

**O'ZBEKISTAN RESPUBLIKASI JOQARI HA'M ORTA
ARNAWLI BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI
BERDAQ ATINDAG'I QARAQALPAQ MA'MLEKETLIK
UNIVERSITETI**

Algebra, funktsionallıq analiz ha'm geometriya

kafedrası

Fizika - matematika fakulteti «Matematika» ta'lim

bag'darının' 4 - kurs studenti

ORAZOV RUSLANNIN'

**U`shinshi da`rejeli p -adikalıq ten`lemeler
atamasındag'ı**

PITKERIW QA'NIGELIK JUMISI

Kafedra baslıg'ı:

f.-m.i.d.Kudaybergenov K.K.

İlimiy basshı:

f.-m.i.k. Kurbanbaev T.K.

No'kis 2016

M a z m u n i

	Kirisiw.....	3
§1.	p -adikalıq sanlar maydanı.	5
§2.	p -adikalıq kvadrat ten`lemeler	17
§3	$x^3 = a$ ko`rinishindegi $p$ -adikalıq ten`lemeler	30
§4.	Bazı-bir u`shinshi da`rejeli p -adikalıq ten`lemeler	35
	Juwmaqlaw.....	39
	A`debiyatlar dizimi	40

K i r i s i w

Salıstırıwlar teoriiyası sanlar teoriiyasının` en` a`hmiyetli bo`limlerinen biri bolıp tabıladı. Salıstırıwlar teoriiyası menen tıg`ız baylanıslı bolg`an tarawlardın` biri bul  $p$ -adikalıq sanlar. Bul sanlarg`a anıqlama p -adikalıq norma ja`rdeminde beriledi, yag`nıy ratsional sanlar ko`pligin  $p$ -adikalıq norma dep atalıwshı norma menen tolıqtırıladı. Payda bolg`an ratsional sanlardın` ken`eytpesi - p -adikalıq sanlar delinedi.

p -adikalıq sanlar teoriiyası ha`zirgi zaman rawajlanıp atırg`an matematikanın` en` tez rawajlanıp atırg`an tarawların` biri bolıp tabıladı. Sol sebepli de bul teoriyag`a qızıg`ıwshılıq a`dewir joqarı. biz endi  $p$ -adikalıq analiz benen haqıyqıy analaizdi salıstırıp ko`rsek, p -adikalıq analizde haqıyqıy analizden parıqlanadı. Ayırım jag`daylarda qızıg`arlı qa`siyetlerge iye boladı. Bul  $p$ -adikalıq sanlardın` jaqsı qa`siyetlerinen biri bul qatar jıynaqlı bolıwı ushın onın` ulıwma ag`zası nolge umtılwı za`ru`r ha`m jeterli boladı, al haqıyqıy sanlarda tek jeterli sha`rt bar. Bul sanlar maydanın` jaman qa`siyetlerinen biri bul maydanda ta`rtıp kiritip bolmaydı, yag`nıy p -adikalıq sanlardı salıstırıp bolmaydı.

Ha`zirgi waqıtta ha`r qıylı matematikalıq tarawlar p -adikalıq sanlar maydanında u`yrenilip atır.  $p$ -adikalıq sanlar teoriiyası zamanago`y matematikanın` en` tez rawajlanıp atırg`an oblastların` biri bolıp tabıladı. Ma`selen  $p$ -adikalıq matematikalıq fizika,  $p$ -adikalıq itimallıqlar teoriiyası,  $p$ -adikalıq differentsiallıq ten`lemeler, p -adikalıq dinamikalıq sistema ha`m tag`ı basqalar. p -adikalıq sanlardı birinshi bolıp XIX a`sirdin` aqırlarında nemets matematigi K.Genzel` ta`repinen kiritilgen.

Bul pitkeriw qanigelik jumısı u`shinshi da`rejeli p -adikalıq ten`lemelerdi u`yreniwge arnalg`an.

Jumıstın` birinshi paragrafında  $p$ -adikalıq sanlar maydanı haqqında bolıp, tiykarınan  $p$ -adikalıq sanlar teoriyasına tiyisli bolg`an da`slepki tu`sinikler keltirilgen.

Ekinshi paragrafta p -adikalıq kvadrat ten`lemelrdin` sheshiw kriteriyası u`yrenilgen.

Pitkeriw qanigelik jumısının` u`shinshi paragrafında $x^3 = a$ ko`rinishindegi  $p$ -adikalıq ten`lemeler qaralg`an.

To`rtinshi paragrafta bazı-bir u`shinshi da`rejeli  $p$ -adikalıq ten`leme u`yreligen.

Jumıstın` aqırında juwmaqlaw ha`m paydalanılǵ`an a`debiyatlar dizimi keltirilgen.

Ulıwma bul teoriya menen tanısıw ha`m teren` u`yreniw ushın [1-16] a`debiyatlardan paydalanıw mu`mkin.

§1. Da'slepki tu'sinikler ha'm belgilewler

Haqıyqıy sanlar $\mathbb{R}$ ratsional sanlardı tolıqtırıw dep atalatug'ın protsessten payda boladı. Bul protsess qa'legen metrikalıq ken'islik ushın qollanıw mu'mkin, yag'nıy d aralıq funktsiyası menen M ken'islik. Bos bolmag'an M ko'pliginde elementlerdin' (x, y) ta'rtpılengen juplıqlardın' ko'pliginde anıqlang'an $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ funktsiyası *aralıq* delinedi, eger sha'rtlerdi qanaatlandırısa:

- 1) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in M$;
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in M$.

M metrikalıq ken'isliktin' $\{r_n\}$ nuqatlar izbe-izligi *Koshi izbe-izligi* delinedi, eger qa'legen $\varepsilon > 0$ sanı ushın sonday natural N sanı bar bolıp, barlıq $n, m > N$ larde $d(r_n, r_m) < \varepsilon$ bolsa. Eger M degi qa'legen izbe-izlik M de limitke iye bolsa, onda M *tolıq metrikalıq ken'islik* delinedi. Eger M tolıq emes bolsa, onda sonday metrikalıq $\bar{M}$ ken'isligi bar bolıp ha'm

- 1) $\bar{M}$ tolıq;
- 2) $\bar{M}$ ken'isligi $\bar{M}_0$ u'les ko'plikti o'z ishine aladı ha'm bul $\bar{M}_0$ ko'plik M ge izometrikalıq;
- 3) $\bar{M}_0$ ko'pligi $\bar{M}$ de ha'mme jerde tıg'ız ($\bar{M}$ degi ha'r bir noqat $\bar{M}_0$ noqatlardın' limit noqatı boladı)

$\bar{M}$ nin' tolıqtırıwshısının' anıq konstruktsiyasın beredi. Onın' elementi – bul M degi Koshi izbe-izliginin' ekvivalentlik klassları $(x_n$ ha'm y_n izbe-izlikleri *ekvivalent* delinedi, eger $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ bolsa).

$M = \mathbb{Q}$ ushın biz ratsional sanlar arasındag'ı a'piwayı evklid aralıg'ın to'mendegishe anıqlaymız:

$$d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|. \quad (1.1)$$

Bunda aralıq $\mathbb{Q}$ degi evklid normasidan payda boladı, bul norma absolyut shama delinedi ha'm "sanlı ko'sherdegi" a'piwayı aralıqtı beredi.

$\mathbb{Q}$ ko'pliklin' $\mathbb{R}$ ge shekem bolg'an toliqtırırwshısı sheksiz onlıq bo'lsheklerge tiykarlanadı. Ratsional sanlardı sheksiz onlıq bo'lshekler korinisinde su'wretlewi periodlı bolg'anlıqtan xarakterlenedi. Ekinshi ta'repten, qa'legen sheksiz onlıq bo'lshekler "san ko'sherinde" bazı-bir noqattı beredi. Demek, *haqıyqıy sanlardı* sheksiz onlıq bo'lshekler menen jazıw qolaylı boladı. Ha'r bir haqıyqıy on' a sanı onlıq bo'lshek ko'rinisinde jazıw mu'mkin

$$a = \sum_{k=m}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad (1.2)$$

bunda m – bazı-bir pu'tun san ha'm a_k tsifrlar yamasa koeffitsientler

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

ma'nislerin qabıl qıladı. Bulday su'wretlew barlıq $k > n$ ushın $a_k = 0$ jag'daydan basqa jag'daylarda birden-bir, bunday jag'dayda a sanının' basqasha su'wretleniwi bar: $a'_n = a_n - 1$, $a'_k = 9$, $k > n$ ha'm $a'_k = a_k$, $k < n$. $\mathbb{Q}$ da limitke iye bolmag'an ratsional sanlardan turatug'ın Koshi izbe-izliklerin du'ziw qıyın emes:

$$0,1, 0,1011, 0,10110111, 0,1011011101111, \dots$$

Ekinshi ta'repten, ratsional sanlardan du'zilgen Koshi izbe-izliklerinin' ekvivalentli klasslardın' ha'r biri o'z ishine (1.2) qatardın' dara qosındılarının' izbe-izligin aladı bul izbe-izliklin' limiti sheksiz onlıq bo'lshekler boladı. Basqasha aytqanda, haqıyqıy sanlar ko'pligi evklid aralıg'ına qarata tolıq boladı

ha'm sheksiz onlıq bo'lshekler menen haqıyqıy sanlardı du'ziw evklid aralıg'ına qarata tolıqtırıw protsessine ekvivalent boladı. (1.2) ni g tiykarı boyınsha sheksiz bo'lsheklerge jayıw menen ulıwmalastırıw mu'mkin, bunda $g - 2$ den u'lken yamasa ten' bolg'an qa'legen natural san; demek

$$a = \sum_{k=m}^{\infty} a_k g^{-k},$$

bul jerde a_k koeffitsientleri $\{0, 1, \dots, g-1\}$ ko'pliginin' ma'nislerin qabıl qıladı. Ko'pshilik jag'daylarda tolıqtırıw tu'mendegi konstruktsiya ja'rdeminde qurıladı:

