniandi'

$$H = \alpha_0 mc^2 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j p_j c \quad (1.25)$$

tu'rinde jazadi' ha'm oni' Dirak gamiltoniani' dep ataydi'.

Eki yamasa u'sh o'lshemli ken'isliktegi $m = 0$ bolg'an sha'rtti qanaatlandi'ratug'i'n a'dettegi Dirak ten'lemesi ushi'n joqari'da keltirilgen alfa-matricalardi'n' orni'na Dirak matricalari'n ali'w jetkilikli. Bunday jag'daylarda to'rt qurawshi'g'a iye bispinorli'q maydanni'n' orni'na eki qurawshi'g'a iye spinorli'q maydan keledi.

1-6 §. Tolqi'n funkciyasi'ni'n' ta'biyati'

Tolqi'n funkciyasi'na 4x4 o'lshemge iye matrica ta'sir etetug'i'n bolg'anli'qtan ol (tolqi'n funkciyasi') to'rt qurawshi'g'a iye obekt boli'p tabi'ladi'. Biz keyinirek tolqi'n funkciyasi'ni'n' eki erkinlik da'rejesine iye ekenligin, olardi'n' birewinin' on' ma'niske iye energiyag'a, al ekinshisinin' teris ma'niske iye energiyag'a sa'ykes keletug'i'nli'g'i'n ko'remiz.

Soni'n' menen birge tolqi'n funkciyasi'ni'n' ha'r biri spinnin' berilgen bag'i'tqa tu'sirilgen proekciyalari' menen baylani'sli' bolg'an ja'ne eki erkinlik da'rejesine iye. Bunday eki proekciyani' sha'rtli tu'rde "joqari'g'a" ha'm "to'menge" qaray bag'i'tlang'an dep esaplaydi'.

Tolqi'n funkciyasi'n bag'ana tu'rinde jaza alami'z:

$$\psi(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \\ \psi_3(\mathbf{x}, t) \\ \psi_4(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Dualli'q tolqi'n funkciyasi'n qatar tu'rinde jazadi':

$$\bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi^\dagger \alpha^0. \quad (1.27)$$

Bul an'latpada

$$\psi^\dagger = [\psi_1^*(\mathbf{x}, t), \psi_2^*(\mathbf{x}, t), \psi_3^*(\mathbf{x}, t), \psi_4^*(\mathbf{x}, t)]. \quad (1.26)$$

Joqari'dag'i' an'latpada * belgisi kompleksli tu'yinleslikni an'g'artadi'.

A'dettegi bir qurawshi'g'a iye tolqi'n funkciyasi'nday tolqi'n funkciyasi'ni'n' modulinin' kvadarti'n kirgiziw mu'mkin. Bul shama $\mathbf{x}$ koordinatai'si' menen t waqi'tti'n' funkciyasi' si'pati'nda itimalli'qti'n' ti'g'i'zli'g'i'n beredi. Bul jag'dayda moduldin' kvadrati'ni'n' orni'n tolqi'n funkciyasi' menen og'an dualli'q bolg'an tolqi'n funkciyasi'ni'n' skalyar ko'beymesini beredi. Bul bispinordi'n' ermitlik normasi'ni'n' kvadrati' boli'p tabi'ladi':

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{a,b=1}^4 \psi_a^*(\mathbf{x}, t) (\alpha^0)_{a,b} \psi_b(\mathbf{x}, t). \quad (1.27)$$

Itimalli'qti'n' saqlani'wi' normirovka sha'rtin beredi:

$$\int \bar{\psi}\psi d^3x = 1 \quad (1.28)$$

Dirak ten'lemesini paydalani'p itimalli'qti'n' "lokalli'q" tog'i'n ali'wg'a boladi':

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}\psi(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (1.29)$$

Itimalli'q tog'i' $\mathbf{J}$ bi'layi'nsha beriledi:

$$\mathbf{J}_j = c\bar{\psi}\alpha_j\psi. \quad (1.30)$$

$\mathbf{J}$ shamasini elektronni'n' zaryadi' e ge ko'beytip elektron ushi'n toqti'n' ti'g'i'zli'g'i'n bolg'an $\mathbf{j}$ shamasina kelemiz.

Tolqi'n funkciyasi'ni'n' qurawshi'lari'ni'n' ma'nisleri koordinatali'q sistemadan g'a'rezli boladi'. Dirak koordinatalar sistemasi' o'zgergende ψ tolqi'n funkciyasi'ni'n' qalayi'nsha o'zgeretug'i'nli'g'i'n ko'rsetti (soni'n' ishinde u'sh o'lsheмли ken'isliktegi buri'wlar menen bir birine sali'sti'rg'anda u'lken tezlikler menen qozg'alatug'i'n koordinatalar sistemalari' arasi'ndag'i' tu'rlendiriwlar de bar). Bunday jag'daylarda ψ tolqi'n funkciyasi' ken'islikti (yamasa ken'islik-waqi'tti') aylandi'rg'anda yamasa Lorenc tu'rlendiriwlerinde a'dettegi ken'isliktin' vektori' si'pati'nda tu'rlenbeydi. Bul jag'day tan' qalarli'q jag'day emes, sebebi oni'n' qurawshi'lari' a'dettegi ken'isliktegi bag'i'tlar menen baylani'sli' emes. Bunday obekt to'rt qurawshi'g'a iye Dirak spinori' atamasi'na iye boldi'.

Si'rtqi' ken'isliktegi koordinatalardi' buri'wlar menen baylani'sli' bolg'an barli'q o'zgerislerdi α matricasi'na kirgiziwge boladi'. Bunday jag'daylarda matrica ha'r qi'yli' koordinatalar sistemasi'nda ha'r qi'yli' boli'p ko'rinedi. Biraq ol o'zinin' tiykarg'i' qa'siyetleri bolg'an antikommutavilikti ha'm ha'r bir matricani'n' kvadrati'ni'n' birge ten' bolatug'i'nli'g'i'n saqlaydi', al si'rtqi' ken'isliktin' buri'wlari'nda bi-spinorlardi'n' qurawshi'lari' pu'tkilley o'zgermeydi.

1-7 §. Energiya spektri ha'm tesikler teoriyasi'

Dirak gamiltoniani'ni'n' menshikli ma'nislerin tabi'w menen shug'i'llanami'z. Oni'n' ushi'n biz

$$H\psi_0(x) = E\psi_0(x) \quad (1.31)$$

tu'rindagi ten'lemen sheshiwimiz kerek. Bul ten'lemde $\psi_0(x)$ arqali' toli'q tolqi'n funkciyasi'ni'n' waqi'ttan g'a'rezsiz bo'limi belgilengen. Waqi'tqa baylani'sli' bolg'an tolqi'n funkciyasi'n to'mendegidey eki funkciyani'n' ko'beymesi tu'rindagi izleyemiz:

$$\psi(x, t) = \psi_0(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (1.32)$$

Bul an'latpani' Dirakti'n' stacionar emes ten'lemesine qoyi'p stacionar ten'lemen alami'z.

Ten'lemenin' sheshimin tegis tolqi'n tu'rindagi izleyemiz. Qolayli' boli'wi' ushi'n qozg'ali'sti'n' bag'i'ti' z ko'sherinin' bag'i'ti' menen bag'i'tlas dep esaplaymi'z. Sonli'qtan tolqi'n funkciyasi' retinde

$$\psi_0 = \omega e^{\frac{ipz}{\hbar}} \quad (1.33)$$

tu'rindegi tolqi'n funkciyasi'n qabi'l etemiz. (1.33)-an'latpada ω arkali' turaqli' to'rt qurawshi'g'a iye spinor ha'm p arqali' bo'lekshenin' impulsi belgilengen. Dirak ko'rinishinde ψ_0 ushi'n ten'leme

$$\begin{bmatrix} mc^2 & 0 & pc & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & -pc \\ pc & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & -pc & 0 & -mc^2 \end{bmatrix} \omega = E\omega \quad (1.34)$$

ten'lemesinin' menshikli ma'nislerin tabi'wg'a ali'p kelledi.

p ni'n' ha'r bir ma'nisi ushi'n menshikli ma'nislerdin' eki dana eki o'lshemli o'lshemli ken'isligi bar boladi'. Menshikli ma'nislerdin' bir ken'isligi on' ma'nisli menshikli ma'nislerge, al ekinshi ken'isligi teris ma'nisli

$$E_{\pm}(p) = \pm \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \quad (1.35)$$

tu'rindegi menshikli ma'nislerge iye boladi'. On' ma'niske iye ken'islik

$$\left\{ \begin{bmatrix} pc \\ 0 \\ \epsilon \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ pc \\ 0 \\ -\epsilon \end{bmatrix} \right\} \times \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + (pc)^2}} \quad (1.36)$$

menshikli ma'nisleri ta'repinen tuwi'ladi'. Ol teris ma'nisli menshikli ma'nisler ushi'n

$$\left\{ \begin{bmatrix} -\epsilon \\ 0 \\ pc \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon \\ 0 \\ pc \end{bmatrix} \right\} \times \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 + (pc)^2}} \quad (1.37)$$

menshikli ma'nisleri sa'ykes keledi. Bul an'latpalarda

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} |E| - mc^2. \quad (1.38)$$

Ha'r bir menshikli ken'isliktegi birinshi payda etiwshi menshikli hal z bag'i'ti'na tu'sirilgen spinnin' on' ma'nisli proekciyasi'na iye boladi' (buni' "joqari'g'a qarag'an" spin dep ataymi'z). Al ekinshi menshikli hal qarama-qarsi' bag'i'tlang'an spinge iye boladi' (yag'ni'y "to'menge qarag'an spin").

Relyativistlik emes shekte spinordi'n' ϵ qurawshi'si' bo'lekshenin' kinetikali'q energiyasi'na shekem kishireyedi, oni'n' ma'nisi bolsa pc ko'beymesinin' shamasin'nan esapqa almasli'qtay kishi:

$$\epsilon \sim \frac{p^2}{2m} \ll pc. \quad (1.39)$$

Bul shekte to'rt qurawshi'g'a iye tolqi'n funkciyasi'n sali'sti'rmali' amplituda dep qarawg'a boladi': (I) spin joqari'g'a qarag'an, on' ma'nisli energiyag'a iye, (II) spin to'menge qarag'an, on' ma'nisli energiyag'a iye, (III) spin joqari'g'a qarag'an, teris ma'nisli energiyag'a iye ha'm (IV) spin to'menge qarag'an, teris ma'nisli energiya ori'n aladi'.

Ten'lemenin' ayi'ri'm sheshimlerinin' teris energiyalarg'a iye boli'wi' bir qatar mashqalalardi' payda etedi. Sebebi en' da'slep bo'leksheni on' ma'nisli energiyag'a iye dep esapladi'q. Matematikali'q ko'z-qarastan teris energiyag'a iye sheshimdi itibarg'a almay ketiwge bolmaydi'. Sebebi elektron menen elektromagnit maydani' arasi'ndag'i' ta'sirlesiwdi ma'selege qossaq on' ma'niske iye energiyasi' bar halda joylasqan elektron teris energiyasi' bar halg'a o'tken bolar edi.

Usi'ni'n' na'tiyjesinde ol o'zinin' arti'q energiyasi'n fotonlar tu'rinde nurlandi'ri'p energiyasi'ni'n' ma'nisin kemeytedi. Al haqi'yqi'y elektronlarda bolsa bunday jag'daylardi' baqlamaymi'z.

Bunday mashqalani' sheshiw ushi'n Dirak ha'zirgi waqi'tlari' ken'nen belgili bolg'an **tesiklik teoriyani'** usi'ndi'. Bul teoriya boyi'nsha vakuum ko'p bo'lekshelik kvantli'q hal boli'p tabi'ladi' ha'm bul haldag'i' teris ma'nisli energiyag'a iye barli'q hallar elektronlar menen iyelengen. Vakuumdi' elektronlar "ten'izi" dep ta'riyiplewdi Dirak ten'izi dep ataydi'. Pauli principi elektronlardi'n' basqa elektronlar ta'repinen iyelengen hallardi' iyelewin qadag'an etetug'i'n bolg'anli'qtan qa'legen qosi'msha elektron on' ma'nisli energiyag'a iye hallardi' iyelewge ma'jbu'r boladi' ha'm sonli'qtan olar teris ma'nisli energiyag'a iye hallarg'a o'te almaydi'.

Dirak teris ma'nisli energiyag'a iye hallardi'n' barli'g'i' tolg'an emes dep ha'm ha'r bir iyelenbegen hal (bunday haldi' tesik, yag'ni'y bos ori'n dep atadi') on' zaryadqa iye bo'lekshenin' qa'siyetindey qa'siyetke iye boladi'. Vakuumnan bo'lekshe-tesik jubi'n payda etiw ushi'n "tesik" on' ma'nisli energiyag'a iye. Da'slepki waqi'tlari' Dirak "tesiktin'" proton boli'wi' mu'mkin dep te esapladi'. Biraq Veyl tesiktin' massasi'ni'n' elektronni'n' massasi'na ten' boli'wi'ni'n' sha'rt ekenligin ko'rsetti (al proton bolsa elektronnan 1836,15 ese u'lken). En' aqi'ri'nda 1932-j'i'li' tesik pozitron boli'p shi'qti' (oni' Karl Anderson kosmosli'q nurlardi'n' qurami'nan tepti').

"Vakuumdi" teris energiyag'a iye elektronlardi'n' sheksiz u'lken ten'izi dep esaplaw ha'zirgi zaman fizikasi'n qanaatlandi'rmaydi'. Maydanni'n' kvantli'q teoriyasi'nda tuwi'li'w ha'm o'liw operatorlari'n ta'rlendiritug'i'n Bogolyubov tu'rlendiriwi Dirakti'n' sheksiz ten'iz formalizmin aylani'p o'tiwge mu'miknshilik beredi.

Qatti' deneler fizikasi'nda "tesiklik teoriyani'n'" tiykarg'i' tu'sinikleri duri's na'tiyjelerdi beredi ha'm a'sirese yari'm o'tkizgishlerdin' zonali'q teoriyasi'nda ken'nen qollani'ladi'. O'tkizgishtegi o'tkizgishlik elektronlari'ni'n' ten'izin Fermi ten'izi dep ataydi'. Bul "ten'iz" o'z ishine sistemani'n' ximiyali'q potentsiali'na shekemgi elektronlardi' aladi'. Fermi ten'izindegi iyelenbegen hal "tesik" boli'p tabi'ladi' ha'm ol on' zaryadlang'an elektronni'n' qa'siyetindey qa'siyetke iye boladi'. Biraq bul sol "tesik" boli'p tabi'ladi', al pozitron emes. Fermi ten'izinin' teris zaryadi' materialdi'n' on' zaryadlang'an ionli'q pa'njeresi menen kompensaciyalang'an.

1-8 §. Elektromagnitlik ta'sirlesiw

Biz joqari'da hesh qanday si'rtqi' maydanlar ta'sir etpeytug'i'n elektrondi' qaradi'q. Klassikali'q elektrodinamikadag'i' zaryadlang'an bo'lekshenin' gamiltoni' si'yaqli' elektromagnit maydani'ni'n' effektin esapqa ali'w ushi'n Dirak gamiltoniani'n o'zgeritemiz. Tap sonday etip jazi'lg'an gamiltonian SI birlikler sistemasi'nda

$$H = \alpha_0 mc^2 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j [p_j - eA_j(\mathbf{x}, t)]c + e\varphi(\mathbf{x}, t) \quad (1.40)$$

tu'rine iye boladi'. Bul an'latpada e arqali' elektronni'n' elektr zaryadi' (joqari'dag'i' an'latpada e nin' belgisinin' teris ekenligi esapqa ali'ng'an), A menen φ arqali' sa'ykes elektromagnitlik vektorli'q ha'm skali'r potentsiallar belgilengen.

$\varphi = 0$ dep boljap ha'm relyativistlik emes shekte islep Dirak energiyani'n' on' ma'nisli oblasti'ndag'i' eki joqarg'i' qurawshi' ushi'n to'mendegidey an'latpalardi' tapti' (olar relyativistlik emes sheklerdegi basli' qurawshi'lar boli'p tabi'ladi'):

$$\left(\frac{1}{2m} \sum_j |p_j - eA_j(\mathbf{x}, t)|^2 - \frac{\hbar e}{2mc} \sum_j \sigma_j B_j(\mathbf{x}) \right) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$= (E - mc^2) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

Bul an'latpada $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ arqali' bo'lekshege ta'sir etetug'i'n magnit maydani' belgilengen.