Teorema 1.1. *Meyli M – tolıq metrikalıq ken'islik ha'm X ko'pligi M nin' u'les ko'pligi bolsın. Onda X tolıq bolıwı ushın M de tuyıq bolıwı za'ru'r ha'm jeterli boladı. Dara jag'dayda, X u'les ko'pliktin' M degi tuyıqlanıwı X u'les ko'pliktin' tolıqtırıwı sıpatında qaraw mu'mkin.*

Ratsional ha'm haqıyqıy sanlar maydanlar dep atalıwshı algebralıq strukturalardıń tiykarg'ı mısalları bolıp tapıladı. F maydanı – bul qosıw ha'm ko'beytiw dep atalıwshı eki binar operatsiyalı ko'plik bolıp bul operatsiyalar to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlanıradı:

- 1) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in F$ (qosıwdın' kommutativligi);
- 2) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad a, b, c \in F$ (qosıwdın' assotsiativligi);
- 3) $\forall a \in F$ elementi ushın $0 + a = a$ bolatug'ın sonday $0 \in F$ elementi bar boladı (noldin' bar bolıwı);
- 4) $\forall a \in F$ elementi ushın $a + (-a) = 0$ bolatug'ın sonday $-a \in F$ elementi bar boladı (qosıw boyınsha kerı elementtin' bar bolıwı);
- 5) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in F$ (ko'beymenin' kommutativligi);
- 6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad \forall a, b, c \in F$ (ko'beymenin' assosiativligi);
- 7) $\forall a \in F^x = F \setminus 0$ ushın $1 \cdot a = a$ bolatug'ın sonday $1 \in F$ elementi bar boladı (birlik elementtin' bar bolıwı);

8) $\forall a \in F^x$ elementi ushın $a \cdot a^{-1} = 1$ bolatug'ın $a^{-1} \in F^x$ elementi bar boladı (ko'beyme boyınsha kerı elementtin' bar bolıwı);

9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in F$ (distributivlik);

10) $0 \neq 1$.

1) - 4) qa'siyetlerin qanaatlantırıwshı bir binar operatsiyalı algebralıq struktura *abel* (yamasa *kommunikativ*) gruppası delinedi. Sa'ykes tu'rde qosıw menen F ko'pligi F maydanının' *additiv gruppası* delinedi, F maydanının' ko'beyme menen F^x ko'pligi *multiplikativ gruppası* delinedi. Maydanning' a'hmiyetli qa'siyeti ol noldin' *bo'liwshis*in o'z ishine almaydı, yag'nıy $a \cdot b = 0$ bolatug'ın $a, b \in F^x$ elementleri ushın.

Аnıqlama 1.1. Meyli F maydan bolsın. F te norma dep F ti teris emes haqıyqıy sanlarg'a sa'wlelendiriwshi ha'm to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlantırıwshı $\|\cdot\|$ sa'wleleniwine ayıladı:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\|xy\| = \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in F$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in F$ (*u'shmu'yeshlik ten'sizligi*).

Norma *trivial* delinedi, eger barlıq $x \neq 0$ ler ushın $\|0\| = 0$ ha'm $\|x\| = 1$ bolsa.

Qa'legen $n \in N$ ushın biz

$$n \cdot 1 := \underbrace{1 + \dots + 1}_n \in F$$

qatnaslarg'a iye bolamız.

Biz bul natural sang'a sa'ykes keliwshi elementi n simvolı arqalı belgileyemiz.

Tastıyqlaw 1.1. Qa'legen $x, y \in F$ ler ushın to'mendegiler orınlı:

a) $\|1\| = \|-1\| = 1$;

b) $\|x\| = \|-x\|$;

- c) $\|x \pm y\| \geq \|\|x\| - \|y\|\|$;
- d) $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
- e) $\|x / y\| = \|x\| / \|y\|$;
- f) $\|n\| \leq n, \forall n \in N$.

Anıqlama 1.2. Eki d_1 ha'm d_2 metrikaları F te ekvivalent delinedi, eger d_1 metrikasında qa'legen izbe-izlik Koshi izbe-izligi boladı sonda tek sonda g'ana eger d_2 metrikasında da Koshi izbe-izligi bolsa. Eki $\|\cdot\|_1$ ha'm $\|\cdot\|_2$ normaları ekvivalent $(\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2)$ delinedi, eger olar ekvivamlent metrikaların indutsirlasa.

Tastıyqlaw 1.2. Meyli $\|\cdot\|_1$ ha'm $\|\cdot\|_2 - F$ maydanındag'ı eki norma bolsın. Bul normalar ekvivalent bolıwı ushın

$$\|x\|_2 = \|x\|_1^\alpha, \forall x \in F, \quad (1.3)$$

bolatug'in sonday on' α haqıyqıy sanı bar bolıwı za'ru'r ha'm jeterli boladı.

Tastıyqlaw 1.3. $\|x\| = |x|^\alpha, \alpha > 0$ funksiya $\mathbb{Q}$ da norma boladı sonda tek sonda g'ana, eger $\alpha \leq 1$ bolsa. Bunda ol $|\cdot|$ normasına ekvivalent.

Anıqlama 1.3. Norma arximed bo'lmag'an norma delinedi, eger barlıq x ha'm y lar ushın

$$\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

ten'sizligi orınlansa.

Eskertiw 1.1. Arximed bolmag'an norma qa'siyetinen u'shmu'yeshlik ten'sizligi kelip shıg'ıwı anıq. Biz bul qa'siyetti ku'shli u'shmu'yeshlik ten'sizligi dep ataymız.

Tastıyqlaw 1.4. Eger F arximed bolmag'an maydanning' a ha'm x elementleri $\|x - a\| < \|a\|$ ten'sizligin qanaatlantırsa, onda $\|x\| = \|a\|$ boladı.

Tastıyqlaw 1.5. Eger $\|\cdot\|$ norması F maydanda arximed bolmasa, onda tuyıq $\overline{B(a, r)} = \{x : \|x - a\| \leq r\}$ shardın' qa'legen noqatı F te oray boladı.

Tastıyqlaw 1.6. Eki $(\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2)$ ekvivalent normalar F te yamasa arximed, yamasa arximed bolmag'an norma boladı.

Meyli $p \in \mathbb{N}$ – qa'legen a'piwayı san bolsın. $\mathbb{Q}$ da $|\cdot|_p$ normasın to'mendegishe kiritemiz:

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\text{ord}_p x}} & \text{eger, } x \neq 0, \\ 0, & \text{eger, } x = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

bunda $\text{ord}_p x = \begin{cases} x \text{ ti bo'letug'in } p \text{ nin'en'u'lken da'rejesi, eger } x \in \mathbb{Z}, \\ \text{ord}_p a - \text{ord}_p b, \text{ eger } x = a/b, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0. \end{cases}$

Bul $|\cdot|_p$ norma p -adikalıq norma deyiladi.

Eskertiw 1.2. funktsiyası tek $\{p^n, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ ma'nislerin qabıl qıladı.

1.3. Eger $a, b \in B$ bolsa, onda $a \equiv b \pmod{p^n}$ boladı tek ha'm tek $|a - b|_p \leq 1/p^n$ bolg'anda.

Tastıyqlaw 1.7. $|\cdot|_p$ norma $\mathbb{Q}$ da arximed bolmag'an norma boladı.

Eskertiw 1.4. $\mathbb{Q}$ maydanı $|\cdot|_p$ norma boyınsha tolıq emes.

1.5. $|\cdot|_{p_1}$ norması $|\cdot|_{p_2}$ normasına ekvivalent emes, eger p_1 ha'm p_2 – ha'r qıylı a'piwayı sanlar bolsa.

Endi p – a’piwayı sandı fikserleyemiz. $\mathbb{Q}$ ratsional sanlar maydanın p -adikalığıq $|\cdot|_p$ norması boyınsha tolıqtıramız. Bul sanlar maydanı p -adikalığıq sanlar maydanı dep ataladı ha’m onı $\mathbb{Q}_p$ dep belgileyemiz.

Lemma 1.1. Eger $x \in \mathbb{Q}$ ha’m $|x|_p \leq 1$ bolsa, onda qa’legen i ushın $|\alpha - x|_p \leq p^{-i}$ bolatug’ın $\alpha \in \mathbb{Z}$ pu’tin sanı bar boladı. Bunda α sanı $\{0, 1, 2, \dots, p^i - 1\}$ ko’pligine tiyisli dep alsaq boladı ha’m α ko’plikten birden-bir ra’wishte alınadı.

Teorema 1.1. $|a|_p \leq 1$ tengsizlikti qanaatlandıratug’ın ha’r bir $a \in \mathbb{Q}_p$ ekvivalentli klassta tek bir $\{a_i\}$ Koshi izbe-izligin o’z ishine aladı, ha’m bul izbe-izlik to’mendegi sha’rtlerdi orınlaydı:

$$1) a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i < p^i, i = 1, 2, \dots;$$

$$2) a_i \equiv a_{i+1} \pmod{p^i}, i = 1, 2, \dots.$$

Eger $a \in \mathbb{Q}_p$ ha’m $|a|_p \leq 1$ bolsa, olding’ı teoramadağı a_i izbe-izliginin’ ag’zaların to’mendegishe jazıw qolaylı:

$$a_i = d_0 + d_1 p + \dots + d_{i-1} p^{i-1},$$

bunda $d_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ko’plikitegi pu’tin sanlar. Bizin’ 2) sha’rtimiz

$$a_{i+1} = d_0 + d_1 p + \dots + d_{i-1} p^{i-1} + d_i p^i$$

ekenligin an’latadı, d_0 den d_{i-1} ge shekem bolg’an « p -adikalığıq sanlar» sol sanlar bolıp ha’m a_i ushın da sonday boladı. Demek, a jıynaqlı qatar ko’rinisinde boladı (p -adikalığıq norma boyınsha)

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} d_n p^n,$$

bul qatardi p tiykari boyynsha ha'm shepten sheksiz dawam etetug'in san dep qarasaqta boladi, yamasa sheksiz ko'p p -adikalik sanlardi o'z ishine aladi. Keyinshelik biz

$$a = \dots d_n \dots d_2 d_1 d_0$$

deb jazsaq boladi ha'm bul jazıwdı *kanonikalıq p-adikalıq jayıılma* yamasa a sanının' *kanonikalıq forması* depte ataymız.

Eger $|a|_p > 1$ bolsa, onda a nı p sanının' bazı-bir da'rejesine ko'beytsek boladi ($p^m = |a|_p^{-1}$ g'a) ha'm $|a'|_p \leq 1$ bolatug'in $a' = ap^m$ p -adikalıq sanın alamız.

Onda

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} d_n p^n, \quad (1.5)$$

dep jazsaq boladi, bunda $d_{-m} \neq 0$ ha'm $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Bunday jag'dayda a sanının' *kanonikalıq p-adikalıq jayıılması* to'mendegishe boladi:

$$a = \dots d_n \dots d_2 d_1 d_0, d_{-1} \dots d_{-m}. \quad (1.6)$$

p -adikalıq sannın' norması onın' kanonikalıq jayıılmasına birinshi nollik koeffitsienttin' indeksin anıqlaydı. a sanı ushın (1.6) dan $ord_p(x) = -m$ ha'm $|a|_p = p^{-ord_p(a)} = p^m$ alamız.

Eskertiw 1.6. Teorema 1.1.1 tin' ta'miyinleytug'in birden-birligi birinshi paragrafta aytilg'an g tiykari boyınsha sheksiz bo'lshekler ko'riniside aniqlang'an sanlar ushin joq, ma'selen

$$1,0000\dots=0,9999\dots$$

p -adikalıq jag'dayda bunday protsessler bolmaydı. Eger eki p -adikalıq jayılmalar bir p -adikalıq sanga jaqınlassa, onda olar u'stpe-u'st tu'sedi, yag'nıy onın' barlıq tsifrları u'stpe-u'st tu'sedi.

Anıqlama 1.4. *Pu'tin p -adikalıq san dep kanonikalıq jayılmasında p nın' tek teris emes bolg'an $a \in \mathbb{Q}_p$ sanlarına ayıladı.*

Barlıq pu'tin p -adikalıq sanlar ko'pligi $\mathbb{Z}_p$ arqalı belgilenedi:

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \right\}.$$

$\mathbb{Z}_p = \left\{ a \in \mathbb{Q}_p : |a|_p \leq 1 \right\}$ ekenligin ko'riw qıyın emes.

Teorema 1.2. *Pu'tin p -adikalıq sanlardın' ha'r bir sheksiz izbe-izligi jıynaqlı bolıwshı u'les izbe-izlikti o'z ishina aladı.*

Endi p -adikalıq sanlar ustida arifmetikalıq a'mellerdi qaraymız.

p -adikalıq jayılmalar $\mathbb{Q}_p$ maydanının' elemantleri u'stinde arifmetikalıq a'mellardi orınlawdı ta'miyinleydi ($\mathbb{R}$ degige uqsas). $\mathbb{Q}_p$ maydanının' elemantleri u'stinde arifmetikalıq a'mellerdi orınlaw haqıyqıy sanlar u'stinde qarag'anda jen'illirek!

Meyli

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n, \quad b = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n p^n,$$

bolsın, bunda a_n ha'm b_n – p-adikalq sanlar ha'm $a_{-m} \neq 0$, lekin $b_{-m}, b_{-m+1}, \dots$ lerdin' bir yamasa bir neshe tsifrları 0 ge ten'. Onda

$$a \pm b = \sum_{n=-m}^{\infty} (a_n \pm b_n) p^n,$$

ten'liginin' on' ta'repi jıynaqlı izbe-izlik boladı, lekin ol (1.6) kanonikalıq forma bolmaydı. Eger $a_n + b_n$ qosındının' qaysı bir n de p g'a ten' bolsa, onda ol keyingi ag'zag'a o'tedi. Bunı anıq tusınıw ushın keyinshelik mısalda qaraymız.

Endi qızıg'arlı fakt, -1 sanının' $\mathbb{Q}_p$ degi p -adikalq jayılmassının' algoritmin qaraymız. Biz $1 = \dots 00001$ ge iye bolamız. Meyli $a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0$ sanı $1 + a = 0$ qatnasların qanaatlantırsın (onda $a = -1$). On' ta'repten baslasaq $1 + a_0 = 0$ alamız, lekin $a_0 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ bolg'anlıktan a_0 di tabıwdın' birden-bir usılı bul $1 + a_0 = p$ an'latpada birdi shep ta'repke o'tkizemiz. Sonın' ushın $a_0 = p-1$. Bul protsessti dawam ettitrip barlıq a_n lerdı tabamız $a_n = p-1$, yag'nıy

$$-1 = \dots (p-1)(p-1)(p-1).$$

Bul -1 sanının' p -adikalq jayılmassı.

Ko'beyme de usıg'an uqsas. Meyli a ha'm b sanının' kanonikalıq jayılmassı berilgen bolsın:

$$a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n, \quad b = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n p^n.$$

Qatarlardı ko'beytip ha'm uqsas ag'zalırdı jıynap

$$ab = \sum_{n=-m-k}^{\infty} u_n p^n,$$

alamız, bunda

$$\begin{aligned} u_{-m-k} &= a_{-m} b_{-k}, \\ u_{-m-k+1} &= a_{-m+1} b_{-k} + a_{-m} b_{-k+1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Bul qatar da ulıwma aytqanda kanonikalıq jayılmamas, lekin teorema 1.1 din' usılı bizge onı kanonikalıq ko'rıniske keltiredi.

Bo'liwdi anıqlaw ushın bizge eki $a, b \in \mathbb{Q}_p$ berilgen bolsın, $b \neq 0$. Bizde

$b \in \mathbb{Z}_p$, $b = \dots b_2 b_1 b_0$, $\mu \cdot \frac{1}{\eta}$. Meyli a sanının' p -adikalıq jayılmaması

$$a = \dots a_3 a_2 a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-k}$$

bolsın. $b_0 \neq 0$ ha'm p a'piwayı sanı ushın $\mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$ qaldıqlar koltsosı maydan bolg'anlıqtan, hamme waqıt $c_{-k} b_0 \equiv a_{-k} \pmod{p}$ orınlanatug'ın $c_{-k} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ sanın tabıw mu'mkin. A'piwayı protsessti dawam ettirsek biz a / b nı kanonikalıq formada alamız.

Joqarıda ayılğ'anday, eger $a = \dots a_2 a_1 a_0$ – pu'tin p -adikalıq san bolsa ha'm $a_0 \neq 0$ bolsa, onda onın' ko'beyme bo'yınsha kerı $1/a$ da pu'tin p -adikalıq san boladı.

Ekinshi ta'repten,

$$p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i = a_0 p + a_1 p^2 + \dots \neq 1 + 0p + 0p^2 + \dots,$$

bolıwınan p sanı $\mathbb{Z}_p$ da ko'beyme boyınsha kerisine iye emes.

Tastıyıqlaw 1.8. Pu'tin p -adikalıq

$$a = \dots a_1 a_0 \in \mathbb{Z}_p$$

sanı $\mathbb{Z}_p$ da ko'beyme bo'yınsha kerı elementke iye bolıwı ushın $a_0 \neq 0$ bolıwı za'rurli ha'm jeterli boladı.

$\mathbb{Z}_p$ koltsonın' kerı elementleri gruppasın $\mathbb{Z}_p^\times$ arqalı belgileymiz. Onda

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i : a_0 \neq 0 \right\}$$

boladı. Bul gruppa *p-adikalıq birlikler* delinedi. Demek,

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1 \right\}.$$

Tastıyqlaw 1.9. Meyli x – *p-adikalıq san* bolsın ha'm norması p^{-n} bolsın. Onda x sanın $x = p^n u$ ko'rinisinde jazıw mu'mkin, bunda $u \in \mathbb{Z}_p^\times$.

§2. p -adikalіq kvadrat ten'lemeler

Bul paraqrafta p -adikalіq kvadrat ten'lemenin' sheshiw kriteriyası keltirilgen.

$a \in \mathbb{Z}$ sanı p moduli boyınsha *kvadratlı qaldıq* delinedi egerde

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

ten'lemesi pu'tin $x \in \mathbb{Z}$ sheshimine iye bolsa; kerı jag'dayda p moduli boyınsha kvadratlı qaldıq emes delinedi.

Biz $\left(\frac{a}{p}\right)$ Lejandr simvolının' anıqlamasın keltiremiz. Bull simvol p g'a bo'linbeytug'in barlıq a lar ushın anıqlanadı. Lejandr simvolı 1 ge ten' eger a – kvadrat qaldıq bolsa, -1 ge ten' boladı, egerde a – kvadrat kaldıq bolmasa. $\left(\frac{a}{p}\right)$ simvolın esaplaw to'mendegi teorema boyınsha esaplanadı (Eyler kriteriyası).

Teorema 2.1 [11]. p g'a bo'linbeytug'in a lar ushın to'mendegi orınlı

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}.$$

Lejandr simvolının' qa'siyetlerin keltiremiz:

$$a) \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$b) \left(\frac{ab \dots k}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) \dots \left(\frac{k}{p}\right).$$

Meyli $a \in \mathbb{Q}_p$ bolsın ha'm to'mendegishe kanonikalıq ko'rıniske iye bolsın:

$$a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1p + \dots), a_0 \neq 0, 0 \leq a_j \leq p-1, j = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema 2.2. [10].

$$x^2 = a$$

ten'lemesi $x \in \mathbb{Q}_p$ sheshimge iye bolıwı ushın to'mendegi sha'rtlerdin' orınlanıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli:

1) $\gamma(a)$ – jup san,

2) a_0 sanı p moduli boyınsha kvadratlı qaldıq boladı, egerde $p \neq 2$ bolsa; $a_1 = a_2 = 0$ boladı, egerde $p = 2$.

Meyli η – p -adikalıq birlik bolsın ha'm bul san hesh qanday p -adikalıq sannın' kvadratı bolmasın.

Teorema 2.2 den to'mendegi saldarlar kelip shıg'adı. Biz bul saldarlardın' tolıq da'lilleniwi menen keltiremiz.