(1.41)-ten'leme spini yari'm pu'tin bolg'an, al magnit momenti $\hbar e/2mc$ shamasi'na ten' (yag'ni'y g-faktori' 2 ge ten' bolg'an) relyativistlik emes bo'leksheler ushi'n jazi'lg'an Pauli ten'lemesi boli'p tabi'ladi'. Elektronni'n' magnit momenti bul shamadan 0,12 % ke g'ana u'lken. Da'l sa'ykesliktin' ori'n almawi' elektromagnit maydani'ndag'i' kvantli'q terbelislerdin' esabi'nan ori'n aladi'.

Dirak ten'lemesi ashi'lg'annan keyin bir neshe ji'llar dawami'nda fiziklerdin' ko'pshiligi ten'leme protondi' da, neytrondi' da ta'riyipleydi dep esapladi'. Olar da yari'm pu'tin spinge iye fermionlar boli'p tabi'ladi'. Biraq 1933-ji'li' o'tkerilgen Stern menen Frishlerdin' (Otto Robert Frish, nemisshe Otto Robert Frisch, 1904-ji'li' 10-oktyabr ku'ni Vena qalasi'nda tuwi'li'p, 1979-ji'li' 22-sentyabr ku'ni Kembridj qalasi'nda qayti's bolg'an yadro fizikasi' boyi'nsha iri fizik-qa'nige, belgili fizik Liza Meytnerdin' inisi) bul bo'lekshelerdin' magnit momentlerinin' ma'nislerinin' Dirak ten'lemesi ja'rdeminde esaplang'an ma'nislerge sa'ykes kelmeytug'i'nli'g'i' belgili boldi' [21]. Mi'sali' protonni'n' magnit momenti esaplang'an magnit momentten 2,79 ese u'lken boli'p shi'qti' ha'm oni'n' ushi'n g-faktor 5,58 ge ten'. Elektrik jaqtan neytralli'q qa'siyetke iye neytron ushi'n g-faktor 3,38 ge ten'. Bul "anomalli'q magnit momentleri" proton menen neytronlardi'n' elementar bo'leksheler emes ekenligi haqqi'ndag'i' en' da'slepki belgilerdin' biri edi. Olar kvarkler dep atalatug'i'n kishi bo'lekshelerden turadi'. Kvarkler bolsa yari'm pu'tin spine iye ha'm Dirak ten'lemesinin' ja'rdeminde ta'riyiplenedi.

1-9 §. Dirak ten'lemesi menen Shredinger ten'lemesi arasi'ndag'i' baylani'slardi'n' fizikali'q tiykarlari'

Biz relyativistlik emes kvantli'q mexanikani'n' tiykarg'i' ten'lemesi bolg'an Shredinger ten'lemesinin'

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (1.43)$$

tu'rinde jazi'latug'i'nli'g'i'n bilemiz. Bul ten'lemenin' tiykarg'i' belgileri mi'nalardan ibarat:

1. Ten'leme birinshi ta'rtpili (yag'ni'y si'zi'qli'). Kvantli'q mexanikada superpoziciya principi ori'n iyeleytug'i'n bolg'anli'qtan ten'lemenin' si'zi'qli' boli'wi' sha'rt.

2. Ten'lemede waqi't boyi'nsha birinshi ta'rtpili tuwi'ndi', al koordinatalar boyi'nsha ekinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lar qatnasadi'. Bul jag'day Shredinger ten'lemesinin' sali'sti'rmali'q teoriyasi'ni'n' talaplari'n qanaatlandi'rmaytug'i'nli'g'i'n, yag'ni'y Lorenc tu'rlendiriwlerine qarata invariant emes ekenligin ayqi'n ko'rsetedi. Sonli'qtan bul ten'lemeni tezligi jaqti'li'qti'n' tezliginen kishi bolg'an bo'leksheler ushi'n qollani'wg'a boladi'.

Shredinger ten'lemesin keltirip shi'g'ari'w ushi'n energiya menen impuls arasi'ndag'i' klassikali'q mexanikani'n'

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

tu'rindegi an'latpasi'nan paydalanadi' ha'm fizikali'q shama bolg'an impuls p ni'n' orni'na bir o'lshemli ken'islikte og'an sa'ykes keliwshi

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

operatori'n paydalanadi'. Bunday jag'dayda energiya operatori' ushi'n (gamiltonian ushi'n)

$$\hat{E} = \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

formulasi'n, al potencial maydanda qozg'alatug'i'n bo'lekshe ushi'n

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

tu'rindegi an'latpani' alami'z.

Tolqi'n funkciyasi' retinde de Broyl tolqi'ni'na sa'ykes keliwshi

$$\psi(x, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

tu'rinde jazi'latug'i'n tegis tolqi'n ali'nadi'.

Relyativistlik mexanikani'n' bo'lekshenin' energiyasi' menen impulsin baylani'sti'ratug'i'n

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.44)$$

an'latpasi'na tiykarlanatug'i'nli'g'i'n ma'lim. Kvantli'q mexanikani'n' relyativistlik ten'lemesin ali'w ushi'n Shredinger ten'lemesin keltirip shi'g'arg'andag'i' usi'ldan paydalani'w kerek. Sa'ykes tolqi'n ten'lemesin ali'w ushi'n (1.44)-an'latpadag'i' energiya menen impulslerdin' ori'nlari'n sa'ykes keliwshi to'mende keltirilgen operatorlardi'

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -i\hbar \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \quad (1.45)$$

qoyi'p $\psi(x, t)$ tolqi'n funkciyasi'na ta'sir etiw kerek.

Relyativistlik tolqi'n ten'lemesi en' da'slep Shredingerdin' o'zi ta'repinen ali'ndi'. Tilekke qarsi' ol ali'ng'an ten'lemenin' a'hmiyetin da'rha'l toli'q tu'sinbedi ha'm ten'lemege elektronni'n' spinin kirgize almadi', sonli'qtan ol og'an itibar bermedi. Keyinirek tap usi' ten'leme Kleyn (shved tilinde *Oskar Klein*; 1894-ji'li' 15-sentyabr ku'ni tuwi'lg'an ha'm 1977-ji'li' 5-fevral ku'ni tuwi'lg'an shved fizigi), Gordon (Valter Gordon, 1893-ji'li' tuwi'lg'an ha'm 1939-ji'li' qayti's bolg'an nemis fizik-teoretigi) ha'm Fok (Vladimir Aleksandrovish Fok, 1898-ji'li' tuwi'lg'an ha'm 1974-ji'li' qayti's bolg'an sovet fizigi) ta'repinen ali'ndi'. Ha'zirgi waqi'tlari' ten'lemeni ko'binese Kleyn-Gordon ten'lemesi, ayi'ri'm avtorlar Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi dep ataydi'. Ko'p sanli' fizikler ten'lemeni "Kleyn-Fok" ten'lemesi dep atag'andi' duri's dep esaplaydi'. Ten'leme

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -c^2 \hbar^2 \Delta \psi + m^2 c^4 \psi. \quad (1.46)$$

Bo'lekshenin' hali' to'rt koordinatadan ha'm waqi'ttan g'a'rezli: $\psi(x, y, z, t)$. Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi ekinshi ta'rtpili tolqi'n ten'lemesi boli'p tabi'ladi'. Ol relyativistlik kvantli'q sistemani'n' dinamikasi'n ta'riyipleydi. Ten'leme ekinshi ta'rtpili bolg'anli'qtan oni' sheshiw ushi'n baslang'i'sh waqi't momentindegi tolqi'n funkciyasi' ψ din' tek ma'nisin g'ana emes, al oni'n' birinshi tuwi'ndi'si'ni'n' da ma'nisin biliw kerek. Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi ushi'n on' ma'nisi menen ani'qlang'an itimalli'qti'n' ti'g'i'zli'g'i' bolg'an $\psi^* \psi$ shamasi'n kirgiziwge bolmaytug'i'n ha'm sonli'qtan ol spini nolge ten' bolg'an bo'lekshenin' hali'n (yag'ni'y

skalyar fizikali'q maydandi') ta'riyipleytug'i'n boli'p shi'qti'. Biraq ulli' ingliz ilimpazi' P.Dirak elektronni'n' relyativistlik teoriyasi' u'stinde islep ati'rg'anda oni'n' $\frac{1}{2}$ ge ten' bolg'an spininin' bar ekenligi ma'lim boldi'.

Biz elektronni'n' spininin' (yag'ni'y menshikli mexanikali'q ha'm sog'an sa'ykes keliwshi magnit momentinin') 1922-j'i'li' nemis fiziklari SHtern ha'm Gerlax ta'repinen o'tkerilgen ta'jiriybede (eksperimentte) tasti'yi'qlang'anli'g'i'n eske tu'siremiz [17-18]. Biraq fizika ilimine spin 1925-j'i'li' Dj. Ulenbek (1900-j'i'li' tuwi'lg'an) ha'm S. Goudsmitler (1902-j'i'li' tuwi'lg'an ha'm 1979-j'i'li' qayti's bolg'an) ta'repinen bir elektronli'q energiya qa'ddilerinin' dubletlik strukturasi'n tu'sindiriw ushi'n kirgizildi (biz spin haqqi'ndag'i' gipotezani'n' 1904-j'i'li' tuwi'lg'an Kronig ta'repinen kirgizilgenligin biraq bul gipotezani'n' baspa so'zde jari'q ko'rmegenligin atap o'temiz).

Joqari'da ayti'lg'ani'nday superpoziciya principi relyativistlik tolqi'n ten'lemesinin' si'zi'qti' boli'wi'n talap etedi (biz gravitaciya maydani'ni'n' ten'lemesinin', yag'ni'y Eynshteyn ten'lemelerinin' si'zi'qli' emes ekenligin ha'm sonli'qtan da gravitaciya maydani' ushi'n superpoziciya principinin' ori'nlanbaytug'i'nli'g'i'n eskertemiz). Usi'nday principlerdin' tiykari'nda Dirak 1928-j'i'li' relyativistlik invariant ten'lemenini keltirip shi'g'ardi' ha'm oni' bi'layi'nsha jazdi':

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[c \left(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2 \right] \psi. \quad (1.47)$$

Bul an'latpa ψ tolqi'n funkciyasi'nan ali'ng'an birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'larg'a iye en' uli'wma si'zi'qli' forma boli'p tabi'ladi'. Ten'lemege koordinatalar menen waqi't birdey huqi'qta kiredi ha'm ekinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lar qatnaspaydi'. α_x ha'm β shamalari'n tabi'w ushi'n ten'lemenini bi'layi'nsha jazadi':

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi. \quad (1.48)$$

Bul ten'lemedegi

$$\begin{aligned} \hat{H} &= c\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + c\alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + c\alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + \beta mc^2 = \\ &= c\alpha_x \hat{p}_x + c\alpha_y \hat{p}_y + c\alpha_z \hat{p}_z + \beta mc^2 \end{aligned} \quad (1.49)$$

shamasi' Shredinger ten'lemesindegi gamiltonian menen formalli'q jaqtan uqsasli'qqa iye. Eger $\hat{H}$ operatori' Gamilton operatori' boli'p tabi'latug'i'n bolsa, onda

usi' $\hat{H}$ operatori' menen impuls operatori' arasi'nda arnawli' sali'sti'rmali'q teoriyasi'ndag'i'day baylani'sti'n' ori'n ali'wi' kerek:

$$\hat{H}^2 = c^2(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) + m^2c^4. \quad (1.50)$$

Usi' (1.50)-an'latpani' paydalani'p belgisiz bolg'an $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ha'm β shamalari'n ani'qlaw mu'mkin. Usi'nday maqsette (1.49) an'latpani' kvadratqa ko'terip to'mendegidey an'latpani' alami'z:

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 = & c^2\alpha_x^2\hat{p}_x^2 + c^2\alpha_y^2\hat{p}_y^2 + c^2\alpha_z^2\hat{p}_z^2 + \beta^2m^2c^4 + \\ & + c^2(\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x)\hat{p}_x\hat{p}_y + c^2(\alpha_x\alpha_z + \alpha_z\alpha_x)\hat{p}_x\hat{p}_z + \\ & + c^2(\alpha_z\alpha_y + \alpha_y\alpha_z)\hat{p}_z\hat{p}_y + mc^3(\alpha_x\beta + \beta\alpha_x)\hat{p}_x + \\ & + mc^3(\alpha_y\beta + \beta\alpha_y)\hat{p}_y + mc^3(\alpha_z\beta + \beta\alpha_z)\hat{p}_z. \end{aligned} \quad (1.51)$$

(1.51)-an'latpada jazi'lg'an $\hat{H}$ operatori'ni'n' (1.50)-an'latpada jazi'lg'an operatori'nday tu'rge iye boli'wi' ushi'n $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ha'm β shamalari'ni'n' to'mendegidey sha'rtlerdi qanaatlandi'ri'wi' kerek:

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = 1, \quad (1.52)$$

$$i \neq k \text{ sha'rti ori'nlang'anda } \alpha_i\alpha_k - \alpha_k\alpha_i = 0,$$

$$\alpha_i\beta = \beta\alpha_i = 0, \quad i = x, y, z.$$

A'llette, a'dettegidey sanlar (1.50)-sha'rtlerdi qanaatlanlandi'ra almaydi' (sebebi a'dettegidey sanlar ushi'n antikommutaciya sha'rti ori'nlanbaydi'). A'dettegidey sanlar ushi'n $\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 0$ kommutaciya sha'rti g'ana ori'nlanadi'. Usi' jag'dayg'a baylani'sli' Dirak (1.51)-sha'rtti qanaatlandi'ri'wi' ushi'n $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ha'm β shamalari'ni'n' Pauli matricolari'nan du'zilgen 4-ta'rtpi matricalar boli'wi' kerek dep boljadi'. Bunday matricalar (1.12)-an'latpalar tu'rinde jazi'ladi'. (1.12)-matricalar di' bir birine ko'beytip, olardi'n' biz qoyg'an sha'rtlerdi qanaatlandi'ratug'i'nli'g'i'na ko'z jetkeriwge boladi'.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ belgilew menen jazi'latug'i'n Pauli matricolari'n paydalani'p $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ha'm β matricolari'n bi'layi'nsha jaza alami'z:

$$\hat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

Endi $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ ha'm β operatorlari'ni'n' ja'rdeminde (1.48)-ten'lemeni

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[c(\hat{\alpha}_x \hat{p}_x + \hat{\alpha}_y \hat{p}_y + \hat{\alpha}_z \hat{p}_z) + mc^2 \hat{\beta} \right] \psi. \quad (1.54)$$

tu'rine ali'p kelemiz. Bul ten'lemeni erkin bo'lekshe ushi'n jazi'lg'an Dirak ten'lemesi dep ataydi' [(1.1)-an'latpa menen sali'sti'ri'w kerek]. Eger

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_x \mathbf{i} + \alpha_y \mathbf{j} + \alpha_z \mathbf{k} \quad (1.55)$$

tu'rindegı vektorli'q operatorıdı' kirgizetug'i'n bolsaq, onda Dirak ten'lemesın bir qansha kompaktlı' tu'rde jazi'wg'a boladı':

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c\vec{\alpha}\vec{p} + mc^2\hat{\beta})\psi. \quad (1.56)$$

$\psi(x, y, z, t)$ tolqi'n funkciyasi'na 4x4 o'lishemindegı matrica ta'sir etetug'i'n bolg'anli'qtan usı' $\psi(x, y, z, t)$ tolqi'n funkciyasi'ni'n' o'zi de to'rt qurawshi'g'a iye boli'wi' kerek:

$$\psi(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y, z, t) \\ \psi_2(x, y, z, t) \\ \psi_3(x, y, z, t) \\ \psi_4(x, y, z, t) \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Biz Dirak teoriyasi'ndag'i' $\psi(\mathbf{r}, t)$ tolqi'n funkciyalari'ni'n' to'rt qurawshi'g'a iye bispinor ekenligın ja'ne de atap o'temiz ha'm oni' bi'layi'nsha jazami'z:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}, t) \\ \chi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}.$$

Bul an'latpada φ menen χ arqalı' bispinordı'n' joqari'g'i' ha'm to'mengi qurawshi'lari' belgilengen [Labzovskiy, 1996].