Saldar 2.1. $p \neq 2$ bolg'anda $\varepsilon_1 = \eta$, $\varepsilon_2 = p$, $\varepsilon_3 = p\eta$ hesh qanday p -adikalıq sannın' kvadratı bolmaydı. Qa'legen p -adikalıq x sanı to'mendegi to'rt ko'rinishlerdin' birewine keltiriwge boladı:

$$x = \varepsilon_i y_i^2, \text{ bunda } y_i \in \mathbb{Q}_p, 0 \leq i \leq 3, \varepsilon_0 = 1.$$

Da'lillew. Meyli $\eta \in \mathbb{Z}_p^*$ bolsın ha'm to'mendegishe kanonikalıq ko'rinske iye bolsın:

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 p + \eta_2 p^2 + \dots, \eta_0 > 0, 0 \leq \eta_j \leq p-1, j = 0, 1, \dots$$

η sanı hesh qanday sannın' kvadratı bolmag'an p -adikalıq birlik bolg'anlıqtan teorema 2.1. boyınsha η_0 sanı kvadratlıq qaldıq bolmaydı.

$p = p(1 + 0 \cdot p + 0 \cdot p^2 + \dots)$ ha'm $\eta p = p(\eta_0 + \eta_1 p + \eta_2 p^2 + \dots)$, $\eta_0 \neq 0$, $0 \leq \eta_j \leq p-1$, $j=0, 1, 2, \dots$, sanları teorema 1.2. boyınsha hesh qanday sannın' kvadratı bolmaydı, sebebi $\chi(p) = 1$ ham $\chi(\eta p) = 1$, yag'nıy taq.

Meyli μ – p -adikalq birlik bolsın ha'm hesh qanday p -adikalq sannın kvadratı bolmasın. μ sanı to'mendegishe kanonikalq ko`riniske iye bolsın:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 p + \mu_2 p^2 + \dots,$$

bunda $\mu_0 \neq 0$, $\mu_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $i = 0, 1, \dots$ μ sanı kvadrat bolmag'anlıqtan kanonikalq jayılmadag'ı μ_0 kvadrat qaldıq bolmaydı.

Biz endi $\frac{1}{\eta}$ sanın qarastırayıq. Eger η – kvadrat bolmasa, onda $\frac{1}{\eta}$ sanı kvadrat bolmaydı. Meyli $\frac{1}{\eta}$ sanı to'mendegishe kanonikalq ko`riniske iye bolsın:

$$\frac{1}{\eta} = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots,$$

bunda $c_0 > 0$, $0 \leq c_i \leq p-1$, $i = 0, 1, \dots$ $\frac{1}{\eta}$ sanı kvadrat bolmag'anlıqtan jayılmadag'ı c_0 – kvadrat qaldıq bolmaydı.

$$\mu = \eta y^2$$

bolatug`ınday  $y \in \mathbb{Q}_p$  tin` bar ekenligin da'lilleymiz. yag`nıy $\frac{\mu}{\eta} = y^2 \cdot \frac{\mu}{\eta}$ sanı to'mendegishe jayılmag'a iye boladı:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\eta} &= \mu \cdot \frac{1}{\eta} = (\mu_0 + \mu_1 p + \mu_2 p^2 + \dots)(c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \dots) = \\ &= \mu_0 c_0 + (\mu_0 c_1 + \mu_1 c_0) p + \dots \end{aligned}$$

Bizde μ_0 ha'm s_0 sanları kvadrat qaldıq bolmag'anlıqtan $\left(\frac{\mu_0}{\eta}\right) = -1$ ha'm

$\left(\frac{c_0}{p}\right) = -1$. Lejandr simvolının` b) qa'siyetin qollasaq to'mendegi qatnasqa iye bolamız:

$$\left(\frac{\mu_0 c_0}{p}\right) = \left(\frac{\mu_0}{p}\right) \left(\frac{c_0}{p}\right) = (-1)(-1) = 1.$$

Demek $\mu_0 c_0$ kvadrat qaldıq bolıp tabıladı, onda $\frac{\mu}{\eta}$ sanı bazı-bir p -adikalıq sannın` kvadratı boladı.

Endi qa`legen  $p$ -adikalıq  $x$  sanının` to`rt tu`rdin` birewine alıp kelinetug`nılg`ın ko`rsetemiz:

$$x = \varepsilon_i y_i^2, \text{ bunda } y_i \in \mathbb{Q}_p, \varepsilon_i \in \{1, \eta, p, p\eta\}, 0 \leq i \leq 3,$$

Meyli qa`legen  $x \in \mathbb{Q}_p$  to`mendegi kanonikalıq ko`riniske iye bolsın:

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots), x_0 \neq 0, 0 \leq x_j \leq p-1, j = 0, 1, \dots$$

$$v = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots \text{ dep belgileymiz ha`m } |v|_p = 1.$$

Eger x_0 kvadrat qaldıq bolsa, onda sonday $y \in \mathbb{Q}_p$ bar bolıp,

$$v = y^2 \text{ ha`m } x = p^{\gamma(x)} y^2.$$

Eger x_0 kvadratlıq qaldıq bolmasa, onda p -adikalıq v birliği hesh qanday p -adikalıq sannın` kvadratı bolmaydı ha`m joqarıda ko`rsetkenimizdey onı to`mendegishe jazıw mu`mkin

$$v = \eta t^2 \text{ ha`m } x = p^{\gamma(x)} \eta t^2.$$

Solay etip biz qa`legen  $p$ -adikalıq  $x$  sanının` to`mendegishe ko`riniske iye bolatug`nılg`ın da`lilledik

$$x = p^{\gamma(x)} t^2 \text{ ha`m } x = p^{\gamma(x)} \eta t^2.$$

Eger $\gamma(x) - \text{jup}$ bolsa, onda $\mathbb{Q}_2$ dep belgilep alıp

$$x = y^2 \text{ yamasa } x = \eta y^2$$

ıye bolamız.

Eger $\gamma(x) - \text{taq}$ bolsa, onda ja`ne $\mathbb{N}$ dep belgilep alıp

$$x = p y^2 \text{ yamasa } x = p \eta y^2$$

ıye bolamız.

Demek biz qa`legen  $p$ -adikalıq  $x$  sanının` to`mendegi to`rt tu`rdin` birewine keltiriwge bolatug`nılg`ın da`lilledik:

$$x = \varepsilon_i y_i^2, \text{ bunda } y_i \in \mathbb{Q}_p, \varepsilon_0 = 1, 0 \leq i \leq 3.$$

Saldar da`lillendi.

Saldar 2.2. $p = 2$ bolg`anda  $\varepsilon_j = \{2, 3, 5, 6, 7, 10, 14\}$  ( $1 \leq j \leq 7$ ) sanlari hesh bir 2-adikalıq sannın` kvadrati bolmaydı. Qa`legen 2-adikalıq  $x$  sanın to`mendegi segiz ko`rinislerdin` birewine keltiriwge boladı:

$$x = \varepsilon_j y_j^2, \text{ bunda } y_j \in \mathbb{Q}_2, \varepsilon_0 = 1, 0 \leq j \leq 7.$$

**Da`lillew.** Meyli qa`legen $x \in \mathbb{Q}_2$ elementi to`mendegishe kanonikalıq ko`riniske iye bolsın:

$$x = 2^{\gamma(x)}(1 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots), x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots$$

3, 5 ha`m 7 sanların` kanonikalıq jayılmasında sa`ykes  $(x_1, x_2) = (1, 0)$ ,  $(x_1, x_2) = (0, 1)$  ha`m $(x_1, x_2) = (1, 1)$ boladı, $x_j = 0, j \geq 3$. Teorema 2.2 boyınsha olar hesh qanday 2-adikalıq sannın` kvadrati bolmaydı.

Al 2, 6, 10 ha`m 14 sanlarıda hesh qanday 2-adikalıq sannın` kvadrati bolmaydı, sebebi bull sanlardın` 2-adikalıq jayılmalarında $\gamma(2) = \gamma(6) = \gamma(10) = \gamma(14) = 1$ boladı.

Endi qa`legen 2-adikalıq  $x$  to`mendegi segiz ko`rinistin` birine alıp keliw mu`mkin ekenligin ko`rsetemiz:

$$x = \varepsilon_j y_j^2, \text{ bunda } y_j \in \mathbb{Q}_2, \varepsilon_0 = 1, 0 \leq j \leq 7.$$

$$\text{Meyli } x = 2^{\gamma(x)}(1 + x_1 2 + x_2 2^2 + \dots), x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots$$

Eger $\gamma(x)$ Jup ha`m  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  bolsa, onda  $x$  bazı-bir  $p$ -adikalıq sannın` kvadrati boladı, yag`nıy  $x = y^2$ . Al  $(x_1, x_2) = (1, 0)$  jag`dayda to`mendegige iye bolamız

$$\begin{aligned} x &= 2^{\gamma(x)}(1 + 2 + x_3 2^3 + \dots) = 2^{\gamma(x)}(3 + x_3 2^3 + \dots) = \\ &= 3 \cdot 2^{\gamma(x)}(1 + x'_3 2^3 + \dots) = 3y^2. \end{aligned}$$

Usıg`an uqsas tu`rde $(x_1, x_2) = (0, 1)$ ha`m  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  jag`daylar ushın x ti sa`ykes  $5y^2$  ha`m $7y^2$ ko`riniste bolatug`nıg`ı da`lillenedi.

Solay etip, eger $\gamma(x)$ jup bolsa, onda x_1 ha'm x_2 lerge baylanislig'ınan $x = \varepsilon y_j^2$ iye bolamız, bunda $y_j \in \mathbb{Q}_2$, $\varepsilon \in \{1, 3, 5, 7\}$, $1 \leq j \leq 4$.

Al $\gamma(x)$ taq bolg'an jag'dayda joqarıdag'ıday pikirlew ju'rgizip $x = 2y^2$ yamasa $x = 6y^2$ yamasa $x = 10y^2$ yamasa $x = 14y^2$ iye bolamız, yag'nıy to'mendegi ko'riniste

$$x = \varepsilon y_j^2, \text{ bunda } y_j \in \mathbb{Q}_2, \varepsilon \in \{2, 6, 10, 14\}, 1 \leq j \leq 4.$$

Saldar da'lillendi.