Dirakti'n' matricali'q tolqi'n ten'lemesi to'mendegidey bir biri menen baylani'sqan to'rt ten'lemenin' sistemasi'na ekvivalent

$$\begin{aligned} (E - mc^2)\psi_1 - c(p_x - ip_y)\psi_4 - cp_z\psi_3 &= 0 \\ (E - mc^2)\psi_2 - c(p_x + ip_y)\psi_3 + cp_z\psi_4 &= 0 \\ (E + mc^2)\psi_3 - c(p_x - ip_y)\psi_2 - cp_z\psi_1 &= 0 \\ (E + mc^2)\psi_4 - c(p_x + ip_y)\psi_1 + cp_z\psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

Elektronni'n' to'rt qurawshi'g'a iye tolqi'n funkciyasi'n elektronni'n' on' ha'm teris energiyalari'ni'n' ha'r qi'yli' bolg'an 4 kombinaciyasi' ha'm oni'n' spininin' proekciyasi'ni'n' eki ma'nisi ($\sigma_z = 1/2$ ha'm $\sigma_z = -1/2$ bolg'an) tu'rinde ko'z aldi'g'a elesletiwge boladı'.

$$\psi = \begin{cases} \text{on' energiya, } \sigma_z = +\frac{1}{2}; \\ \text{on' energiya, } \sigma_z = -\frac{1}{2}; \\ \text{teris energiya, } \sigma_z = +\frac{1}{2}; \\ \text{teris energiya, } \sigma_z = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.59)$$

Biz elektronni'n' relyativistlik kvantli'q mexanikasi'n do'retken P.Dirakti'n' mi'naday so'zlerin keltiremiz [9]:

"Men basqa fiziklarga baha beriwge kiriskenimde Shredinger haqqi'nda hesh na'rse aytpay kete almadi'm. Menin'she men oni' Kopengagende hesh waqi'tta da ko'rmedim, ko'rsem de ko'rgenimdi esley almayman. Biraq bizler keyinirek ko'p ushi'rasti'q, menin' tani's fiziklerimnin' ishinde Shredinger mag'an en' ko'birek usag'ani' edi. Basqalar menen keliskenge sali'sti'rg'anda men Shredinger menen a'dewir jen'il kelisimgе keletug'i'nli'g'i'mdi' an'gardim. Bul jag'day ekewimizdin' de matematikali'q go'zzalli'qti' ju'da' joqari' bahalag'ani'mi'zdi'n' ha'm usi' go'zzalli'qti'n' bizin' jumi'slari'mi'zdag'i' en jayg'ani'ni'n' na'tiyjesi bolsa kerek. Ta'biyatti'n' fundamentalli'q ni'zamlari'n ta'riyipleytug'i'n barli'q ten'lemelerdin' matematikali'q go'zzalli'qqa iye boli'wi' menen ayri'li'p turi'wi' kerek degen talap ekewimiz ushi'n da isenimnin' ni'shani' boldi'. Bul jag'day bizin' ushi'n derlik din, qala berse ju'da' paydali' dinge aylandi'. Sebebi sol din bizin' ko'p sanli' tabi'slari'mi'zdi'n' tiykari'nda jatti'.

Eger siz Shredingerdin' jumi'slari' haqqi'nda oqi'san'i'z bir jag'daydi'n' sizdi ayri'qsha tan' qaldi'ri'wi' kerek. Shredinger kvantli'q mexanikag'a de Broyldin' relyativistlik bolg'an tolqi'n ten'lemesi arqali' keldi. Shredinger relyativistlik sali'sti'rmali'q teoriyasi'ni'n' go'zzali'g'i'ni'n' ta'sirinde boldi'. Usi'g'an baylani'sli' nenin' saldari'nan Shredingerdin' tolqi'n ten'lemesin keltirip shi'g'arg'an jumi'si' relyativistlik emes ruwhta jazi'lg'an degen soraw tuwi'ladi'. Bul jerde qanday da bir qarama-qarsi'li'q jasi'ri'ni'p jati'r.

Ko'p ji'llar o'tkennen keyin, da'l esimde joq, shama menen 1940-ji'l bolsa kerek, Shredinger menen jaqi'nnan tani'sqannan keyin menen joqari'dag'i' jag'daydi'n' nelerdin' saldari'nan kelip shi'qqanlag'i'n soradi'm. Ol sol waqi'tlari' de Broyldin' jumi'slari' menen suwg'ari'lg'an relyativistlik ko'z-qarasta jumi's islegenin ha'm

soni'n' saldari'nan de Broylidi'n' ten'lemesinin' uli'wmalasti'ri'lg'an tu'ri bolg'an relyativistlik tolqi'n ten'lemesin alg'anli'g'i'n aytti'. Ali'ng'an ten'lemenin' ja'rdeminde en' da'slep vodorod atomi' ushi'n esaplawlar ju'rgizgende ta'jiriybede ali'ng'an na'tiyjelerge sa'ykes kelmeytug'i'n na'tiyjeler ali'ng'an. Bunday jag'day oni'n' kewline kelgen ha'm ali'ng'an tolqi'n ten'lemesin hesh na'rsege de jaramaydi' degen juwmaqqa kelgen. Biraq bir neshe aydan keyin alg'an ten'lemesine jan'asha qarag'anda, Shredinger eger da'llikti to'menletkende ha'm relyativistlik emes jaqi'nlasig'wg'a o'tkende ali'ng'an na'tiyjelerdin' relyativistlik effektlerdi esapqa almag'an jag'daydag'i' eksperimentalli'q mag'li'wmatlar menen toli'q sa'ykes keletug'i'nli'g'i'n tapqan. Solay etip Shredingerdin' tolqi'n ten'lemesi relyativistlik emes tu'rde eksperimentlerdin' na'tiyjeleri menen sa'ykes kelgen ha'm sonli'qtan jumi'sti' baspaso'zde basi'p shi'g'ari'w mu'mkinshiligi tuwi'lg'an.

Shredingerdin' en' da'slepki relyativistlik ten'lemesin sheshkende ali'natug'i'n na'tiyjelerdin' eksperimentke sa'ykes kelmewinin' sebebi elektronni'n' spinin esapqa almaw menen baylani'sli'. Elektronda spinnin' bar ekenligi haqqi'ndag'i' oy sol waqi'tlari' pu'tkilley jan'ali'q edi, spin haqqi'nda Shredingerdin' esitip ko'riwi de mu'mkin emes edi. Al sol waqi'tlari' eksperimentlerdin' na'tiyjelerine qayshi' keletug'i'n ten'lemeni baspada shi'g'ari'wg'a bati'lli'q jetpedi".

Erkin bo'lekshe ushi'n Dirak ten'lemesin sheshkende impuls p ni'n' ha'r bir ma'nisini E energiyani'n' eki ma'nisinin' tuwri' keletug'i'nli'g'i' ani'qlandi':

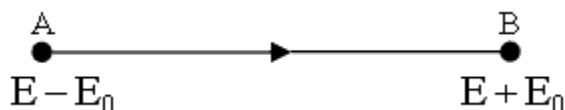
$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}.$$

Joqari'da ga'p etilgenindey, bo'lekshenin' energiyasi'ni'n' ma'nisi ekew, birewi on' ha'm ekinshisi teris boladi' eken. Klassikali'q fizikada barli'q shamalar u'zliksiz o'zgeredi ha'm sonli'qtan energiyani'n' teris ma'nislerin esapqa almawg'a boladi'. Al energiyani'n' on' ha'm teris ma'nisleri arasi'ndag'i' ayi'rma (interval) $2mc^2$ shamasina ten' bolg'anli'qtan bo'lekshenin' bir oblasttan ekinshi oblastqa u'zliksiz o'tiwi mu'mkin emes. Biraq relyativistlik kvantli'q mexanikada teris energiyag'a iye hallardan ten' energiyag'a iye hallarg'a ha'm keriw bag'i'ttag'i' kvantli'q o'tiwlardn' ori'n ali'wi' mu'mkin. Sonli'qtan energiyani'n' teris ma'nislerin itibarg'a almay ketiwge bolmaydi'. Usi'ni'n' na'tiyjesinde "elektronni'n' teris ma'niske iye bolg'an hallari' qalayi'nsha interpretaciyalawg'a boladi'?" degen mashqala payda boladi'.

Ma'seleni ko'rgizbeli tu'rde tu'sindiriv ushi'n to'mendegidey situaciyani' qaraymi'z.

On' ma'niske iye energiyasi' bar bo'lekshe ($E_0 > 0$) A noqati'nan B noqati'na o'tetug'i'n bolsi'n (1-su'wret). Bunday jag'dayda A noqati'nda E energiyani'n' shamasi' E_0 shamasi'na kishireyedi. Al V noqati'nda bolsa E energiyani'n' shamasi' E_0 shamasi'na u'lkeyedi.

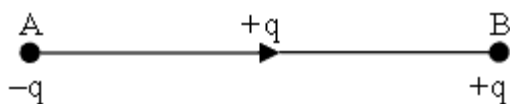
1-su'wret.



On' ma'niske iye energiyasi' bar zaryadlanbag'an bo'lekshenin' ($E_0 > 0$) A noqati'nan B noqati'na o'tiwi.

Teris ma'nisli energiyag'a iye ($E_0 < 0$) bo'lekshe ushi'n A noqati'nan B noqati'na o'tiw A noqati'nda bo'lekshenin' energiyasi'ni'n' E_0 shamasi'na o'siwine ha'm B noqati'nda E_0 shamasi'na kemeyiwine sa'ykes keledi. Solay etip teris energiyag'a iye bo'lekshenin' A noqati'nan B noqati'na o'tiwi on' energiyag'a iye bo'lekshenin' A noqati'nan B noqati'na o'tiwi menen birdey eken. Basqa so'z benen aytqanda teris energiyali' processlerdi waqi'tti'n' teris ma'nisi menen ali'ng'an on' ma'nisli energiyali' processler tu'rinde ko'z aldi'mi'zg'a keltirivimiz kerek eken. Teris ma'nisli energiyasi' bar bo'lekshe on' ma'nisli energiyasi' bar bo'lekshede'v boli'p, biraq waqi't qarama-qarsi' bag'i'tta o'tetug'i'nday boli'p qozg'aladi'.

Biz joqari'da ko'rip o'tken mi'sal elektr zaryadi' joq neytral bo'lekshede'v tiyisli. Endi A noqati'nan B noqati'na o'tetug'i'n zaryadlang'an bo'leksheni qaraymi'z (2-su'wret).



2-su'wret.

Zaryadlang'an bo'lekshenin' A noqati'nan B noqati'na o'tiwi.

Eger biz qarap ati'rg'an bo'lekshenin' zaryadi' q on' bolsa, onda A noqati'nda bo'lekshenin' zaryadi' $-q$ shamasi'na kishireyedi, al B noqati'nda $+q$ shamasi'na u'lkeyedi. Sonli'qtan simmetriyani' saqlaw ushi'n bo'lekshe teris energiyag'a iye ori'nnan qozg'alg'anda elektr zaryadi'ni'n' belgisin qarama-qarsi' belgige o'zgertivimiz kerek boladi' eken.

On' ma'niske iye E energiyag'a ha'm +q zaryadqa iye bo'lekshenin' A hali'nan B hali'na o'tiwi energiyasi' teris -E bolg'an ha'm zaryadi' da teris -q bolg'an bo'lekshenin' B haldan A halg'a o'tiwi menen birdey. Teris energiyag'a iye hallar ha'r bir bo'lekshenin' energiyasi' on' ha'm qarama-qarsi' zaryadi' bar si'n'ari'ni'n' bar boli'wi'na ali'p keledi.

Solay etip Dirak teoriyasi' ha'r bir zaryadlang'an bo'lekshenin' zaryadi'ni'n' belgisi qarama-qarsi', massasi' tap sol bo'lekshenin' massasi'nday bolg'an si'n'ari'ni'n' (antibo'lekshenin') bar boli'wi'ni'n' kerek ekenligine ali'p keledi. Mi'sali' elektronni'n' massasi' elektronni'n' massasi'na ten', biraq zaryadi'ni'n' belgisi qarama-qarsi' bolg'an (yag'ni'y on' zaryadqa iye) si'n'ari'ni'n' bar boli'wi' kerek.

Kvantli'q fizikani'n' "tilinde" energiyasi'ni'n' ma'nisi on' (yag'ni'y $E^+ = E > 0$ bolg'an) ha'm x ko'sherinin' on' bag'i'ti'nda qozg'alatug'i'n tolqi'n funkciyasi'n bi'layi'nsha jazadi':

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - E^+t)} \quad (1.60)$$

Eger tolqi'nni'n' fazasi' turi'qli' bolsa, onda

$$px - E^+t = \text{const}, \quad x = \frac{E^+}{p}t \quad (1.61)$$

an'latpasi'na iye bolami'z, yag'ni'y on' ma'niske iye energiyasi' bar bo'lekshe x ko'sheri bag'i'ti'nda qozg'aladi'. Al teris ma'nisli energiyasi' bar hal ushi'n ($E^- = E < 0$) tolqi'n funkciyasi' bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - E^-t)} \quad (1.62)$$

Bul jag'dayda fazani'n' turaqli' boli'w sha'rti

$$px - E^-t = \text{const}, \quad x = \frac{E^-}{p}t = -\frac{|E^-|}{p}t = \frac{|E^-|}{p}(-t) \quad (1.63)$$

tu'rinde jazi'ladi'. Demek teris ma'nisli energiyag'a iye x ko'sherinin' bag'i'ti'nda on' $|E^-|$ energiyag'a iye halda kerri (teris) bag'i'tta qozg'aladi' eken.

Teris energiyag'a iye bo'lekshe on' energiyag'a iye bo'lekshede, biraq waqi't boyi'nsha qarama-qarsi' bag'i'tta qozg'aladi'. "Waqi't boyi'nsha qarama-qarsi'" bag'i'tta qozg'alatug'i'n bo'lekshe ushi'n mi'sal retinde zaryadi' -q g'a ten' bolg'an bo'lekshenin' magnit maydani'ndag'i' qozg'ali'si'n ko'rsetiwge boladi'. Bunday bo'lekshenin' qozg'ali'si' Lorenc ten'lemesinin' ja'rdeminde ta'riyiplenedi:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{q}{c} \left(\frac{dx}{dt} \times B \right) = - \frac{q}{c} \frac{dx}{d(-t)} B. \quad (1.64)$$

(1.64)-ten'leme +q on' zaryadqa iye bo'lekshenin' teris zaryadqa iye bo'lekshe ushi'n jazi'lg'an ten'lemenin' ja'rdeminde ta'riyiplenetug'i'nli'g'i'n ko'rsetip tur. Biraq bunday jag'dayda on' zaryadqa iye bo'lekshe waqi't boyi'nsha keri ta'repke qaray qozg'aladi' (yag'ni'y magnit maydani'nda qarama-qarsi' bag'i'tta qozg'aladi').

Joqari'da keltirilgen mi'sallar +q on' elektr zaryadi'na ha'm teris energiyag'a iye bo'lekshenin' teris -q elektr zaryadi'na ha'm on' energiyag'a iye bo'lekshedeý boli'p qozg'alatug'i'nli'g'i'n ko'rsetedi.

Teris energiyasi' bar elektron si'rtqi' maydanda on' zaryadqa iye bo'lekshedeý boli'p qozg'ali'wi' kerek. Sonli'qtan on' energiyalarg'a iye oblasttan teris energiyalarg'a iye oblastqa o'tkende elektronni'n' zaryadi'ni'n' belgisi de o'zgeriwi, yag'ni'y usi'ni'n' na'tiyjesinde oni'n' zaryadi' +q shamasina ten' boli'wi' talap etiledi. Teris energiyag'a iye hallardan elektronlardi'n' o'tiwi elektr zaryadi'ni'n' saqlani'w ni'zami'n buzg'an bolar edi. Usi'nday o'tiwlerdi qadag'an etetug'i'n usi'ldi' tabi'wdi'n' za'ru'rliги payda boldi'. Al P.Dirak bolsa ma'seleni bi'layi'nsha talladi' [9]:

Elektronlar fermionlar bolg'anli'qtan ma'seleni teris energiyag'a iye hallardi'n' barli'g'i' da iyelengen dep boljaw arqali' sheshiwge boladi'. Bunday jag'dayda teris energiyag'a iye bolg'an hallarg'a o'tiw Pauli principine sa'ykes qadag'an etiledi. Biraq bunday boljaw ja'ne bir mashqalani'n' payda boli'wi'na, yag'ni'y teris ma'nisli energiyag'a iye hallardi' tolti'ratug'i'n bo'lekshelerdin' sani'ni'n' sheksiz ko'p boli'wi'na ha'm usi'g'an sa'ykes sheksiz u'lken elektr zaryadi' menen sheksiz u'lken massag'a iye vakuumni'n' payda boli'wi'na ali'p keledi. Usi'nday haldi'n' payda boli'wi'ni'n' mu'mkinshiligin sheksiz fizikali'q vakuumni'n' baqlanbaytug'i'nli'g'i', al fizikali'q vakuum hali'nan energiya menen elektr zaryadi'ni'n' awi'si'wi'ni'n' g'ana baqlanatug'i'nli'g'i' menen tu'sindiriwge ti'ri'sti'.