Sh.A.Ayupov ha'm T.K.Kurbanbaevlardin' [15] jumısında to'mendegi teorema da'lillengen.

Meyli $\eta - p$ -adikalıq birlik bolıp, hesh qanday p -adikalıq sannın' kvadratı bolmasın.

Teorema 2.3. *Qa'legen $p \neq 2$ ushın $4 + p^2\varepsilon$ an'latpa $\mathbb{Q}_p$ da kvadrat koren'ge iye boladı, bunda $\varepsilon \in \{1, \eta, p, p\eta\}$, al $4 + 8^2\varepsilon$ an'latpası $\mathbb{Q}_2$ de kvadrat koren'ge iye boladı, bunda $\varepsilon \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14\}$.*

Da'lillew. $4 + p^2\varepsilon$ an'latpasın qaraymız, bunda $\varepsilon \in \{1, \eta, p, p\eta\}$. Meyli

$$\varepsilon = p^{\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 p^2 + \dots), \quad (2.1)$$

bunda $\gamma(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_0 \neq 0$, $\varepsilon_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, $i=0, 1, \dots$ – ε sanının' kanonikalıq jayılmısı bolsın.

Onda

$$4 + p^2\varepsilon = 4 + p^{2+\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 p^2 + \dots). \quad (2.2)$$

$p \neq 2$ bolg'an jag'dayda 1 ha'm η sanları p -adikalıq birlikler boladı (olardın' normaları $|1|_p = |\eta|_p = 1$). p ha'm $p\eta$ sanlarının' norması $|p|_p = |p\eta|_p = \frac{1}{p}$ boladı.

Bizde p ha'm $p\eta$ sanlarının pu'tin p -adikalq sanlar bolg'anlig'ınan $\gamma(\varepsilon)$ tek 0 yamasa 1 sanların qabıl ete aladı.

Meyli $p = 3$ bolsın. Onda (2.2) jayılnıma to'mendegi ko'rıniske iye boladı:

$$4 + p^2\varepsilon = 1 + 3 + 3^{2+\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 3 + \varepsilon_2 3^2 + \dots),$$

bunda $\gamma(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_i \in \{0, 1, 2\}$, $\varepsilon_0 \neq 0$, $i = 0, 1, \dots$

Teoreme 1.2 boyınsha $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ ten'lemesi $\mathbb{Z}$ te sheshimge iye, yag'nıy $x = 3n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Demek $4 + p^2\varepsilon$ an'latpası $\mathbb{Q}_3$ te kvadrat koren'ge iye boladı.

Meyli $p \geq 5$ bolsın, onda

$$4 + p^2\varepsilon = 4 + p^{2+\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 p^2 + \dots)$$

boladı.

Teorema 1.2 boyınsha $x^2 \equiv 4 \pmod{p}$ ten'lemesi $\mathbb{Z}$ te sheshimge iye boladı, yag'nıy $x = pn + 2$, $n \in \mathbb{N}$ boladı. Demek $4 + p^2\varepsilon$ an'latpası $\mathbb{Q}_p$ da kvadrat koren'ge iye boladı.

Meyli $p = 2$ bolsın. Onda $4 + 8^2\varepsilon$ an'latpasın qarastırayıq, bunda $\varepsilon \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14\}$. 1, 3, 5, 7 sanları 2-adikalq birlikler boladı, al qalg'an 2, 6, 10, 14 sanları pu'tin 2-adikalq sanlar boladı (sebebi $|2|_2 = |6|_2 = |10|_2 = |14|_2 = a_0 \in \{1, 2, \dots, 16\} < 1$). Onda

$$\varepsilon = 2^{\gamma(\varepsilon)}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_2 2^2 + \dots)$$

jayılnımadag'ı pu'tin $\gamma(\varepsilon)$ sanı tek 0 yamasa 1 ma'nislerin qabıl etedi. Sonlıqtan $4 + 8^2\varepsilon$ an'latpasının kvadrat koreninin bar bolıwı teorema 1.2 den kelip shıg'adı.

Teorema da'llillendi.

Teorema 2.4. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ an`latpası $\mathbb{Q}_{17}$ maydanında bar boladı.

**Da`lillew.**  $\mathbb{Q}_{17}$  maydanında  $\sqrt{2+\sqrt{2}}$  an`latpasının` bar bolıwı  $x^2 = 2 + \sqrt{2}$  ten`lemesinin` sheshiliwinen kelip shıg`adı. Da`slep 2 sanın to`mendegishe kanonikalıq ko`riniste jayıp alamız:

$$2 = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(2) = 0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 2 \pmod{17}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul ten`leme  $x_0 = 6$  ha`m $x_0 = 11$ larde sheshimge iye. Bunnan $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_{17}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Endi $\mathbb{Q}_{17}$ maydanında $\sqrt{2}$ sanının` jayılmassının` da`slepki u`sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın` ushın biz $a^2 = 2$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılmass

$$a = a_0 + a_1 \cdot 17 + a_2 \cdot 17^2 + \dots$$

bolg`an p -adikalıq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 16$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to`mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^2 + 2a_0a_1 \cdot 17 + (a_1^2 + 2a_0a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (2.3)$$

Birinshi qa`demde  $a_0^2 \equiv 2 \pmod{17}$  ten`lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 6$ ha`m $a_0 = 11$ sheshimlerine iye boladı.

a) Biz $a_0 = 6$ dep alamız. Onda (2.3) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$36 + 12a_1 \cdot 17 + (a_1^2 + 12a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (2.3')$$

Bunnan $12a_1 + 2 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın payda etip ha`m onı sheshemiz, bunda  $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$ . Bul salıstırıw  $a_1 = 14$  sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.3') ten`ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag`nıy $12a_2 + 9 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. Sheshimi $a_2 = 12$ boladı. Demek

$$\sqrt{2} = 6 + 14 \cdot 17 + 12 \cdot 17^2 + \dots$$

jayılmag`a iye bolamız.

Endi $x^2 = 2 + \sqrt{2}$ ten`ligin to`mendegishe jazamız:

$$x^2 = 2 + \sqrt{2} = 2 + 6 + 14 \cdot 17 + 12 \cdot 17^2 + \dots = 8 + 14 \cdot 17 + 12 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul ten`leme  $\gamma(2 + \sqrt{2}) = 0$  jup. Bul bolsa teorema 1.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushın 8 sanının` kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 8 \pmod{17}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 5$ ha`m  $x_0 = 12$  sheshimlerine iye boladı. Demek  $\sqrt{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{Q}_{17}$  ekenligi kelip shıg`adı.

b) Endi biz $a_0 = 11$ bolg`an jag`daydı qaraymız. Onda (2.1.3) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$121 + 22a_1 \cdot 17 + (a_1^2 + 22a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (2.3'')$$

Bunnan $22a_1 + 7 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın payda etip ha`m onı sheshemiz, bunda  $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$ . Bul salıstırıw  $a_1 = 2$  sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.3'') ten`ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag`nıy $22a_2 + 7 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. Sheshimi $a_2 = 2$ boladı. Demek

$$\sqrt{2} = 11 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 17^2 + \dots$$

jayılmag`a iye bolamız.

Endi $x^2 = 2 + \sqrt{2}$ ten`ligin to`mendegishe jazamız:

$$x^2 = 2 + \sqrt{2} = 2 + 11 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 17^2 + \dots = 13 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul ten`leme  $\gamma(2 + \sqrt{2}) = 0$  jup. Bul bolsa teorema 1.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushın 13 sanının` kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 13 \pmod{17}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 8$ ha`m $x_0 = 9$ sheshimlerine iye boladı. Demek

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} \in \mathbb{Q}_{17} \text{ ekenligi kelip shıg`adı.}$$

Teorema da`lillendi.

Teorema 2.5. $\sqrt{3+\sqrt{3}}$ an`latpası $\mathbb{Q}_{11}$ maydanında bar boladı.

**Da`lillew.**  $\mathbb{Q}_{11}$  maydanında  $\sqrt{3+\sqrt{3}}$  an`latpasının` bar bolıwı  $x^2 = 3 + \sqrt{3}$  ten`lemesinin` sheshiliwinen kelip shıg`adı. Da`slep 3 sanın to`mendegishe kanonikalıq ko`riniste jayıp alamız:

$$3 = 3 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(3)=0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2. nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2. nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 3 \pmod{11}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul ten`leme  $x_0 = 5$  ha`m $x_0 = 6$ larda sheshimge iye. Bunnan $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}_{11}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Endi $\mathbb{Q}_{11}$ maydanında $\sqrt{3}$ sanının` jayılmassının` da`slepki u`sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın` ushın biz $a^2 = 3$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılmısı

$$a = a_0 + a_1 \cdot 11 + a_2 \cdot 11^2 + \dots$$

bolg`an p -adikalıq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 10$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to`mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^2 + 2a_0a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 2a_0a_2) \cdot 11^2 + \dots = 3 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.4)$$

Birinshi qa`demde  $a_0^2 \equiv 3 \pmod{11}$  ten`lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 5$ ha`m $a_0 = 6$ sheshimlerine iye boladı.

Biz tek $a_0 = 6$ jag`daydı qaraymız ( $a_0 = 5$  bolg`an jag`dayda  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}_{11}$  boladı). Onda (2.1.4) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$36 + 12a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 12a_2) \cdot 11^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.4')$$

Bunnan $12a_1 + 3 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın payda etip ha`m onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 8$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi

(2.4') ten'ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag'nıy $12a_2 + 9 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Sheshimi $a_2 = 2$ boladı. Demek

$$\sqrt{3} = 6 + 8 \cdot 11 + 2 \cdot 11^2 + \dots$$

jayılmag'a iye bolamız.

Endi $x^2 = 3 + \sqrt{3}$ ten'ligin to'mendegishe jazamız:

$$x^2 = 3 + \sqrt{3} = 3 + 6 + 8 \cdot 11 + 2 \cdot 11^2 + \dots = 9 + 8 \cdot 11 + 2 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul ten'leme $\gamma(3 + \sqrt{3}) = 0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2 nin' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2 nin' ekinshi sha'rtin tekseremiz. Bul ushın 9 sanının' kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag'nıy $x_0^2 \equiv 9 \pmod{11}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ da sheshiminin' bar yaki joqlıg'ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 3$ ha'm $x_0 = 8$ sheshimlerine iye boladı. Demek

$\sqrt{3 + \sqrt{3}} \in \mathbb{Q}_{17}$ ekenligi kelip shıg'adı.