Endi fizikali'q vakuumni'n' teris hallari'nda jaylasqan elektronlardi' tabi'wg'a bolama? degen soraw tuwi'ladi'. Energiyasi' $2m_e c^2$ shamasinan u'lken bolg'an gamma-kvant elektrondi' teris ma'nisli energiyag'a iye haldan on' ma'nisli energiyag'a iye halg'a o'tkere aladi'. Bunday jag'dayda on' energiyag'a ha'm teris elektr zaryadi'na iye a'dettegideý elektron, al vakuumdag'i' bos ori'n (vakant ori'n yamasa tesik) on' zaryadqa iye bo'lekshe si'pati'nda ko'riniwi kerek. Sol 1928-ji'llari'

on' elektr zaryadi'na iye tek bir bo'lekshe – proton g'ana belgili edi. Sonli'qtan Dirak da'slep vakuumni'n' teris energiyali' hallari'n protonlar tolti'ri'p turadi' dep boljadi'. Biraq bunday boljaw di'm quramali' bolg'an mashqalardi', atap aytqanda biz jasap ati'rg'an du'nyani'n' orni'qli' bolmaytug'i'nli'g'i'na ha'm vodorod atomi'ni'n' payda boli'wi'ni'n' mu'mkin emes ekenligine ali'p keldi. Dirakti'n' gipotezasi' boyi'nsha ta'sir etisiwdin' saldari'nan vodorod atomi'ndag'i' elektronlar menen protonlardi'n' gamma-kvantlari'na aylani'p joq boli'wi' kerek boldi'. Soni'n' menen birge proton menen elektronni'n' massalari'ndag'i' u'lken ayi'rmani' tu'sindiriwdin' za'ru'rli'gi payda boldi'. Eger proton elektronni'n' ushi'p shi'g'i'wi'na baylani'sli' payda bolg'an tesik boli'p tabi'latug'i'n bolsa, onda nelikten oni'n' massasi' elektronni'n' massasi'nan shama menen 1836 (derlik 2000) ese u'lken boladi'? Dirak o'zi do'retken tesikler teoriyasi'na bekkem isendi ha'm usi'ni'n' na'tiyjesinde massasi' elektronni'n' massasi'na iye, biraq on' elektr zaryadi'na iye ele ashi'lmag'an bo'lekshenin' bar ekenligin "dag'azaladi'". Bunday bo'lekshe elektrong'a qatnasi' boyi'nsha antibo'lekshe boli'wi' kerek.

P.Dirak o'zinin' joqari'da ga'p etilgen kitabi'nda bi'lay jazadi' [9]:

"Eki ji'l dawami'nda men Bor orbitalari' menen shug'i'llandi'm ha'm olardi' uli'wmali'q kvantli'q mexanikag'a rawajlandi'ri'wg'a u'mit etiwge bolmaytug'i'nli'g'i' haqqi'nda juwmaqqa keldim. Usi' waqitlari' V.Geyzenberg matricali'q mexanikani' usi'ndi' ha'm mag'an da'rha'l kommutativlik emes algebrani'n' ma'seleni sheshiw ushi'n za'ru'rli bolg'an gilt ekenligigi ayqi'n boldi'. Ko'p uzamay Shredinger tolqi'n mexanikasi'n rawajlandi'rdi' ha'm oni'n' Geyzenbergin' teoriyasi'na ekvivalent ekenligin ko'rsetti. Usi' teoriyalarg'a tiykarlani'p men qa'legen kommutაციyalani'wshi' dinamikali'q o'zgeriwshilerdin' itimalli'qlari'n esaplawg'a mu'mkinshilik beretug'i'n tu'rlendiriwlerdin' uli'wmali'q teoriyasi'n rawajlandi'rdi'm. Bul jumi'stan men u'lken qanaatlani'w aldi'm.

Bo'lekshenin' relyativistlik teoriyasi'n do'retiw ushi'n $\partial/\partial t$ boyi'nsha kvadratli'q Kleyn-Gordonni'n' ten'lemesi bar edi. Sol waqitlari' ten'leme fiziklerdin' ko'pshiligin qanaatlandi'rdi'. Biraq mag'an ten'leme unag'an joq. Sebebi ten'lemenin' $\partial/\partial t$ tuwi'ndi'si' boyi'nsha si'zi'qli' boli'wi'n talap etetug'i'n o'zinnin' tu'rlendiriwler teoriyasi'na men di'm isengen edim. Bul jag'day meni jan'a relyativistlik tolqi'n

ten'lemesin izlewdi dawam etiwimdi talap etti. En' aqi'ri'nda men $\partial/\partial t$ tuwi'ndi'si' boyi'nsha si'zi'qli' ha'm menin' tu'rlendiriwler teoriyama sa'ykes keliwshi ten'lemenin tapti'm. Bul ten'leme avtomat tu'rde $h/2$ shamasi'na ten' bolg'an spinge ja'ne elektronni'n' magnit momentinin' duri's ma'nisine ali'p keldi. Bul na'tiyjeler menin' ushi'n pu'tkilley ku'tilmegen na'tiyjeler edi.

Men ali'ng'an ten'lemenin vodorod atomi'ndag'i' elektron ushi'n qollandi'm ha'm uyi'tqi'wlar teoriyasi'ni'n' birinshi jaqi'nlası'wi'nda ta'jiriybelerde ali'ng'an mag'li'wmatlarga sa'ykes keliwshi mag'li'wmatlardı' aldi'm. Ten'leme avtomat tu'rde duri's magnit momentine ali'p keldi ha'm sonli'qtan ten'leme vodorod atomları'ni'n' spektri ushi'n duri's emes na'tiyjelerdi beretug'i'n Kleyngordon ten'lemesin qollang'andag'i' qa'tege iye emes edi.

Biraq menin' ten'lememde de jan'a qı'yi'nshi'li'q ori'n aldi' ha'm, atap aytqanda, bo'lekshe teris energiyalarga iye hallarda da tura aldi'. Jumi'sti' baslag'an waqi'tlarda da men teris energiyalarga baylani'sli' sol qı'yi'nshi'li'qlardı' bilgen edim. Biraq bunday qı'yi'nshi'li'qlardı' basqa qı'yi'nshi'li'qlarga sali'sti'rg'anda kishi dep esapladi'm (mi'sali' uli'wmali'q tu'rlendiriwler teoriyasi'nan kelip shi'g'atug'i'n tu'rlendiriwlerdi qollani'wg'a sali'sti'rg'anda).

Teris energiyalar menen baylani'sli' bolg'an mashqala (problema) keyinirek elektronlar ushi'n Paulidin' qadag'an etiw principin (bul princip boyi'nsha berilgen ha'r bir kvantli'q halda tek bir elektron bola aladi') ha'm usi'g'an qosi'msha vakuumdegi teris energiyalarga iye barli'q hallar tolg'an degen bati'l boljawdi' qollani'w menen sheshildi. Bunday jag'daydag'i' teris energiyalarga iye hallardag'i' tesik fizikali'q bo'lekshe tu'rinde ko'rinedi. Bul spini elektronni'n' spinindey, al zaryadi' elektronni'n' teris belgisi menen ali'ng'an zaryadi'na (yag'ni'y on' zaryadqa) ha'm on' energiyaga iye bo'lekshe edi.

Usi' teoriya u'stinde birinshi ret oylag'ani'mda teoriyada orayli'q ori'ndi' iyeleytug'i'n teris ha'm on' massalar menen energiyalar arası'ndag'i' simmetriyani'n' bar boli'wi'ni'n' na'tiyjesinde jan'a bo'lekshenin' massası' elektronni'n' massası'nday boli'wi' kerek dep esapladi'm. Biraq sol waqi'tları' elektron menen protonnan basqa elementar bo'leksheler belgisiz edi. Men pu'tkilley jan'a bo'lekshenin' bar ekenligi haqqi'ndag'i' postulatti' usi'na almadi'm. Sol ku'nleri ja'miyetlik pikirdin' barli'g'i' da

ha'zirgidey pikirge pu'tkilley sa'ykes kelmeytug'i'n ha'm sonli'qtan jan'a bo'leksheler bar dep ayti'wg'a qarsi' edi. Sol waqi'tlari' men jumi'si'mdi' elektronlar menen protonlardi'n' teoriyasi' si'pati'nda baspadan shi'g'ardi'm ha'm bo'leksheler arasi'ndag'i' kulon ta'sirlesiwı elektronlar menen protonlardi'n' massalar arasi'nda u'lken ayi'rmag'a ali'p keledi dep u'mit ettim.

A'llette, bul punktte menin' pikirlerim duri's emes edi ha'm ko'p uzamay matematikler teris ha'm on' energiyali' hallar arasi'nda sonday assimetriyani'n' boli'wi'ni'n' mu'mkin emes ekenligin ko'rsetti. Veyl o'zinin' sol waqi'tlari' baspadan shi'qqan jumi'si'nda jan'a bo'lekshenin' massasi'ni'n' elektronni'n' massasi'na ten' boli'wi'ni'n' sha'rt ekenligin birinshi boli'p ko'rsetti. Ten'dey massalarg'a iye boli'wi'ni'n' kerek ekenligi haqqi'ndag'i' teoriya azmaz waqi'ttan keyin Andersonni'n' ta'jiriybesinde pozitronni'n' ashi'li'wi' menen tasti'yi'qlandi' [11]".

Massalari' birdey, al +q zaryadi'na iye bo'lekshe -q zaryadi'na iye bo'lekshenin' antibo'lekshesi boli'p tabi'ladi'. Teris zaryadqa iye bolg'an bo'lekshe ushi'n qarama-qarsi' ma'nistegi ga'p sa'ykes keledi. Teris energiyag'a iye bo'leksheler on' energiyag'a iye bo'lekshelerdin' antibo'leksheleri boli'p tabi'ladi'.

Dirak teoriyasi'na sa'ykes teris elektr zaryadi'na iye elektron menen bir qatarda on' elektr zaryadi'na iye antibo'lekshenin' de bar boli'wi' kerek.

Anti bo'leksheler tek elektrlik jaqtan zaryadlang'an bo'lekshelerde g'ana emes, al zaryadi' nolge ten' (yag'ni'y $Q = 0$) ha'm ha'r qi'yli' fizikali'q processlerde saqlanatug'i'n fizikali'q shamalarg'a iye bo'lekshelerde de bar boladi'. Usi'nday kvantli'q sanlardi'n' biri barionli'q san (zaryad) boli'p tabi'ladi'. Sonli'qtan elektr zaryadi'na iye emes, biraq on' barionli'q zaryadqa iye neytron da o'zinin' antibo'lekshesine - antineytrong'a iye. Antineytrondi' $\tilde{n}$ arqali' belgileymiz (yag'ni'y belgisinin' u'stine tilda belgisin qoyami'z). Demek

$$B(n) = +1, \quad Q(n) = 0, \quad B(\tilde{n}) = -1, \quad Q(\tilde{n}) = 0.$$

Protonni'n' antibo'lekshesi massasi' protonni'n' massasi'nday, zaryadi' teris belgisi menen ali'ng'an protonni'n' zaryadi'na ten' (yag'ni'y teris elementar zaryadqa iye) bo'lekshe boli'p tabi'ladi'. Proton menen antiprotonlardi'n' barionli'q zaryadlari' qarama-qarsi' belgilerga iye boladi':

$$B(p) = +1, \quad Q(n) = +1e, \quad B(\tilde{p}) = -1, \quad Q(\tilde{p}) = -1e.$$

Ha'zirgi waqi'tlardag'i' ko'z-qaraslar boyi'nsha antibo'lekshelerdi waqi't boyi'nsha keru bag'i'tta tarqalatug'i'n bo'leksheler si'pati'nda qarawdi'n' keregi joq. Bo'leksheler menen antibo'lekshelerdi kvant sanlari'ni'n' belgili bir ji'ynag'i' menen xarakterleniwshi fizikali'q obektler dep qarag'an a'dewir qolayli'. Ayi'ri'm kvant sanlari' bo'leksher menen antibo'lekshelerde birdey ma'niske iye, al basqa kvant sanlari'ni'n' ma'nisleri qarama-qarsi' belgige iye. Olar ushi'n to'mendegidey jag'daylar en' tiykarg'i' jag'daylar boli'p tabi'ladi':

- bo'lekshe menen antibo'lekshe bir biri menen ta'sirleskende annigilyaciyag'a ushi'raydi';
- bo'lekshe menen antibo'lekshe barli'q waqi'tta da nollik kvantli'q sanlar menen ta'riyiplenetug'i'n hallardan jubi' menen tuwi'ladi'.

1-10 §. Bazi' bir juwmaqlar ha'm ma'selenin' qoyi'li'wi'

Biz joqari'da relyativistlik kvantli'q mexanika ushi'n qoyi'latug'i'n tiykarg'i' talaplar ha'm usi'nday talaplar tiykari'nda du'zilgen ten'lemeler haqqi'nda toli'q tu'rde ayti'p o'tiwge ti'ri'sti'q. Kvantli'q mexanikani'n' a'dettegi formulirovkasi' fizika ushi'n za'ru'rli bolg'an fizikali'q sistemani'n' berilgen waqi't momenti haqqi'ndag'i' za'ru'rli bolg'an informaciyani'n' sol sistemani'n' tolqi'n funkciyasi' belgili bolg'an jag'daylarda g'ana ali'natug'i'nli'g'i' haqqi'ndag'i' postulat basshi'li'qqa ali'ndi'. Bunday tolqi'n funkciyasi' kompleksli gilbert ken'isliginde beriledi.

En' tiykarg'i' matematikali'q an'latpani'n' relyativistlik mexanikadag'i' energiya menen impuls arasi'ndag'i'

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$$

tu'rindegi qatnas ekenligi atap o'tildi ha'm usi' an'latpani'n' tiykari'nda spinleri nolge ten' bo'leksheler (Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesi) ha'm spinleri $\frac{1}{2}$ ge ten' bolg'an bo'leksheler ushi'n (Dirak ten'lemesi) ten'lemelerinin' ali'natug'i'nli'g'i' ko'rsetildi. Bul ten'lemeler relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' bir bo'lekshelik ten'lemeleri qatari'na kiredi. Soni'n' menen birge ali'ng'an ten'lemelerdin' matematikali'q jaqtan sali'sti'rmali' tu'rde ju'da' quramali' ekenligi de ko'rsetildi. Keltirilgen matematikali'q an'latpalardi'n' fizikali'q ma'nisin teren'irek ko'rsetiw maqsetinde relyativistlik

kvantli'q mexanikani'n' tiykari'n do'retiwshilerdin' biri P.Dirakti'n' kitaplari'nan u'zindiler keltirildi.

A'dewir kuramali' matematikali'q apparatqa iye relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' ma'selelerin sheshiw tiykari'nda ilimnin' bul tarawi'n teren'irek u'yreniw metodikali'q jaqtan da u'lken a'hmiyetke iye. Sonli'qtan pitkeriw qa'nigelik jumi'si'nda Kleyn-Gordon-Fok ha'm Dirak ten'lemelerin sheshiw arqali' sa'ykes fizikali'q qubi'li'slardi' tallaw joli' menen fizikali'q qubi'li'slardi' u'yreniw ma'sesele tiykarg'i' ma'sele si'pati'nda qabi'l etildi.