Teorema da'lillendi.

Teorema 2.6. $\sqrt{5 + \sqrt{5}}$ an'latpası $\mathbb{Q}_{11}$ maydanında bar boladı.

Da'lillew. $\mathbb{Q}_{11}$ maydanında $\sqrt{5 + \sqrt{5}}$ an'latpasının' bar bolıwı $x^2 = 5 + \sqrt{5}$ ten'lemesinin' sheshiliwinen kelip shıg'adı. Da'slep 5 sanın to'mendegishe kanonikalıq ko'riniste jayıp alamız:

$$5 = 5 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(5) = 0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2 nin' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2 nin' ekinshi sha'rtin tekseremiz, yag'nıy $x_0^2 \equiv 5 \pmod{11}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ da sheshiminin' bar yaki joqlıg'ın tekseremiz. Bul ten'leme $x_0 = 4$ ha'm $x_0 = 7$ lerde sheshimge iye. Bunnan $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}_{11}$ ekenligi kelip shıg'adı.

Endi $\mathbb{Q}_{11}$ maydanında $\sqrt{5}$ sanının' jayılmassının' da'slepki u'sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın' ushın biz $a^2 = 5$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılması

$$a = a_0 + a_1 \cdot 11 + a_2 \cdot 11^2 + \dots$$

bolg'an p -adikalq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 10$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to'mendegi ge iye bolamiz:

$$a_0^2 + 2a_0a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 2a_0a_2) \cdot 11^2 + \dots = 5 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.5)$$

Birinshi qa'demde $a_0^2 \equiv 5 \pmod{11}$ ten'lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 4$ ha'm $a_0 = 7$ sheshimlerine iye boladı.

a) Biz da'slep $a_0 = 4$ dep alamız. Onda (2.1.5) to'mendegi ko'rinske iye boladı:

$$16 + 8a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 8a_2) \cdot 11^2 + \dots = 5 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.5')$$

Bunnan $8a_1 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın payda etip ha'm onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 4$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.5') ten'ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag'nıy $8a_2 + 5 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Sheshimi $a_2 = 9$ boladı. Demek

$$\sqrt{5} = 4 + 4 \cdot 11 + 9 \cdot 11^2 + \dots$$

jayılmag'a iye bolamız.

Endi $x^2 = 5 + \sqrt{5}$ ten'ligin to'mendegishe jazamız:

$$x^2 = 5 + \sqrt{5} = 5 + 4 + 4 \cdot 11 + 9 \cdot 11^2 + \dots = 9 + 4 \cdot 11 + 9 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul ten'leme $\gamma(5 + \sqrt{5}) = 0$ jup. Bul bolsa teorema 1.2 nin' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2 nin' ekinshi sha'rtin tekseremiz. Bul ushın 9 sanının' kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag'nıy $x_0^2 \equiv 9 \pmod{11}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ da sheshiminin' bar yaki joqlıg'ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 3$ ha'm $x_0 = 8$ sheshimlerine iye boladı. Demek $\sqrt{5 + \sqrt{5}} \in \mathbb{Q}_{17}$ ekenligi kelip shıg'adı.

b) Endi biz $a_0 = 7$ bolg'an jag'daydı qaraymız. Onda (2.5) to'mendegi ko'rinske iye boladı:

$$49 + 14a_1 \cdot 11 + (a_1^2 + 14a_2) \cdot 11^2 + \dots = 5 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (2.5'')$$

Bunnan $3a_1 + 4 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın payda etip ha'm onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0,1,2,\dots,10\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 6$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (2.5") ten`ligine qoyıp  $a_2$  ni tabamız, yag`nıy $14a_2 + 14 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0,1,2,\dots,10\}$. Sheshimi $a_2 = 10$ boladı. Demek

$$\sqrt{5} = 7 + 6 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + \dots$$

jayılmag`a iye bolamız.

Endi $x^2 = 5 + \sqrt{5}$ ten`ligin to`mendegishe jazamız:

$$x^2 = 5 + \sqrt{5} = 5 + 7 + 6 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + \dots = 12 + 6 \cdot 11 + 10 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul ten`leme  $\gamma(5 + \sqrt{5}) = 0$  jup. Bul bolsa teorema 1.2 nin` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 1.2 nin` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushın 13 sanının` kvadrat qaldıq bolıwın tekseremiz, yag`nıy  $x_0^2 \equiv 1 \pmod{11}$  salıstırıwının` $x_0 \in \{1,2,\dots,10\}$ da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 1$ ha'm $x_0 = 10$ sheshimlerine iye boladı. Demek

$\sqrt{5 + \sqrt{5}} \in \mathbb{Q}_{11}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Teorema da`lillendi.

§3. $x^3 = a$ ko`rinishidagi $p$ -adikalik ten`lemeler

Bul paragrafda da`slep  $x^3 = a$  ko`rinishidagi p -adikalik ten`lemelrni u`yrenemiz.

$a \in \mathbb{Z}$ sanı p moduli boyınsha kublıq qaldıq delinedi, eger $x^3 \equiv a \pmod{p}$ ten`leme  $x \in \mathbb{Z}$  sheshimge iye bolsa; kerı jag`dayda a sanı p moduli boyınsha kublıq qaldıq emes delinedi.

Lemma 3.1. *To`mendegi ten`lik orınlı:*

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i \right)^3 = x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \right) p^k.$$

bunda $x_0 \neq 0$, $0 \leq x_j \leq p-1$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $N_1 = 0$ ham $N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ ko`pag`zalısı $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ sanlarinan g`a`rezli.

**Da`lillew.** Lemmadag`ı ten`liknin` shep bo`legi to`mendegige ten`:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i \right)^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=k, \\ 0 \leq i_1, i_2, i_3 \leq k}} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \right) p^k.$$

Meyli $i_1 + i_2 + i_3 = k$ bolsın. Eger indekslerdin` biri ushın  $i_j = k$  bolsa, onda qalg`anları nolge ten`, yagnıy tek  $x_k p^k$  nı o`z ishine alıwshı ag`zaları:

$$x_0 \cdot x_0 \cdot x_k p^k, \quad x_0 \cdot x_k p^k \cdot x_0, \quad x_k p^k \cdot x_0 \cdot x_0,$$

bunnan $3x_0^2 x_k p^k$ kelip shıg`adı. Al qalg`an jag`daylarda  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  lerden g`a`rezli bolg`an N_k sanı payda boladı.

Lemma da`lillendi.

$N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ an`latpası  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  lerden g`a`rezli bolg`anlıqtan onı to`mendegi ko`riniste jazıwg`ada boladı:

$$N_2(x_0, x_1) = 3x_0 x_1^2,$$

$$N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 6x_0 x_1 x_{k-1}, \quad k \geq 3,$$

bunda $P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})$ an`latpası $x_0, x_1, \dots, x_{k-2}$ lerge baylanışlı.

To`mendegi teorema  $p$ -adikalq sanlar maydanı  $\mathbb{Q}_p$  da u`shinshi da`rejeli ten`lemelerdi sheshiw kriteriyasın beredi.

Meyli p – fiksirlengen a`piwayı san,  $p \neq 2$  ha`m a – nol bolmag`an  $p$ -adikalq san bolsın ha`m

$$a = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots), \quad 0 \leq a_j \leq p-1, a_0 \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots$$

– onın`kanonikalq jayılmısı bolsın.

Teorema 3.1.

$$x^3 = a \quad (3.1)$$

ten`lemesi  $x \in \mathbb{Q}_p$  sheshimge iye bolıwı ushın to`mendegi sha`rtlerdin`orınlanıw za`ru`rli ha`m jetkilikli:

- 1) $\gamma(a)$ – sanı 3 ke eseli,
- 2) a_0 – sanı p moduli boyınsha kublıq qaldıq, eger $p \neq 3$ bolsa; $p = 3$ te $(a_0, a_1) = (1, 0)$ yamasa $(2, 2)$.

**Da`lillew.** *Za`ru`rliligi.* Eger (3.1) ten`leme

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + \dots), \quad 0 \leq x_j \leq p-1, x_0 \neq 0, j = 0, 1, 2, \dots$$

sheshimge iye bolsa, onda Lemmı 2.2.1 boyınsha ten`leme to`mendegi ko`riniske iye:

$$p^{3\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + \dots)^3 = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + \dots),$$

$$p^{3\gamma(x)} \left(x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})) p^k \right) = p^{\gamma(a)}(a_0 + a_1 p + \dots), \quad (3.2)$$

bunnan $\gamma(a) = 3\gamma(x)$ ekenligi kelip shıg`adı, yag`nıy $\gamma(a)$ sanı 3 ke eseli, $a_0 \equiv x_0^3 \pmod{p}$ salıstırıwı $\mathbb{Q}_p$ da sheshimge iye eger $p \neq 3$ bolsa, yag`nıy a_0 – sanı p moduli boyınsha kublıq qaldıq.

$p = 3$ te to`mendegige iye bolamız

$$3^{3\gamma(x)}(x_0^3 + x_0^2 x_1 \cdot 3^2 + (x_0^2 x_2 + x_0 x_1^2 + P_3^2(x_0, x_1)) \cdot 3^3 +$$

$$+ \sum_{k=4}^{\infty} (x_0^2 x_{k-1} + P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 2x_0 x_1 x_{k-2}) 3^k) = 3^{\gamma(a)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k 3^k \right). \quad (3.3)$$

(3.3) ten'likten $x_0^3 \equiv a_0 \pmod{3}$ ha'm $x_0^3 \equiv a_0 + a_1 \cdot 3 \pmod{3^2}$ iye bolamiz. Birinshi salıstırıwdan $x_0 = a_0$ kelip shıg'adı. Eger $x_0 = 1$ bolsa, onda $a_1 = 0$ boladı, al eger $x_0 = 2$ bolsa, onda $a_1 = 2$ boladı.