Biraq relyativistlik kvantli'q mexanika bir bo'lekshelik teoriya boli'p, bir qatar o'zine ta'n kemshiliklarga iye. Mi'sal retinde Nobel si'yli'g'i'ni'n' laureati' Stiven Vaynbergtin' 1995-jillari' jari'q ko'rgen jumi'si'nda bi'lay jazadi' [19]:

"Boljap ayti'lg'an pozitronni'n' ... ashi'li'wi' Dirakti'n' oni'n' aldi'ndag'i' elektronni'n' magnit momenti menen vodorod atomi'ni'n' juqa strukturasi'n tu'sindiriwdegi Dirak teoriyasi'na alpi's ji'ldan aslam waqi't dawami'nda og'ada u'lken abi'ray berdi. Biraq Dirak teoriyasi'ni'n' bolajaqta do'retile tug'i'n anaw yamasa mi'naw formadag'i' qa'legen fizikali'q teoriyada qatnasa aladi' dep hesh kim de ayta almaydi".

Usi'nday sebepler si'pati'nda Vaynberg to'mendegilerdi keltirdi:

Birinshiden " ... nollik spinge iye bo'leksheni ta'riyipleytug'i'n relyativistlik ten'lemenin' fundamentalli'q qa'ddide naduri's dep tasti'yi'qlaw menen kelisiw qi'yi'n".

Ekinshiden " ... eger dirakti'n' tesiklik teoriyasi' bozonli'q antibo'leksheler ushi'n duri's emes bolatug'i'n bolsa, onda oni'n' fermionlar ushi'n duri's ekenligine qalayi'nsha iseniwimiz kerek".

U'shinshiden " ... formalli'q jaqtan a'piwayi'li'q ko'z-qarasi'nan basqa ko'z-qarastan dirak teoriyasi'nda elektronni'n' magnit momenti qanday da bir ani'q ma'niske iye boladi' dep ku'tiw ushi'n sebep joq".

S.Vaynberg bergen bunday jag'daylardi' dawam ete beriwge boladi'.

Jumi'sta Pauli menen Dirak matricolari'na, relyativistlik tolqi'n ten'lemelerine tiykarg'i' di'qqat qaratildi'. Atap aytqanda ali'ng'an an'latpalardi' a'piwayi'lasti'ri'w, operatorlardi'n' menshikli funkciyalarg'a ta'siri, kompleksli tu'yinleslik, ermitlik

tu'yinleslikti ha'm transponirlew operaciyalari'n Dirak matricolari'na qollani'w, Kleyn-Gordon-Fok, Dirak ten'lemeleri menen Shredinger ten'emeleri arasi'ndag'i' baylani'sti' tabi'w ma'selelerine tiykarg'i' di'qqat awdari'ldi'.

II bab. Relyativistlik kvantli'q teoriyani'n' ayi'ri'm ma'seleleri

2-1 §. Bir qatar matematikali'q proceduralar

Biz da'slep Pauli matricolari' qatnasatug'i'n $(\sigma a)(\sigma b)$ tu'rindegi an'latpalardi' tu'rlendiriw ma'selesin ko'rip shi'g'ami'z. Oni'n' ushi'n Pauli matricolari'ni'n' qa'siyetlerin biliw kerek boladi'.

$(\sigma a)(\sigma b)$ shamasin vektorlardi'n' proekciyalari' arqali' jazami'z ha'm Pauli matricolari'ni'n' qa'siyetlerinen paydalanami'z.

Biz Pauli matricolari'ni'n' to'mendegidey ko'rinishinen paydalanami'z:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bul formulalarda $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ qurawshi'lari' $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bolg'an matricali'q vektor boli'p tabi'ladi'. Birlik eki qatarli' matrica $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tu'rinde jazi'ladi'. σ matricolari'ni'n' qa'siyetleri $\sigma_j \sigma_k = I \delta_{jk} + \epsilon_{ikl} \sigma_l$ formulasi'ni'n' ja'rdeminde ani'qlanadi'. Bul an'latpada δ_{jk} arqali' u'sh o'lshepli ken'isliktegi birlik simmetriyali' tenzor belgilengen (i menen k bir birine ten' bolg'anda $\delta_{jk} = 1$, al $i \neq k$ bolg'an jag'daylarda $\delta_{jk} = 0$). ϵ_{ikl} arqali' u'shinshi rangali' birlik toli'q antisimmetriyali'q tenzor belgilengen. Oni'n' ma'nisleri i, j ha'm k indekslerin 1, 2, 3 lerdin' ori'nlari'n jup yamasa taq yamasa olardi'n' arasi'nda eki birdey inlekslerdin' bar boli'wi'na baylani'sli' sa'ykes 1, -1 ha'm 0 ma'nislerine iye boladi'.

Na'tiyjede

$$\sigma_i a_i \sigma_k a_k = (\delta_{ik} + i \epsilon_{ikl} \sigma_l) = (ab) + i \sigma[a, b]$$

an'latpasi'na iye bolami'z.

Endi bizge $\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2$ operatori'ni'n' σ_3 operatori'ni'n' menshikli funkciyalari'na qalayi'nsha ta'sir etetug'i'nli'g'i'n tabami'z.

σ_3 operatori'ni'n' menshikli funkciyalari'n to'mendegi ten'lemenin' ja'rdeminde tabami'z:

$$\sigma_3 \omega^\lambda = \lambda \omega^\lambda.$$

Bul ten'lemede $\lambda = \pm 1$. $\omega^\lambda = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ arqali' eki qurawshi'g'a iye tenzor belgilengen.

Bul ten'leme ushi'n normirovka sha'rti

$$\omega^{\lambda+} \omega^\lambda = 1$$

tu'rinde jazi'ladi'. Usi' sha'rt tu'rinde ten'lemeni sheship

$$\omega^{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an'latpalari'n alami'z. Bunnan keyin tuwri'dan-tuwri' esaplawlardi'n' ja'rdeminde

$$\sigma_+ \omega^{\lambda=1} = 0; \quad \sigma_+ \omega^{\lambda=-1} = 2\omega^{\lambda=1}; \quad \sigma_- \omega^{\lambda=1} = 2\omega^{\lambda=-1}; \quad \sigma_- \omega^{\lambda=-1} = 0$$

na'tiyjelerine iye bolami'z.

Matricali'q operator $\sigma = 2s$ ekenligin eske tu'siremiz, bul ten'likte s arqali' spinlik kvantli'q san $s = 1/2$ ge sa'ykes keliwshi bo'lekshenin' spin operatori' belgilengen. Sonli'qtan $s_3 = \frac{\lambda}{2} = \pm 1/2$ spinnin' kvantlani'w ko'sherine tu'sirilgen proekciyasi'ni'n' kvantli'q sani' boli'p tabi'ladi'.

Endi $\sigma_i \sigma_k \sigma_l$ an'latpasi'n a'piwayi'lasti'rami'z.

Ani'qlama boyi'nsha

$$\sigma_i \sigma_k \sigma_l = (\delta_{ik} + i\epsilon_{ikm} \sigma_m) \sigma_l = \delta_{ik} \sigma_l + i\epsilon_{ikl} - \epsilon_{ikm} \epsilon_{mlj} \sigma_j.$$

Eki antisimmetriyali' tenzorlardi'n' ko'beymesinin' δ_{ik} simvollarini'n quralg'an to'mendegidey determinantti'n' ja'rdeminde ani'qlani'latug'i'nli'g'i'na iseniw qi'yi'n emes:

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{mlj} = \begin{vmatrix} \delta_{in} & \delta_{il} & \delta_{ij} \\ \delta_{kn} & \delta_{kl} & \delta_{kj} \\ \delta_{mn} & \delta_{ml} & \delta_{mj} \end{vmatrix}.$$

Bul an'latpada $m = n$ dep boljap qaytalani'wshi' indeksler boyi'nsha summalap ha'm tenzordi'n' vektorli'q indekslerinin' (yag'ni'y ϵ_{mlj} indekslerinin') ori'n almasti'ri'wlari'ndag'i' ciklli'qtan paydalani'p ($\epsilon_{mlj} = \epsilon_{ljm}$)

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{mlj} = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{ij} \\ \delta_{kl} & \delta_{kj} \end{vmatrix} = \delta_{il} \delta_{kj} - \delta_{ij} \delta_{kl}$$

ekenligine iye bolami'z. Bunnan a'piwayi' tu'rdegi

$$\sigma_i \sigma_k \sigma_l = \delta_{il} \delta_{kj} - \delta_{ij} \delta_{kl}$$

an'latpasi'n alami'z.

Endi $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \gamma_0$ ha'm γ_5 matricalari'na kompleksli tu'yinleslik, transponirlew (T arqali' belgilengen) ha'm ermitlik tu'yinleslik ($\dagger$ belgisinin' ja'rdeminde an'lati'lg'an) operaciyalari'n qalayi'nsha qollani'wg'a bolatug'i'nli'g'i'n ko'remiz.

Ma'selenin' sheshimlari to'mendegishe boladi':

$$\begin{aligned} \gamma_1^* &= \gamma_1, \quad \gamma_2^* = -\gamma_2, \quad \gamma_3^* = \gamma_3, \quad \gamma_0^* = \gamma_0, \quad \gamma_5^* = \gamma_5. \\ \gamma_1^T &= -\gamma_1, \quad \gamma_2^T = \gamma_2, \quad \gamma_3^T = -\gamma_3, \quad \gamma_0^T = \gamma_0, \quad \gamma_5^T = \gamma_5. \\ \gamma_1^\dagger &= -\gamma_1, \quad \gamma_2^\dagger = -\gamma_2, \quad \gamma_3^\dagger = -\gamma_3, \quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5. \end{aligned}$$

2-2 §. Dirak ten'lemesin kvadratlaw (kvadratqa ko'teriw)

Biz bul paragrafta Dirak tegis tolqi'nlarini ushi'n jazi'lg'an relyativistlik dispersiya ni'zami' ja'rdeminde γ operatorlari' qanaatlandiraturug'i'n ori'n almastiri'w qatnaslari'n keltirip shi'g'aramiz ha'm γ_4 matricasi' diagonalli'q bolg'an jag'day ushi'n bul operatorlardin' keltirilip shi'g'arilmaytug'i'n ko'rinishlerin alami'z.

Eger erkin bo'lekshe ushi'n jazi'lg'an

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi + \chi \psi = 0 \quad (2.1)$$

tu'rindegi Dirak ten'lemesinin' sheshimi

$$\psi = C e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.2)$$

tu'rindegi tegis tolqi'n bolsa, onda γ shamalari' to'mendegidey algebrali'q qatnastir' qanaatlandiri'wi' kerek

$$i \sum_{\mu} k_{\mu} \gamma_{\mu} + \chi = 0, \quad k_4 = \frac{\omega}{c}. \quad (2.3)$$

Soni'n' menen birge γ shamalari' k_μ shamalari'n ayqi'n tu'rde saylap ali'wdan g'a'rezli bolmawi' kerek. k_μ shamalari'n (2.3)-an'latpadan relyativistlik dispersiya ni'zami'ni'n' ja'rdeminde joq etiwge boladi':

$$\sum_{\mu} k_{\mu}^2 \equiv k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = -\chi^2. \quad (2.4)$$

Oni' (2.3)-an'latpani' kvadratqa ko'teriw arqali' ali'wg'a boladi':

$$\chi^2 = \left(i \sum_{\mu} k_{\mu} \gamma_{\mu} \right)^2 = - \sum_{\mu} \sum_{\nu} k_{\mu} k_{\nu} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu}. \quad (2.5)$$

Son'g'i' an'latpa menen (2.4)-an'latpa birdey boli'wi' ushi'n qos summadag'i' normallang'an diagonalli'q ag'zalar g'ana nolge ten' bolmawi' kerek. YAg'ni'y

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

an'latpasi'ni'n' ori'n ali'wi' kerek (bul an'latpani'n' kommutაციyali'q qatnaslar ekenligin eske alami'z). Tap usi'nday procedurani' (2.1)-Dirak ten'lemesine qollani'p ha'm tegis tolqi'nlardi' qollanbay

$$\kappa^2 \psi = \left(\sum_{\mu} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \right)^2 \psi = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \psi \quad (2.7)$$

an'latpalari'na iye bolami'z. Bul an'latpalar (2.6)-antikommutatorlari'ni'n' ma'nislerin esapqa alg'an jag'dayda Kleyn-Gordon-Fok ten'lemesine o'tedi:

$$\square^2 \psi - \chi^2 \psi = 0. \quad (2.7)$$

γ_{μ} shamalari' ushi'n to'rt qatarli' matricalar tu'rinde keltirilip shi'gali'maytug'i'n ko'rinisti du'ziwge boladi'. Eger γ_{μ} usi'nday ko'rinishlerdin' biri bolsa, onda $U^{\dagger} \gamma_{\mu} U$ tu'rindagi qa'legen unitarli'q tu'rlendiriw basqa bazi' bir keltirilip shi'g'ari'lmaytug'i'n ko'rinishlerdi payda etedi. Usi' sebepli matricalardi'n' birin (mi'sali' γ_{μ} matricasi'n) barli'q waqi'tta da diagonalli'q matrica dep boljawg'a boladi'. Oni'n' u'stine $\gamma_4^2 = 1$ bolg'anli'qtan usi' matricani'n' menshikli ma'nisleri +1 ge yamasa -1 ge ten' boli'wi' kerek. Usi' jag'dayg'a baylani'sli' γ_{μ} tu'rindagi matricani' konstrukciyalap mi'na an'latpalardi' jazi'wg'a boladi':

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Bul an'latpadag'i' juwan ha'ripler eki qatarli' matricalardi' an'latadi'. Bunnan keyin (2.6)-an'latpani'n' ja'rdeminde mi'nalardi' alami'z:

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_i \mathbf{C}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{C}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_i \mathbf{B}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{B}_i \end{pmatrix} = 2\delta_{ik}, \quad (2.9a)$$

$$\gamma_k \gamma_4 + \gamma_4 \gamma_k = \begin{pmatrix} 2\mathbf{A}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -2\mathbf{D}_k \end{pmatrix} = 0. \quad (2.9b)$$

Birinshi u'sh γ_μ matricasi' ushi'n (2.9b) qatnasi'nan mi'nani' alami'z:

$$\mathbf{A}_k = 0, \quad \mathbf{D}_k = 0,$$

al (2.9a) qatnasi'nan

$$\mathbf{B}_k \mathbf{C}_k = 1; \quad \mathbf{B}_i \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{B}_i = 0 \quad (2.10)$$

an'latpalari' kelip shi'g'adi'. Bul eki qatarli' matricalar ushi'n ali'ng'an ori'nlarini o'zgartiw qatnaslari' olardi' σ_k Pauli matricalarini arqali' an'lati'wg'a mu'mkinshilik beredi. Eger a menen b pu'tin sanlar boli'p tabi'latug'i'n bolsa, onda (2.10)-qatnaslardi'

$$\mathbf{B}_k = a\sigma_k, \quad \mathbf{C}_k = b\sigma_k, \quad ab = 1 \quad (2.11)$$

tu'rindegil matricalar qanaatlandi'radi'. Solay etip

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & b^{-1}\sigma_k \\ b\sigma_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

tu'rindegil qa'legen ko'rinisi (2.6) tu'rindegil ori'n almasti'ri'w an'latpalari'n qanaatlandi'radi'.

Jiyi qollani'latug'i'n standart dep atalug'i'n ko'rinis $b = i$ bolg'an jag'dayda ali'nadi' ha'm to'mendegidey tu'rge iye [(1.12)-an'latpa menen sali'sti'ri'w kerek]:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Eskertiw: Eger $a = b = 1$ dep alsaq, onda u'sh dana γ_μ matricalarini'ni'n' orni'na

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

matricalarini' alami'z. Olar $\gamma_4 \equiv \beta$ matricasi' menen birgelikte tap sol ori'n almasti'ri'w qatnaslari'n qanaatlandi'radi'. Ko'rsetilgen eki matricalarini'ni' jiyinag'i' bir biri menen

$$\gamma_k = -i\beta\alpha_k, \quad \gamma_4 = \beta \quad (2.15)$$

qatnaslari' arqali' baylani'sqan.

α matricallari' Dirak gamiltoniani'nda qollani'ladi'.

2-3 §. On' ma'nisli energiyag'a iye tegis tolqi'lar

Biz endi energiyani'n' ma'nisi nolden u'lken bolg'andag'i' standart ko'riniste on' ha'm teris spiralli'qqa iye bolg'an Dirak tegis tolqi'nlari' ushi'n spinorli'q amplitudalardi' tabami'z. Oni'n' ushi'n birinshi gezekte tolqi'ndi'

$$\psi = C e^{i(kr - \omega t)} \quad (2.16)$$

tu'rinde jazi'ladi' dep boljap ha'm (2.13)-tu'rdegi standart ko'rinisten paydalani'p C amplitudani'n' to'rt qurawshi'si' ushi'n to'mendegidey ten'lemeler sistemasi'n alami'z:

$$\begin{aligned} (k_x - ik_y) C_4 + k_z C_3 + \left(-\frac{\omega}{c} + \kappa \right) C_1 &= 0, \\ (k_x + ik_y) C_3 - k_z C_4 + \left(-\frac{\omega}{c} + \kappa \right) C_2 &= 0, \\ -(k_x - ik_y) C_2 - k_z C_1 + \left(\frac{\omega}{c} + \kappa \right) C_3 &= 0, \\ -(k_x + ik_y) C_1 + k_z C_2 + \left(\frac{\omega}{c} + \kappa \right) C_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Bunnan keyin

$$k\eta = \frac{\omega}{c} - \chi, \quad \frac{k}{\eta} = \frac{\omega}{c} + \chi \quad (2.18)$$

qatnaslari' ja'rdeminde bo'lekshenin' qozg'ali'si'n xarakterlewshi a'hmiyetli fizikali'q shamalardi' an'lati'w qolayli' bolg'an η parametrin kirgizemiz. Mi'sali', bo'lekshenin' impulsi, oni'n' kinetikali'q energiyasi' ha'm tezligi sa'ykes to'mendegidey tu'rge iye boladi':

$$p = \hbar k = mc \frac{2\eta}{1 - \eta^2}, \quad (2.19a)$$

$$E = \hbar \omega = mc^2 \frac{1 + \eta^2}{1 - \eta^2}, \quad (2.19b)$$

$$v = c \frac{2\eta}{1 + \eta^2}. \quad (2.19c)$$

Usi'ni'n' menen bir qatarda $\mathbf{k}$ vektori'ni'n' bag'i'ti'n xarakterlewshi ϑ ha'm φ sferali'q mu'yeshlerin de kirgizi'w paydali':

$$k_x \pm ik_y = k \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}, \quad k_z = k \cos \vartheta. \quad (2.20)$$

Jan'a belgilewlerde (2.17)-sistema bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\begin{aligned}
\text{Sin}\vartheta e^{\pm i\varphi} C_4 + \text{Cos}\vartheta C_3 - \eta C_1 &= 0, \\
\text{Sin}\vartheta e^{i\varphi} C_3 - \text{Cos}\vartheta C_4 - \eta C_2 &= 0, \\
-\text{Sin}\vartheta e^{-i\varphi} C_2 - \text{Cos}\vartheta C_1 + \frac{1}{\eta} C_3 &= 0, \\
-\text{Sin}\vartheta e^{i\varphi} C_1 + \text{Cos}\vartheta C_2 + \frac{1}{\eta} C_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Solay etip, to'rt C_μ shamasi'n ani'qlaw ushi'n to'rt si'zi'qli' ha'm bir tekli algebrali'q ten'lemelerga iye bolami'z. Bul sistemani'n' ani'qlawshi'si'n tabi'w ushi'n Mathematica 10 tilinde to'mendegidey programma du'zemiz

$$\begin{aligned}
&N[\text{Det}[\{\{\text{eta}, 0, \text{Cos}[\text{tet}], \text{Sin}[\text{tet}]\text{Exp}[-I\text{fi}]\}, \\
&\quad \{0, -\text{eta}, \text{Sin}[\text{tet}]\text{Exp}[-I\text{fi}], -\text{Cos}[\text{tet}]\}, \\
&\quad \{-\text{Cos}[\text{tet}], -\text{Sin}[\text{tet}]\text{Exp}[-I\text{fi}], (1/\text{eta}), 0\}, \\
&\quad \{-\text{Sin}[\text{tet}]\text{Exp}[-I\text{fi}], \text{Cos}[\text{tet}], 0, (1/\text{eta})\}\}]]
\end{aligned}$$

ha'm ani'qlawshi'ni'n' (determinant'ti'n') nolga ten' emes, al kompleksli san ekenligine ko'z jetkeremiz. Mi'sali' $\text{tet} = 0.38$; $\text{eta} = 0.1$; $\text{fi} = 0.243$ tu'rindegil sanlar berilgenda $-0.03573771947393482 - 0.12647957185314548i$ shamasi'na ten' boladi'. Ten'lemedegi C koefficientlerin tabi'w ushi'n du'zilgen programma

$$\begin{aligned}
&\text{Solve}[\{\text{Sin}[\text{tet}]\text{Exp}[-I\text{fi}]C_4 + \text{Cos}[\text{tet}]C_3 - \text{eta}C_1 == 0, \\
&\quad \text{Sin}[\text{tet}]\text{Exp}[I\text{fi}]C_3 - \text{Cos}[\text{tet}]C_4 - \text{eta}C_2 == 0, \\
&\quad -\text{Sin}[\text{tet}]\text{Exp}[I\text{fi}]C_2 - \text{Cos}[\text{tet}]C_1 + (1/\text{eta})C_3 == 0, \\
&\quad -\text{Sin}[\text{tet}]\text{Exp}[I\text{fi}]C_1 + \text{Cos}[\text{tet}]C_2 + (1/\text{eta})C_4 == 0\}, \{C_1, C_2, C_3, C_4\}]
\end{aligned}$$

tu'rine iye boladi'. Biraq bul programmadan ku'tilgen na'tiyjeni ala almaymi'z. Sebebi joqari'da jazi'lg'an sistemani'n' ani'qlawshi'si' nolga ten' bola aladi', biraq bunday jag'dayda ol eki ko'beytiwshige bo'linedi. Olardi'n' ha'r qaysi'si' o'z aldi'na nolga ten' boladi'. Bunnan barli'q C_μ shamalari'n olardi'n' qanday da biri arqali' ani'qlawg'a bolmaytug'i'nli'g'i' kelip shi'g'adi'. Sonli'qtan C_μ shamalari'ni'n' ekewin i'qti'yarli' tu'rde saylap aladi'. Biraq saylap ali'wdi'n' na'tiyjesi bir ma'nisli boli'wi' ushi'n biz to'mendegidey usi'ldi' usi'nami'z.

En' da'slep spiralli'q operatori' dep atalatug'i'n operator'di'n' menshikli funkciyalari'n tabami'z

$$\mathbf{h} = \frac{1}{k} \sum_i \sigma_i k_j, \tag{2.22}$$

Bul operator "spinnin' k bag'i'ti'na tu'sirilgen prorekciyasi'n" beredi. Standart ko'riniste spinlik matricalar

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} s_j & 0 \\ 0 & s_j \end{pmatrix}$$

tu'rindegi Paulidin' birdey atamag'a iye eki qatarli' s_j matricalari' arqali' an'lati'latug'i'n bolg'anli'qtan (2.22)-an'latpa boyi'nsha

$$h = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ \sin \vartheta e^{i\varphi} & -\cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & \sin \vartheta e^{i\varphi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

matricasi'na iye bolmi'z.

Spiralli'q operatori'ni'n' menshikli ma'nisin h arqali' belgileymiz. Onda menshikli ma'nisler ushi'n ten'leme

$$\mathfrak{h}C = hC$$

tu'rinde jazi'ladi' ha'm bul ten'leme C_1 ha'm C_2 shamalari'n baylani'sti'ratug'i'n eki ten'lemege

$$\begin{aligned} C_1 \cos \vartheta + C_2 \sin \vartheta e^{-i\varphi} &= hC_1, \\ C_1 \sin \vartheta e^{i\varphi} - C_2 \cos \vartheta &= hC_2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

ja'ne C_3 ha'm C_4 shamalari'n baylani'sti'ratug'i'n (2.24)-ten'lemeler sistemasi' si'yaqli' ja'ne eki ten'lemeler sistemasi'na aji'raladi'. Eger $h = 1$ sha'rti ori'nlanatug'i'n bolsa (2.24)-ten'lemelerdin' ani'qlawshi'si' nolge aylanadi' ha'm sonli'qtan bizler to'mendegidey eki sheshimge iye bolami'z.

Birinshisi. $h = +1$ (spin k vektori'na parallel):

$$C_2 = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} C_1, \quad C_4 = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} C_3, \quad (2.25)$$

ha'm ekinshisi $h = -1$ (spin k vektori'na antiparallel):

$$C_2 = -\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} C_1, \quad C_4 = -\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} C_3. \quad (2.26)$$

C_1 ha'm C_3 shamalari' i'qti'yarli' tu'rde saylap ali'nadi'.

Ali'ng'an na'tiyjelerdi (2.21)-ten'lemeler sistemasi'na qoyami'z. Eger

$$\begin{aligned} \sin \vartheta \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \cos \vartheta &= 1, & \sin \vartheta \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} - \cos \vartheta &= 1, \\ \sin \vartheta - \cos \vartheta \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, & \sin \vartheta + \cos \vartheta \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \end{aligned}$$

tu'rindegi elementar ten'liklerdi esapqa ali'p ali'ng'an na'tiyjelerdi (2.21)-ten'lemeler sistemasi'na qoysaq, onda

$$h = +1 \text{ bolg'anda } C_3 = \eta C_1, \quad (2.27)$$

$$h = -1 \text{ bolg'anda } C_3 = -\eta C_1 \quad (2.28)$$

na'tiyjelerine iye bolami'z.

Endi normirovka sha'rtinen paydalanami'z ha'm bul sha'rttin' lorenc-invariant ekenligin atap o'temiz. Sebebi normirovkada qatnasatug'i'n integral V ko'leminin' ishinde jaylasqan toli'q elektr zaryadi'na proporcional. Soni'n' menen birge $\bar{\psi}\psi = 1$ tu'rindagi basqa lorenc-invariant ta jiyi qollani'ladi'.

$$\int_V \psi^\dagger \psi d^3x = \int_V C^\dagger C d^3x = 1 \quad (2.29)$$

Sonli'qtan spinorli'q amplitudalar

$$h = +1 \text{ bolg'anda } C_+ = \frac{1}{\sqrt{V(1+\eta^2)}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi} \\ \eta \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \eta \sin \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

ha'm

$$h = -1 \text{ bolg'anda } C_- = \frac{1}{\sqrt{V(1+\eta^2)}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ -\cos \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi} \\ -\eta \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}\varphi} \\ \eta \cos \frac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Biz (2.19c) an'latpasi'nan $\eta \ll 1$ bolg'an jag'dayda relyativistlik emes kvantli'q jag'daydi'n' ali'natug'ni'li'g'i'n an'g'arami'z. Eger usi'nday sha'rt qanaatlandi'ri'latug'i'n bolsa, onda ψ_3 ha'm ψ_4 qurawshi'lari'n esapqa almawg'a ha'm relyativistlik emes kvantli'q mexanikadag'i' Pauli do'retken spinnin' eki qurawshi'g'a iye teoriyasi'na o'tiwge boladi'.

2-4 §. Eki qurawshi' tu'rinde jazi'lg'an Dirak ten'lemesi

Biz Dirak ten'lemesin gamilton formasi'nda jazami'z ha'm standart ko'rinishi paydalani'p to'rt qurawshi'g'a iye ten'lemeni Pauli matricolari'na iye eki dana eki qurawshi'g'a iye ten'lemelerge aylanli'rami'z. Bunday jag'dayda ali'ng'an ten'lemelerdi massasi' nolge ten' bolg'an bo'lekshelerdi ta'riyiplew ushi'n da

qollani'wg'a bolatug'i'nli'g'i'n ko'remiz.

Dirak ten'lemesin ha'm onda qatnasatug'i'n ag'zalardi' bi'layi'nsha ko'rsetemiz:

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu} D_{\mu} \psi + \kappa \psi = 0, \quad D_{\mu} = \partial_{\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu}, \quad (2.32)$$

$$A_4 = i\Phi, \quad e\Phi = V, \quad \partial_4 = -\frac{i}{c} \partial_t$$

Bul an'latpalardan waqi'tqa g'a'rezlilikni ani'q tu'rde ayi'ri'p ali'wg'a ha'm ali'ng'an na'tiyjelerdi bi'layi'nsha jazi'wg'a boladi'

$$\sum_{n=1}^3 \gamma_n D_n \psi + \gamma_4 \left(-\frac{i}{c} \partial_t + \frac{V}{\hbar c} \right) \psi + \kappa \psi = 0.$$

Bul ten'lemeni shep ta'repten $c\hbar\gamma_4$ ke ko'beytip

$$\hbar c \sum_n \gamma_n D_n \psi - i\hbar \partial_t \psi + V\psi + mc^2 \gamma_4 \psi = 0$$

yamasa

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\psi}{dt} = H\psi$$

ten'lemesin alami'z. Bul ten'lemedegi

$$H = \hbar c \sum_{n=1}^3 \gamma_n \left(\partial_n - \frac{ie}{\hbar c} A_n \right) + V + mc^2 \gamma_4 \quad (2.33)$$

an'latpasi'n gamiltonian si'pati'nda qarawg'a boladi'.

Standart ko'riniste

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} 0' & -is_n \\ is_n & 0' \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1' & 0' \\ 0' & -1' \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Bul an'latpada s_n arqali' Pauli matricolari', al 1' ha'm 0' arqali' sa'ykes birlik ha'm nollik eki qatarli' matricalar belgilengen. Bunnan keyin

$$\alpha_n = i\gamma_4 \gamma_n = \begin{pmatrix} 0' & s_n \\ s_n & 0' \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

an'latpasi'n an'sat ala alami'z. Sonli'qtan (2.33)-gamiltoniandi' mi'naday formada jaza alami'z:

$$H = \begin{pmatrix} V + mc^2 & -\hbar c i \sum_n s_n D_n \\ -\hbar c i \sum_n s_n D_n & V - mc^2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Eger to'rt qurawshi' Dirak spinori' menen baylani'sqan eki qurawshi'g'a iye ψ_a ha'm ψ_b tu'rindagi funkciyalardi' paydalanatug'i'n bolsaq, onda

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$$

tolqi'n funkciyasi'na iye bolami'z ha'm Dirak ten'lemesi eki qurawshi'g'a iye

ten'lemelerdin' to'mendegidey jubi'na bo'linedi:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_a}{\partial t} &= -i\hbar c (\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}) \psi_b + (V + mc^2) \psi_a, \\ -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi_b}{\partial t} &= -i\hbar c (\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}) \psi_a + (V - mc^2) \psi_b. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Mi'sali', energiyasi' E on' ma'niske iye stacionar hallar ushi'n

$$\begin{aligned} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}) \psi_b - i \frac{E - V - mc^2}{\hbar c} \psi_a &= 0, \\ (\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}) \psi_a - i \frac{E - V + mc^2}{\hbar c} \psi_b &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

an'latpalari'na iye bolami'z.

Endi biz neytrino teoriyasi' menen shug'i'llana alami'z. Eger $m = 0$ sha'rti ori'nlanatug'i'n bolsa joqari'da keltirilgen ten'lemeler birdey tu'rge enedi. Sonli'qtan

$$\psi_b = \lambda \psi_a \text{ ha'm } \lambda = \pm 1 \quad (2.39)$$

ten'liklerine iye bolami'z, al bir birinen si'zi'qli' g'a'rezsiz bolg'an ψ_a sheshimi

$$\left\{ (\mathbf{s} \cdot \mathbf{D}) - \lambda i \frac{E - V}{\hbar c} \right\} \psi_a = 0 \quad (2.40)$$

ten'lemesinin' ja'rdeminde ani'qlani'wi' kerek. Usi' eki sistemalar bir biri menen pu'tkilley baylani'spag'an bolg'anli'qtan massasi' nolge ten' bolg'an bo'lekshe ushi'n bir birinen g'a'rezsiz bolg'an eki qurawshi'g'a iye teoriyalar bar boladi'. Si'rtqi' ku'shler bar bolmag'an jag'daylarda λ parametrinin' spiralli'q xarakteristikasi' ushi'n paydalani'latug'i'n kvant sani'na sa'ykes keletug'i'nli'g'i'n ko'rsetiw qi'yi'n emes. Usi' jag'daydi'n' haqi'yqati'nda da ori'nlanatug'i'nli'g'i'n ko'rsetiw ushi'n z ko'sheri bag'i'ti'nda tarqalatug'i'n tegis tolqi'ndi' qaraymi'z:

$$\psi_a = C e^{ikz}$$

Bul an'latpada C arqali' turaqli' eki qurawshi'g'a iye spinor belgilengen. Usi'nday jag'daylarda (2.40)-ten'lemenin' shep ta'repindegi birinshi ag'za

$$s_3 \partial_3 \psi_a = ik(s_3 \psi_a)$$

tu'rine iye boladi'. Al ekinshi ag'za bolsa

$$-i\lambda \frac{E}{\hbar c} \psi_a = -ik\lambda \psi_a$$

tu'rinde jazi'ladi'. Sonli'qtan

$$s_3 C = \lambda C. \quad (2.41)$$

Demek λ shamasi' tolqi'nni'n' tarqali'w bag'i'ti'ndag'i' spin operatori'ni'n' qurawshi'si'ni'n' menshikli ma'nisi eken (a'l'bette, $\hbar/2$ birliklerindegi). s_3 Pauli matricasi' diagonalli'q bolg'anli'qtan oni'

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tu'rinde jazami'z ha'm sonli'qtan $\lambda = 1$ ten'ligi ori'nlang'an jag'dayda (2.41)-ten'lemenin' sheshimi

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

spinori' boli'p tabi'ladi' ha'm usi'ni'n' saldari'nan tolqi'n funkciyasi'

$$\psi = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} e^{ikz} \quad (2.42a)$$

tu'rinde jazi'ladi'. Al teris ma'nisli spiralli'q ori'n alg'anda (yag'ni'y $\lambda = -1$ ten'ligi ori'nlanatug'i'n jag'daylarda)

$$C' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an'latpasi'n alami'z ha'm tolqi'n funkciyasi' ushi'n

$$\psi = \begin{pmatrix} C' \\ -C' \end{pmatrix} e^{ikz} \quad (2.42b)$$

formulasi' ali'nadi'.