Jetkilikligi. Meyli p -adikalıq a sanı teoremanın 1) ha'm 2) sha'rtlerin qanaatlandırısn. (3.1) ten'lemenin x sheshimin du'zemiz. $\gamma(x) = \frac{1}{3}\gamma(a)$ dep alamız.

Meyli $p \neq 3$ bolsın. (3.2) den x_0 sanı to'mendegi sha'rtti qanaatlandırıwı kelip shıg'adı

$$x_0^3 \equiv a_0 \pmod{p}, 1 \leq x_0 \leq p-1.$$

Bizde a_0 sanı $p \neq 3$ moduli boyınsha kublıq qaldıq bolg'anlıqtan x_0 sanı ha'mme waqıt tabıladı. $M_1(x_0)$ arqalı to'mendegi ten'likti qanaatlandırıwshı sandı belgileymiz

$$x_0^3 = a_0 + M_1(x_0) \cdot p.$$

(3.2) ten'likten birden-bir x_1 sheshimge iye bolatug'ın

$$3x_0^2x_1 + N_1(x_0) + M_1(x_0) \equiv a_1 \pmod{p},$$

salıstırıwına iye bolamız, bunda $(3x_0^2, p) = 1$.

$M_2(x_0, x_1)$ arqalı to'mendegi ten'likti qanaatlandırıwshı sandı belgileymiz

$$3x_0^2x_1 + N_1(x_0) = a_1 - M_1(x_0) + M_2(x_0, x_1) \cdot p.$$

Bul protsessti dawam ettirip, (2.2.2) ten'likten

$$3x_0^2x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + M_k(x_0, \dots, x_{k-1}) \equiv a_k \pmod{p}, k \geq 2,$$

salıstırıwına iye bolamız, bul salıstırıw $(3x_0^2, p) = 1$ sha'rti boyınsha x_k sheshimine iye. Bunda $M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$, ($k \geq 3$) sanı to'mendegi qatnastan rekurrent tu'rde anıqlanadı

$$3x_0^2x_{k-1} + N_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) =$$

$$= a_{k-1} - M_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot p, k \geq 3.$$

To'mendegi ten'likler shınjırı x tın (3.1) ten'lemenin sheshimi ekenligin ko'rsetedi

$$\begin{aligned}
& x_0^3 + \sum_{k=1}^{\infty} (3x_0^2 x_k + N_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})) p^k = \\
& = a_0 + M_1(x_0) \cdot p + (a_1 - M_1(x_0) + M_2(x_0, x_1) \cdot p) \cdot p + \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + M_{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_k) \cdot p) p^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k p^k.
\end{aligned}$$

$p = 3$ bolg'an jag'daydı qaraymız. Onda (3.3) ten to'mendegige iye bolamız

$$a_0 \equiv x_0^3 \pmod{3} \text{ ha'm } a_0 + a_1 \cdot 3 \equiv x_0^3 \pmod{3^2}.$$

$(a_0, a_1) = (1, 0)$ yamasa $(2, 2)$ bolg'anlıqtan berilgen salıstırıwdan x_0 bir ma'nisli anıqlanadı, $x_0 = a_0$. Meyli $M_1(x_0)$ – sanı

$$x_0^3 = a_0 + a_1 \cdot 3 + M_1(x_0) \cdot 3^2$$

bolatug'in san bolsın.

Bul protsessti dawam ettirip (3.3) ten'likten

$$x_0^2 x_1 + M_1(x_0) \equiv a_2 \pmod{3}$$

to'mendegi salıstırıwına iye bolamız,

$$x_0^2 x_2 + P_3^2(x_0, x_1) + x_0 x_1^2 + M_2(x_0, x_1) \equiv a_3 \pmod{3},$$

$$x_0^2 x_{k-1} + P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 2x_0 x_1 x_{k-2} +$$

$$+ M_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) \equiv a_k \pmod{3}, k \geq 4.$$

$(x_0^2, 3) = 1$ bolsa, onda x_k sheshimi bar boladı. Bunda $M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$, $(k \geq 2)$ sanı

$$x_0^2 x_1 = a_2 - M_1(x_0) + M_2(x_0, x_1) \cdot 3,$$

$$x_0^2 x_2 + P_3^2(x_0, x_1) + x_0 x_1^2 = a_3 - M_2(x_0, x_1) + M_2(x_0, x_1, x_2) \cdot 3,$$

$$x_0^2 x_{k-1} + P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 2x_0 x_1 x_{k-2} =$$

$$= a_k - M_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \cdot 3, k \geq 4$$

qatnaslarınan rekurrent tu'rde anıqlanadı.

Bunnan to'mendegige iye bolamız

$$x_0^3 + x_0^2 x_1 \cdot 3^2 + (x_0^2 x_2 + x_0 x_1^2 + P_3^2(x_0, x_1)) \cdot 3^3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=4}^{\infty} (x_0^2 x_{k-1} + P_k^{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-2}) + 2x_0 x_1 x_{k-2}) 3^k = \\
& = a_0 + a_1 \cdot 3 + M_1(x_0) \cdot 3^2 + (a_2 - M_1(x_0) + M_2(x_0, x_1) \cdot 3) \cdot 3^2 + \\
& + \sum_{k=3}^{\infty} (a_k - M_k(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) + 3M_{k+1}(x_0, x_1, \dots, x_k)) \cdot 3^k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^k.
\end{aligned}$$

Solay etip, x sanı (3.1) ten`lemenin` sheshimi eken.

Teorema da`lillendi.

Eskertiw 2.2.1. Teorema 3.1 din` 2) sha`rti $p = 2$ de barlıq waqıtta orınlanadı. Bunnan (3.1) ten`leme  $\mathbb{Q}_2$  de qa`legen $a \in \mathbb{Q}_2$ sheshimge iye bolıwı ushın $\gamma(a)$ 3 ke eseli bolıwı kerek.

Meyli p -adikalıq η birligi hesh qanday p -adikalıq sannın` kubı bolmasın.

Teorema 3.1 den to`mendegi saldarlar kelip shıg`adı.

Saldar 2.2.1. Meyli $p \neq 3$ ha`m  $k \in \mathbb{N}$ .  $p = 3k + 2$  de barlıq sanlar bazı-bir  $p$ -adikalıq sannın` kubı boladı. $p = 3k + 1$ da $\varphi_i \in \{\eta, p, \eta p, \eta^2, \eta^2 p, p^2, \eta p^2, \eta^2 p^2\}$ ($1 \leq i \leq 8$) sanları hesh qanday p -adikalıq sannın` kubı bolmaydı. Qa`legen p -adikalıq x sanı $p = 3k + 1$ de 9 tu`rdin` birewine keltiriwge boladı: $x = \varphi_i y_i^3$, gde $\varphi_0 = 1, y_i \in \mathbb{Q}_p, 0 \leq i \leq 8$.

Saldar 3.2. $p = 3$ te $\varphi_i \in \{3, 4, 5, 9, 12, 15, 36, 45\}$ ($1 \leq j \leq 8$) sanları hesh qanday 3-adikalıq sannın` kubı bolmaydı. Qa`legen 3-adikalıq sandı 9 tu`rdin` birewine keltiriwge boladı: $x = \varphi_i y_i^3$, gde $\varphi_0 = 1, y_i \in \mathbb{Q}_3, 0 \leq j \leq 8$.

§4. Bazı bir u`shinshi da`rejeli ten`lemeler

Bul paragrafda ayırım u`shinshi da`rejeli p -adikalq ten`lemelerdi u`yrenemiz.

Teorema 4.1. $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}$ an`latpası 11-adikalq sanlar maydanında bar boladı .

**Da`lillew.**  $\mathbb{Q}_{11}$  maydanında  $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}$  an`latpasının` bar bolıwı  $x^3 = 2 + \sqrt[3]{2}$  ten`lemesinin` sheshiliwinen kelip shıg`adı. Da`slep 2 sanın to`mendegishe kanonikalq ko`riniste jayıp alamız:

$$2 = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(2) = 0$ sanı 3 ke bo`linedi. Bul bolsa teorema 3.1 dın` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 3.1 dın` ekinshi sha`rtin tekseremiz, yag`nıy $x_0^3 \equiv 2 \pmod{11}$ salıstırıwının`  $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$  da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul ten`leme $x_0 = 7$ sheshimge iye. Bunnan $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}_{11}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Endi $\mathbb{Q}_{11}$ maydanında $\sqrt[3]{2}$ sanının` jayılmassının` da`slepki u`sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın` ushın biz $a^3 = 2$ dep alamız, bunda a kanonikalq jayılmısı

$$a = a_0 + a_1 \cdot 11 + a_2 \cdot 11^2 + \dots$$

bolg`an 11-adikalq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 10$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to`mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^3 + 3a_0^2a_1 \cdot 11 + (3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2) \cdot 11^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (4.1)$$

Birinshi qa`demde  $a_0^3 \equiv 2 \pmod{11}$  ten`lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 7$ sheshimge iye boladı.

Biz $a_0 = 7$ dep alamız. Onda (4.1) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$343 + 147a_1 \cdot 11 + (21a_1^2 + 147a_2) \cdot 11^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (4.1')$$

Bul ten`likti to`mendegishe jazıwg`a boladı

$$2 + (9 + 4a_1) \cdot 11 + (2 + 13a_1 + 10a_1^2 + 4a_2) \cdot 11^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 11 + 0 \cdot 11^2 + \dots \quad (4.1'')$$

Bunnan $4a_1 + 9 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın payda etip ha'm onı sheshemiz, bunda $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Bul salıstırıw $a_1 = 6$ sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (4.1'') ten'ligine qoyıp a_2 ni tabamız, yag'nıy $4a_2 + 10 \equiv 0 \pmod{11}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Sheshimi $a_2 = 3$ boladı. Demek

$$\sqrt[3]{2} = 7 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 11^2 + \dots$$

jayılmag'a iye bolamız.