Eksperimentler neytrini'n' spiralli'g'i'ni'n' barli'q waqi'tta da teris, yag'ni'y $h = -1$ ekenligin ko'rsetedi. Sonli'qtan joqari'da rawajlandi'ri'lg'an tek ekinshi variant g'ana ta'biyatta ori'n alatug'i'n jag'daylardi' duri's ta'riyipleydi. Usi' jag'dayg'a baylani'sli'

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$$

operatori'n qaraymi'z. Bul operator standart ko'riniste bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0' & -1' \\ -1' & 0' \end{pmatrix}.$$

Bunnan keyin

$$1 + \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1' & -1' \\ -1' & 1' \end{pmatrix}, \quad 1 - \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1' & 1' \\ 1' & 1' \end{pmatrix}$$

an'latpalari'na iye bola alami'z. Eger usi' operatorlar menen (2.40)-ten'lemenin' $\lambda = +1$ bolg'an qa'legen sheshimine ta'sir etsek (yag'ni'y $\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$ sheshimine ta'sir etsek), onda

$$(1 + \gamma_5)\psi_+ = 0, \quad (1 - \gamma_5)\psi_+ = 2\psi_+ \quad (2.43a)$$

an'latpalari'n alami'z.

Al usi' operatorlardi'n' (2.40)-ten'lemenin' $\lambda = -1$ bolg'an sheshimine ta'siri (yag'ni'y $\psi_- = \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix}$ sheshimine ta'siri)

$$(1 + \gamma_5)\psi_- = 2\psi_-, \quad (1 - \gamma_5)\psi_- = 0 \quad (2.43b)$$

an'latpalari'n beredi.

Ali'ng'an na'tiyjeler boyi'nsha biz ta'biyatta qanday da bir belgisiz bolg'an sebeplerge baylani'sli' tek ψ_- sheshiminin' ali'natug'i'nli'g'i' yamasa neytrinoni'n' payda boli'wi'na juwapker bolg'an ta'sirlesiw operatori' $(1 + \gamma_5)$ ko'beymesine iye ha'm sonli'qtan $\lambda = 1$ bolg'an jag'daylarda neytrinoni'n' tuwi'li'wi'ni'n' mu'mkin emesligi haqqi'ndag'i' ma'seleni sheshe almaymi'z. En' aqi'ri'nda $(1 + \gamma_5)$ operatori'ni'n' ken'isliklik inversiya operatori' menen kommutaciyalanbaytug'i'nli'g'i'n ha'm usi'nday ta'sirlesiwlerde ken'isliklik jupli'qti'n' saqlanbaytug'i'nli'g'i'n atap o'temiz.

2-5 §. Dirak teoriyasi'ndag'i' orayli'q ku'shler

Bul paragrafta orayli'q simmetriyag'a iye bolg'an $V(r)$ maydani'na qoyi'lg'an Dirak bo'lekshesin qarap o'temiz ha'm standart ko'riniste Dirak ten'lemesinin' eki (jup) eki qurawshi'g'a iye ten'lemege bo'linetug'i'nli'g'i'nan paydalani'p Dirak gamiltoni'ni'n' menshikli spinorlari'n tabami'z. Soni'n' menen birge bul spinorlar J^2 ha'm J_z operatorlari'ni'n' menshikli spinorlari' boli'p tabi'ladi'. Ma'selenin' an'sat boli'wi' ushi'n $m_j = +1/2$ bolg'an jag'daydi' qaraw menen sheklenemiz.

(2.38)-ten'lemege sa'ykes bo'lingen formada jazi'lg'an Dirak ten'lemesi

$$\sum_{n=1}^3 s_n \partial_n \psi_b - i \frac{E - V(r) - mc^2}{\hbar c} \psi_a = 0, \quad (2.44)$$

$$\sum_{n=1}^3 s_n \partial_n \psi_a - i \frac{E - V(r) + mc^2}{\hbar c} \psi_b = 0$$

tu'rinde jazi'ladi'. Bul ten'lemede s_n arqali' ($n = 1, 2, 3$) Pauli matricalari' belgilengen. ψ_a menen ψ_b spinorlari' Dirak spinori' menen

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$$

an'latpasi' arqali' baylani'sqan.

Standart ko'riniste toli'q moment operatori'

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.46)$$

tu'rinde jazi'ladi'. Bul operator Dirak spinori'na ta'sir etip oni'n' birinshi qurawshi'lari' bolg'an ψ_a spinorlari'n qalg'an ekewi bolg'an ψ_b menen aralasti'rmaydi'. Bul jag'day Pauli matricallari' arqali' jazi'lg'an spinlik to'rt qatarli' matricallardi'n' standart ko'riniste

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} s_n & 0 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

formasi'na iye bolatug'i'nli'g'i' menen baylani'sli'.

Solay etip ψ_a ha'm ψ_b spinorlari' J^2 ha'm J_z operatorlari'ni'n' menshikli spinorlari' boli'p tabi'ladi' eken. Tap usi'nday qa'siyetke (2.45)-qatnasti'n' ja'rdeminde ani'qlang'an ψ arqali' belgilengen 4-spinor da iye boladi'.

Kvantli'q mexanikadan J^2 ha'm J_z operatorlari'ni'n' $j = l \pm \frac{1}{2}$ ha'm $m_j = +1/2$ menshikli ma'nislerine sa'ykes keliwshi $u_{j,l}$ menshikli spinorlari'ni'n'

$$\begin{aligned} u^I = u_{j, j-1/2} &= \frac{f_l(r)}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l+1} & Y_{l,0} \\ -\sqrt{l} & Y_{l,1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{f_{j-1/2}(r)}{\sqrt{2j}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+1/2} & Y_{j-1/2,0} \\ -\sqrt{j-1/2} & Y_{j-1/2,1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

ha'm

$$\begin{aligned} u^{II} = u_{j, j+1/2} &= \frac{g_l(r)}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{l} & Y_{l,0} \\ \sqrt{l+1} & Y_{l,1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{g_{j+1/2}(r)}{\sqrt{2(j+1)}} \begin{pmatrix} \sqrt{j+1/2} & Y_{j+1/2,0} \\ \sqrt{j+3/2} & Y_{j+1/2,1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.49)$$

tu'rlerine iye bolatug'i'nli'g'i' belgili. Endi spinorlardi'n' joqari'da keltirilgen

$$\psi = \begin{pmatrix} u^I \\ u^{II} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

ha'm

$$\psi = \begin{pmatrix} u^{II} \\ u^I \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

tiplerin kombinaciyalap biz qoyg'an ma'selenin' sheshimin tabi'wg'a umti'lami'z. $f(r)$ ha'm $g(r)$ radially'q funkciyalari'ni'n' normirovkasi' haqqi'ndag'i' ma'seleni [normirovka ma'selesi (2.50)- ha'm (2.51)-sheshimleri ushi'n ha'r qi'yli' boli'wi' mu'mkin] ha'zirshe ashi'q qaldi'rami'z.

Biz atap o'tken programmani' ori'nlaw ushi'n (2.44)-an'latpag'a sa'ykes

$$Su^{I, II} = \sum_{n=1}^3 s_n \partial_n u^{I, II} = \begin{pmatrix} \partial_z & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & -\partial_z \end{pmatrix} u^{I, II} \quad (2.52)$$

an'latpasi'n qarawi'mi'z kerek. Buni'n' ushi'n belgili bolg'an

$$\begin{aligned} \pm (\partial_x \pm i\partial_y) (F(r) Y_{l, m}) &= \sqrt{\frac{(l \pm m + 2)(l \pm m + 1)}{(2l+3)(2l+1)}} \times \\ &\times \left(F' - \frac{l}{r} F \right) Y_{l+1, m \pm 1} - \sqrt{\frac{(l \mp m)(l \mp m - 1)}{(2l+1)(2l-1)}} \times \\ &\times \left(F' + \frac{l+1}{r} F \right) Y_{l-1, m \pm 1} \end{aligned} \quad (2.53)$$

ha'm

$$\begin{aligned} \partial_z (F(r) Y_{l, m}) &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)}} \times \\ &\times \left(F' - \frac{l}{r} F \right) Y_{l+1, m} + \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}} \left(F' + \frac{l+1}{r} F \right) Y_{l-1, m} \end{aligned} \quad (2.54)$$

formulalari'nan paydalani'p ha'm ko'p waqi'tti' alatug'i'n, biraq elementar bolg'an

$$Su^I = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left(\sqrt{l+1} \partial_z (f_l Y_{l, 0}) - \sqrt{l} (\partial_x - i\partial_y) (f_l Y_{l, 1}) \right) \quad (2.55)$$

ha'm

$$Su^{II} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \left(\sqrt{l} \partial_z (g_l Y_{l, 0}) + \sqrt{l+1} (\partial_x - i\partial_y) (g_l Y_{l, 1}) \right) \quad (2.56)$$

tu'rlendiriwlerinen son' $j = l + 1/2$ ushi'n

$$\begin{aligned} Su^I &= \frac{1}{\sqrt{2l+3}} \left(f'_l - \frac{l}{r} f_l \right) \begin{pmatrix} \sqrt{l+1} & Y_{l+1, 0} \\ \sqrt{l+2} & Y_{l+1, 1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(j+1)}} \left(f'_{j+1/2} - \frac{j+1/2}{r} f_{j+1/2} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{j+1/2} & Y_{j+1/2, 0} \\ \sqrt{j+3/2} & Y_{j+1/2, 1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.57)$$

an'latpasi'na iye bolami'z.

Eger $j = l - 1/2$ sha'rti ori'nlanatug'i'n bolsa, onda na'tiyje

$$\begin{aligned} Su^{II} &= \frac{1}{\sqrt{2l-1}} \left(g'_l + \frac{l+1}{r} g_l \right) \begin{pmatrix} \sqrt{l} & Y_{l-1, 0} \\ -\sqrt{l-1} & Y_{l-1, 1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2j}} \left(g'_{j+1/2} + \frac{j+3/2}{r} g_{j+1/2} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{j+1/2} & Y_{j-1/2, 0} \\ -\sqrt{j-1/2} & Y_{j-1/2, 1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.58)$$

tu'rine iye boladi'.

Da'slep (2.50)-an'latpani' qoyi'p (2.44)-ten'lemeler sistemasi'n qanaatlanli'ri'wg'a ti'ri'sami'z:

$$\begin{aligned} Su^{II} - i \frac{E - V - mc^2}{\hbar c} u^I &= 0, \\ Su^I - i \frac{E - V + mc^2}{\hbar c} u^{II} &= 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Bunnan keyin u^I ha'm u^{II} lar ushi'n (2.48)- ha'm (2.49)-an'latpalardi', al Su^I ha'm Su^{II} lar ushi'n (2.57)- ha'm (2.58)-an'latpalardi' ali'p ha'm olardi' (2.59)-ten'lemenin' shep ta'repine qoyi'p, a'piwayi'li'q ushi'n radialli'q f penen g funkciyalari'ni'n'

indekslerin qaldi'ri'p

$$\begin{aligned} Su^{II} - i \frac{E - V - mc^2}{\hbar c} u^I = \\ = \frac{1}{\sqrt{2j}} \left(g' + \frac{j+3/2}{r} g - i \frac{E - V - mc^2}{\hbar c} f \right) \begin{pmatrix} \sqrt{j+1/2} & Y_{j-1/2, 0} \\ -\sqrt{j-1/2} & Y_{j-1/2, 1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.60)$$

ha'm

$$\begin{aligned} Su^I - i \frac{E - V + mc^2}{\hbar c} u^{II} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2(j+1)}} \left(f' - \frac{j-1/2}{r} f - i \frac{E - V + mc^2}{\hbar c} g \right) \begin{pmatrix} \sqrt{j+1/2} & Y_{j+1/2, 0} \\ \sqrt{j+3/2} & Y_{j+1/2, 1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

an'latpalari'na iye bolami'z. Eger $f(r)$ ha'm $g(r)$ radialli'q funkciyalari'

$$\begin{aligned} g' + \frac{j+3/2}{r} g - i \frac{E - V(r) - mc^2}{\hbar c} f = 0, \\ f' - \frac{j-1/2}{r} f - i \frac{E - V(r) + mc^2}{\hbar c} g = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

ten'lemeler sistemalari'n qanaatlandi'ratug'i'n bolsa, onda (2.60)- ha'm (2.61)- an'latpalardi'n' ekewi de nolge aylanadi'.

(2.51) tu'rindagi ekinshi tiptegi sheshimlar ushi'n joqari'da paydalani'lg'an jol menen formasi' (2.59)-ten'lemenin' formasi' menen birdey bolg'an ten'lemeler ali'nadi'. Biraq ali'ng'an ten'lemelerde u^I spinori'ni'n' orni'nda u^{II} spinori' ha'm u^{II} spinori'ni'n' orni'nda u^I spinori' turadi'. Na'tiyjede joqari'da ori'nlang'anday proceduralardi'n' ja'rdeminde (2.62)-differencialli'q ten'lemeler sistemasi'ni'n' orni'na

$$\begin{aligned} g' + \frac{j+3/2}{r} g - i \frac{E - V(r) + mc^2}{\hbar c} f = 0, \\ f' - \frac{j-1/2}{r} f - i \frac{E - V(r) - mc^2}{\hbar c} g = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

ten'lemeler sistemasi'n alami'z.

(2.62)- ha'm (2.63)-ten'lemelerdi o'z aldi'na sheship berilgen qa'legen $V(r)$ potentsiali' ushi'n joqari'da qoyi'lg'an ma'selenin' toli'q sheshimin ala alami'z. f ha'm g funkciyalari' bir biri menen ani'q baylani'sqan bolg'anli'qtan olardi'n' sali'sti'rmali' normirovkalari' da baylani'sqan boladi'.

Biz Dirakti'n' 4-spinori'ni'n' l shamasini'n' ha'r qi'yli' ma'nisleri menen xarakterlenetug'i'nli'g'i'n atap o'temiz. Sonli'qtan da relyativistik teoriyada l shamasini' "jaqsi'" kvant sani' bola almaydi'. Al j penen m_j shamarlari' "jaqsi'" kvant sanlari' boli'p tabi'la beredi.

2-6 §. Dirak teoriyasi'ndag'i' Kepler mashqalasi'

Endi 2-4 paragrafta keltirilgen na'tiyjelerdi sferali'q simmetriyag'a iye bolg'an

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (2.64)$$

potenciali'na iye bolg'an jag'day ushi'n qollanami'z ha'm bo'lekshenin' energiyalari'ni'n' ma'nislerin tabami'z.