Endi $x^3 = 2 + \sqrt[3]{2}$ ten'ligin to'mendegishe jazamız:

$$x^3 = 2 + \sqrt[3]{2} = 2 + 7 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 11^2 + \dots = 9 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 11^2 + \dots$$

Bul ten'leme $\gamma(2 + \sqrt[3]{2}) = 0$ sanı 3 ke bo'linedi. Bul bolsa teorema 3.1 din' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 3.1 din' ekinshi sha'rtin tekseremiz. Bul ushın 9 sanının' kublıq qaldıq bolıwın tekseremiz, yag'nıy $x_0^3 \equiv 9 \pmod{11}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1, 2, \dots, 10\}$ da sheshiminin' bar yaki joqlıg'ın tekseremiz. Bul salıstırıw $x_0 = 4$ sheshimge iye boladı. Demek $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}} \in \mathbb{Q}_{11}$ ekenligi kelip shıg'adı.

Teorema da'lillendi.

Teorema 4.2. $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}}$ an'latpası 17-adikalıq sanlar maydanında bar boladı.

Da'lillew. $\mathbb{Q}_{17}$ maydanında $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}$ an'latpasının' bar bolıwı $x^3 = 2 + \sqrt[3]{2}$ ten'lemesinin' sheshiliwinen kelip shıg'adı. Da'slep 2 sanın to'mendegishe kanonikalıq ko'riniste jayıp alamız:

$$2 = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul jayılmada $\gamma(2) = 0$ sanı 3 ke bo'linedi. Bul bolsa teorema 3.1 dın' birinshi sha'rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 3.1 dın' ekinshi sha'rtin tekseremiz, yag'nıy $x_0^3 \equiv 2 \pmod{17}$ salıstırıwının' $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$ da sheshiminin' bar yaki

joqlıg`ın tekseremiz. Bul ten`leme $x_0 = 8$ sheshimge iye. Bunnan $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}_{17}$ ekenligi kelip shıg`adı.

Endi $\mathbb{Q}_{17}$ maydanında $\sqrt[3]{2}$ sanının` jayılmassının` da`slepki u`sh koeffitsientin tawıp alamız. Bunın` ushın biz $a^3 = 2$ dep alamız, bunda a kanonikalıq jayılmassı

$$a = a_0 + a_1 \cdot 17 + a_2 \cdot 17^2 + \dots$$

bolg`an 17-adikalıq san, bunda $a_0 \neq 0$, $0 \leq a_j \leq 16$, $j = 1, 2, \dots$.

Demek biz to`mendegi ge iye bolamız:

$$a_0^3 + 3a_0^2a_1 \cdot 17 + (3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (4.2)$$

Birinshi qa`demde  $a_0^3 \equiv 2 \pmod{17}$  ten`lemesin sheshemiz, $a_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$. Bul salıstırıw $a_0 = 8$ sheshimge iye boladı.

Biz $a_0 = 8$ dep alamız. Onda (4.2) to`mendegi ko`riniske iye boladı:

$$512 + 192a_1 \cdot 17 + (24a_1^2 + 192a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (4.2')$$

Bul ten`likti to`mendegishe jazıwg`a boladı

$$2 + (13 + 5a_1) \cdot 17 + (1 + 11a_1 + 7a_1^2 + 5a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (4.2'')$$

Bunnan $5a_1 + 13 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın payda etip ha`m onı sheshemiz, bunda  $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$ . Bul salıstırıw  $a_1 = 11$  sheshimge iye boladı. Bul sheshimdi (4.2'') ten`ligine qoyıp a_2 ni tabamız:

$$2 + 13 \cdot 17 + (3 + 5a_2) \cdot 17^2 + \dots = 2 + 0 \cdot 17 + 0 \cdot 17^2 + \dots \quad (4.2''')$$

Endi $5a_2 + 3 \equiv 0 \pmod{17}$ salıstırıwın sheshemiz, bunda $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 16\}$. Sheshimi $a_2 = 13$ boladı. Demek

$$\sqrt[3]{2} = 2 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 17^2 + \dots$$

jayılmag`a iye bolamız.

Endi $x^3 = 2 + \sqrt[3]{2}$ ten`ligin to`mendegishe jazamız:

$$x^3 = 2 + \sqrt[3]{2} = 2 + 2 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 17^2 + \dots = 4 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul ten`leme  $\gamma(2 + \sqrt[3]{2}) = 0$  sanı 3 ke bo`linedi. Bul bolsa teorema 3.1 din` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 3.1 din` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushın 4 sanının` kublıq qaldıq bolıwın tekseremiz, yag`nıy $x_0^3 \equiv 4 \pmod{17}$ salıstırıwının`  $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$  da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul salıstırıw  $x_0 = 13$  sheshimge iye boladı. Demek  $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}} \in \mathbb{Q}_{17}$  ekenligi kelip shıg`adı.

Keyingi qa`dem  $x^3 = 2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}$  ten`lemesinin` sheshimge iye ekenligin tekseremiz. Bunın` ushın $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}$ sanının` 17-adikalıq jayılmassın jazamız:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}} = 4 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 17^2 + \dots$$

Bul sang`a 2 ni qossa, ol to`mendegi ko`rinske keledi:

$$2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}} = 2 + 4 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 17^2 + \dots = 6 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 17^2 + \dots$$

Demek

$$x^3 = 2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}} = 6 + 13 \cdot 17 + 13 \cdot 17^2 + \dots$$

ten`lemesin sheshiminin` bar yamasa joqlıg`ın u`yrenemiz.

Bul ten`lemede  $\gamma(2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}) = 0$  sanı 3 ke bo`linedi. Bul bolsa teorema 3.1 din` birinshi sha`rtin qanaatlandıradı. Endi teorema 3.1 din` ekinshi sha`rtin tekseremiz. Bul ushın 6 sanının` kublıq qaldıq bolıwın tekseremiz, yag`nıy $x_0^3 \equiv 6 \pmod{17}$ salıstırıwının`  $x_0 \in \{1, 2, \dots, 16\}$  da sheshiminin` bar yaki joqlıg`ın tekseremiz. Bul salıstırıw  $x_0 = 5$  sheshimge iye boladı. Demek  $\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{2}}} \in \mathbb{Q}_{17}$  ekenligi kelip shıg`adı.

Teorema da`lillendi.

Juwmaqlaw

Zamanago'y matematikanın' en' tez rawajlanıp atırǵ'an tarawların' biri bul p -adikalıq sanlar teoriyası. Sol sebepli de bul teoriyag'a qızıǵ'ıwshılıq a'dewir joqarı. biz endi p -adikalıq analiz benen haqıyqıy analaizdi salıstırıp ko'rsek, p -adikalıq analizde haqıyqıy analizden parıqlanadı. Ayırım jag'daylarda qızıǵ'arlı qa'siyetlerge iye boladı. Bul p -adikalıq sanlardın' jaqsı qa'siyetlerinen biri bul qatar jıynaqlı bolıwı ushın onın' ulıwma ag'zası nolge umtılwı za'ru'r ha'm jeterli boladı, al haqıyqıy sanlarda tek jeterli sha'rt bar. Bul sanlar maydanın' jaman qa'siyetlerinen biri bul maydanda ta'rtip kiritip bolmaydı, yag'ny p -adikalıq sanlardı salıstırıp bolmaydı. Pitkeriw qanıgelik jumısı kirisiw, to'rt paragraf, juwmaqlaw ha'm adebiyatlar diziminen ibarat.

Jumıstın' birinshi paragrafında p -adikalıq sanlar maydanı haqqında bolıp, tiykarınan p -adikalıq sanlar teoriyasına tiyisli bolǵ'an da'slepki tu'sinikler keltirilgen.

Ekinshi paragrafta p -adikalıq kvadrat ten'lemelrdin' sheshiw kriteriyası u'yrenilgen.

Pitkeriw qanıgelik jumısının' u'shinshi paragrafında $x^3 = a$ ko'rinishindegi p -adikalıq ten'lemeler qaralg'an.

To'rtinshi paragrafta bazı-bir u'shinshi da'rejeli p -adikalıq ten'leme u'yreligen.

Jumıstın' aqırında juwmaqlaw ha'm paydalanılǵ'an a'debiyatlar dizimi keltirilgen.

Paydalanilg`an a`debiyatlar

1. Ayupov Sh.A., Kurbanbayev T. The classification of 4-dimensional p -adic filiform Leibniz algebras. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. –2010. -Vol. 1. -No 2. –P. 155-162.
2. Xrennikov A. Yu. Nearximedov analiz i ego prilozheniya. M.: Fizmatlit. - 2003. –C. 216.
3. Vladimirov V.S., Volovic I.B., Zelenov E.I, p -adic Analysis and Mathematical Physics. // World Scientific. Singapore. –1994. –P. 352.
4. Vinogradov I.M. Osnovi teorii chisel. // M.: Nauka. –1981. –C. 176.
5. Mukhamedov F.M., Rozikov U.A., On rational p -adic dynamical systems. Methods Funct. Anal. Topology 10 (2). –2004. –P. 21-31.
6. Mukhamedov F.M., Mendes Jose F.F., On the chaotic behavior of a generalized logistic p -adic dynamical system. J. Differential Equations 243. –2007. P. 125-145.
7. Kurbanbaev T.K. Uravneniya chetvertoy stepeni v pole p -adicheskiy chisel. “Problemy sovremennoy matematiki”. Materialy Respublikanskoy nauchnoy konferentsii, -Karshi. -2011. -S.161-162.
8. Koblitz N., p -adic numbers, p -adic analysis, and zeta – functions. Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin. –1977. –P. 190.
9. Katok S.B., p -adicheskiy analiz v sravnenii s veshestvennim. M.: -2004. J. Math. Phys. 32 (1991) 932-936.
10. F. Mukhamedov, On dynamical systems and phase transitions for $q + 1$ -state p -adic Potts model on the Cayley tree, Math. Phys. Anal. Geom. 16(2013) 49-87.
11. F. Mukhamedov, B. Omirov and M. Saburov, On cubic equations over p -adic fields, Int. J. Number Theory 10 (2014) 1171-1190.
12. A. Yu. Khrennikov, p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics (Kluwer, Dordrecht, 1994).

13. www.ziyonet.uz.
14. www.math.ru.
15. www.arxiv.org.
16. www.population.org