Joqari'dag'i' paragrafta orayli'q maydan ushi'n uli'wma jag'daylarda Dirak bo'lekshesinin' energiyasi'ni'n' ruqsat etilgen ma'nislerin tabi'w (2.62)- ha'm (2.63)- differencialli'q ten'lemelerdi sheshiwge ali'p kelinetug'i'nli'g'i' ko'rsetildi. Soni'n' menen birge tolqi'n funkciyalari'ni'n' radialli'q bo'limlerinin' de sol ten'lemelerdi qanaatlandi'ri'wi'ni'n' kerek ekenligi de atap o'tildi.

Biz endi (2.62)-sistemadan baslaymi'z. Buni'n' ushi'n bazi' bir belgilewlerdi qabi'l etemiz:

Birinshi belgilew

$$\beta = \frac{Ze^2}{\hbar c} = \frac{Z}{137} \quad (2.65)$$

(bul an'latpadag'i' β kishi shama, biz oni'n' juqa strukturani'n' turaqli'si' ekenligin boljaymi'z).

Ekinshi belgilew

$$\frac{\mu}{a} = \frac{mc^2 - E}{\hbar c}, \quad \frac{1}{\mu a} = \frac{mc^2 + E}{\hbar c}$$

yamasa

$$\mu = \sqrt{\frac{mc^2 - E}{mc^2 + E}}, \quad a = \frac{\hbar c}{\sqrt{(mc^2 - E)(mc^2 + E)}}. \quad (2.66)$$

Usi'ni'n' na'tiyjesinde (2.64)-tu'rdegi potencial bar jag'day ushi'n (2.62)- differencialli'q ten'lemeler sistemasi'ni'n' orni'na dara jag'dayda to'mendegidey ten'lemeler sistemasi'n alami'z:

$$\begin{aligned} g' + \frac{j+3/2}{r}g + i\left(\frac{\mu}{a} - \frac{\beta}{r}\right)f &= 0, \\ f' - \frac{j-1/2}{r}f - i\left(\frac{1}{\mu a} + \frac{\beta}{r}\right)g &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Usi' ten'lemeler sistemasi'n sheshiw menen shug'i'llanami'z.

En' da'slep f ha'm g funkciyalari'ni'n' r din' ju'da' kishi ha'm ju'da' u'lken

ma'nislerinde qanday qa'siyetlerge iye ekenligin ani'qlaymi'z. $r \rightarrow \infty$ sheginde (2.67)-ten'lemeler sistemasi'

$$g' + \frac{i\mu}{a}f = 0, \quad f' - \frac{i}{\mu a}g = 0$$

tu'rine enedi. Bul ten'lemeler sistemasi'ni'n' normirovkalanatug'i'n sheshimleri

$$g = Ce^{-r/a}, \quad f = -C \frac{i}{\mu} e^{-r/a}$$

formalari'na iye boladi'. $e^{+r/a}$ tu'rindagi sheshimge itibar beriw din' keregi joq. Ekinshi ta'repten $r \rightarrow 0$ sheginde regulyarli'q sheshimler to'mendegidey tu'rge iye boladi':

$$g = Ar^{s-1}, \quad f = Br^{s-1}.$$

Ali'ng'an na'tiyjelerdi (2.67)-sistemag'a qoyi'p mi'naday ten'lemeler sistemasi'na iye bolami'z:

$$\begin{aligned} (s-1)A + \left(j + \frac{3}{2}\right)A - i\beta B &= 0, \\ (s-1)B - \left(j - \frac{1}{2}\right)B - i\beta A &= 0. \end{aligned}$$

Bul sistemani'n' ani'qlawshi'si'ni'n' nolge ten' boli'wi'n talap etip biz

$$s = \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \beta^2} \quad (2.68)$$

formulasi'na iye bolami'z. Endi ali'ng'an na'tiyjelerdi kombinaciyalap to'mendegidey g'a rezliliklerdin' bar ekenligin boljaw maqsetke muwapi'q keledi

$$\begin{aligned} g &= Cr^{s-1} e^{-r/a} G(r), \\ f &= -\frac{i}{\mu} Cr^{s-1} e^{-r/a} F(r). \end{aligned} \quad (2.69)$$

(2.69)-an'latpalardi' (2.67)-an'latpalarg'a qoyi'p to'mendegidey differencialli'q ten'lemeler sistemasi'na kelemiz:

$$\begin{aligned} G' + \left(\frac{s + \left(j + \frac{1}{2}\right)}{r} - \frac{1}{a}\right)G + \left(\frac{1}{a} - \frac{\beta}{\mu r}\right)F &= 0, \\ F' + \left(\frac{s - \left(j + \frac{1}{2}\right)}{r} - \frac{1}{a}\right)F + \left(\frac{1}{a} + \frac{\mu\beta}{r}\right)G &= 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Bul ten'lemelerdi bir birine qosi'p ha'm ali'p, soni'n' menen birge

$$G + F = v(r), \quad G - F = w(r) \quad (2.71)$$

ten'likleri ori'n aladi' dep boljaw ha'm

$$p = \frac{\beta}{2} \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right), \quad q = \frac{\beta}{2} \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right), \quad k = j + \frac{1}{2} \quad (2.72)$$

belgilewlerin kirgizip

$$\begin{aligned} v' + \frac{s+p}{r} v &= -(k+q) \frac{w}{r}, \\ w' + \left(\frac{s-p}{r} - \frac{2}{a} \right) w &= -(k-q) \frac{v}{r} \end{aligned} \quad (2.73)$$

ten'lemeler sistemasi'na iye bolami'z. (2.73)-ten'lemelerdin' birinshisine muvapi'q mi'naday an'latpalardi' alami'z:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{k+q} [rv' + (s+p)v], \\ w' &= -\frac{1}{k+q} [rv'' + (s+p+1)v']. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Bul an'latpalardi' (2.73)-ten'lemeler sistemasi'ni'n' ekinshisine qoyi'p v funkciyasi' ushi'n ekinshi ta'rtpili a'dettegi differencialli'q ten'lemeni alami'z:

$$rv'' + \left[(2s+1) - \frac{2}{a} r \right] v' - \frac{2}{a} (s+p)v = 0. \quad (2.75)$$

Bul ten'leme Kummer ten'lemesi boli'p tabi'ladi' [Ernst Eduard Kummer (nemishe Ernst Eduard Kummer, 1810-ji'li' 29-yanvar ku'ni tuwi'lg'an ha'm 1893-ji'li' 29-yanvar ku'ni qayti's bolg'an nemis matematigi, oni'n' tiykarg'i' jumi'slari' algebrag'a ha'm sanlar teoriyasi'na tiyisli)]. Oni'n' regulyarli'q sheshimlari nolde, biraq i'qti'yarli' tu'rde normirovkalang'an sheshimi azg'i'ng'an gipergeometriyalik funkciya boli'p tabi'ladi'

$$v = {}_1F_1 \left(s+p, 2s+1; 2 \frac{r}{a} \right). \quad (2.76)$$

{Biz Wolfram Mathematica 10 tilinde Kummerdin' gipergeometriyalik funkciyasi'ni'n' Hypergeometric1F1[x,y,z] komandasi'ni'n' ja'rdeminde esaplanatug'i'nli'g'i'n atap o'temiz}.

Bunnan keyin

$$\left(z \frac{d}{dz} + a \right) {}_1F_1(a, c; z) = a {}_1F_1(a+1, c; z)$$

tu'rindagi uli'wmali'q formuladan paydalani'p (2.74)-an'latpadan

$$w = -\frac{s+p}{k+q} {}_1F_1 \left(s+p+1, 2s+1; 2 \frac{r}{a} \right) \quad (2.77)$$

an'latpasi'na iye bolami'z.

Bul an'latpalardi' (2.71) formulalarg'a qoyi'p G ha'm F funkciyalari'n tabami'z, bunnan keyin (2.69)-formulalardi'n' ja'rdeminde f ha'm g radially'q funkciyalari'n tabami'z:

$$\begin{aligned}
g &= \frac{1}{2} Cr^{s-1} e^{-r/a} \left\{ {}_1F_1\left(s+p, 2s+1; 2\frac{r}{a}\right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{s+p}{k+q} {}_1F_1\left(s+p+1, 2s+1; 2\frac{r}{a}\right) \right\}, \\
f &= -\frac{i}{2\mu} Cr^{s-1} e^{-r/a} \left\{ {}_1F_1\left(s+p, 2s+1; 2\frac{r}{a}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{s+p}{k+q} {}_1F_1\left(s+p+1, 2s+1; 2\frac{r}{a}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Bul an'latpalarda qatnasatug'i'n azg'i'ng'an gipergeometriyalik funkciyalardi'n' ekewi de $e^{2r/a}$ shamasi'na proporcional ha'm usi' jag'dayg'a baylani'sli' ali'ng'an sheshimlari azg'i'ng'an gipergeometriyalik funkciyalardi'n' birinshi argumentlari nolge yamasa pu'tin teris sang'a ten' bolmag'ang'a shekem normirovkalanbaydi'.

$$s + p = -n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{2.79}$$

$s + p = 0$ bolg'an jag'dayda ekinshi azg'i'ng'an gipergeometriyalik funkciyani'n' birinshi argumenti bolg'an $s + p + 1$ shamasi' +1 ge ten'. Biraq bul funkciyada $s + p$ ko'beytiwshisi bar. Sonli'qtan biz qarap ati'rg'an dara jag'dayda asimptotalik tarqali'wshi' ag'zalar (2.78)-an'latpadan shi'g'i'p qaladi'. Solay etip biz izlep ati'rg'an menshikli ma'nisler (2.79)-an'latpadan toli'g'i' menen ani'qlanadi'. Bul sha'rtke p menen μ shamalari'ni'n' orni'na sa'ykes (2.72) ha'm (2.66) an'latpalardi' qoysaq E energiyani'n' ruqsat etilgen ma'nisleri ushi'n ten'leme alami'z:

$$\frac{1}{2}\beta \left(\sqrt{\frac{mc^2 - E}{mc^2 + E}} - \sqrt{\frac{mc^2 + E}{mc^2 - E}} \right) = -(n_r + s).$$

Bunnan vodorod ta'rizli atomni'n' energiyasi'ni'n' qa'ddileri ushi'n mi'naday formulani' tabami'z:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{(n_r - s)^2}}}. \tag{2.80}$$

Usi' waqi'tlarg'a shekem biz radialli'q tolqi'n ten'lemelerin tabi'w ushi'n (2.63)-ten'lemelerdin' ekinshi sistemasi'n qaradi'q. Bul jag'dayda (2.67)-sistemani'n' orni'nda usi' (2.76) den ayi'rmasi' tek μ shamasi'n $1/\mu$ shamasi'na almasti'rg'andag'i'day ayi'rma payda bolg'ani'na an'sat ko'z jetkeriwge boladi'. Na'tiyjede joqari'da qatnasqan q ha'm p shamalari' saykes $-q$ ha'm $-p$ shamalari' menen almasti'ri'lg'an, al menshikli ma'nislerdi ani'qlaw ushi'n qoyi'latug'i'n (2.79)-sha'rt

$$s - p = -n_r$$

tu'inge iye bolg'an bolar edi.

Biraq bul o'zgerislerdin' hesh qaysi'si' da energiya qa'ddileri ushi'n ali'ng'an formulag'a o'zgeris kirgizbeydi. Sonli'qtan ha'r bir qa'ddi eki qaytara azgi'ng'an boli'p shi'g'adi'.

Pitkeriw qa'nigelik jumi'si' boyi'nsha uli'wmali'q juwmaqlar

1. Pitkeriw qa'nigelik jumi'si'nda relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' fizikali'q tiykarlari', oni'n' ten'lemelerinin' ali'ni'wi', ten'lemelerdi sheshiwidin' usi'llari', ali'natug'i'n na'tiyjeler haqqi'nda toli'q bayanlang'an. Relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' bir bo'lekshelik teoriya ekenligi, sonli'qtan oni'n' mu'mkinshiliklerinin' sheklengenligi, sonli'qtan maydanni'n' kvantli'q teoriyasi'na o'tiw za'ru'rliqi ma'seleleri talqi'lang'an.

2. Ayqi'n mi'sallarda spinleri nolge ten' bo'leksheler ushi'n du'zilgen Kleyn-Gordon-Fok ha'm spini $\frac{1}{2}$ ge ten' bolg'an bo'leksheler ushi'n jazi'lg'an Dirak ten'lemelerinin' sheshimleri ha'm bul sheshimlerden' fizikali'q mazmunlari' tu'sindirilgen. Dirak ten'lemesi orayli'q simmetriyag'a iye maydan ha'm oni'n' tiykari'nda relyativistlik kvantli'q mexanikadag'i' Kepler mashqalasi'n sheshiwge ayri'qsha di'qqat awdari'lg'an.

3. Pitkeriw qa'nigelik jumi'si'nda keltirilgen mag'li'wmatlardi'n' barli'g'i' da relyativistlik kvantli'q mexanikani'n' fizikali'q tiykarlari'n teren' tu'siniw ushi'n paydali' ilimiy-metodikali'q jumi's boli'p tabi'ladi'.

Paydalani'lg'an a'debiyatlar dizimi

1. O. Klein. Z. f. Phys. 1926. V. 37. P. 895.
2. V. Fock. Z. f. Phys. 1926. V.38. P. 242.
3. W. Gordon. Z. f. Phys. 1926. V.40. P. 117.
4. E. Schrodinger. Ann. Phys. V. 79. P. 361, 489; V. 80. P. 437. V. 81. P. 109.
5. J. Kular. Ann. Phys. 1926. V. 38. P. 632.
6. P.A.M. Dirac "The Quantum Theory of the Electron", Proc. R. Soc. **A117** 610 (1928).
7. P.A.M. Dirac "A Theory of Electrons and Protons", Proc. R. Soc. **A126** 360 (1930).
8. П.Дирак. Dirac P. A. M. Recollections of an Exciting Era//History of Twentieth Century Physics: Proceedings of the International [Summer] School of Physics «Enrico Fermi». Course LVII. Varenna, Lake Como, Italy, villa Monastero. July 31 - August 12. 1972,- (Rendiconti S. I. F. - LVII).- New York: Academic Press, 1977 - P. 109-146.- УФН, том 153, вып. 1 (1987). Перевод Н. Я. Смородинской.
9. Dirac P. A. M. Recollections of an Exciting Era//History of Twentieth Century Physics: Proceedings of the International [Summer] School of Physics «Enrico Fermi». Course LVII. Varenna, Lake Como, Italy, villa Monastero, July 31 — August 12, 1972.— (Rendi conti S. I. F. — LVII).— New York: Academic Press, 1977.— P. 109—146. На русском языке П.А.М.Дирак. Воспоминания о необычной эпохе. Сборник статей. Перевод Н. Я. Смородинской. Под редакцией и послесловием Я.А.Смородинского. Издательство "Наука". Москва. 1990. 208 с.
10. Dirac P.A.M., Principles of Quantum Mechanics, 4th edition (Clarendon, 1982) На русском языке: Поль Дирак. Принципы квантовой механики. Издательство "Наука". Москва. 1979. 481 с.

11. Carl D. Anderson. "The Positive Electron". *Physical Review*. Volume 43. P. 491-494.
12. Фриман Дайсон. Релятивистская квантовая механика. Перевод с английского Е.Н.Смирновой, под научной редакцией Д.В.Ширкова. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Ижевск. 2009. 235 с.
13. А.К.Горбачевич. Квантовая механика в общей теории относительности. Общие принципы и элементарные приложения. Издательство "Университетское". Минск. 1985. 160 с. А.В.Андреев. Теория частиц с полуцелым спином и сверхтонкая структура атомных уровней. Москва. Лаборатория Базовых знаний. 2003. 54 с.
14. Л.Н.Лабзовский. Теория атома. Квантовая электродинамика электронных оболочек и процессы излучения. Москва. Издательство "Наука". Физматлит. 1996. 304 с.
15. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Издательство Иностранной литературы. Москва. 1963. 842 с.
16. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Том IV. Квантовая электродинамика. Издание четвертое, исправленное. Москва. ФИЗМАТЛИТ. 2002. 720 с.
17. Gerlach, W.; Stern, O. (1922). "Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld". *Zeitschrift für Physik*. **9**: 349–352.
18. Gerlach, W.; Stern, O. (1922). "Das magnetische Moment des Silberatoms". *Zeitschrift für Physik*. **9**: 353–355.
19. S.Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Press Syndicate of Cambridge University. 1995.
20. H. Yukawa, On the interaction of elementary particles. (1935) *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*. **17** 48.
21. R. Frisch and O. Stern, *Z. Phys.* **85** 4 (1933).